УДК 519.21

О. О. Погоріляк (Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка)

МОДЕЛЮВАННЯ КВАДРАТИЧНО ГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ КОКСА У ВИПАДКУ КОЛИ ІНТЕНСИВНІСТЬ ПОРОДЖЕНА ОДНОРІДНИМ ПОЛЕМ

In this paper we consider square-gaussian Cox processes with a random intensity generated by a homogeneous random field. We construct models of such processes which approximate them with some accuracy and reliability given beforehand.

Розглядаються квадратично гауссові процеси Кокса коли інтенсивність породжується випадковим однорідним полем. Будуються моделі моделі таких процесів, які наближають їх з певною точністю та надійністю, заданими наперед.

1. Вступ. В даній роботі розглядаються процеси Кокса керовані випадковою інтенсивністю. Теоретичні властивості таких процесів, у випадку коли інтенсивність породжується логарифмічно гауссовим полем, добре вивчені в роботах [1–3]. Також в цих роботах описаний один із можливих методів їхнього моделювання. Метою даної роботи є розглянути випадок коли інтенсивність процесу Кокса породжується квадратично гауссовим полем та побудувати його модель. Пропонується відмінний від вище згаданого методу моделювання, який дає можливість будувати моделі процесів Кокса з наперед задаю точністю та надійністю. Аналогічний підхід до моделювання вже був розглянутий в роботах [4–6].

Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ — стандартний ймовірнісний простір, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелівських множин $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^n$, $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ — однорідне, центроване, гауссове, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, $B\left(\vec{t}-\vec{s}\right) = \mathbf{E}Y\left(\vec{t}\right)Y(\vec{s})$.

Означення 1. *Нехай $Z\left(\vec{t}\right)$ невід'ємне випадкове поле. Якщо умовний розподіл $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ при будь-якій реалізації $Z\left(\vec{t}\right)$ є Пуассонівським процесом з функцією інтенсивності $\mu(B) = \int_B Z\left(\omega_0, \vec{t}\right) d\vec{t}$, то $\nu(B)$ називається випадковим процесом Кокса керованим полем $Z\left(\vec{t}\right)$.*

Якщо $Z\left(\vec{t}\right) = Y^2\left(\vec{t}\right)$, то $\nu(B)$ будемо називати процесом Кокса керованим квадратично гауссовим полем $Y^2\left(\vec{t}\right)$, або просто квадратично гауссовим процесом Кокса. Надалі в даній роботі розглядатимуться тільки квадратично гауссові процеси Кокса.

Оскільки $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ це подвійно стохастичний випадковий процес, то його модель будується в два етапи. Спочатку моделюємо гауссове випадкове поле $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$, далі розглядаємо деяке розбиття $D_{\mathbf{T}}$ області $\mathbf{T}$ і на кожному елементі розбиття $D_{\mathbf{T}}$ будуємо модель пуассонівської випадкової величини з відповідним середнім.

Нехай $\mathbf{T} = [0, T] \times \ldots \times [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$, виберемо розбиття $D_{\mathbf{T}}$ наступним чином:

$$B_{i_1,\ldots,i_n} = \left\{ \left[t_1^{i_1}, t_1^{i_1+1}\right) \times \ldots \times \left[t_n^{i_n}, t_n^{i_n+1}\right) \,\middle|\, t_m^{i_m} < t_m^{i_m+1}, \right.$$
$$\left. t_m^{i_m+1} - t_m^{i_m} = d = \frac{T}{k}, k \in \mathbf{N},\ m = \overline{1,n},\ i_m = \overline{0,k-1} \right\}.$$

Введемо наступні позначення: нехай $\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)$ — модель поля $Y\left(\vec{t}\right)$, $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \int_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\} d\vec{t}$, $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ — модель $\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$.

Оскільки $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ це число точок моделі, що належать області $B_{i_1,\ldots,i_n}$, а ми не знаємо їхнього справжнього розташування, то розміщуємо їх в $B_{i_1,\ldots,i_n}$ довільно. Якщо ж $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = 1$, то точку розміщуємо в центрі області.

Зрозуміло, що модель можна вважати допустимою, якщо умовні ймовірності

$$p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = k \,/\, Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$$

та

$$\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \mathbf{P}\left\{\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = k \,/\, \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$$

відрізняються мало, а також ймовірність того, що число точок $\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ (відповідно і $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$) буде більше одиниці також мала. Отже, задача моделювання квадратично гауссового процесу Кокса розбивається на дві задачі, а саме вибору розбиття області $\mathbf{T}$ та побудову моделі поля $Y\left(\vec{t}\right)$.

2. Задача вибору розбиття області T. Розбиття області $\mathbf{T}$ (тобто d або k) вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\right\} < \delta, \tag{1}$$

де δ певне наперед задане число (наприклад, $\delta = 0.01$).

Теорема 1. *Нехай* $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ *квадратично гауссовий процес Кокса. Для того, щоб виконувалась нерівність* (1) *досить вибрати* $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \le \left(\frac{\delta \exp\{2\}}{8\sqrt{2}B^2\left(\vec{0}\right)}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbf{P}\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\} = \mathbf{E}\left(1 - \exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\} - \mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\}\right)$$

та при $x > 0$ $\quad 1 - \exp\{-x\}(1+x) \le \frac{x^2}{2}$, то для виконання (1) досить щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{E}\mu^2\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) < 2\delta. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mu^2\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) &= \mathbf{E}\left[\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) d\vec{t}\right]^2 = \mathbf{E}\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) d\vec{t} \int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{s} = \\ &= \mathbf{E}\iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{t}d\vec{s} = \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right) Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{t}d\vec{s}.\end{aligned} \tag{3}$$

Нехай u_1, u_2 такі дійсні числа, що $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=1$. В силу нерівності Гельдера матимемо

$$\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right)Y^2\left(\vec{s}\right)\leq\left(\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right)\right)^{\frac{1}{u_1}}\left(\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{s}\right)\right)^{\frac{1}{u_2}}. \tag{4}$$

Для гауссової випадкової величини ξ справедливе наступне співвідношення:

$$\mathbf{E}|\xi|^p=c_p\left(\sigma^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{5}$$

причому

$$c_p\leq\sqrt{2}p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}\right\}. \tag{6}$$

Використовуючи щойно наведений факт,

$$\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right)=c_{2u_1}\left(Y^2\left(\vec{t}\right)\right)^{u_1}=c_{2u_1}B^{u_1}\left(\vec{0}\right).$$

Аналогічно $\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{t}\right)=c_{2u_2}B^{u_2}\left(\vec{0}\right)$. Розписавши c_{2u_1} та c_{2u_2} за допомогою (6), із (4) матимемо

$$\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right)Y^2\left(\vec{s}\right)\leq 4\sqrt{2}u_1u_2\exp\{-2\}B^2\left(\vec{0}\right).$$

Далі, поклавши в щойно отриманій нерівності $u_1=u_2=2$ та взявши до уваги (3), твердження теореми випливає з (2).

3. Побудова моделі поля $Y\left(\vec{t}\right)$. Нехай $\left\{\mathbf{R}_+^n,\mathfrak{U},\Phi\right\}$ — вимірний простір, $\mathfrak{U}$ — борелівська σ-алгебра множин, Φ — скінченна міра. Оскільки ми розглядаємо центровані, однорідні в широкому розумінні, неперервні в середньому квадратичному випадкові поля, то як відомо, коваріаційна функція $B\left(\vec{\tau}\right)$ таких полів може бути зображена у вигляді

$$B\left(\vec{\tau}\right)=\int\limits_{\mathbf{R}_+^n}\cos\left(\vec{\lambda},\vec{\tau}\right)d\Phi\left(\vec{\lambda}\right),$$

де $\Phi\left(\vec{\lambda}\right)$, $\vec{\lambda}\in\mathbf{R}_+^n$ — скінченна міра така, що, $\Phi\left(\mathbf{R}_+^n\right)=B(\vec{0})$ (див., наприклад, [7]). Тоді, за теоремою Карунена, однорідне, центроване поле $Y\left(\vec{t}\right)$ може бути зображене у вигляді

$$Y\left(\vec{t}\right)=\int\limits_{\mathbf{R}_+^n}\cos\left(\vec{\lambda},\vec{t}\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)+\int\limits_{\mathbf{R}_+^n}\sin\left(\vec{\lambda},\vec{t}\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right), \tag{7}$$

де $Z_1\left(S\right)$ та $Z_2\left(S\right)$, $S\in\mathfrak{U}$, некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі Φ, тобто $\mathbf{E}Z_i\left(S_1\right)Z_i\left(S_2\right)=\Phi\left(S_1\cap S_2\right)$, $S_1,S_2\in\mathfrak{U}$, $i=1,2$. Моделлю такого процесу назвемо суму $\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)$ виду

$$\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)=\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\ldots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)Z_1\left(\Delta\left(i_1,\ldots,i_n\right)\right)+$$
$$+\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\ldots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)Z_2\left(\Delta\left(i_1,\ldots,i_n\right)\right), \tag{8}$$

де $\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\ldots,\lambda_n^{i_n}\right)$ точки розбиття D_{Λ^n} :

$$\Delta\left(i_1,\ldots,i_n\right)=\left\{\left[\lambda_1^{i_1},\lambda_1^{i_1+1}\right)\times\ldots\times\left[\lambda_n^{i_n},\lambda_n^{i_n+1}\right)\,\middle|\,\lambda_m^{i_m}<\lambda_m^{i_m+1},\right.$$
$$\left.\lambda_m^{i_m+1}-\lambda_m^{i_m}=\frac{\Lambda}{N},\,\Lambda\in\mathbf{R}_+,\,N\in\mathbf{N},\,m=\overline{1,n},\,i_m=\overline{1,N-1}\right\}.$$

Зауваження 1. *Оскільки поле $Y\left(\vec{t}\right)$ гауссове, то випадкові міри $Z_1\left(S\right)$ і $Z_2\left(S\right)$ також гауссові, це випливає з теореми Карунена.*

4. Наближення квадратично гауссового процесу Кокса з певною точністю та надійністю. Оскільки модель квадратично гауссового процесу Кокса $\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right),B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$ потрібно будувати так, щоб умовні ймовірності $p_{kY}(B_{i_1,\ldots,i_n})$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_{i_1,\ldots,i_n})$ з ймовірністю близькою до одиниці відрізнялись мало, то природнім є наступне означення.

Означення 2. *Скажемо, що модель квадратично гауссового процесу Кокса $\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right),B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$ наближає його з точністю α, $0<\alpha<1$ та надійністю $1-\gamma,\ 0<\gamma<1$, якщо виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\,p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}<\gamma.$$

Лема 1. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ — однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, тоді $\forall p>1$ має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\le\frac{\sqrt{2}k^n d^{np}\left(4B\left(\vec{0}\right)v_1v_2\right)^{\frac{p}{2}}J_N^{\frac{p}{2}}p^p\exp\left\{-p\right\}}{\alpha^p},$$

де

$$J_N=2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right),$$

$a\in[0,1]$, $v_1,\,v_2$ *— такі числа, що* $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1.$

Доведення.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\le$$
$$\le\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{k}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\le$$
$$\le k^n\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}.$$

Використовуючи нерівність Чебишева, матимемо

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\le\frac{\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|^p}{\alpha^p}.$$

В силу узагальненої нерівності Мінковського

$$\left(\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right| d\vec{t}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \left(\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\vec{t}.$$

Таким чином, із останніх трьох нерівностей випливає наступна:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\} \leq$$
$$\leq \frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}. \tag{9}$$

Далі, при v_1 і v_2 таких, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$, скориставшись нерівністю Гельдера,

$$\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p \leq \left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\right)^{\frac{1}{v_2}}. \tag{10}$$

Беручи до уваги співвідношення (5),

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} = c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\right)^{\frac{pv_1}{2}}.$$

Оскільки для гауссових, однорідних, центрованих випадкових полів мають місце рівності $\mathbf{E}\left(Y\left(\vec{t}\right)\right)^2=B\left(\vec{0}\right)$, $\mathbf{E}\left(\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)^2=\Phi\left(\Lambda^n\right)$, то

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2 = B\left(\vec{0}\right)+\Phi\left(\Lambda^n\right)-2\,\mathbf{E}\,Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right).$$

Скориставшись зображеннями (7), (8) поля та його моделі відповідно,

$$\mathbf{E}Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)+\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\Lambda^n}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)+\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\Lambda^n}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\ldots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)\Bigg)=$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+$$

$$+\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)=$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}-\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)d\Phi\left(\vec{\lambda}\right).$$

Таким чином, беручи до уваги щойно отримане співвідношення

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2=2\,\Phi\left(\Lambda^n\right)-2\,\mathbf{E}\,Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)=$$

$$=2\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\left(1-\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}-\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)\right)d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)=$$

$$=4\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\sin^2\frac{\left(\vec{t},\vec{\lambda}-\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)}{2}d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)\le$$

$$\le 4\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\left(\frac{\vec{t},\vec{\lambda}-\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)}{2}\right)^{2a}d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right),$$

$a\in[0,\,1]$. Використовуючи нерівність $\left(\vec{e},\,\vec{f}\right)\le\left(\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^2\right)^{\frac12}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_i^2\right)^{\frac12}$ а також врахувавши, що $\lambda_m-\lambda_m^{i_m}\le\lambda_m^{i_m+1}-\lambda_m^{i_m}=\frac{\Lambda}{N}$,

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\le$$

$$\le 4\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{n}t_m^2\right)^a\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\lambda_m-\lambda_m^{i_m}\right)^2\right)^a}{2^{2a}}d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)\le$$

$$\le 2^{2-2a}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)}\left(nd^2\right)^a\left(n\frac{\Lambda^2}{N^2}\right)^a d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)=$$

$$=2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right).$$

Отже,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\le c_{pv_1}J_N^{\frac{pv_1}{2}},\\ J_N=2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right)\end{gathered}\tag{11}$$

$a \in [0,1]$. Провівши міркування аналогічні до тих, які були застосовані для отримання останньої нерівності, не важко переконатися, що

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\le c_{pv_2}\left(4B\left(\vec{0}\right)\right)^{\frac{pv_2}{2}}. \tag{12}$$

Враховуючи (11) та (12) а також оцінку (6) для c_{pv_1} і c_{pv_2} після елементарних перетворень із (10) випливає, що

$$\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^{p}\le\sqrt{2}\left(4B\left(\vec{0}\right)v_1v_2\right)^{\frac{p}{2}}p^p\exp\left\{-p\right\}J_N^{\frac{p}{2}}.$$

Взявши до уваги щойно отримане співвідношення, твердження леми випливає із (9).

Лема 2. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ — однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, тоді якщо $\alpha>2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}$, то має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\,p_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\le$$
$$\le\sqrt{2}k^n\exp\left\{-\frac{\alpha}{2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

де J_N визначено в умові леми 1.

Доведення. Оцінимо різницю $|\,p_{kY}(B)-\widetilde{p}_{kY}(B)\,|$, $B\in\mathfrak{B}$, застосувавши формулу Лагранжа скінченних приростів. Нехай $k\neq 0$,

$$|\,p_{kY}(B)-\widetilde{p}_{kY}(B)\,|=\left|\frac{\exp\{-\mu(B)\}\,(\mu(B))^k}{k!}-\frac{\exp\{-\widetilde{\mu}(B)\}\,(\widetilde{\mu}(B))^k}{k!}\right|=$$
$$=|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\,\frac{1}{k!}\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\,(\hat{\mu}(B))^{k-1}\,|k-\hat{\mu}(B)|=$$
$$=\begin{cases}|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\dfrac{1}{(k-1)!}\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\,(\hat{\mu}(B))^{k-1}\le|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\,, k\ge\hat{\mu}(B)\,;\\ |\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\,\dfrac{1}{k!}\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\,(\hat{\mu}(B))^{k}\le|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\,,\;\; k<\hat{\mu}(B)\,.\end{cases}$$

При $k=0$

$$|p_{0Y}(B)-\widetilde{p}_{0Y}(B)|=|\exp\{-\mu(B)\}-\exp\{-\widetilde{\mu}(B)\}|=$$
$$=|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\le|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|\,.$$

Таким чином оцінка $|\,p_{kY}(B)-\widetilde{p}_{kY}(B)\,|$ зводиться до оцінки $|\mu(B)-\widetilde{\mu}(B)|$ і виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}|p_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)|>\alpha\right\}$$
$$\le\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)|>\alpha\right\}.$$

Далі, мінімізувавши функцію $\frac{\sqrt{2}k^n d^{np}\left(4B(\vec{0})v_1v_2\right)^{\frac{p}{2}} J_N^{\frac{p}{2}} p^p \exp\{-p\}}{\alpha^p}$ по змінній p та поклавши $v_1 = v_2 = 2$, легко бачити, що дана лема є наслідком леми 1.

Теорема 2. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ — однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, тоді модель квадратично гауссового процесу Кокса $\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\}$ наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$, якщо виконуються умови:*

$$\alpha > 2d^n \left(B\left(\vec{0}\right) J_N\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}}\right\} < \gamma,$$

де

$$J_N = 2^{2-2a} n^{2a} \frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}} \Phi\left(\Lambda^n\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right),$$

$a \in [0,1]$.

Доведення. Очевидно, що дана теорема є прямим наслідком означення 2 та леми 2.

5. Висновки. В даній роботі описаний один з методів моделювання випадкових процесів Кокса. А саме, побудована модель процесу Кокса керованого квадратично гауссовим випадковим полем. Знайдені достатні умови наближення побудованою моделлю процесу з наперед заданими точністю та надійністю.

1. *Moller J., Syversveen A. R., Waagepetersen R. P.* Log gaussian Cox Processes // Scandinavian Journal of Statistics. – 1998. – **25**, 4. – P. 451–482.
2. *Moller J.* Spatial statistics and computational methods. – New York: Springer, 2003. – 203 p.
3. *Moller J., Waagepetersen R. P.* Statistical inference and simulation for spatial point processes. – Boca Raton London New York Washington: Chapman & Hall/CRC, 2004. – 300 p.
4. *Погоріляк О. О.* Моделювання логгауссових процесів Кокса // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. математика, механіка. – 2006. – №15–16. – С. 94–100.
5. *Козачеко Ю. В., Погоріляк О. О.* Моделювання логарифмічно гауссових процесів Кокса з заданою надійністю та точністю // ТВіМС. – 2007. – №76.
6. *Козаченко Ю. В., Погоріляк О. О.* Моделювання процесів Кокса керованих випадковим полем // Доповіді НАН України. – 2006. – №10. – С. 20–23.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятостей и математическая статистика. – К.: Выща школа, 1988. – 439 с.

Одержано 01.04.2007