УДК 512.5+512.6

О. М. Тертична (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ПРО СКІНЧЕННІСТЬ ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ НАПІВГРУП, ПОРОДЖЕНИХ ІДЕМПОТЕНТАМИ З ЧАСТКОВИМ НУЛЬОВИМ МНОЖЕННЯМ

In this paper we study a finiteness of (representation) type of order for a natural class of semigroups generated by idempotents.

У статті вивчається скінченність (зображувального) типу для одного природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами.

1. Формулювання основного результату.

Ми розглядаємо напівгрупи з нулем, які породжені елементами e_i і задаються визначальними співвідношеннями $e_i^2 = e_i$ для всіх i та деякими співвідношеннями виду $e_ie_j = 0$.

Дамо точні визначення.

Нехай I — скінченна множина, яка не містить елемента 0, і J — підмножина в $I \times I$ без діагональних елементів (тобто без елементів виду (i,i)). Позначимо через $S(I,J)$ напівгрупу з твірними елементами e_i, де $i \in I \cup 0$, і наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e_0 = 0$;

2) $e_i^2 = e_i$ для довільного $i \in I$;

3) $e_ie_j = 0$ для довільної пари $(i,j) \in J$.

Множину всіх таких напівгруп позначимо через $\mathfrak{I}$.

В цій статті ми вивчаємо скінченномірні зображення напівгруп з $\mathfrak{I}$ над довільним полем k.

Кажуть, що напівгрупа має скінченний (зображувальний) тип над k, якщо число її нерозкладних зображень над k скінченне (з точністю до еквівалентності); в іншому випадку говорять, що S має нескінченний тип над k.

Кожній напівгрупі $S = S(I,J)$ (або, що те ж саме, парі (I,J)) поставимо у відповідність наступний зорієнтований граф $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ з множиною вершин Λ_0 і множиною стрілок Λ_1: $\Lambda_0 = I$, а Λ_1 складається зі стрілок $i \to j$, де (i,j) пробігає множину J. Позначимо цей граф через $\Lambda(I,J) = \Lambda(S)$.

Однак, в подальшому важливішу роль буде грати зорієнтований граф $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}(I,J) = \overline{\Lambda}(S)$ з множиною вершин $\overline{\Lambda}_0$ та множиною стрілок $\overline{\Lambda}_1$, який визначається наступним чином: $\overline{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, а $i \to j$ належить $\overline{\Lambda}_1$ тоді і тільки тоді, коли $i \to j$ не належить Λ_1 і при цьому $i \neq j$.

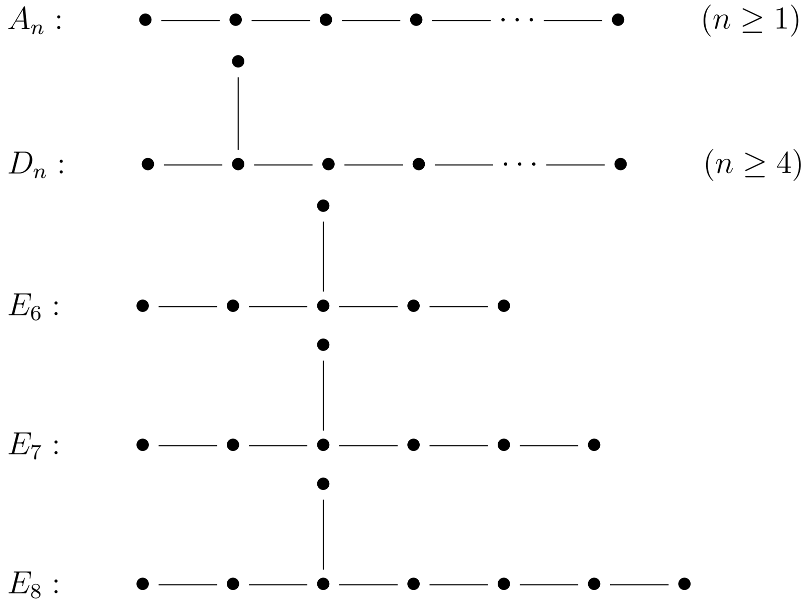
Оскільки обидва графа не містять кратних стрілок, то стрілку $i \to j$ будемо також позначати через (i,j); зауважимо ще, що ці графи не містять петель.

Очевидно, що напівгрупа S однозначно відтворюється по кожному із введених зорієнованих графів.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $S = S(I,J) \in \mathfrak{I}$ і при цьому граф $\overline{\Lambda}(S)$ не містить орієнтованих циклів. В цьому випадку S має скінченний тип над довільним полем*

k тоді і тільки тоді, коли незорієнтований граф, що відповідає графу $\overline{\Lambda}(S)$, є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна



2. Деякі приклади.

Розглянемо пару прикладів задач про опис зображень напівгрупи $S(I,J)$ для конкретних множин I та J.

Приклад 1. *Розглянемо напівгрупу $S = S(I,J) = \langle e_1 \mid e_1^2 = e_1 \rangle$ (тобто $I = \{1\}$, а $J = \varnothing$) і опишемо зображення цієї напівгрупи.*

Оскільки немає співвідношень вигляду $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$, то граф $\overline{\Lambda}(S) = = \Lambda(S)$ складається лише з однієї вершини, тобто $\overline{\Lambda}_0 = \{1\}$, а $\overline{\Lambda}_1 = \varnothing$.

Отже, матричне зображення M напівгрупи $S(I,J)$ складається з однієї матриці: $M = \{A_1\}$, при цьому виконується співвідношення $A_1^2 = A_1$. Оскільки характеристичний поліном $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$, що відповідає цьому співвідношенню, не має кратних коренів, то елементарними перетвореннями рядків і стовпців матрицю A_1 можна привести до діагонального вигляду

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \tag{1}$$

де E — одинична матриця. Отже, зображення M напівгрупи $S(I,J)$ еквівалентне зображенню $M_1 = \{A_0\}$ і має скінченний тип.

Приклад 2. *Розглянемо тепер напівгрупу $S = S(I,J) = \langle 0, e_1, e_2 \mid e_1^2 = = e_1,\ e_2^2 = e_2;\ e_2 e_1 = 0 \rangle$ (тобто $I = \{1,2\}$, а $J = \{(2,1)\}$) і опишемо зображення цієї напівгрупи.*

Оскільки пара $(1,2)$ не належить множині J, то зорієнтований граф $\overline{\Lambda}(S)$ буде мати вигляд

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ}$$

(тобто $\overline{\Lambda}_0 = \{1,2\}$, а $\overline{\Lambda}_1 = \{1 \to 2\}$). Покажемо, що зображення напівгрупи $S(I,J)$ має скінченний тип.

Нехай $M = \{A_1, A_2 \mid A_1^2 = A_1,\ A_2^2 = A_2,\ A_2A_1 = 0\}$ — довільне фіксоване матричне зображення напівгрупи $S(I,J)$. Покладемо $A = A_1,\ B = A_2$. Оскільки $A_1^2 = A_1$, то елементарними перетвореннями рядків і стовпців матриці A приведемо її до вигляду (1). Тоді зображення M еквівалентне зображенню $M_1 = \{A_0, C\}$, де A_0 має вигляд (1) і

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right)$$

(горизонтальний і вертикальний поділи матриць A_0 і C узгоджені).

Використовуючи співвідношення $CA_0 = 0$ (це випливає з того, що $A_2A_1 = 0$), маємо $C_1 = C_3 = 0$. Тоді C має вигляд

$$C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C_2 \\ \hline 0 & C_4 \end{array}\right).$$

Оскільки $C^2 = C$ (бо $A_2^2 = A_2$), то також виконується $C_4^2 = C_4$. Отже, елементарними перетвореннями рядків і стовпців матриці C_4 приведемо її до вигляду (1) і, у відповідності з її розбиттям, проведемо додатковий поділ матриць A_0 і C (на горизонтальні і вертикальні смуги). У результаті отримаємо зображення $M_2 = \{A_0, D\}$ еквівалентне зображенню M_1, де

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & D_1 & D_2 \\ \hline 0 & \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тепер використаємо співвідношення $D^2 = D$ (яке випливає з того, що $A_2^2 = A_2$) і отримаємо $D_2 = 0$.

Отже, остаточно ми одержуємо зображення $M_0 = \{A_0, B_0\}$ (яке еквівалентне заданому):

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{E} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & D_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, що з рядками і стовпцями матриці D_1 можна робити незалежно довільні елементарні перетворення. А така матриця, як відомо, є матричним зображенням колчану

$$\Gamma: \quad \circ \xrightarrow{D_1} \circ\,.$$

Зауважимо, що колчан Γ співпадає із орієнтованим графом $\overline{\Lambda}(S)$. Отже, ми звели вихідну задачу до задачі про опис зображень колчана. А за теоремою Габріеля [1] колчан має скінченний тип тоді і лише тоді, коли відповідний йому незорієнтований граф є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна.

В нашому випадку колчану Γ відповідає діаграма Динкіна A_2, і тому зображення напівгрупи $S(I,J) = \langle 0, e_1, e_2 \mid e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2;\ e_2e_1 = 0\rangle$ має скінченний тип.

3. Доведення теореми 1.

За умовою теореми граф $\overline{\Lambda}(S)$ не містить орієнтованих циклів. Покажемо, що в такому випадку задачу про опис зображень напівгупи $S(I,J)$ можна звести до задачі про опис зображень колчана, який співпадає з орієнтованим графом $\overline{\Lambda}(S)$ (як ми показали це в прикладі 2 для конкретної напівгрупи S).

А за теоремою Габріеля колчан має скінченний тип тоді і лише тоді, коли незорієнтований граф, що відповідає колчану, є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна.

Оскільки множина I скінченна, то вважаємо надалі, що $I = \{1, \ldots, n\}$. Отже, нехай $M = \{A_i \mid A_i^2 = A_i, i = \overline{1,n};\ A_iA_j = 0, i \neq j, (i,j) \in J\}$ — матричне зображення напівгрупи $S(I,J)$. Для зручності перенумеруємо вершини $i = \overline{1,n}$ так, в якому порядку будемо зводити матриці A_i. Впорядкуємо всі вершини, розділивши їх на рівні.

Спочатку виділимо 1-й рівень — це вершини, в які не входять стрілки (в графі $\overline{\Lambda}(S)$); 2-й рівень — це вершини, в які не входять стрілки, за виключенням стрілок, що виходять із вершин 1-го рівня, і т.д. Оскільки в кожному такому рівні вершини непорівняльні (тобто вершини з одного рівня не можуть бути сполучені стрілкою), то порядок вершин всередині кожного рівня несуттєвий.

Отже, всі точки можна занумерувати так $a_1, \ldots, a_n$, що всі стрілки між вершинами будуть направлені в одну сторону (зліва на право). Іншими словами, якшо є стрілка $a_i \to a_j$, то $i < j$. Позначимо такий порядок вершин наступним чином: $\underrightarrow{a_1, .., a_n}$.

Далі ми покажемо, що якщо зводити матриці A_i $(i = \overline{1,n})$ в матричному зображенні M у вище зазначеному порядку $\underrightarrow{a_1, .., a_n}$, то ми отримаємо зображення колчану (який, як ми пізніше побачимо, буде співпадати з графом $\overline{\Lambda}(S)$).

Зауважимо, що при зведенні матриць ми не будемо приводити недіагональні клітини (їх ми будемо позначати за допомогою $\star$), оскільки ми прагнемо звести задачу до зображень колчана і застосувати теорему Габріеля, а не знаходити явний вигляд зображення напівгрупи $S(I,J)$.

Сформулюємо і доведемо допоміжну лему.

Лема 1. *Нехай задана напівгрупа, породжена ідемпотентами з частковим нульовим множенням $S = S(I,J) \in \mathfrak{I}$. Тоді довільне фіксоване зображення M даної напівгрупи (при зведенні матриць у порядку $\underrightarrow{a_1, .., a_n}$) еквівалентне зображенню $M_0 = \{A_{a_1}, \ldots A_{a_n}\}$, яке має наступний вигляд:*

1) *зображення M_0 складається з n матриць, які розполосовані на $(n+)1$-у горизонтальну та вертикальну смугу;*

2) *в кожній матриці A_{a_i} на місці (i,i) стоїть E, де E — це одинична матриця;*

3) *кожній стрілці $a_i \to a_j$ в графі $\overline{\Lambda}(S)$ відповідає $\star$, яка стоїть в матриці A_{a_j} на місці (i,j);*

4) *решта блоків в матрицях A_{a_i} $(i = \overline{1,n})$ — нульові.*

Доведення проведемо за індукцією по n, тобто по кількості матриць.

База індукції: якщо $n = 1$ (тобто граф $\overline{\Lambda}(S)$ складається лише з однієї вершини), тоді (див. приклад 1) M еквівалентне зображенню $M_0 = \{A_{a_1}\}$, де

$$A_{a_1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

І, отже, твердження леми виконується.

Припущення індукції: нехай для довільних $(n-1)$-ї матриці лема виконується, тобто вони приводяться до описаного в 1) – 4) вигляду.

Крок індукції: доведемо, що для n матриць лема також виконується. Розглянемо деяке фіксоване зображення $M = \{A_1, \ldots, A_n\}$ напівгрупи $\overline{\Lambda}(S) \in \mathfrak{I}$, породженої n ідемпотентами з частковим нульовим множенням. Нехай $a_1, \ldots, a_n$ — новий порядок вершин (по рівнях), в якому ми будемо приводити відповідні матриці.

Розглянемо a_1-у матрицю. Оскільки $A_{a_1}^2 = A_{a_1}$, то елементарними перетвореннями рядків і стовпців матриці A_{a_1} приведемо її до вигляду (1). Тоді зображення M буде еквівалентне зображенню $M_1 = \{A_{a_1}, \ldots A_{a_n}\}$, де

$$A_{a_1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), A_{a_2} = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right), \ldots, A_{a_n} = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right)$$

(горизонтальний і вертикальний поділи всіх матриць узгоджені).

Тепер використаємо той факт, що, згідно із впорядкуванням вершин, у вершину a_1 не входять стрілки. Це означає, що $A_{a_i} A_{a_1} = 0$ для всіх $i = \overline{2, n}$, тобто перші вертикальні смуги в матрицях $A_{a_2}, \ldots, A_{a_n}$ будуть нульовими. Отже, зображення M_1 набуде вигляду:

$$A_{a_1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), A_{a_2} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & \end{array}\right), \ldots, A_{a_n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & \end{array}\right).$$

Тепер, умовно відкинувши a_1-у вершину разом з усіма стрілками, які з неї виходять, розглянемо $(n-1)$-у матрицю $A_{a_2}, \ldots, A_{a_n}$ без перших горизонтальних та вертикальних смуг (бо викинули a_1-у вершину).

За припущенням індукції ці матриці мають вигляд, описаний в пунктах 1)–4) твердження леми, а саме:

$$A_{a_i} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & \mathrm{i} & \cdots & \mathrm{n+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \mathrm{i} \\ \vdots \\ \mathrm{n+1} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & & \cdots & & \cdots & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & (\star) & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & (\star) & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \mathrm{E} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}, \ \forall i = \overline{2, n},$$

де $(\star)$ означає, що $\star$ стоїть на місці (l, i) лише в тому випадку, якщо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є стрілка $a_l \to a_i$ $(\Rightarrow l < i\ )$. Тобто, як бачимо, $\star$ можуть бути розташовані лише у вертикальній смузі, в якій стоїть E, і лише вище E.

Отже, недозаповненими залишились лише перші горизонтальні смуги в матрицях $A_{a_2}, \ldots, A_{a_n}$, оскільки ми ще не використали наявність та відсутність стрілок, які виходять з вершини a_1.

Якщо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ з вершини a_1 у деяку вершину a_k $(k = \overline{2, n})$ немає стрілки, то це означає, що виконується співвідношення $A_{a_1} A_{a_k} = 0$. А звідси випливає, що в матриці A_{a_k} перша горизонтальна смуга нульова.

Нарешті, залишились "невикористаними" лише стрілки, що ведуть з a_1 в деякі інші вершини. Нехай, наприклад, в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є стрілка $a_1 \to a_j$ $(j =$

$= \overline{2,n}$); подивимось, який вигляд буде мати матриця A_{a_j}. Оскільки виконується співвідношення $A_{a_j}^2 = A_{a_j}$, то матриця A_{a_j} буде мати вигляд

$$A_{a_j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & \mathrm{j} & \cdots & \mathrm{n+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \mathrm{j} \\ \vdots \\ \mathrm{n+1} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & \cdots & \star & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & (\star) & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & (\star) & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \mathrm{E} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Звідси випливає, що для n матриць твердження леми також виконується, що доводить крок індукції.

Отже, згідно з методом математичної індукції лема 1 доведена.

Продовжуємо доведення теореми 1.

Ми звели нашу задачу про опис зображень напівгрупи $S(I, J)$, породженої ідемпотентами з частковим нульовим множенням до опису зображень (ті матриці, які ми позначали $\star$) деякого колчану Г.

Тепер покажемо, що Г співпадає з графом $\overline{\Lambda}(S)$.

По-перше, відмітимо, що кожній матриці $\star$ в зображенні напівгрупи $S(I, J)$ відповідає стрілка в колчані Г (причому рядки цієї матриці відповідають за початок стрілки, а стовпці $\star$ — за кінець). Звідси випливає, що кількість стрілок в колчані Г співпадає з кількістю стрілок у графі $\overline{\Lambda}(S)$.

Тепер розглянемо можливі випадки взаємного розташування стрілок в графі $\overline{\Lambda}(S)$ і подивимось, як це відображається на колчані Г. Очевидно, що досить подивитися на двох стрілках, а на весь граф правило розповсюджується аналогічно. Отже, розглянемо такі випадки (не забуваємо, що ми розглядаємо випадок, коли граф $\overline{\Lambda}(S)$ не має орієнтовних циклів):

1) Якщо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є дві послідовні стрілки $a_i \to a_j$ та $a_j \to a_k$ ($\Rightarrow i < j < k$), тоді за лемою 1 в зображенні відповідної напівгрупи $S(I, J)$ з'являться наступні матриці:

$$A_{a_j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} & \star_1 & \\ \hline & \mathrm{E} & \\ \hline & & \end{array}\right) \end{array}, \quad A_{a_k} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \star_2 \\ \hline & & \mathrm{E} \end{array}\right) \end{array}$$

(де $\star_1$ відповідає стрілці $a_i \to a_j$, а $\star_2$ — стрілці $a_j \to a_k$; незаповнені блоки — нульові).

Подивимось, як пов'язані матриці $\star_1$ та $\star_2$. Очевидно, що з рядками $\star_1$ можна робити довільні незалежні елементарні перетворення, так само як і зі стовпцями матриці $\star_2$. А якщо зробити елементарні перетворення стовпців матриці $\star_1$, то (щоб не зіпсувати одиничну матрицю в A_{a_j}) потрібно зробити обернене елементарне перетворення в j-й горизонтальній смузі матриці A_{a_j}. Зробивши ці ж перетворення в матриці A_{a_k}, отримаємо, що стовпці матриці $\star_1$ зв'язані з рядками матриці $\star_2$. А це означає, що в колчані Г цим двом матрицям будуть відповідати стрілки $i \xrightarrow{\star_1} j$ та $j \xrightarrow{\star_2} k$ (як бачимо стрілки такі ж, як і в графі $\overline{\Lambda}(S)$).

2) Якщо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є дві стрілки, які виходять з однієї вершини, тобто $a_i \to a_j$ та $a_i \to a_k$ ($\Rightarrow i < j;\ i < k$), тоді за лемою 1 в зображенні відповідної напівгрупи $S(I, J)$ з'являться наступні матриці:

$$A_{a_j} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} & \star_1 & \\ \hline & \mathrm{E} & \\ \hline & & \end{array}\right) \end{array}, \quad A_{a_k} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} & & \star_2 \\ \hline & & \\ \hline & & \mathrm{E} \end{array}\right) \end{array}$$

(де $\star_1$ відповідає стрілці $a_i \to a_j$, а $\star_2$ — стрілці $a_i \to a_k$; незаповнені блоки — нульові).

Подивимось, як в цьому випадку пов'язані матриці $\star_1$ та $\star_2$. Очевидно, що зі стовпцями $\star_1$ можна робити довільні незалежні елементарні перетворення, так само як і зі стовпцями матриці $\star_2$. А зробивши елементарне перетворення з рядками $\star_1$, треба зробити таке ж елементарне перетворення з рядками $\star_2$. Звідки випливає, що рядки матриці $\star_1$ зв'язані з рядками матриці $\star_2$. А це означає, що в колчані Γ цим двом матрицям будуть відповідати стрілки, які виходять з однієї вершини, тобто $i \xrightarrow{\star_1} j$ та $i \xrightarrow{\star_2} k$ (отже, стрілки в колчані Γ знову співпали зі стрілками в графі $\overline{\Lambda}(S)$).

3) Нарешті, розглянемо останній випадок, коли в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є дві стрілки, які входять в одну вершину, тобто $a_i \to a_k$ та $a_j \to a_k$ ($\Rightarrow i < k;\ j < k$), тоді за лемою 1 в зображенні відповідної напівгрупи $S(I, J)$ з'являється матриця вигляду:

$$A_{a_k} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} & & \star_1 \\ \hline & & \star_2 \\ \hline & & \mathrm{E} \end{array}\right) \end{array}$$

(де $\star_1$ відповідає стрілці $a_i \to a_k$, а $\star_2$ — стрілці $a_j \to a_k$; незаповнені блоки — нульові).

Очевидно, що в цьому випадку стовпці матриць $\star_1$ та $\star_2$ зв'язані; а з рядками $\star_1$ та $\star_2$ можна робити довільні незалежні елементарні перетворення. Це означає, що в колчані Γ цим двом матрицям будуть відповідати стрілки, які входять в одну вершину, тобто $i \xrightarrow{\star_1} k$ та $j \xrightarrow{\star_2} k$ (отже, стрілки в Γ знову такі самі, що й в графі $\overline{\Lambda}(S)$).

Зауважимо, що якщо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ є ізольовані вершини, то в колчані Γ їх не буде, оскільки матриці, які відповідають цим вершинам, в зображенні напівгрупи приводяться повністю (тобто в цих матрицях немає $\star$).

Отже, з щойно описаних випадків 1) – 3) випливає, що колчан Γ має такий самий вигляд, що й зорієнтований граф $\overline{\Lambda}(S)$ (без ізольованих вершин). Тепер до колчану Γ ми можемо застосувати терему Габріеля, згідно якої колчан має скінченний тип тоді і лише тоді, коли відповідний йому незорієнтований граф є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна.

Підсумовуючи все вище сказане, ми можемо зробити наступний висновок: якщо граф $\overline{\Lambda}(S)$ не містить орієнтованих циклів, то твердження теореми 1 виконується. Отже, теорема 1 доведена.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen, I // Manuscripts Math. – 1972. – **6**, №1. – P. 71–103.

Одержано 08.06.2007