УДК 519.21

Є. В. Турчин (Дніпропетровський держ. аграрний ун-т)

ПРО ОДИН РОЗКЛАД ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ПО СИСТЕМАМ ФУНКЦІЙ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ ВЕЙВЛЕТАМИ

There have been obtained results about stochastic processes' approximation in space $L_p([0,T])$ using expansion of process in a series over wavelet-based system of functions.

В роботі отримано результати про точність і надійність наближення випадкових процесів в просторі $L_p([0,T])$ за допомогою розкладу процесу в ряд по системі функцій на основі вейвлетів.

1. Вступ. Розклади випадкових процесів в ряди з некоррельованими коефіцієнтами на основі вейвлетів розглядались в роботах [1–3]. Ми дамо узагальнення результатів цих робіт.

2. Оцінки для модулів коефіцієнтів розкладу процесу.

Лема 1. *Нехай центрований випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in R\}$ задовольняє наступним умовам: для будь-якого $t \in R$ $E|X(t)|^2 < \infty$ і існує така борелева функція $u(t,\lambda)$, $t \in R$, $\lambda \in R$, що для всіх $t \in R$ $\int_R |u(t,\lambda)|^2 d\lambda < \infty$ та $EX(t)\overline{X(s)} = \int_R u(t,\lambda)\overline{u(s,\lambda)}d\lambda$. Нехай φ — f-вейвлет, ψ — відповідний m-вейвлет, $\widehat{\varphi}(y)$ і $\widehat{\psi}(y)$ — перетворення Фур'є від функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ відповідно. Вважаємо, що всюди існують похідні $u'_\lambda(t,\lambda)$, $\widehat{\varphi}'(y)$, $\widehat{\psi}'(y)$, причому функція $\widehat{\varphi}(y)$ неперервна, $|\widehat{\psi}'(y)| \le C$, $|u(t,\lambda)| \le u_1(\lambda)$, $|u'_\lambda(t,\lambda)| \le |t|\, u_2(\lambda)$, де $u_1(\lambda) \ge 0$, $u_2(\lambda) \ge 0$,*

$$\int_R u_1(y)|y|dy < \infty, \quad \int_R u_1(y)dy < \infty, \quad \int_R u_1(y)|\widehat{\varphi}'(y)|dy < \infty,$$

$$\int_R u_1(y)|\widehat{\varphi}(y)|dy < \infty, \quad \int_R u_2(y)|y|dy < \infty, \quad \int_R u_2(y)|\widehat{\varphi}(y)|dy < \infty,$$

$$\lim_{|y|\to\infty} u(t,y)\,\overline{\widehat{\psi}(y/2^j)} = 0 \qquad \forall j = 0,1,2,\dots \quad \forall t \in R$$

і

$$\lim_{|y|\to\infty} u(t,y)|\widehat{\varphi}(y)| = 0 \quad \forall t \in R.$$

Тоді процес $X(t)$ можна подати у вигляді збіжного в середньому квадратичному ряда

$$X(t) = \sum_{k\in Z} \xi_{0k} a_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in Z} \eta_{jk} b_{jk}(t), \tag{1}$$

де

$$a_{0k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(t,y)\overline{\widehat{\varphi}(y)} e^{iyk} dy, \tag{2}$$

$$b_{jk}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(t,y)\, 2^{-j/2} \exp\left\{ i\frac{y}{2^j}k \right\} \overline{\widehat{\psi}\left(\frac{y}{2^j}\right)} dy, \tag{3}$$

$$E\xi_{0k}\overline{\xi_{0l}} = \delta_{kl}, \quad E\eta_{mk}\overline{\eta_{nl}} = \delta_{mn}\delta_{kl}, \quad E\xi_{0k}\overline{\eta_{nl}} = 0\,.$$

При цьому, якщо $k \neq 0$, то для коефіцієнтів $a_{0k}(t), b_{jk}(t)$ розкладу (1) *при всіх $t \in R$ виконуються нерівності:*

$$|a_{0k}(t)| \leq \frac{S_1 + S_2|t|}{|k|}, \tag{4}$$

де

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u_1(y)|\widehat{\varphi}'(y)|dy, \qquad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u_2(y)|\widehat{\varphi}(y)|dy,$$

$$|b_{jk}(t)| \leq \frac{Q_1 + Q_2|t|}{2^{j/2}|k|}, \tag{5}$$

де

$$Q_1 = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u_1(y)dy, \qquad Q_2 = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u_2(y)|y|dy.$$

Для всіх $t \in R$ і $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$|b_{j0}(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}\, 2^{3j/2}} \int\limits_R u_1(y)|y|dy, \tag{6}$$

$$|a_{00}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R u_1(y)|\widehat{\varphi}(y)|dy. \tag{7}$$

Доведення. Можливість подання процесу $X(t)$ у вигляді (1) безпосередньо випливає з теореми 2.2 статті [3]. Неважко бачити, що з неперервності функції $\widehat{\varphi}(y)$ випливає рівність $\widehat{\psi}(0) = 0$. Тому

$$|\widehat{\psi}(y/2^j)| \leq \frac{|y|}{2^j}C. \tag{8}$$

З (8) випливає, що

$$|b_{j0}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{j/2}} \int\limits_R |u(t,y)||\widehat{\psi}(y/2^j)|dy \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}2^{3j/2}} \int\limits_R u_1(y)|y|dy$$

і цим самим нерівність (6) доведена.

Якщо $k \neq 0$, то маємо:

$$|b_{jk}(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{j/2}} \left| \int\limits_R u(t,y)\widehat{\psi}(y/2^j) d\left(\frac{\exp\{iyk/2^j\}}{ik/2^j} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2^{j/2}} \left| \frac{u(t,y)\overline{\widehat{\psi}(y/2^j)}}{ik/2^j} \exp\{iyk/2^j\} \right|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int\limits_R \frac{\exp\{iyk/2^j\}}{ik/2^j}\left(u(t,y)\overline{\widehat{\psi}(y/2^j)}\right)'_y dy\Bigg|.$$

Очевидно,

$$\left|\left(u(t,y)\overline{\widehat{\psi}(y/2^j)}\right)'_y\right| \le \frac{C}{2^j}(u_1(y)+|t|u_2(y)|y|).$$

Звідси відразу отримуємо нерівність (5).

Доведення нерівностей (4) та (7) аналогічне. Таким чином, лема 1 доведена.

Лема 2. *Якщо $u(t,\lambda)$ — борелева функція така, що для будь-якого $t\in R$ $\int_R |u(t,\lambda)|^2 d\lambda<\infty$, то функція*

$$R(t,s)=\int\limits_R u(t,\lambda)\overline{u(s,\lambda)}d\lambda \qquad (9)$$

буде корреляційною функцією деякого випадкового процесу.

Доведення. Легко перевірити, що функція $R(t,s)$, задана рівністю (9), буде невід'ємно визначеною.

Приклад. Неважко пересвідчитись, що умовам леми 1 задовольняють вейвлет Хаара та центрований випадковий процес $X(t)$ з корреляційною функцією

$$R(t,s)=\int\limits_R u(t,\lambda)\overline{u(s,\lambda)}d\lambda,$$

де $u(t,\lambda)=(e^{-t^2}-1)\,e^{-\lambda^2}$.

3. Моделюваня. Для дійсних центрованих гауссових процесів $X=\{X(t), t\in[0,T]\}$ ми будемо розглядати вимірну версію $X(t)$ — добре відомо, що вона існує, коли процес має неперервну коваріаційну функцію (див. [5]). Далі ми розглядатимемо лише процеси, що мають цю властивість.

Використаємо розклад (1) для моделювання гауссових процесів. Якщо гауссовий процес $X=\{X(t),t\in[0,T]\}$ задовольняє умови леми 1, то як його модель ми можемо розглядати процес

$$\widehat{X}(t)=\sum_{k=-(N_0-1)}^{N_0-1}\xi_{0k}a_{0k}(t)+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=-(M_j-1)}^{M_j-1}\eta_{jk}b_{jk}(t),$$

де ξ_{0k},η_{jk} — незалежні випадкові величини з розподілом $N(0;1)$, $a_{0k}(t)$ та $b_{jk}(t)$ обчислюються за формулами (2) та (3), $N_0>1, N>1$, $M_j>1\,(j=0,\dots,N-1)$.

Означення 1. *Модель $\widehat{X}(t)$ наближає процес $X(t)$ з заданою надійністю $1-\delta$, $0<\delta<1$, та точністю $\varepsilon>0$ в $L_p([0,T])$, якщо*

$$P\Big\{\Big(\int_0^T |X(t)-\widehat{X}(t)|^p dt\Big)^{1/p}>\varepsilon\Big\}\le\delta.$$

Теорема 1. *Нехай $p\ge 1$, $0<\delta<\min\{1,2e^{-p/2}\}$. Якщо*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|X(t)-\widehat{X}(t)|^2=$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \Big(\sum_{k:|k|\geq N_0} |a_{0k}(t)|^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k:|k|\geq M_j} |b_{jk}(t)|^2 + \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k\in Z} |b_{jk}(t)|^2 \Big) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2T^{2/p} \ln(2/\delta)} ,$$

то випадковий процес $\widehat{X}(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *з надійністю* $1-\delta$ *та точністю* ε *в* $L_p([0,T])$,

$$P\Big\{ \Big(\int_0^T |X(t) - \widehat{X}(t)|^p dt \Big)^{1/p} > \varepsilon \Big\} \leq \delta \,.$$

Доведення. Досить застосувати наслідок 1.1 з роботи [6].

Наслідок 1. *Нехай центрований гауссовий випадковий процес* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, f*-вейвлет* φ *та відповідний* m*-вейвлет* ψ *задовольняють умови леми* 1,

$$N_0 > \frac{6}{\delta_1}(S_1 + S_2 T)^2 + 1,$$

$$N > \max\left\{ 1 + \log_2 \left(\frac{72(Q_1 + Q_2 T)^2}{5\delta_1} \right), 1 + \log_8 \left(\frac{18 D^2}{7\delta_1} \right) \right\},$$

$$M_j > 1 + \frac{12}{\delta_1}(Q_1 + Q_2 T)^2 \left(1 - \frac{1}{2^N} \right),$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon^2}{2T^{2/p} \ln(2/\delta)}, \qquad D = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_R u_1(y)|y|dy$$

($j = 0, 1, \ldots, N-1$), *де* $C, Q_1, Q_2, S_1, S_2, u_1(y)$ *визначені в лемі* 1. *Тоді процес* $\widehat{X}(t)$ *наближає* $X(t)$ *з надійністю* $1-\delta$ *та точністю* ε *в* $L_p([0,T])$ *коли* $p \geq 1$, $0 < \delta < \min\{1, 2e^{-p/2}\}$.

Доведення. Неважко бачити, що в умовах наслідку для всіх $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$\sum_{k:|k|\geq N_0} |a_{0k}(t)|^2 < \frac{2}{N_0 - 1}(S_1 + S_2 t)^2 < \frac{\delta_1}{3},$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k:|k|\geq M_j} |b_{jk}(t)|^2 \leq (Q_1 + Q_2 t)^2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2^{j-1}(M_j - 1)} < \frac{\delta_1}{3},$$

$$\sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k\in Z} |b_{jk}(t)|^2 < \frac{(Q_1 + Q_2 t)^2}{2^{N-3}} + \frac{D^2}{7 \cdot 8^{N-1}} < \frac{\delta_1}{3}.$$

Тому $\sup\limits_{t\in[0,T]} E|X(t) - \widehat{X}(t)|^2 \leq \delta_1$ і залишається застосувати теорему 1.

4. Висновки. Доведена теорема про точність і надійність наближення гауссових випадкових процесів в просторі $L_p([0,T])$ за допомогою моделі, що базується на розкладі випадкового процесу в ряд по системі функцій, побудованій на основі вейвлетів. Цей результат може бути використаний для комп'ютерного моделювання гауссових випадкових процесів.

Автор висловлює вдячність професору Ю. В. Козаченко за цінні обговорення.

1. *Walter G., Zhang J.* A wavelet-based KL-like expansion for wide-sense stationary random processes // IEEE Trans. Signal Process. – 1994. – **42**, №7. — P. 1737–1745.
2. *Walter G., Zhang J.* Wavelets based on band-limited processes with a KL-type property // Proc. SPIE Conf. Visual Inform. Processing II (Orlando, FL, Apr. 1993). — Orlando, 1993. — P. 336–343.
3. *Kozachenko Yu. V., Rozora I. V., Turchyn Ye. V.* On an expansion of random processes in series // Random Operators and Stochastic Equations. – 2007. – **15**, №1. — P. 15–33.
4. *Козаченко Ю. В.* Лекції з теорії вейвлетів. – К.: ТВіМС, 2004. – 147 с.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.
6. *Antonini R. G., Kozachenko Yu., Tegza A.* Accuracy of simulation in L_p of Gaussian random processes // Вісник Київ. у-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 5. – С. 7–14.

Одержано 8.10.2007