УДК 519.21+62

Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т "Львів. політехніка")

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ НЕПЕРЕРВНОЇ ПРОЦЕДУРИ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

There is obtained the sufficient conditions the asymptotic normality of the continuous stochastic approximation procedure in semi-Markov media in the diffusion approximation scheme. By using the asymptotic representation the compensating operator for the four-components of Markov renewal process.

Отримано достатні умови асимптотичної нормальності неперервної процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі в схемі дифузійного наближення. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора для чотирьохкомпонентного розширеного процесу марковського відновлення.

Вступ. Поряд з збіжністю процедури стохастичної апроксимації (ПСА) [1,2] важливою властивістю ПСА є асимптотична нормальність флуктуацій навколо кореня рівняння регресії, яка в свою чергу характеризує швидкість збіжності ПСА. В класичних схемах [1,2] дослідження асимптотичної нормальності реалізується використовуючи принцип інваріантності для процесів в неперервній ПСА.

В [3] для неперервної ПСА в напівмарковському середовищі в схемі усереднення доведено асимптотичну нормальність, використовуючи асимптотичні представлення компенсуючого оператора (КО) [4] розширеного процесу марковського відновлення [5]. Розв'язуючи проблему сингулярного збурення [6] для КО вдалось побудувати генератор граничного процесу.

В даній роботі для неперервної ПСА з асимптотично дифузійним збуренням в схемі дифузійної апроксимації з малим параметром $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$, в напівмарковському середовищі встановлено асимптотичну нормальність флуктуацій навколо точки рівноваги усередненої динамічної системи.

1. Постановка задачі та позначення. Розглянемо неперервну ПСА [7,8]

$$du^\varepsilon(t) = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))dt. \tag{1}$$

Тут функція регресії

$$C^\varepsilon(u,x) = C(u,x) + \varepsilon^{-1}C_0(x),\ u \in R,\ x \in X, \tag{2}$$

така, що задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du^\varepsilon_x(t)/dt = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon_x(t), x), \quad x \in X, \tag{3}$$

а функція регресії $C(u,x)$ така, що $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, тобто допускає розклад

$$C(u,x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2C_2(u,x), \tag{4}$$

де

$$C^0(x) = C(0,x), \quad C^1(x) = C'_u(0,x), \tag{5}$$

$$C_2(u,x) = \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{6}$$

Нехай для збурення $C_0(x)$ функції регресії (2) виконується умова балансу

$$\text{УБ1: } \tilde{\Pi} C_0(x) := \int_X \rho(dx) C_0(x) = 0,$$

де $\rho(B)$, $B \in X$, — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n := = x(\tau_n)$, $n \ge 0$ в напівмарковський процес $x(t)$, $t > 0$ в стандартному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ з лічильним процесом

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \le t\}, \quad t \ge 0,$$

для моментів марковського відновлення $\tau_n, n \ge 0$, [6]. Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) := P(x, B) G_x(t), \quad x \in X, \quad B \in X, \quad t \ge 0, \tag{7}$$

задає напівмарковський процес $x(t), t > 0$. В (7) стохастичне ядро $P(x, B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \ge 0$,

$$P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B \mid x_n = x\} ,$$

з функцією розподілу $G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \le t \, | x_n = x\} =: P\{\theta_x \le t\}$. Разом з напівмарковський процесом $x(t), t > 0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t > 0$, з генератором [6]

$$Q\varphi(x) := q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де

$$q(x) := 1/g(x), \quad g(x) := \int_0^\infty \bar{G}_x(t) dt, \quad \bar{G}_x(t) := 1 - G_x(t).$$

Супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t > 0$ є рівномірно ергодичний [5] з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$. Між стаціонарними розподілами $\pi(B)$ та $\rho(B)$ існує зв'язок [9]

$$\pi(dx) q(x) = q \rho(dx), \quad q := \int_X \pi(dx) q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx) g(x)/m, \quad m := \int_X \rho(dx) g(x) = 1/m.$$

Розподіли $\pi(B)$ та $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно співвідношеннями:

$$\Pi\varphi(x) := \hat{\varphi} \boldsymbol{1}(x), \quad \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx) \varphi(x), \quad \boldsymbol{1}(x) \equiv 1, \quad x \in X, \tag{8}$$

$$\tilde{\Pi}\varphi(x) := \tilde{\varphi}\mathbf{1}(x), \quad \tilde{\varphi} := \int_X \rho(dx)\varphi(x), \quad \mathbf{1}(x) \equiv 1, \quad x \in X.$$

При відповідних умовах на керуючу функцію $a(t), t > 0$, [7] неперервна ПСА (1) збігається з ймовірністю одиниця до точки рівноваги $u_0 = 0$ усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)),$$

де

$$C(u) := \int_X \pi(dx)C(u, x).$$

Таким умовам задовольняє функція

$$a(t) = a/t, \quad 0 < t_0 < t, \quad a > 0,$$

яка і буде розглядатися надалі в ПСА (1). З того, що $u_0 = 0$ має місце рівність

$$C(0) = 0,$$

а разом з (5) та (8) додаткову умову балансу

$$\text{УБ2} : \Pi C^0(x) = 0.$$

Асимптотична нормальність ПСА (1) досліджується для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)], \tag{9}$$

де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається через $C_0(x)$ з (5):

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int_{t_0}^{t} C_0(x(s/\varepsilon^4))/s ds. \tag{10}$$

Зауважимо, що збурення (10) задовольняє рівняння

$$\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(x(\frac{t}{\varepsilon^4})). \tag{11}$$

В позначенні

$$\tilde{v}^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)$$

флуктуація (9) має представлення

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}\tilde{v}^\varepsilon(t),$$

або в зворотній формі

$$\tilde{v}(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}.$$

З іншої сторони з (9) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon[v^\varepsilon(t)/\sqrt{t} + C_0^\varepsilon(t)].$$

Зауваження 1. *Для збурення $C_0^\varepsilon(t)$ буде доведена слабка збіжність*

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \quad t>0, \quad \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{t^2},$$

а

$$\sigma^2 = 2a^2 \int_X \pi(dx) C_0(x) R_0 C_0(x). \tag{12}$$

В (12) R_0 *— потенціал до оператора* Q [10], *такий, що виконуються співвідношення*

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - \mathrm{I},$$

де I *— тотожній оператор.*

2. Теорема (асимптотична нормальність). *При умовах збіжності ПСА* (1) *та при додаткових умовах УБ1, УБ2 а також*

$$D1: \rho^2 := \sigma^2 + \sigma_\mu > 0,$$

де σ^2 *обчислюється в* (12), *а*

$$\sigma_\mu = qa^2 \int_X \rho(dx)\mu(x)C_0^2(x), \quad \mu(x) := g_2(x) - 2g^2(x), \quad D2: c_1 < -\frac{1}{2a},$$

де

$$c_1 := q\int_X \rho(dx)C^1(x),$$

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \quad t>0, \quad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t)$, $D_0(t)$, $t>0$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}_t \varphi(v,w) = \frac{a^2\rho^2}{2t^2}\varphi''_w(v,w) + \frac{a}{t}C^1(v,w)\varphi'_v(v,w), \tag{13}$$

де

$$C^1(v,w) = vb + ac_1\sqrt{t}w,$$
$$b := ac_1 + \frac{1}{2}.$$

Висновок 1. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t)$, $t>0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = b(\zeta(t) + c_1\sqrt{t})dw_\sigma(t),$$

де $w_\sigma(t)$ — гаусівський процес з дисперсією

$$\sigma_w(t) = \frac{a^2\rho^2}{t^2}.$$

3. Властивості нормованої флуктуації $v^\varepsilon(t)$.

Лема 1. *Нормована флуктуація* (9) *задовольняє стохастичне диференціальне рівняння*

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + C_0^\varepsilon(t)), \quad x(\frac{t}{\varepsilon^4}))dt + \frac{v^\varepsilon(t)}{2t}dt. \tag{14}$$

Доведення. Диференціюючи (9) і враховуючи (1) та (11) маємо (14).

Наслідок 1. *Супроводжуюча флуктуація* $v_x^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}[u_x^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2t}dt + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z, x)dt, \quad x \in X, \tag{15}$$

де

$$z = \frac{v_x^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}} + w, \quad w = C_0^\varepsilon(t). \tag{16}$$

Доведення. Використання системи (3) в схемі доведення леми 1 дає (15).

Наслідок 2. *Рівняння* (15) *допускає асимптотичне представлення*

$$dv_x^\varepsilon(t) = \frac{a}{t}[\sqrt{t}zC^1(x) + \frac{v_x^\varepsilon(t)}{2a}]dt + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x)dt + \theta_x^\varepsilon dt, \quad x \in X \tag{17}$$

в позначеннях (16), *а знехтуючий член* θ_x^ε *такий, що* $\|\theta_x^\varepsilon\| \to 0, \varepsilon \to 0$.

Доведення. Використовуючи (4) для функції $C(\varepsilon z, x)$ з (15) маємо розклад

$$C(\varepsilon z, x) = C^0(x) + \varepsilon z C^1(x) + \varepsilon^2 z^2 C_2(\varepsilon z, x), \tag{18}$$

де $C_2(\varepsilon z, x)$ обчислюємо за представленням (6). Зауважимо, що останній доданок в (18) має порядок малості $o(\varepsilon^2)$.

Підставляючи (18) в (15) отримуємо (17).

Розглянемо напівгрупи $\boldsymbol{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s)), v_x^\varepsilon(t) = v$, що породжуються системою (15) з генератором

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = [\frac{v}{2t} + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z, x)]\varphi'(v), \tag{19}$$

де z обчислюємо в (16).

Наслідок 3. *Генератор* (19) *напівгруп* $\mathbf{C}_{t+s}^{\varepsilon,t}(x)$, $x \in X$ *має асимптотичне представлення*

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x)\varphi'(v) + \frac{a}{t}C^1(v, w, x)\varphi'(v) + \theta_C^\varepsilon(x)\varphi'(v), \tag{20}$$

де $C^1(v, w, x) = \sqrt{t}zC^1(x) + \dfrac{v}{2a}$.

Доведення. В (19) для функції $C(\varepsilon z, x)$ використаємо розклад (18).

Для дифузійного збурення (10) розглянемо напівгрупи

$$\boldsymbol{C}_{t+s}^{0,t}(x)\varphi(w) = \varphi(C_0^\varepsilon(s)), \quad C_0^\varepsilon(t) = w$$

з генератором

$$\boldsymbol{C}_t^0(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(x)\varphi'(w). \tag{21}$$

4. Компенсуючий оператор. Як і в схемі усереднення [3] розглянемо КО для розширеного процесу марковського відновлення

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), w_n^\varepsilon := C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0, \tag{22}$$

що визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) := \varepsilon^{-4} q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) \mid v_n^\varepsilon = v,\ w_n^\varepsilon = w,\ x_n^\varepsilon = x,\ \tau_n^\varepsilon = t] - \varphi(v, w, x)]. \tag{23}$$

Лема 2. *Компенсуючий оператор* (23) *має аналітичне представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} q(x) \int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\ \mathbf{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)\mathbf{P} - \mathrm{I}]\varphi(v, w, x), \tag{24}$$

де оператор $\mathbf{P}$ *визначається через ядро* $P(x, B), B \in X$,

$$\mathbf{P}\varphi(x) := \int_X P(x, dy)\varphi(y).$$

Доведення. Розглянемо приріст компоненти v_{n+1}^ε процесу (22) при $x_n^\varepsilon = x$ і $\tau_n^\varepsilon = t$ в вигляді

$$\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon = v_x^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x), \tag{25}$$

де $v_x^\varepsilon(t)$ є розв'язком рівняння (15) з початковою умовою $v_x^\varepsilon(0) = 0$.

Аналогічно маємо приріст для w_{n+1}^ε

$$\Delta w_n^\varepsilon := C_{n+1}^\varepsilon - C_n^\varepsilon = C_0^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x). \tag{26}$$

Враховуючи (25) і (26) та використовуючи напівгрупи $\boldsymbol{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)$ та $\boldsymbol{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x)$ для умовного математичного сподівання з (23) маємо перетворення

$$\begin{aligned} E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) | v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] = \\ = E_{v,w,x}[\varphi(v + v_0(\varepsilon^4 \theta_x), w + C_0^\varepsilon(\varepsilon^4 \theta_x), x_{n+1}^\varepsilon)] = \\ = \int_0^\infty G_x(ds) \boldsymbol{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\ \boldsymbol{C}_{t+\varepsilon^4 s}^{0,t}(x) \boldsymbol{P} \varphi(v, w, x). \end{aligned}$$

З останнього і з означення (23), маємо (24).

Лема 3. *Компенсуючий оператор* (24) *на тест-функціях* $\varphi(v, w, \cdot) \in C^{3,3}$ $(R \times R)$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) = [\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} Q_1(x)\mathbf{P} + \varepsilon^{-1} \frac{a}{\sqrt{t}} Q_2(x)\mathbf{P} + \frac{a}{t} Q_3(x)\mathbf{P} + \theta_L^\varepsilon(x)]\varphi(v, w, x), \tag{27}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v, w) = C_0(x)\varphi'_w(v, w), \quad Q_2(x)\varphi(v, w) = C^0(x)\varphi'_v(v, w),$$

$$Q_3(x)\varphi(v, w) = C^1(v, w, x)\varphi'_v(v, w) + \frac{a}{t}\mu_2(x) C_0^2(x)\varphi''_w(v, w), \quad \mu_2(x) = \frac{g_2(x)}{2g(x)},$$

а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\ \varphi(v, w, x)$ *такий, що* $//\ \theta_L^\varepsilon(x)\ \varphi(v, w, x)\ // \to 0, \varepsilon \to 0$.

Доведення. Використаємо алгебраїчну тотожність

$$ab\boldsymbol{P} - \mathrm{I} = \boldsymbol{P} - \mathrm{I} + (ab - \mathrm{I})\boldsymbol{P}$$

для підінтегрального виразу в (24), покладаючи $\boldsymbol{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) = a$ і $\boldsymbol{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) = b$.

Таким чином з (24) маємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} q(x)[\boldsymbol{P} - \mathrm{I}]\varphi(v, w, x) +$$

$$\varepsilon^{-4} q(x) \int\limits_0^{\infty} G_x(ds)[\boldsymbol{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\boldsymbol{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}]\boldsymbol{P}\varphi(v, w, x),$$

або

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} Q\varphi(v, w, x) + \varepsilon^{-4} q(x)\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{0,t}\boldsymbol{P}\varphi(v, w, x), \tag{28}$$

де

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{0,t} = \int\limits_0^{\infty} G_x(ds)[\boldsymbol{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\boldsymbol{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}]. \tag{29}$$

В свою чергу оператор $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{0,t}$ має представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{0,t} = \boldsymbol{L}_a + \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_{ab},$$

де

$$\boldsymbol{L}_a = \int\limits_0^{\infty} G_x(ds)[\boldsymbol{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}], \tag{30}$$

$$\boldsymbol{L}_b = \int\limits_0^{\infty} G_x(ds)[\boldsymbol{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}], \tag{31}$$

$$\boldsymbol{L}_{ab} = \int\limits_0^{\infty} G_x(ds)[\boldsymbol{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}][\boldsymbol{C}^{0,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - \mathrm{I}]. \tag{32}$$

Встановимо асимптотичні розклади для (30)-(32). Інтегруючи (30) по частинах з використанням генератора (20) маємо

$$\boldsymbol{L}_a = \varepsilon^4 g(x)(\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x) + \frac{a}{t}C^1(v, w, x)) + o(\varepsilon^6). \tag{33}$$

Аналогічно для (31), використовуючи генератор (21), отримуємо

$$\boldsymbol{L}_b = \varepsilon^2 g(x)\frac{a}{t}C_0(x) + \varepsilon^4\frac{a^2}{t^2}\frac{g_2(x)}{2}C_0^2(x) + o(\varepsilon^6). \tag{34}$$

І, нарешті, для (32), враховуючи обидва генератори (20) і (21) маємо

$$\boldsymbol{L}_{ab} = o(\varepsilon^6). \tag{35}$$

Підставляючи (33)-(35) в (29), і результат в (28) отримуємо (27).

5. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Заключним кроком доведення теореми є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (27) оператора

$$\boldsymbol{L}_{t,0}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}Q_1(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}Q_2(x)\boldsymbol{P} + \frac{a}{t}Q_3(x)\boldsymbol{P} \tag{36}$$

на тест-функціях

$$\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x). \tag{37}$$

Лема 4. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора* (36) *на тест-функціях* (37) *визначає граничний оператор* $\hat{\mathbf{L}}_t$ *формулою*

$$\hat{\mathbf{L}}_t\Pi = \frac{a^2}{t}\Pi Q_1(x)R_0Q_1(x)\Pi - \frac{a^2}{t}\Pi g(x)Q_1(x)\Pi + a^2\Pi Q_3(x)\Pi \tag{38}$$

в позначеннях леми 3.

Доведення. Слідуючи [10], розділ 5, представлення оператора $\boldsymbol{L}_{t,0}^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_{t,0}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{L}}_t\varphi(v,w) + \theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w) \tag{39}$$

зі знехтуючим доданком $\theta_L^{\varepsilon}(x)\ \varphi(v,w)$, таким, що $||\ \theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w)|| \to 0, \varepsilon \to 0$.

Враховуючи (36) та (37), для розв'язку проблеми сингулярного збурення для оператора (39) маємо систему рівнянь

$$Q\varphi(v,w) = 0, \tag{40}$$

$$Q\varphi_2(v,w,x) + aQ_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,w) = 0, \tag{41}$$

$$Q\varphi_3(v,w,x) + aQ_2(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,w) = 0, \tag{42}$$

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{a}{t}Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + aQ_3(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_t(x). \tag{43}$$

Рівняння (40) має місце для всіх тест-функцій, що не залежать від аргументу $x \in X$, (див. (8)).

З умови балансу УБ1 маємо

$$\Pi Q_1(x) = \Pi C_0(x) = \int_X \pi(dx)C_0(x) = q\int_X \rho(dx)C_0(x) = 0.$$

Отже, розв'язок рівняння (41) можна подати в вигляді (див. [6])

$$\varphi_2(v,w,x) = aR_0Q_1(x)\varphi(v,w). \tag{44}$$

Аналогічно з виконання умови УБ2 отримуємо

$$\Pi Q_2(x) = \Pi C^0(x) = \int_X \pi(dx)C^0(x) = q\int_X \rho(dx)C^0(x) = 0.$$

Таким чином для рівняння (42) маємо розв'язок

$$\varphi_3(v,w,x) = aR_0Q_2(x)\varphi(v,w).$$

З рівняння (43) маємо представлення граничного оператора $\hat{\boldsymbol{L}}_t$ в вигляді (див. [10], розділ 5),

$$\hat{\boldsymbol{L}}_t = \Pi \boldsymbol{L}_t(x)\Pi.$$

Підставляючи (44) в (42) і враховуючи те, що

$$\boldsymbol{P}R_0 = R_0 + g(x)[\Pi - \mathrm{I}],$$

маємо (38).

6. Доведення теореми. Спочатку відзначимо, що розв'язок проблеми сингулярного збурення для $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t,0}$ в (36) визначає той самий розв'язок для оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t$ в (27) з малим доданком (див. твердження 5.1 [10]). Отже для отримання граничного оператора (13) достатньо обрахувати праву частину в (38). Враховуючи оператори $Q_1(x)$ і $Q_3(x)$ леми 3 з (38) маємо

$$\hat{\boldsymbol{L}}_t\varphi(v,w) = \frac{a^2}{2t}\rho^2\varphi''_w(v,w) + aC^1(v,w)\varphi'_v(v,w), \tag{45}$$

в позначеннях теореми. Використовуючи (45) та множник $1/t$, з в (39) визначаємо граничний оператор (13).

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСА в R^d, $d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В. С. Королюку за постановку проблеми та увагу до викладеного матеріалу.

1. *Невельсон М. Б. , Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.*. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag. – Basel, Boston, Berlin, 1992. – 113 p.
3. *Чабанюк Я. М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 23–30.
4. *Вентцель Е. С.* Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. – М.: Наука, 1986. – 176 с.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их применение. – К.: Наук. думка, 1976. – 184 с.
6. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic Models of Systems. – Kluwer Academic Publishers, 1999. – 185 p.
7. *Чабанюк Я. М.* Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кібернетика і системний аналіз. – 2006. – №3. – С. 1–7.
8. *Чабанюк Я. М.* Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, №5. – С. 713–720.
9. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – К.: Наукова думка, 1992. – 246 с.
10. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.

Одержано 10.05.2007