Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних управляючих систем і технологій

О.В. МІЦА, В.О. ЛАВЕР

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

Навчально-методичний посібник
(для студентів IV курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»)

Ужгород - 2021

УДК 338.48-4(075.8)

ББК 65.433я73
Ч-64

Міца О.В., Лавер В.О. Системний аналіз : навч.-метод. посіб. / О.В. Міца, В.О. Лавер. – Ужгород : вид-во ПП «АУТДОР - ШАРК», 2021. – 63 с.

Рецензенти:

Повхан І.Ф., кандидат технічних наук, доцент, декан факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Білак Ю.Ю., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідуючий кафедри програмного забезпечення систем ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рекомендовано до друку методичною комісією факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (протокол № _ від __.01.2021 р.)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Поняття «системний аналіз» широко застосовується в теорії і практиці наукових досліджень. Даній області знань присвячено чимало публікацій, які відображають теоретичний та практичний досвід аналізу систем і прийняття рішень.

Даний навчально-методичний посібник призначений для студентів ДВНЗ «Ужгородський національний університет» за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

Навчальна дисципліна «Системний аналіз» вивчається на четвертому курсі денної та заочної форм навчання протягом другого семестру.

Навчально-методичний посібник призначенний допомогти студентам при підготовці до практичних, лекційних занять, а також написання рефератів.

У посібнику висвітлені мета і завдання навчальної дисципліни, її опис та структура, розподіл годин за модулями і видами занять для денної форми навчання.

Короткий зміст лекцій викладений згідно розподілу на змістові модулі. Після кожної лекції зазначається перелік контрольних запитань по її змісту та рекомендована література для опрацювання відповідного матеріалу.

Короткий лекційний курс навчального-методичного посібника можна використовувати під час практичних та семінарських занять, для закріплення теоретичних положень курсу, а також для організації самостійної роботи студентів.

Посібник містить зміст практичних і семінарських занять до кожного змістового модуля, перелік типових питань до модульних контрольних робіт, а також питання, які виносяться на іспит з даної навчальної дисципліни.

Крім того, у навчально-методичноиу посібнику представлено тематику самостійної роботи студентів та орієнтовні теми для написання рефератів.

Обов'язковою складовою видання є критерії поточного та підсумкового оцінювання знань та вмінь студентів, а також список рекомендованої літератури для вивчення курсу.

1. Основні поняття системного аналізу

1.1. Поняття системи

Дамо визначення поняттям «система» та «підсистема».

Система – об’єкт або процес, в якому елементи-учасники поєднані певними зв’язками співвідношеннями.

Підсистема – частина системи, яка, у свою чергу, також має властивості системи.

Будь-яка система складається із підсистем. Межі системи визначаються доступними ресурсами та середовищем.

Стан системи – фіксація сукупності доступних системі ресурсів, які визначають відношення системи до очікуваного результату або до його образу.

Мета системи – образ неіснуючого, але бажаного, з точки зору системи, стану середовища. Це опис певного бажаного стану системи.

Задача – деяка множина вихідних даних, опис мети, визначеної над множиною цих даних, і, можливо, опис можливих стратегій досягнення мети, або можливих проміжкових станів об’єкта, що досліджується.

«*Розв’язати задачу*» означає чітко визначити ресурси та шляхи досягнення поставленої мети при заданому наборі вхідних даних. *Розв’язком задачі* є опис стану системи, при якому досягається поставлена мета.

Опис (специфікація) системи – це індентифікація елементів та підсистем, які визначають систему, їх взаємозв’язків, цілей, функцій та ресурсів, тобто це опис допустимих станів системи.

Структура системи – сукупність зв’язків і відношень між частинами цілого, необхідних для досягнення мети системи.

На рис. 1.1-1.4 наведено базові топології структур систем (представлені у вигляді направлених графів).

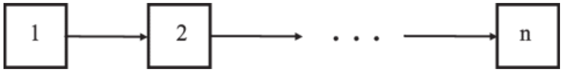

Рис. 1.1. Структура лінійного типу

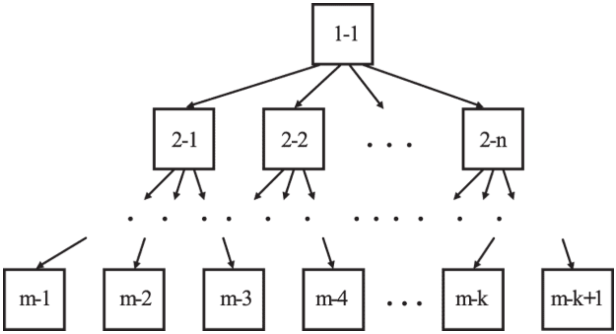

Рис. 1.2. Структура ієрархічного типу

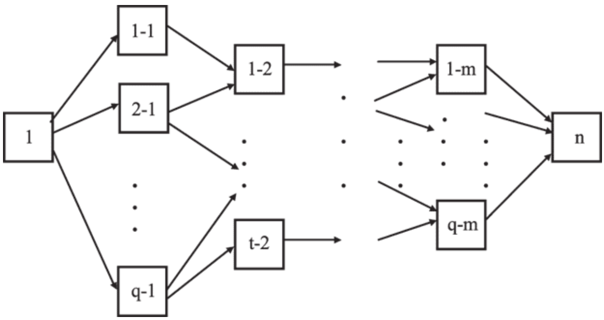

Рис. 1.3. Структура мережевого типу

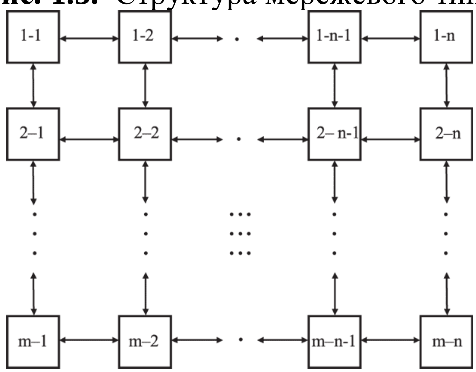

Рис. 1.4. Структура матричного типу

Крім згаданих структур використовуються і інші, які утворюються за допомогою комбінацій чотирьох основних топологій структур.

Структура системи є *зв'язною*, якщо можливий обмін ресурсами між будь-якими двома підсистемами системи (тобто граф, яким представляються зв'язки у системі, є зв'язним). Якщо структура або елементи системи погано (частково) визначені, то така множина об'єктів називається *погано або слабко структурованою*.

Для опису системи важливо знати, яка її структура, які її функції і зв'язки із зовнішнім середовищем.

Морфологічний (структурний або топологічний) опис системи – це опис будови або структури системи, або опис сукупності елементів цієї системи і необхідного для досягнення мети набору відношень між цими елементами.

Функціональний опис системи – опис законів функціонування, еволюції системи, алгоритмів її поведінки, «роботи».

Інформаційний опис системи – це опис інформаційних зв'язків, як системи із зовнішнім середовищем, так і підсистем із системою.

З точки зору морфологічного опису, система може бути

- Гетерогенною (такою, що містить елементи різного типу та походження);
- Гомогенною (такою, що містить елементи тільки одного типу, походження)
- Змішаною (такою, що містить як гомогенні, так і гетерогенні підсистеми).

Основні ознаки системи:

- Цілісність, зв'язність або відносна незалежність від середовища і систем.
- Наявність підсистем та зв'язків між ними, або наявність структури системи.
- Можливість виокремлення від зовнішнього середовища.

- Зв'язки із зовнішнім середовищем по обміну ресурсами.
- Підпорядкованість усієї організації певній меті.
- Емерджментність (незвідність властивостей системи до властивостей її елементів).

При системному аналізі об'єктів, процесів, явищ, необхідно пройти наступні етапи системного аналіза:

1. Постановка задачі.
2. Оцінка актуальності проблеми.
3. Формулювання цілей, їх пріоритетів та проблем дослідження.
4. Визначення і уточнення ресурсів дослідження.
5. Виділення із зовнішнього середовища системи.
6. Опис підсистем, їх цілісності, елементів, аналіз взаємозв'язків підсистем.
7. Узгодження цілей системи із цілями підсистем.
8. Аналіз цілісності системи.
9. Аналіз і оцінка емерджментності системи.
10. Верифікація системи, її функціонування.
11. Аналіз зворотних зв'язків.
12. Уточнення, коригування попередніх пунктів.

1.2. Класифікація систем

Класифікацію систем можна здійснювати по різним критеріям. Наведемо основні способи класифікації:

1. За відношенням до зовнішнього середовища системи бувають:
   - Відкриті (є обмін ресурсами із зовнішнім середовищем);
   - Закриті (нема обміну із зовнішнім середовищем).
2. За походженням системи:
   - Штучні (механізми, машини, роботи тощо);
   - Природні (живі, неживі, екологічні, соціальні);
   - Віртуальні;

- Змішані (економічні, біотехнічні, організаційні).

3. За описом змінних системи:
    - З якісними змінними (такими, що мають тільки змістовний опис);
    - З кількісними змінними (дискретними чи неперервними);
    - Змішаного типу.
4. За типом опису законів функціонування системи:
    - «Чорна скринька» (відомі тільки вхідні та вихідні параметри);
    - Не параметризовані (відомі тільки певні апріорні властивості закона);
    - Параметризовані (закон відомий з точністю до параметрів і його можна віднести до деякого класу залежностей);
    - «Біла (прозора) скринька» (закон повністю відомий).
5. За способом керування системою (в системі):
    - Системи, керовані ззовні (без зворотнього зв'язку, регульовані, керовані структурно, інформаційно або функціонально);
    - Керовані зсередини (самокеровані або саморегульовані тощо);
    - З комбінованим керуванням (автоматичні, напівавтоматичні тощо).

Система називається *великою*, якщо її дослідження або моделювання утруднюється через велику розмірність (наприклад через велику кількість станів системи).

Велика система зазвичай зводиться до системи меншої розмірності за допомогою розбиття задачі на ряд задач меншої розмірності.

Система називається *складною*, якщо в ній не вистачає ресурсів (в першу чергу інформаційних) для ефективного опису системою та керування нею.

Складність системи може бути як зовнішньою, так і внутрішньою.

Внутрішня складність визначається складністю множини внутрішніх станів, яку можна потенційно оцінити за проявами системи і складністю керування в системі.

Зовнішня складність визначається складністю взаємовідносин із зовнішнім середовищем, складністю керування системою, які потенційно можна оцінити за зворотними зв’язками системи і середовища.

Складні системи можуть бути різних рівнів складності:

- Структурної або організаційної (не вистачає ресурсів для побудови, опису, управління структурою);
- Динамічної (не вистачає ресурсів для опису динаміка поведінки системи та керування її траєкторією) ;
- Інформаційної (не вистачає ресурсів для інформаційно-логічного опису системи);
- Обчислювальної (не вистачає ресурсів для ефективного прогнозу чи розрахунку параметрів системи);
- Алгоритмічної (не вистачає ресурсів для опису алгоритму управління системою);
- Еволюційної (не вистачає ресурсів для розвитку системи).

В останні роки також розрізняють так-звані «жорсткі» і «м’які» системи. Дослідження «жорстких» систем зазвичай спирається на такі категорії, як «проектування», «оптимізація», «реалізація», «цільова функція» та ін. Для «м’яких» систем частіше використовуються такі категорії, як «можливість», «бажаність», «адаптовність», «раціональність» тощо. Методи також відрізняються: для «жорстких» систем притаманні методи оптимізації, теорія ймовірностей та математична статистика, теорія ігор тощо, для «м’яких» систем – багатокритеріальна оптимізація і прийняття рішень (часто в умовах невизначеності), метод Дельфі, теорія катастроф, нечіткі множини та нечітка логіка, евристичне програмування тощо.

. Прийняття рішень (вибір) і оптимізація

2.1. Критеріальний підхід до вибору альтернатив

Прийняття рішень (вибір) є дією, яка надає людській діяльності цілеспрямованості. Вибір реалізує підпорядкованість людської діяльності певній цілі (чи сукупності певних цілей). В людській діяльності наступають моменти коли подальші дії можуть бути різними, а значить приводити до різних результатів (добрих, поганих, задовільних, трагічних, і т.д.).

Будемо вважати, що *прийняття рішень* (вибір) це дія над множиною альтернатив, в результаті якої отримується підмножина вибраних альтернатив (зокрема одна альтернатива). Звужувати множину альтернатив можливо, якщо існує спосіб порівняння альтернатив між собою і визначення переважаючих. Кожен такий спосіб називається *критерієм переваг*. Зрозуміло, що процедурі прийняття рішень передує процедура формування множини альтернатив і завчасно визначені цілі, заради досягнення яких здійснюється вибір. Найбільш простим і часто вживаним являється критеріальний підхід до визначення альтернатив – суть якого полягає в тому, що кожну альтернативу можна оцінювати конкретним дійсним числом, а порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм дійсних чисел. Позначимо через X множину всіх альтернатив, а її елементи через x. На множині X задамо функцію $f(x)$, яка володіє властивістю, що якщо альтернатива x_1 переважає альтернативу x_2, то $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки. Таку функцію називають: *критерієм, критерієм якості, цільовою функцією, функцією переваг, функцією корисності*. Якщо крім цього вважати, що значення критерію виражає оцінку наслідку вибору альтернативи x, тоді природно вибирати альтернативу $x*$, яка дає найбільше значення критерію:

$$x* = \arg\max_{x\in X} f(x). \quad (2.1)$$

Задача знаходження оптимальної альтернативи (2.1) є задачею *однокритеріальної умовної оптимізації*. У випадку ж коли $X = R^n$ (тобто коли ми шукаємо максимум функції $f(x)$ на всьому Евклідовому просторі), маємо задачу *однокритеріальної безумовної оптимізації.*

Дійсно, практично будь-яка задача керування полягає в оптимізації заданої цільової функції при деяких обмеженнях. Ми або максимізуємо прибуток (об'єм виробництва, функцію корисності і т.д.), або мінімізуємо витрати (тоді (2.1) можна розглядати як задачу максимізації функції $(-f(x))$. В загальному випаду (2.1) матиме вигляд

$$\begin{gathered} f(x) \to max, \\ g_i(x) = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) \le 0, \qquad j = 1, \dots, k. \end{gathered}$$

У частковому випадку, коли функції $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$ є лінійними, дана задача називається *задачею лінійного програмування*. До задач цього типу можна віднести задачі виробництва, транспортні задачі, задачу оптимізації інвестиційного портфелю тощо.

Проте, як показує практика, оцінка альтернативи одним критерієм є занадто великим спрощенням ситуації. Життя вимагає оцінювати альтернативи не по одному, а по декількох критеріях, які якісно відрізняються між собою. Наприклад, при проектуванні літака конструкторам необхідно врахувати багато критеріїв, таких як:

1) технічні: висота польоту, швидкість, вантажопідйомність, необхідна довжина злітно-посадочної смуги, тривалість польоту, вага літака і т.д.;

2) економічні: затрати на виробництво, експлуатацію і обслуговування, конкурентноздатність;

3) екологічні: рівень шуму, забруднення атмосфери;

4) ергономічні: умови роботи екіпажу, рівень комфорту пасажирів і т.д.

Будемо вважати, що кожна альтернатива оцінюється m критеріями: $f_i(x), i = \overline{1,m}$. Без обмеження загальності можна вважати, що всі частинні критерії $f_i(x)$ діють в одному і тому ж напрямку (інгредієнті), тобто виражають лише позитивні або лише негативні якості альтернативи. Цього легко добитися за рахунок зміни знаків окремих частинних критеріїв.

В загальному випадку задача багатокритеріальної оптимізації формулюється наступним чином:

$$f_i(x) \to max,\ \ i = 1, \dots, m,\ \ x \in X.$$

Відмітимо також, що з метою покращення вибору часто переходять до *нормалізованого мультикритерію* $f_i^{'}(x), i = \overline{1,m}$, шляхом введення безрозмірних величин, приведення до однієї розмірності, тощо. Наведемо найбільш часто вживані способи нормалізації:

а) зведення до безрозмірних величин

$$f_i^{'}(x) = f_i(x)/\rho(f_i(x)),$$

де $\rho(\cdot)$– деяка функція;

б) зведення до однієї розмірності

$$f_i^{'}(x) = f_i(x)/\alpha(i),$$

де $\alpha(i)$– деяка вагова функція;

в) зміна напрямку (інгредієнта)

$$f_i^{'}(x) = -f_i(x) \text{ або } f_i^{'}(x) = 1/f_i(x);$$

г) природній

$$f_i^{'}(x) = \frac{f_i(x) - f_{min}}{fmin_{max}},$$

де $f\underset{i\in\overline{1,m}}{\underline{min}}{}_i\underset{i\in\overline{1,m}}{\underline{max}}{}_i\ {}_{max_{min}}$

д) порівняння

$$f_i^{'}(x) = f_i(x)/\max_{x\in X} f_i(x);$$

е) усереднення

$$f_i^{'}(x) = f_i(x)/\textstyle\sum_{i=1}^{m} f_i(x).$$

Припустимо, що в множині X існує альтернатива $\bar{x}$, яка приймає найбільше значення по всіх m критеріях:

$$f_i(\bar{x}) > f_i(x), i = \overline{1, m}, \text{ для всіх } x \in X. \tag{2.2}$$

Тоді ця альтернатива $\bar{x}$ являється найкращою і проблеми вибору в такій ситуації не існує. На практиці такі випадки малоймовірні. Більш реальною є ситуація, коли найбільші значення критерії досягають на різних альтернативах. Розглянемо основні підходи до розв'язування багатокритеріальних задач.

2.2. Зведення до однокритеріальної задачі

Зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної здійснюється введенням *суперкритерію*, тобто скалярної функції векторного аргументу

$$f_0(x) = \bar{f}_0(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)). \tag{2.3}$$

Після згортки розв'язується звичайна оптимізаційна задача:

знайти $x* = arg \max_{x \in X} f_0(x)$ $\left(\text{або } x* = arg \min_{x \in X} f_0(x)\right)$.

Наведемо приклади найуживаніших згорток:

а) лінійна

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(i)\, f_i(x);$$

б) максимізаційна

$$f_0(x) = \max_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

в) мінімізаційна

$$f_0(x) = \min_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

г) мультиплікативна

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

д) Кобба – Дугласа

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} [\alpha(i) f_i(x)]^{\beta(i)},$$

де $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i=\overline{1,m}$ – задані функції натурального аргументу $i, i=\overline{1,m}$.

Вкажемо на недоліки пов'язані з використанням суперкритерію:

- важко обґрунтувати використання певного типу згортки;
- існує проблема вибору параметрів згортки – функцій $\alpha(i), \beta(i), i=\overline{1,m}$;
- незначна зміна функції, яка визначає згортку, приводить до значних відхилень розв'язків задачі багатокритеріальної оптимізації.

2.2.1 Метод головного частинного критерію

Наведені вище недоліки згортання декількох критеріїв обумовили появу інших підходів до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. Один із них полягає у використанні того факту, що частинні критерії нерівнозначні між собою, через те виділяють *основний, головний критерій* $f_{i_0}(x)$, а решту критеріїв вважають *додатковими*. Головний критерій максимізують при умові, що додаткові критерії залишаються на заданих їм рівнях. Розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації знаходять як розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$x*=arg\max_{x\in X} f_{i_0}(x) \tag{2.4}$$

при обмеженнях

$$f_i(x)=c_i, i=1,2,\dots,i_0-1, i_0+1,\dots,m. \tag{2.5}$$

В багатьох практичних задачах обмеження (2.5) на додаткові критерії формулюються не у формі рівностей, а у формі нерівностей (наприклад, якщо додаткові критерії характеризують вартість витрат, то замість фіксації витрат розумніше задавати їх верхній рівень) і в результаті приходимо до наступної задачі:

$$x*=arg\max_{x\in X} f_{i_0}(x) \tag{2.6}$$

при обмеженнях

$$f_i(x) \leq c_i, i = 1,2, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, m. \qquad (2.7)$$

При даному підході дуже важливим є уникнути двох крайніх випадків: коли множина точок, при якій виконуються усі обмеження співпадає із самою множиною *X*, і коли подібний перетин із множиною *X* є порожнім.

2.2.2. Метод послідовних поступок

В методах оптимізації (2.4–2.5) і (2.6–2.7) різниця між основним і додатковими критеріями виглядає досить сильною. В методі *послідовних поступок* (який приводиться нижче) ця різниця дещо пом'якшується. Припускається, що критерії пронумеровані у порядку їх важливості, так що $f_1(x)$– найважливіший з критеріїв, а $f_m(x) -$ найменш важливий. На першому кроці розв'язується задача мінімізації критерію $f_1(x)$:

$$x_1^* = arg \max_{x \in X} f_1(x).$$

Нехай $f_1^{max_1{}_1^*}$. З практичних міркувань та прийнятої точності визначається поступка $\Delta_1 > 0$ (тобто величина, на яку зменшується досягнуте значення f_1^{max} найбільш важливого критерію, щоб за рахунок поступки постаратися наскільки це можливо, збільшити значення наступного по важливості критерію $f_2(x)$) і розв'язується задача оптимізації:

$$x_2^* = arg \max_{x \in X} f_2(x)$$

при обмеженнях

$$f_1(x) \geq f_1^{max_1}$$

Визначається $f_2^{max_2{}_2^*}$ і поступка $\Delta_2 > 0$.

На k -му кроці розв'язується задача:

$$x_k^* = arg \max_{x \in X} f_k(x)$$

при обмеженнях

$$f_1(x) \geq f_1^{max_1}$$
$$f_2(x) \geq f_2^{max_2}$$

$$\dots$$
$$f_{k-1}(x) \geq f_{k-1}^{max_{k-1}}$$

Якщо значення x_m^* задовільне, то його приймають за розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації, інакше переходять на перший крок, змінюючи (збільшуючи) Δ_1 і т.д.

2.2.3. Пошук альтернативи із заданими властивостями

Третій підхід багатокритеріального вибору відноситься до того випадку коли завчасно можуть бути вказані бажані значення частинних критеріїв (або їх границі), і задача полягає в тому, щоб знайти альтернативу, яка задовольняє цим вимогам, або чи встановити, що такої альтернативи у множині X не існує і вказати альтернативу, яка підходить до поставленої цілі ближче всього.

Бажані значення критеріїв $\bar{f}_i, i = \overline{1,m}$ задають або точно, або у вигляді верхніх чи нижніх границь. Значення $\bar{f}_i, i = \overline{1,m}$ називають *рівнями вимог*, а точку їх перетину $x*$ в m - вимірному просторі критеріїв *ціллю* (*опорною точкою* чи *ідеальною точкою*). Так як рівні вимог задаються без точного знання структури множини X, то цільова точка може лежати як всередині так і поза множиною X (досяжна чи недосяжна ціль). Оптимізаційна задача полягає в побудові послідовності альтернатив $x^k, k = 0,1,\dots$, яка б в границі наближалася до $x*$. Для цього вводиться числова міра близькості між альтернативою x і ціллю $x*$, тобто між векторами $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ і $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m)$. В роботі [9] використовується така функція відстані

$$d_k(x) = \bar{d}_k\big(f(x), \bar{f}\big) = \left[\sum_{i=1}^{m} w_i \left|f_i(x) - \bar{f}_i\right|^k\right]^{1/k},$$

де параметр $k \in N$, $w_i, i = \overline{1,m}$ – вагові коефіцієнти.

В роботі [48] використовується наступна функція відстані

$$d(x) = \bar{d}\big(f(x), \bar{f}\big)$$
$$= \min_{i \in \overline{1,m}} \alpha_i\big(f_i(x) - \bar{f}_i\big) + \alpha_{m+1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\big(f_i(x) - \bar{f}_i\big),$$

причому робиться припущення про невід'ємність різниці $f_i(x) - \bar{f}_i, i = \overline{1,m}$; $\alpha_i, i = \overline{1,m}$ – коефіцієнти, які приводять доданки до однакової розмірності і одночасно враховують різну важливість критеріїв; коефіцієнт α_{m+1} виражає відношення до того, що важливіше – зменшити близькість до цілі будь-якого із частинних критеріїв чи сумарну близькість всіх критеріїв до цільових значень.

У випадку коли частина бажаних значень критеріїв є обмеженнями частинних критеріїв знизу

$$f_i(x) \geq \bar{f}_i, i = 1,2,..,m^{'},$$

інша частина є обмеженням зверху

$$f_i(x) \leq \bar{f}_i, i = m^{'} + 1,..,m^{''},$$

а решту обмежень виконуються як рівності

$$f_i(x) = \bar{f}_i, i = m^{''}$$

то функцію відстані можна вибирати в наступному вигляді

$$d(x) = \bar{d}\big(f_i(x), \bar{f}\big) = \min_{i \in \overline{1,m}} F\big(f_i(x), \bar{f}_i\big) + \alpha_{m+1} \sum_{i=1}^{m} F\big(f_i(x), \bar{f}_i\big),$$

де

$$F\big(f_i(x), \bar{f}_i\big) = \begin{cases} \alpha_i\big(f_i(x) - \bar{f}_i\big), \text{якщо } 1 \leq i \leq m^{'}, \\ \alpha_i\big(\bar{f}_i - f_i(x)\big), \text{якщо} m^{'} + 1 \leq i \leq m^{''} \\ \alpha_i \, min\big\{f_i(x) - \bar{f}_i, \bar{f}_i - f_i(x)\big\}, \\ \text{якщо} m^{''} \{ \end{cases}$$

2.2.4. Метод бажаної точки

Для кожного критерію $\bar{f}_i(x), i = \overline{1,m}$ розраховується найбільше і найменше його значення на множині альтернатив X:

$$f_i^{max max_{x \in X} i};\ f_i^{min min_{x \in X} i \overline{1,m}}$$

Далі переходять до нових (нормованих, безрозмірних) критеріїв $w_i(x),\quad i=\overline{1,m}$:

$$w_i(x)=\frac{f_i^{\max}-f_i(x)}{f_i^{\max}-f_i^{\min}},\quad i=\overline{1,m}.$$

На k–му кроці алгоритму на основі аналізу вибираються бажані значення критеріїв:

$$h_i^k\in[f_i^{\min}, f_i^{\max}],\quad i=\overline{1,m}$$

і на цій основі розраховуються значення

$$w_i^k=\frac{f_i^{\max}-h_i^k}{f_i^{\max}-f_i^{\min}},\quad i=\overline{1,m}.$$

Потім обчислюють вагові коефіцієнти нових критеріїв

$$\alpha_i^k=\frac{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{m} w_j^k}{\sum_{j=1}^{m}\prod_{l=1, l\neq j}^{m} w_l^k},\quad i=\overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі

$$x^k=arg\max_{x\in X}\min_{i=\overline{1,m}}\alpha_i^k w_i(x).$$

В знайденій точці x^k обчислюється значення всіх критеріїв

$$(f_1(x^k), f_2(x^k), \ldots, f_m(x^k)).$$

Якщо цей вектор значень критеріїв задовольняє особу, що приймає рішення, то $x^k -$ шукана альтернатива; інакше здійснюється перехід на $(k+1)$ -й крок, тобто на основі аналізу вибираються нові бажані значення критеріїв $h_i^{k+1},\ i=\overline{1,m}$ і т.д.

2.2.5. Розв'язки, оптимальні за Парето та за Слейтером

Розглянемо найбільш загальний підхід до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

Назвемо розв'язок $x \in X$ *оптимальним за Парето*, якщо не існує такого $y \in Y$, що

$$f_i(y) \geq f_i(x), i = 1, \dots, m$$

і при цьому хоча б одна нерівність є строгою (тобто якщо не можна покращити розв'язок хоч б по одному критерію, не погіршивши його по іншим).

Розв'язок $x \in X$ є *оптимальним за Слейтером*, якщо не існує такого $y \in Y$, що

$$f_i(y) > f_i(x), i = 1, \dots, m,$$

тобто якщо неможливо покращити розв'язок одночасно по усім критеріям.

Поняття оптимальності за Слейтером є ширшим, ніж поняття оптимальності за Парето. Будь-яка точка, оптимальна за Парето буде оптимальною і за Слейтером, але не навпаки.

2.3. Приклади постановок задач багатокритеріальної оптимізації

2.3.1. Задача проектування оптимального програмного комплексу

При проектуванні програмного комплексу (ПК) необхідно забезпечити виконання декількох вимог: зменшити вартість ПК, збільшити точність задання вхідних даних, скоротити об'єм оперативної пам'яті, зменшити час роботи ПК, зменшити завантаження каналів зв'язку між ЕОМ і зовнішніми запам'ятовуючими пристроями і т.д. Припускається, що ПК повинен реалізувати множину операцій $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Під операцією розуміється, наприклад, розв'язування лінійних чи нелінійних алгебраїчних рівнянь, систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь, знаходження екстремумів функцій певного типу, сортування інформації, пошук інформації і т.д.

Кожна із операцій $a_i \in a$ може бути реалізована будь-якою програмою із заданої множини $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik_i})$, $i = \overline{1, n}$. Кожна програма p_{ij} характеризується своїми ознаками, які впливають на вимоги до ПК. Програмний комплекс представляє собою набір програм

$$P = (p_{1j_1}, p_{2j_2}, \ldots, p_{nj_n}),$$

де $p_{ij_i} \in P_i$, $i = \overline{1, n}$.

Для оцінки якості програмного комплексу $P = (p_{1j_1}, p_{2j_2}, \ldots, p_{nj_n})$ вводиться векторний критерій $\phi(P) = (\phi_1(P), \phi_2(P), \ldots, \phi_m(P))$. Відображення $\phi: P \to R^m$ задає правило, по якому кожному набору із n програм відповідає векторна оцінка виконання вимог до ПК. Таким чином задача проектування оптимального програмного комплексу являється багатокритеріальною оптимізаційною задачею.

2.3.2. Трьохрівнева задача керування гнучким автоматизованим виробництвом

Гнучке автоматизоване виробництво (ГАВ) являє собою систему, яка складається із підсистем:

- автоматизовані технологічні модулі (станки, лінії, ділянки);
- автоматизований транспорт;
- автоматизовані склади.

Керування роботою цих підсистем і здійснення зв’язків між ними забезпечує підсистема керування ГАВ (ПК ГАВ). З її допомогою здійснюється запуск, керування і контроль за роботою технологічного обладнання, синхронізація виконуваних робіт, оптимізація завантаження обладнання, формування графіку робіт транспортних засобів, автоматизованих складів і т.д. Найбільш поширеною ПК ГАВ є трьохрівнева система керування (рис. 2.1).

Верхній рівень розв’язує задачі організаційно-економічного характеру й приймає довгострокові рішення: проводить розрахунок позмінних завдань по кожному станку, завдань по технологічній підготовці ділянки; обліковує запас заготовок, інструменту і сировини на складі; накопичує інформацію для різних служб цеху.

Середній рівень здійснює контроль за роботою мікропроцесорних систем (МП); приймає оперативні рішення у відповідності з надходженням від підсистем нижнього рівня інформації; виробляє керуючі дії на ці підсистеми.

Нижній рівень забезпечує за допомогою мікропроцесорних систем безпосереднє управління технологічним процесом.

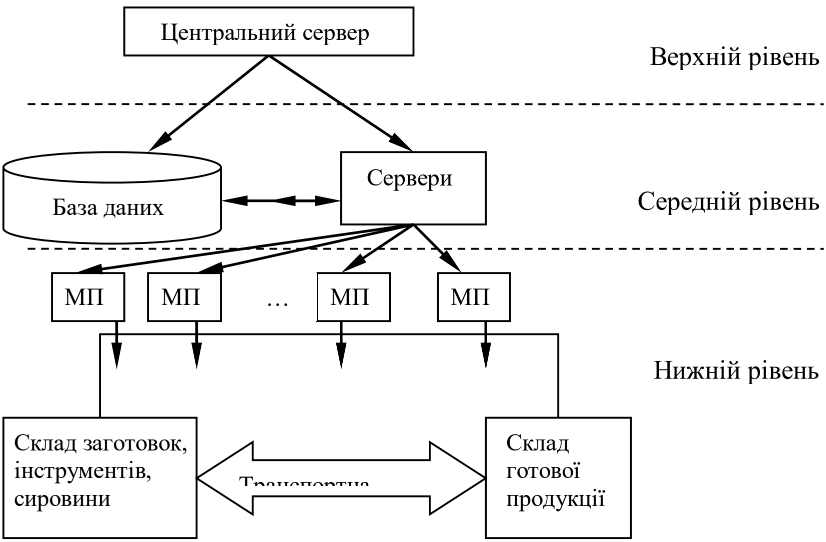

Рис. 2.1. *Принципіальна схема трьохрівневої системи керування ГАВ*

Аналіз і управління роботою ГАВ потребує розв’язування значної кількості оптимізаційних багатокритеріальних задач, задач мережевого планування, транспортних задач, задач розміщення і т.д.

. Оптимізація в системах з ієрархічною структурою

Системами з ієрархічною структурою називають сукупність підсистем, які мають послідовне вертикальне розташування з встановленим пріоритетом дій і прийняття рішень, причому результати дій підсистем верхнього рівня залежать від дій підсистем нижчих рівнів. На діяльність підсистем будь-якого рівня (крім верхнього) безпосередню дію справляють підсистеми, які розміщені на більш високих рівнях. Хоча така дія направлена зверху вниз, успіх дії системи в цілому і кожного рівня залежить від поведінки всіх елементів системи. Поняття пріоритету дій вказує на те, що вплив підсистем верхнього рівня передує діям більш низьких рівнів. Тому успішність роботи підсистем вищестоящих рівнів залежить не тільки від власних дій, але й від реакцій підсистем нижніх рівнів на цей вплив.

Підсистему найвищого рівня називають центром, а підсистеми більш низьких рівнів називають елементами. В системах керування елементам надано право виробляти певні керуючі дії, прийняти рішення. Тому поряд з ієрархією системи кажуть про ієрархічну структуру керування. Ієрархічна структура керування в складній системі являє собою сукупність рівнів керування, які слідують один за одним в порядку певного пріоритету. Між елементами різних рівнів ієрархії існують як вертикальні, так і горизонтальні зв'язки.

Поява ієрархічної структури в системах керування і прийняття рішень обумовлена наявністю великого об'єму інформації про керовані процеси в системі, неможливістю обробки цієї інформації і прийняття рішень одним центром керування, а також існуючою в реальних системах децентралізацією процесу прийняття рішень, коли елементи, які підпорядковуються центру, виробляють керуючі дії виходячи із вказівок центру і з врахуванням власних інтересів.

Розглянемо математичну модель *дворівневої ієрархічної системи керування*. Нехай центру Q_0 підпорядковані елементи системи управління $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, які надалі будемо називати підсистемами. Центр Q_0 виробляє керуючу дію $u = (u^1, \dots, u^m)$ і повідомляє її підсистемам нижчого рівня $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, які в свою чергу вибирають власні керування $v^1(u^1), v^2(u^2), \dots, v^m(u^m)$ із деяких множин допустимих керувань, відповідно, $V^1(u^1), V^2(u^2), \dots, V^m(u^m)$, що залежать від вибору керування центром Q_0. Позначимо через U множину допустимих керувань центра Q_0. Керування $u \in U$ будемо називати *допустимим*, якщо для будь-якого $i = \overline{1, m}$ всі множини $V_i(u^i), i = \overline{1, m}$ не являються порожніми.

3.1. Тривіальний випадок

Якщо для будь-якого $u \in U$ всі множини $V_i(u^i),\ i = \overline{1, m}$ складаються із єдиних керувань, то в цьому випадку центр володіє повною інформацією про реакцію підсистем нижчого рівня на своє керування.

Нехай $\phi_0(u, v)$ – критерій оптимальності центра Q_0 (тут $u = (u^1, u^2, \dots, u^m), v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$), а $\phi_i(u^i, v^i), i = \overline{1, m}$ - критерії оптимальності підсистем $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$. Центр і підсистеми вибираючи свої керування, намагаються максимізувати свої критерії. У випадку, коли всі множини $V_i(u^i), i = \overline{1, m}$ складаються із одного елемента, тобто $V_i(u^i) = \{v_i(u^i)\}$, то центр вибирає своє керування з умови

$$\phi_0(u*, v(u*)) = \max_{u \in U} \phi_0(u, v(u)) \qquad (2.8)$$

(тут $v(u*) = (v^1(u^{1*}), \dots, v^m(u^{m*}))$),
а значення критеріїв підсистем будуть такими

$$\phi_1(u^{1*}, v^1(u^{1*})),\ \varphi_2(u^{2*}, v^2(u^{2*})), \dots, \phi_m(u^{m*}, v^m(u^{m*})).$$

Отже в тривіальному випадку центр вибираючи оптимальне керування $u*$ (з точки зору центру) однозначно визначає значення критеріїв центра і всіх підсистем.

3.2. Загальний випадок

Природно припускати, що вибір центром Q_0 допустимого керування $u \in U$ визначає не єдине керування кожної підсистеми, тобто кожна із множин $V_i(u^i)$, $i = \overline{1,m}$ складаються більше ніж із одного елемента. Визначимо множину $G_i(u^i)$ оптимальних реакцій i -ої підсистеми на керування $u \in U$ центра наступним чином:

$$G_i(u^i) = \{v^i \in V_i(u^i) | \phi_i(u^i, v^i) \geq \phi_i(u^i, \bar{v}^i)$$
$$\forall \bar{v}^i \in V_i(u^i)\}, i = \overline{1,m}.$$

Якщо множини $G_i(u^i)$, $i = \overline{1,m}$ не є одноелементними, то центр Q_0 приймаючи певне рішення (вибираючи керування $u \in U$) знаходиться в умовах невизначеності. Роблячи певні припущення про характер реакцій підсистем $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ на керування u центру Q_0, приходимо до різних постановок задач оптимізації в дворівневих ієрархічних системах.

3.3. Принцип гарантованого результату

Будемо припускати, що у відповідь на керування $u \in U$ центру Q_0 підсистеми $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ вибирають управління v^i, $i = \overline{1,m}$, які задовольняють нерівність

$$\phi_0(u, v) \leq \phi_0(u, \bar{v}) \ \forall \bar{v}^i \in G_i(u^i), \ i = \overline{1,m}, \tag{2.9}$$

тобто підсистеми $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ діють найгіршим чином для центра Q_0. Тоді для центра найкращим буде вибір керування $\bar{u} \in U$, яке задовольняє наступним співвідношенням

$$\phi_0(\bar{u}, \bar{v}) = \min_{v \in G(\overline{u})} \phi_0(\bar{u}, v) \geq \min_{v \in G(u)} \phi_0(u, v) \quad \forall u \in U, \tag{2.10}$$

де $G(u) = \prod_{i=1}^{m} G_i(u^i)$.

Вибір центром Q_0керування $\bar{u} \in U$ згідно умов (2.9)–(2.10) називають *принципом гарантованого результату*.

3.4. Прийняття рішень в умовах доброзичливості

Якщо припустити, що проявляючи доброзичливість до центру, підсистеми $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ у відповідь на керування $u \in U$центру вибирають найкращі для нього керування $\hat{v}\left(u^i\right), i = \overline{1, m}$, тобто

$$\phi_0\left(u, \hat{v}(u)\right) = \max_{v \in G(u)} \phi_0(u, v). \qquad (2.11)$$

Тоді природно вважати, що центр Q_0 буде вибирати своє керування $\hat{u}$ з умови

$$\phi_0\left(\hat{u}, \hat{v}(\hat{u})\right) = \max_{u \in U} \phi_0\left(u, \hat{v}(u)\right) = \max_{u \in U} \max_{v \in G(u)} \phi_0(u, v). \qquad (2.12)$$

Оскільки для будь-якого $u \in U$ виконується нерівність

$$\max_{v \in G(u)} \phi_0(u, v) \geq \min_{v \in G(u)} \phi_0(u, v),$$

то справджується також і наступна нерівність

$$\max_{u \in U} \max_{v \in G(u)} \phi_0(u, v) \geq \max_{u \in U} \min_{v \in G(u)} \phi_0(u, v),$$

яка стверджує, що діючи в умовах доброзичливості центр отримує більше значення критерію, ніж в умовах гарантованого результату.

. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Найпоширенішими типами задач прийняття рішень є задачі з неповною інформацією – задачі прийняття рішень в умовах невизначеності. Відсутність конкретних даних про умови прийняття рішень може частково компенсуватися статистичними даними (наприклад, оцінкою математичного сподівання невідомого параметра) або експертною оцінкою [15].

Ступінь неповноти інформації про ситуацію прийняття рішень може характеризуватися різними показниками. Уявляється доцільним використання ентропійного показника невизначеності, який є достатньо загальним як для статистичних, так і для експертних оцінок. Максимальне значення невизначеності характеризується апріорною ентропією $H_{апр}$, яка відповідає інтервальним оцінкам усіх умов прийняття рішення

$$H_{апр} = \sum_i \int_{y_{i\min}}^{y_{i\max}} \frac{1}{y_{i\max} - y_{i\min}} \log \frac{1}{y_{i\max} - y_{i\min}} d_{yi} = \sum_i \log(y_{i\max} - y_{i\min}).$$

В результаті отримання інформації I_y про умови прийняття рішення ентропія скорочується до залишкового значення $H_{апс}$, яке й визначає ступінь невизначеності умов прийняття рішення.

4.1. Статистичні методи прийняття рішень

За характером інформації, на основі якої приймається рішення, задачі прийняття рішень на основі статистичних даних можна розділити на групи:

1. Задачі прийняття рішень, в яких існує інформація про втрати від прийняття рішення на основі вхідних даних, але відсутні ймовірності появи цих даних;
2. Задачі прийняття рішень, в яких відомі як імовірнісні характеристики факторів, так і втрати від прийняття рішень;
3. Задачі прийняття рішень, в яких задані імовірності появи вхідних факторів, але відсутня інформація про втрати від прийняття рішення;
4. Задачі прийняття рішень, в яких використовуються дані про ймовірності появи альтернатив.

Результатом розв’язання задач першої групи стало створення теорії ігор, яка дозволяє визначити оптимальне рішення на основі мінімізації можливих втрат. Для розв’язання задач другої групи зазвичай використовується небайесівська теорія статистичних рішень. Метод розв’язання задач третьої групи базується на використані байесівського підходу до прийняття рішень. Задачі четвертої групи можна розв’язати за допомогою аксіом очікуваної корисності.

Розглянемо модель прийняття рішення в умовах ризику, яка враховує два фактори і описується такими елементами:

$$\{X, K, D, G\},$$

де X – множина значень параметра x (значення цього фактора піддаються спостереженню в процесі прийняття рішення); K – множина значень параметра k, який залишається невідомим в ході прийняття рішення; D – множина рішень; $G: K \times D$ – функція втрат, штраф, який сплачується при виборі рішення $d \in D$ в умовах значення k.

В переважній більшості задач процес прийняття рішення відбувається за відсутності повної інформації про корисність альтернатив. В таких випадках можуть використовуватися статистичні дані про реалізацію альтернатив, зокрема закон розподілу ймовірностей появи альтернатив.

Нехай Z – множина розподілів ймовірностей на множині альтернатив, а $Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$ – розподіли, які можна представити у вигляді лотереї

$$Lot = (p_1 d_1, p_2 d_2, \dots, p_n d_n), \tag{1.17}$$

де $p_1, p_2, \dots, p_n$ – імовірності здійснення альтернатив ($\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$); $d_1, d_2, \dots, d_n$ – рішення, що можуть бути прийняті.

Якщо кожному розподілу приписати числове значення очікуваної корисності $U(Z_1), U(Z_2), U(Z_3)$, для яких виконується нерівність $P \leq Q$ при $U(P) \leq U(Q)$, то для цих розподілів ймовірностей справедливі аксіоми „слабкого порядку” і транзитивності та аксіоми, що виключають аномалії у віддані переваги.

Аксіома 1. Для розподілів $Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$ мають місце такі відношення:

$$U(Z_1) > U(Z_2), U(Z_1) < U(Z_2), U(Z_1) = U(Z_2).$$

Аксіома 2. Якщо $U(Z_1) > U(Z_2)$, $U(Z_2) > U(Z_3)$, то $U(Z_1) > U(Z_3)$.

Аксіома 3. Якщо $U(Z_3) > U(Z_2) > U(Z_3)$ і $0 < q, p < 1$, то

$$pU(Z_1) + (1 - p)U(Z_3) < U(Z_2) <$$
$$< qU(Z_1) + (1 - q)U(Z_3).$$

Аксіома 3 є однією із форм запису “архімедової” аксіоми, що забороняє використання альтернатив, які надто переважають решту.

Аксіома 4. Якщо $U(Z_1) > U(Z_2) > U(Z_3)$ і $0 < \alpha < 1$, то
$$\alpha U(Z_1) + (1 - \alpha)U(Z_3) = U(Z_2)$$

4.2. Критерії прийняття рішень в теорії ігор

Розглянемо критерії прийняття рішень на прикладі гри з двома гравцями, відомої як гра з природою [34]. Гра з природою описує ситуацію прийняття рішень в умовах невизначеності, коли стратегії одного з гравців невідомі.

Нехай гравець 1 (особа, що приймає рішення) має m можливих рішень $d_1, d_2, \ldots, d_m$, а в гравця 2 (природи) є n можливих станів $k_1, k_2, .., k_n$. Тоді умови гри з природою задаються матрицею виграшів

$$A = \begin{pmatrix} & k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ d_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ d_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_m & a_{m1} & a_{2m} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця виграшів, або платіжна матриця характеризується верхньою і нижньою ціною гри. Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Верхня ціна гри знаходиться з формули:

$$\gamma = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Розглянемо основні критерії прийняття рішень, які використовуються для вибору оптимальної стратегії гравця.

1. *Критерій Вальда*

У відповідності з цим критерієм вибирається та стратегія, яка гарантує виграш, що збігається з нижньою ціною гри.

$$R = \max_i \min_j a_{ij}, \tag{1.21}$$

Вибране в такий спосіб рішення цілком виключає ризик. Це означає, що особа, яка приймає рішення не може зіштовхнутися з гіршим результатом, ніж той, на який вона орієнтується. Застосування цього критерію може бути виправдано, якщо ситуація, в якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

- про ймовірність появи стану y_j нічого не відомо;
- необхідно враховувати появою стану y_j;
- реалізується мала кількість рішень;
- не допускається ризик.

2. Критерій Гурвиця

Відповідно до цього критерію вибирається така стратегія, яка є проміжною між крайнім песимізмом та оптимізмом.

$$R = \max_j [\rho \cdot \min_i a_{ij} + (1-\rho) \cdot \max_i a_{ij}],$$

де ρ— коефіцієнт песимізму, що вибирається з інтервалу [0; 1].

При $\rho = 1$ критерій Гурвиця перетворюється в критерій Вальда (песиміста), а при $\rho = 0$ – у критерій максимуму. Чим гірші наслідки помилкових рішень, тим ρ ближче до 1.

Критерій Гурвиця висуває до ситуації, у якій приймається рішення, такі вимоги:

- про імовірність появи стану y_j нічого не відомо;
- необхідно враховувати появою стану y_j;
- реалізується лише мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

3. Критерій Севіджа

Відповідно до критерію Севіджа в якості оптимальної вибирається така стратегія, при якій величина ризику приймає найменше значення в найбільш невигідній ситуації:

$$R = \min_i \max_j (\max a_{ij} - a_{ij}).$$

Тут величину R можна трактувати як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані y_j замість варіанта u_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану, варіант.

4.3. Байєсівська модель прийняття рішень

Якщо задані ймовірності спільної появи x та k: $p_{XK}(x,k)$, то математичне сподівання функції втрат буде характеризувати ризик прийняття рішення

$$R = M\{G(x,k,d)\} =$$
$$\sum_{x \in X} \sum_{k \in K} \sum_{d \in D} G(x,k,d) f(d|x) p_{XK}(x,k),$$

де $f(d|x)$ – умовна щільність прийняття рішення d при певному значенні x, що визначає розв'язувальне правило.

Величина R називається середнім ризиком. Мінімізація середнього ризику проводиться шляхом вибору оптимального розв'язувального правила $f(d|x)$.

Крім середнього ризику на практиці часто використовують інші види ризику, які відрізняються способом усереднення втрат. Одним із них є байєсівський ризик, що розраховується за фомулою

$$R(q) = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x,k) G\big(k, q(x)\big).$$

Байєсівський ризик є очікуваним значенням втрат від прийняття рішення d, що відповідає заданому значенню x, тобто є оцінкою наслідків прийняття даного рішення d при заданому значенні x. Апостеріорний ризик є функцією рішення dі відрізняється цим від середнього ризику, який є функціоналом розв'язувального правила, а не самого рішення.

Розрахунок байєсівського ризику у випадку задач більшої розмірності зводиться до зміни форми запису інтегралів, що визначають математичні сподівання.

В теорії прийняття рішень з використанням байєсівського підходу існують різні думки щодо використання рандомізації в моделі прийняття рішень. Має місце теорема:

Теорема. Нехай X, K, D– скінченні множини, $p_{XK}: X \times K \to R$ – закон розподілу, $G: K \times D \to R$ – штрафна функція. Нехай $q_r: D \times X \to R$ – рандомізована стратегія, ризик якої

$$R_{rand} = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k) \sum_{d \in D} q_r(d/x) G(k, d).$$

В такому випадку існує детермінована стратегія $q: X \to D$, ризик якої

$$R_{det} = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p_{XK}(x, k) W\big(k, q(x)\big)$$

не більший, ніж R_{rand}.

4.4. Критерії прийняття рішень в небайєсівських задачах

Незважаючи на універсальність та відносну простоту байєсівського підходу, існує ряд задач прийняття статистичних рішень, які неможливо розв'язати таким способом. Цей факт обумовлений відсутністю інформації про можливі втрати від прийняття рішень або ймовірності спільної появи факторів, що враховуються в процесі прийняття рішення. Використання байєсівського підходу також неможливе у випадках, коли значення функції втрат вимірюються в різних системах одиниць.

Серед задач теорії рішень, які виходять за рамки байєсівського підходу через зазначені вище причини, найбільший практичний інтерес мають задача Неймана–Пірсона та мінімаксна задача.

Задача Неймана-Пірсона є класичною задачею теорії статистичних рішень. Суть задачі полягає у прийнятті рішення на користь однієї з двох гіпотез, стосовно стану об'єкта. Передбачається, що помилки прийняття рішень мають різне за важливістю значення. При цьому вимагається, щоб помилка неправильного рішення не перевищувала наперед задану величину

$$\begin{cases} \sum_{x \in X_2} p_{X/K}(x/d_1) \to min \\ \sum_{x \in X_1} p_{X/K}(x/d_2) \le \varepsilon \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 \cup X_2 \end{cases}$$

Для наведеної задачі Критерій Неймана–Пірсона можна сформулювати таким чином: найкращим є рішення, при якому мінімізуються помилки другого роду при заданій припустимій помилці першого роду.

$$P_2 = \int_{v_0} p_{X/K}(x/d_1)dx = min$$

При $P_1 = \int_{v_1} p_{X/K}(x/d_2)dx = \varepsilon,$

де ε – наперед задана величина.

Мінімаксна задача полягає у мінімізації максимальних втрат від прийняття рішення

$$\begin{cases} \max_{k \in K} P(k) \to min \\ P(k) = \sum_{x \notin X(k)} p_{X/K}(x/k) \end{cases},$$

де $P(k) = \sum_{x \notin X(k)} p_{X/K}(x/k)$ – умовна ймовірність неправильного рішення за умови, що об'єкт знаходиться в стані k.

Мінімаксний критерій оснований на припущенні про існування екстремуму виду $minmax(p(x,k))$.

4.5. Прийняття рішень в умовах нечіткості

На практиці в більшості випадків неможливо уникнути проблеми врахування неясної або неточної інформації про відомості, явища чи події. У реальних ситуаціях прийняття рішень ця неясність досить часто пов'язана з неповною визначеністю мети, обмежень, критеріїв. В таких випадках доцільно застосовувати теорію нечітких множин, що дала схему вирішення проблем, в яких суб'єктивні твердження або оцінка відіграють важливу роль при врахуванні факторів неясності або невизначеності.

Теорія нечітких множин бере свій початок у 60-х роках з робіт математика Лотфі А. Заде. Нечіткі алгоритми, що допускають використання нечітких інструкцій, дозволяють описувати наближені міркування і тому є корисним інструментом для наближеного аналізу систем і процесів прийняття рішень, які занадто складні для застосування загальноприйнятих кількісних методів. Важливим поняттям, що відноситься до теорії нечітких множин, є нечітка ентропія, що служить інтегральною характеристикою розмитості нечіткої множини. Зміна ентропії є основним інформаційним показником у моделях прийняття рішень.

Сьогодні теорія нечітких множин знаходить все більше використання на практиці. В області техніки теорія нечітких алгоритмів стимулює розвиток гнучких автоматизованих виробництв, зокрема роботів, здатних виконувати окремі інтелектуальні дії, що властиві людині.

Поштовхом до широкого використання нечіткої логіки стало доведення Б.Коско у 1994р. теореми про нечітку апроксимацію (FAT Fuzzy Approximation Theorem). Згідно з цією теоремою будь-яка математична система може бути апроксимована системою на нечіткій логіці. Крім того використання нечіткої логіки в поєднанні із штучними нейронними мережами, еволюційними алгоритмами та іншими методами штучного інтелекту дозволяє покращити результати вибору рішень за рахунок настроювання параметрів моделі прийняття рішення.

Нечіткою множиною C на деякій універсальній множині X прийнято називати сукупність пар виду $C(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а $\mu_C(x)$ являє собою функцію належності елемента x нечіткій множині C і визначає кількісну міру такої його належності. При цьому $\mu_C(x) \in [0,1]$.

З позицій нечіткої логіки можна інтерпретувати визначення функції належності $\mu_C(x)$ як кількісну міру істинності певного висловлювання x.

Нечітка множина ∅ називається порожньою, якщо функція належності її елементів дорівнює нулю на всій множині X, тобто

$$\boldsymbol{\mu_{\emptyset}(x)} = 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}.$$

Носієм supp A нечіткої множини A називається звичайна множина, яка задовольняє таким умовам:

$$supp\ A = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{\mu_A(x)} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Іншими словами, носієм нечіткої множини *A* є звичайна підмножина універсальної множини *X*, утворена з елементів, для яких функція належності до множини *A* є більшою за нуль, тобто $\mu_A(x) > 0$.

Оскільки нечіткі множини являють собою певне узагальнення поняття звичайних (чітких) множин, операції над ними також можуть розглядатись як відповідне узагальнення понять операцій над звичайними множинами, причому найхарактернішою відмінністю тут стає необхідність визначення правил обчислення функції належності для результату кожної конкретної операції над множинами. Це зауваження цілком стосується і застосування логічних операцій над висловлюваннями з нечіткою мірою істинності.

Для того, щоб ввести поняття операцій, розглядатимемо дві нечіткі множини A і B на універсальній множині X з відповідними функціями належності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$.

Об'єднанням нечітких множин A і B на універсальній множині X називають нечітку множину $C = A \cup B$ з функцією належності, що має вигляд

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Графік функції належності нечіткої множини, що є результатом об'єднання двох нечітких множин, обгинає зверху графіки функцій належності цих множин.

Перетином нечітких множин A і B на універсальній множині X називають нечітку множину $C = A \cap B$ з функцією належності, яка обчислюється за таким правилом:

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Графік функції належності нечіткої множини, яка є результатом перетину двох нечітких множин, обгинає знизу графіки функцій належності цих множин.

Доповненням нечіткої множини A в універсальній множині X називають нечітку множину $\overline{A}$ з функцією належності

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X.$$

Різницею нечітких множин A і B на універсальній множині X називають нечітку множину $C = A \backslash B$ з функцією належності, що має вигляд

$$\mu_C(x) = \mu_{A\setminus B}(x) = \begin{Bmatrix} \mu_A(x) - \mu_B(x), коли \mu_A(x) > \mu_B(x) \\ 0, коли \mu_A(x) \le \mu_B(x) \end{Bmatrix}.$$

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ нечітких множин $A_1, A_2, \ldots A_n$ на множествах $X_1, X_2, \ldots X_n$ прийнято називати нечітку множину A на декартовому добутку $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, елементами якої є набори $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а функція належності має такий вигляд:

$$\mu_A(x) = \min_{x \in X}\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots \mu_{A_n}(x)\}.$$

Задача прийняття рішень в нечітких умовах відрізняється від задачі прийняття рішень в загальному вигляді тим, що один або декілька елементів моделі прийняття рішень задаються нечіткою множиною. Необхідно вибрати рішення, яке б задовольняло нечітким обмеження $\tilde{C} \subseteq D$, задані на множині рішень, та максимізувало критерій ефективності $\tilde{G} \subseteq Y$, заданий на множині станів системи. Залежність стану системи від прийнятого рішення описується нечітким відображенням $\tilde{\phi}: D \to Y$.

В залежності від складових моделі прийняття рішення, які визначаються з певним ступенем невизначеності, можна виділити такі підходи прийняття рішень в нечітких умовах:

- прийняття рішень за принципом Белмана–Заде;
- прийняття рішень за допомогою нечіткої теорії очікуваної корисності;
- прийняття рішень за допомогою нечіткого логічного висновку (задачі ситуативного управління).

Традиційний підхід до прийняття рішення на основі нечіткої логіки базується на принципі Белмана–Заде, який розглядає нечітке рішення як об’єднання нечітких цілей та обмежень.

Якщо на множині альтернатив $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ задана нечітка функція мети $\tilde{G}$ та нечітке обмеження $\tilde{C}$ (відображення $\tilde{\phi}$ є тотожним), то нечітким рішенням цієї задачі виступає множина, утворена в результаті перетину нечіткої мети та обмеження $\widetilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$ (мінімум їх функцій належності).

Якщо в задачі прийняття рішення використовується кілька обмежень та функцій мети, то нечітке рішення є нечіткою множиною, утвореною в результаті об'єднання всіх обмежень та функцій мети.

$$\widetilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \dots$$

Оптимальною вважається альтернатива $d \in D$, яка має максимальний ступінь належності нечіткому рішенню $\max_{d \in D} \mu_D(d)$.

Якщо відображення $\tilde{\phi}$ не є тотожним, то нечітке рішення знаходиться як перетин нечітких обмежень $\tilde{C}$і прообразу $\tilde{g}$, який є результатом відображення мети $\tilde{G}$ на множину альтернатив.

Прийняття рішень за принципом Белмана–Заде передбачає використання функції мети, яка виступає в якості критерію прийняття рішення. Проте на практиці в складних системах досить важко визначити критерій прийняття рішення. В таких ситуаціях використовуються суб'єктивні оцінки корисності альтернатив, отримані від експертів.

Один із підходів прийняття рішень в задачах полягає у порівнянні альтернатив на основі деяких відношень. Головною перевагою цього підходу є можливість пошуку оптимального рішення навіть за відсутності даних про результат порівняння деяких альтернатив. Це досягається за рахунок використання нечітких відношень, що характеризує ступінь виконання операцій над альтернативами. Ступінь належності нечітких відношень описується функціями:

- нечітке відношення байдужості
$$\mu_R(d_1,d_2) = max[\,1 - max\{\,\mu_R(d_1,d_2);\mu_R(d_2,d_1)\};$$
$$min\{\,\mu_R(d_1,d_2);\mu_R(d_2,d_1)\}]$$
- нечітке відношення еквівалентності:
$$\mu_R(d_1,d_2) = min(\,\mu_R(d_1,d_2);\mu_R(d_2,d_1));$$
- нечітке відношення строгої переваги:
$$\mu_R(d_1,d_2) =$$
$$\begin{cases}\mu_R(d_1,d_2) - \mu_R(d_2,d_1), \textit{якщо} \mu_R(d_1,d_2) \geq \mu_R(d_2,d_1) \\ 0, \textit{віншомувипадку}.\end{cases}$$

Використання цих відношень дозволяє знайти найкращу альтернативу або підмножину оптимальних альтернатив.

Нечіткий логічний висновок являє собою апроксимацію залежності між входами і виходами системи за допомогою нечіткої бази знань та операцій над нечіткими множинами. Відображенням ϕ множини станів Y у множину рішень D виступає база знань, яка складається з набору правил. Оптимальність прийнятого в такий спосіб рішення залежить від точності функцій належності величин та бази знань. В більшості випадків прийнятна точність рішень досягається за рахунок настроювання параметрів функцій та вагових коефіцієнтів правил на основі вибірки експериментальних даних.

Процес фазифікації полягає у перетворенні вхідної величини у нечітку форму шляхом визначення ступеня належності значення вхідної величини її термам. Слід зауважити, що процес фазифікації передбачає попередній збір експертної інформації та використання процедур її обробки для побудови функцій належності вхідних величин.

Розроблено кілька алгоритмів нечіткого логічного висновку, які переважно відрізняються правилами висновку та здійсненням логічних операцій. На сьогоднішній день найбільш поширеними є моделі нечіткого логічного висновку Сугено і Мамдані.

Умова правила характеризує належність вхідної величини її термам. Висновок визначає значення вихідної величини, причому це значення може бути чітким, нечітким або деяким класом.

В результаті досліджень точності процесу прийняття рішень на основі нечіткої інформації було встановлено зниження точності результату при кількості вхідних величин більше 7 ± 2 [102]. Тому в моделюванні складних систем все частіше використовується ієрархічна система нечіткого логічного висновку.

Побудова і настроювання нечіткої бази знань є однією з головних задач при розробці нечіткої системи.

Якщо вихідна величина описується нечіткою множиною, то останній етап прийняття рішення в нечіткій системі полягає у дефазифікації вихідної величини. Процедура дефазифікації передбачає перетворення вихідної величини у число. Існують різні методи дефазифікації, проте найбільш поширеним є метод центра тяжіння, який описується формулою

$$y = \frac{\int \mu(y) \cdot y dy}{\int \mu(y) dy},$$

де $\mu(y)$ – функція належності вихідної величини y.

. Методи узгодження думок експертів

Експертні методи призначені для прогнозування якісних і кількісних характеристик, розвиток яких або повністю, або частково не підлягає математичній формалізації через відсутність достатньої і вірогідної статистики.

Суть експертних методів прогнозування полягає в тому, що на основі оцінок висококваліфікованих спеціалістів щодо конкретної проблеми (експерти або групи спеціалістів експертної групи), які сформовані за певними правилами для вирішення задачі прогнозів, робляться висновки щодо шляхів розвитку об'єкта прогнозування.

Судження експерта або експертної групи відносно поставленої задачі прогнозу називається *експертною оцінкою*.

Залежно від форм роботи з експертами експертні методи прогнозування можна розподілити на дві групи: методи індивідуальної експертної оцінки і методи колективної експертної оцінки.

Методи індивідуальної експертної оцінки – методи прогнозування, які засновані на використанні як джерела інформації одного експерта. Найчастіше використовуються такі два методи формування прогнозу: інтерв'ю та аналітичне експертне оцінювання.

Метод інтерв'ю передбачає бесіду прогнозиста з експертом, в ході якої прогнозист відповідно до заздалегідь розробленої програми ставить перед експертом питання щодо перспектив розвитку об'єкта прогнозування. Схема бесіди: питання-відповідь. При цьому експерт керується в основному тільки апріорними уявленнями щодо об'єкта прогнозування. Успіх такої оцінки значною мірою залежить від здібності експерта експромтом давати відповіді на питання, експертиза яких проводиться.

Метод аналітичних експертних оцінок заснований на отриманні інформації оцінок щодо прогнозованого об'єкта шляхом логічного аналізу. Аналітичні експертні оцінки припускають тривалу і старанну самостійну роботу експерта над аналізом тенденцій, оцінкою стану і шляхів розвитку об'єкта прогнозування. Цей метод дає можливість експерту використовувати всю необхідну йому інформацію про об'єкт прогнозування. Свої висновки експерт оформлює у вигляді доповідної записки.

Основною перевагою цих методів є можливість максимального використання індивідуальних здібностей експерта, а також незначний психологічний тиск на експерта. Однак ці методи мало придатні для прогнозування найбільш загальних стратегій через обмеженість знань одного спеціаліста-експерта.

З метою підвищення обґрунтованості прогнозів для їх розроблення залучаються декілька експертів, оцінки яких зіставляються й об'єднуються між собою, створюючи колективну експертну оцінку.

Методи колективної експертної оцінки засновані на виявленні узагальненої оцінки експертної групи шляхом аналізу та обробки індивідуальних незалежних оцінок експертів, що входять до складу групи.

В основі застосування методів колективної експертної оцінки лежить гіпотеза щодо наявності у експертів умінь оцінити з достатнім ступенем вірогідності: важливість і знання проблеми фактора, параметра, напряму розвитку, ознаки тощо ;час здійснення тієї чи іншої події; значення параметрів, які прогнозуються; доцільність вибору одного з альтернативних шляхів розвитку об'єкта прогнозування і т. ін.

Методи колективної експертної оцінки за ознакою способу отримання інформації від експертів умовно можна розподілити на дві великі групи: методи групової експертизи і методи анкетування.

Найбільш часто використовуються такі методи групової експертизи : експертних комісій, колективної генерації ідей (метод "мозкової атаки") тощо.

Метод експертних комісій колективного експертного оцінювання полягає в суцільній роботі об'єднаних в комісію експертів, які розробляють документ щодо перспектив розвитку об’єкта прогнозування.

Метод генерації ідей ("мозкових атак") заснований на стимулюванні творчої діяльності експертів шляхом сумісного обговорення конкретної проблеми. При цьому обговорення регламентується певними правилами: забороняється оцінка ідей, що висуваються; обмежується час одного виступу; припускаються багаторазові виступи кожного експерта; пріоритет щодо виступу має експерт, який розвиває попередню ідею; обов’язково фіксуються всі ідеї; оцінка ідей, що висунуті, здійснюється на наступних етапах.

Відомі *три різновиди методу колективної генерації ідей* ("мозкової атаки"): метод прямої групової експертизи ("пряма мозкова атака "), метод "групової згоди" і метод "оперативної творчості".

Метод прямої групової експертизи заснований на гіпотезі про те, що серед ідей, запропонованих експертами, є принаймні декілька добрих. Порядок проведення прямої групової експертизи такий: перед групою експертів різних спеціальностей ставиться проблема, яка може мати декілька варіантів рішень. Мета методу полягає в збиранні ідей щодо поставленої проблеми. Потім в декілька етапів проводиться їх аналіз, відбираються найбільш раціональні і виключаються непридатні. Найбільш часто цей метод застосовується на рівні зовнішньополітичних і стратегічних рішень, а також при воєнно-економічному і воєнно-технічному прогнозуванні.

Метод "групової згоди" заснований на проведенні групової експертизи з метою визначення згоди й єдності поглядів щодо прогнозованого питання. У цьому процесі беруть участь, як правило, шість експертів. Встановлено, що збільшення кількості експертів більше шести веде до збільшення часу та ускладнює одержання згоди, не збільшуючи суттєво кількості запропонованих ідей. При зменшенні кількості експертів можливо, що будуть враховані не всі обставини та знижений ступінь точності прогнозу.

Метод "операційної творчості" припускає, що суть проблеми в цілому і можливі підходи до її вирішення відомі тільки керівнику роботи. У цьому випадку опитування експертів потрібне для того, щоб переконатися, що підхід до вирішення проблеми є правильний, а також отримати упевненість в роботі.

Методи анкетування – методи колективної експертної оцінки, в яких для опитування експертів використовуються анкети. Анкети можуть містити: питання, коли від експертів потрібно дати однозначну відповідь щодо стану прогнозованого об'єкта; виклад припустимої майбутньої картини деяких подій, а від експерта вимагається тільки підтвердити або відкинути їх; прохання оцінити важливість факторів (ознак, параметрів, напрямів розвитку тощо), кількісне значення прогнозованого параметра або границі, у яких він може знаходитись в певний момент у майбутньому.

Опитування експертів здійснюється за допомогою анкет. В анкеті пропонується дати кількісну оцінку кожному фактору (ознаці, параметру, напряму розвитку тощо), які входять до задачі прогнозування. Позначимо, наприклад, ці фактори Y_1, Y_2, $\ldots Y_j, \ldots Y_n$. Кожний з цих факторів Y_j може мати тільки якісну визначеність або може мати кількісний вираз (наприклад, величини прогнозованого параметра). В обох випадках експерт зобов'язаний дати кількісну оцінку. Для факторів якісної визначеності така оцінка має характер кількісного порівняння важливості цих факторів, яка являє собою ранг або бал певної шкали. Для факторів (параметрів) кількісної визначеності оцінка дається числом, яке відповідає запропонованому значенню цього фактора (параметра).

З методів анкетування найчастіше використовуються: метод шкальних оцінок, метод парних порівнянь та метод Дельфі.

Обробка результатів експертного опитування залежить від виду інформації, що отримують від експертів.

Якщо кожен із m експертів, які беруть участь в опитуванні, дає на запитання анкети одне значення C_{ij} (i – номер експерта) прогнозованої величини j, то за результатами обробки m значень C_{ij} можуть розраховуватися такі основні показники:

середнє значення експертних оцінок (точковий прогноз), яке характеризує узагальнену думку експертів:

$$\widetilde{M}[Y_j] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}; \qquad (3.1)$$

дисперсію оцінок, яка характеризує розкидання думок (точкового прогнозу) експертів відносно середнього значення:

$$\widetilde{D}[Y_j] = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(C_{ij} - \widetilde{M}[Y_j]); \qquad (3.2)$$

середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{\sigma}[Y_j] = \sqrt{\widetilde{D}[Y_j]}; \qquad (3.3)$$

коефіцієнт варіації, який характеризує ступінь однодушності експертів щодо оцінки j фактора (параметра):

$$V_j = \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\widetilde{M}[Y_j]}. \qquad (3.4)$$

Чим більший коефіцієнт V, тим більш є однаковою думка експертів.

Показники M_j та σ_j дозволяють визначити інтервальний прогноз. Для цього визначаються розміри області, в яку із заданою імовірністю попадає майбутнє значення прогнозованої величини:

$$\widetilde{M}[Y_j] - \varepsilon_1 \le C_j \le \widetilde{M}[Y_j] + \varepsilon_2. \qquad (3.5)$$

Величини, що визначають довірчий інтервал ε_1 та ε_2, залежать від значення довірчої імовірності β і закону розподілу суми величин C_j і розраховуються за правилами, що викладені в третій главі підручника. Так, якщо закон розподілу C_jможна вважати нормальним, то для j-ї прогнозованої величини:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = t_\beta \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\sqrt{m}}; \qquad (3.6)$$

де $t_\beta = arg\,\Phi * \left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ – величина, яка обернена нормальній функції розподілу $\Phi * (x)$, обчислюється для заданого значення імовірності β.

При обробці експертних даних здійснюється також оцінка суперечності думок експертів. Розглянемо поняття "суперечність" думки колективного експерта щодо узагальненої думки всіх експертів. Припустимо, що думка k-го експерта C_{kj}є крайньою серед думок m експертів. У зв'язку з тим, що дійсне значення дисперсії D_j, як правило, невідоме, а відома лише її оцінка $\widetilde{D}_j$, то для математичної оцінки суперечності думки k-го експерта обчислимо імовірність того, що величина $t = \frac{C_k - \widetilde{M}[Y_j]}{\widetilde{\sigma}[Y_j]}$ буде більше деякого числа γ:

$$\alpha = P\left(\frac{C_k - \widetilde{M}[Y_j]}{\widetilde{\sigma}[Y_j]} > \gamma\right). \qquad (3.7)$$

Якщо ця імовірність достатньо велика (наприклад більша 0,05 – 0,10), то гіпотеза щодо анормальності C_{kj}може бути відкинута, у протилежному випадку – прийнята. У зв'язку з цим суперечною вважається така оцінка C_{kj}, при якої виконується нерівність

$$C_{kj} - \widetilde{M}_j[Y_j] > \gamma\tilde{\sigma}[Y_j] \qquad (3.8)$$

з імовірністю, меншою деякого значення α'. Значення α' береться таким, що дорівнює 0,1 – 0,05.

Виконання умови (3.8) при $\alpha < \alpha'$ є математичною ознакою наявності суперечної думки серед групи експертів. Слід підкреслити, що ця ознака може використовуватися тільки тоді, коли розподіл оцінок експертів можна вважати нормальним.

Якщо крайнє значення (точковий прогноз колективного експерта) буде суперечним, то здійснюється перевірка наступного найближчого до нього значення доти, поки не буде показана несуперечність чергового значення.

Виконання умови суперечності (або несуперечності) залежить від величини імовірності α', тому ця ознака є умовною і повинна доповнюватися логічним аналізом при врахуванні вимог до точності прогнозу. При обробці результатів експертного опитування необхідно мати на увазі також те, що колективний експерт краще за інших уявляє розвиток прогнозованого об'єкта (процесу) у майбутньому і тому “випадає” із області, що характеризує думки його колег. Тому до крайніх значень експертних оцінок необхідно відносити дуже уважно.

Таким чином, послідовність оцінки результатів експертизи щодо майбутнього значення величини C_j така:

визначається узагальнена думка експертів (точковий прогноз);

визначається дисперсія і середнє квадратичне відхилення думок експертів;

здійснюється оцінка суперечності крайніх оцінок за допомогою логічного аналізу й умови (3.8);

при несуперечності думок експертів результати опитування оформлюються як точковий (3.1) і інтервальний (3.5) прогнози;

при суперечних думках проводиться другий тур опитувань (з обговоренням результатів думок першого туру).

Часто використовується така форма оцінок, коли кожний з m експертів дає два (мінімальне C і максимальне C_{ij}) значення, між якими, за думкою експерта, буде знаходитись майбутнє значення прогнозованої величини. Для обробки результатів опитування, насамперед, необхідно прийняти вид закону розподілу прогнозованої величини між крайніми оцінками кожного експерта. Як такий апріорний закон розподілу, наприклад, може вибиратися закон рівномірного розподілу:

$$f(C_{ij}) = \frac{1}{{C_{ij}}^{{max_{ij}}^{min}}, {C_j}^{{max_j}_j^{min}}}.$$

При цьому середнє значення (точковий прогноз), що дається i-м експертом, визначається за формулою

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{2} * \left(C_{ij}{}^{max_{ij}{}^{min}} \right). \tag{3.9}$$

Точковий прогноз за результатами узагальнення думок всіх експертів визначається за формулою

$$\widetilde{M}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \bar{C}_{ij} \ . \tag{3.10}$$

Дисперсія прогнозу і коефіцієнт варіації визначаються за формулами (3.2) (3.4) відповідно.

5.1. Метод аналізу ієрархій

Одним із популярних методів аналізу експертних оцінок є метод аналізу ієрархій (МАІ), розроблений американським математиком Т. Сааті. МАІ є систематичною процедурою для ієрархічного представлення елементів, що визначають суть будь-якої проблеми. Сутність методу полягає в декомпозиції проблеми на більш прості складові частини і подальшому опрацюванню послідовності міркувань особи, що приймає рішення, за парними порівняннями. У результаті може бути виражений відносний ступінь взаємодії (залежності) елементів в ієрархії. Ці взаємозалежності потім виражаються чисельно. Метод аналізу ієрархій включає процедури синтезу множини порівнянь, одержання пріоритетності чи важливості критеріїв і знаходження альтернативних рішень. Отримані в такий спосіб значення є оцінками в шкалі відношень (залежностей) і відповідають так званим жорстким оцінкам.

Розв’язання будь-якої проблеми є процес поетапного встановлення пріоритетів чи вагових коефіцієнтів. На першому етапі виявляються найбільш важливі елементи проблеми (задачі), на другому – найкращий критерій (спосіб чи засіб) перевірки залежності кінцевого результату від елементів; наступним етапом має бути вироблення альтернативних рішень й оцінка їх якості. Весь процес піддається перевірці та переосмисленню, поки не буде впевненості, що процес охопив усі важливі характеристики, необхідні для уявлення структури вирішення проблеми (задачі). Процес може бути проведений над послідовністю ієрархій: у цьому випадку результати, отримані в одній з них, використовуються в якості вхідних даних при вивченні наступної. Запропонований метод дозволяє синтезувати процес вирішення такої багатоступінчастої задачі.

У найбільш елементарному вигляді ієрархія будується з вершини (мети чи цілей – з погляду проектування), через проміжні рівні (критерії, від яких залежать наступні рівні) до найнижчого рівня (котрий звичайно є переліком альтернатив – проектів).

Ієрархія вважається повною, якщо кожний елемент заданого рівня функціонує як критерій для всіх елементів нижчого рівня. У протилежному випадку ієрархія – неповна.

Закон ієрархічної безперервності потребує, щоб елементи нижнього рівня ієрархії були порівнянні попарно стосовно елементів наступного рівня і т.д. аж до вершини ієрархії.

Метою побудов є одержання пріоритетів чи вагових коефіцієнтів елементів на нижньому рівні, які щонайкраще відбивають відносний вплив на вершину ієрархії.

Після ієрархічного відображення проблеми виникають питання визначення пріоритетів чи вагових коефіцієнтів, тобто критеріїв, і оцінки кожної з альтернатив за критеріями. Опишемо коротко цю процедуру.

Нехай $O_1,\ O_2,\ O_3, \dots, O_n$ – множина з n елементів і $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \dots, \omega_n$ – відповідно їхні реальні значення важливості або пріоритетності. Порівняємо важливість або пріоритетність кожного елемента з важливістю або пріоритетністю елемента множини стосовно загальної для них властивості або мети (табл. 3.1**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Таблиця 3.1 – Таблиця порівнянь елементів "O" за їхньою важливістю чи пріоритетністю щодо "Мети"

Мета	O_1	O_2	O_3	…	O_n
O_1	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_1}{\omega_n}$
O_2	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_2}$	$\frac{\omega_2}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_2}{\omega_n}$
…	…	…	…	…	…
O_n	$\frac{\omega_n}{\omega_1}$	$\frac{\omega_n}{\omega_2}$	$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_n}{\omega_n}$

Тоді реально матриця порівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Далі вирішується задача знаходження вектора $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$.

Скорочено матриця попарних порівнянь O розміром ($n{\times}n$) має вигляд:

$O = \left\| \alpha_{ij} \right\|_{n,n}$,

причому $\alpha_{ii} = 1$, $\alpha_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ij}}$, де $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

На практиці елементи в матриці порівнянь визначаються експертами у відповідності до шкали відносної важливості (пріоритетності) запропонованої Т. Сааті. В методі Сааті для оцінки компонент рекомендується спеціальна шкала від 1 до 9, в якій компонентів рівній важливості ставиться у відповідність одиниця, при помірному перевагу - 3, при істотному перевагу - 5, значну перевагу - 7 і дуже сильному перевагу - 9. Значення 2 , 4,6, 8 використовуються як проміжні між двома сусідніми компонентами, які отримали оцінки 1, 3, 5, 7, 9 відповідно.

Коли проблема подана ієрархічно, матриця складається для порівняння відносної важливості чи пріоритетності критеріїв на другому рівні стосовно загальної мети на першому рівні. Подібні матриці повинні бути побудовані для парних порівнянь кожного елемента на третьому рівні стосовно критеріїв (елементів) другого рівня. Матриця складається, якщо записати порівнювану мету (або критерій) вгорі і перерахувати порівнювані елементи праворуч і вниз (табл. 3.1).

З групи матриць попарних порівнянь формується набір локальних пріоритетів чи вагових коефіцієнтів, що виражають відносний вплив множини елементів на елемент рівня, що примикає згори. Знаходять відносну важливість чи пріоритетність кожного окремого елемента через "розв'язання" матриць, кожна з яких має обернено симетричні значення. Зміст таких розрахунків полягає в тому, що вони визначають спосіб кількісного (числового) значення порівняльної важливості чи пріоритетності елементів у проблемній ситуації.

Таблиця 3.2 − Шкала відносної важливості (пріоритетності)

Інтенсивність відносної важливості	Визначення	Пояснення
1	Елементи однаково важливі (пріоритетні)	Рівний внесок двох елементів в досягнення мети

3	Незначна перевага одного над іншим	Є умови, що надають легку перевагу одного над іншим
5	Істотна перевага	Існують вагомі факти, що один істотно важливіший від іншого
7	Явна перевага одного над іншим	Є беззаперечні факти преваг одного над іншим
9	Дуже сильна перевага	Очевидність переваги одного над іншим не викликає сумнівів
2, 4, 6, 8	Проміжний результат рішення між двома сусідніми міркуваннями	Застосовується в компромісному випадку
Обернені розміри приведених вище чисел	Якщо при порівнянні одного елементу з іншим отримано одне з вище зазначених чисел (наприклад, 3), то при зворотному порівнянні елементів одержимо зворотне число (тобто 1/3)	

Необхідно знайти власне значення та власний вектор матриці О, використавши наближені методи.

Украй важливим елементом даної моделі визначення коефіцієнтів важливості чи пріоритетності порівнюваних елементів є знаходження, так званого, індексу узгодженості (ІУ), який дає інформацію про порушення числової та транзитивної матриці порівнянь. Тому цей індекс можна розглядати як показник “близькості до узгодженості”. Тобто похибки співвідношень:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ij}\alpha_{jk}, k = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}. \qquad (3.12)$$

Для цього, використовуючи відхилення максимального власного числа від розмірності матриці λ_{max}, будуємо величину, звану індексом узгодженості ІУ $= \lambda_{max}$, де n – число порівнюваних елементів. Потім порівнюємо її з відповідним індексом, отриманим для матриці, побудованої випадковим чином, і отримуємо відношення узгодженості *ВУ=ІУ/ВУ*. Випадкові узгодженості для матриць різного порядку вибираються з таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 − Значення середньої випадкової узгодженості для випадкових назад симетричних матриць різного порядку

Розмір матриці n×n	3	4	5	6	7	8	9	10
Середня випадкова узгодженість	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Прийнятною є *ВУ* не більше 10%. В деяких випадках можна допустити 20%, але не більш. Інакше необхідно провести переоцінку відповідної матриці.

Подібні обчислення проводяться для всіх рівнів і груп в ієрархії.

Останнім кроком є обчислення загальної ваги варіанту вирішення шляхом послідовного зважування матриці-строки вагів рівня (варіантів рішень), що пролягає нижче, компонентами матриці-строки вагів вищерозміщеного рівня (характеристик).

При участі в роботі над проектом декількох експертів можна використовувати геометричне середнє судження, якщо учасники не хочуть дебатів. Інакше можна одержати індивідуальні матриці-строки вагів і за відповідь взяти їх геометричне середнє.

Після перевірки *ВУ* необхідно приступити до синтезу пріоритетів. Пріоритети синтезуються, починаючи з другого рівня до низу. Локальні пріоритети перемножують на пріоритет відповідного елементу на вищестоящому рівні і підсумовують за кожним елементом відповідно до значень коефіцієнтів важливості чи пріоритетності кожного з елементів, на які він впливає у кожному рівні ієрархії.

Розглянемо лише стислий виклад етапів МАІ. Зауважимо, що окремим етапам в одних задачах можна приділяти більше уваги, ніж в інших.

Формулювання проблеми (задачі).

Побудова ієрархії від вершини (мети чи цілей – із погляду керування), через проміжні критерії (від яких залежать наступні рівні), до нижнього рівня (котрий, як правило, є переліком альтернатив).

Побудова множини матриць парних порівнянь для кожного з нижніх рівнів – по одній матриці для кожного елемента верхнього рівня. Цей елемент називають цільовим стосовно елемента, що знаходиться на нижньому рівні, тому що елемент нижнього рівня впливає на розташований вище елемент. У повній простій ієрархії будь-який елемент впливає на кожний елемент верхнього рівня. Елементи будь-якого рівня порівнюються один з одним щодо їхнього впливу на верхній елемент. Таким чином, одержують квадратну матрицю порівнянь. Попарні порівняння проводяться в термінах домінування одного з елементів над іншим. Ці порівняння потім виражаються в цілих числах за шкалою Сааті.

На етапі 3 для одержання кожної матриці потрібно $n(n-1)/2$ суджень (нагадаємо, що при кожному попарному порівнянні автоматично приписуються обернені числові значення).

Після проведення всіх попарних порівнянь визначається індекс узгодженості (*ІУ*) і відношення узгодженості (*ВУ*).

Етапи 3, 4 і 5 проводяться для всіх рівнів і груп в ієрархії.

Потім використовують ієрархічний синтез для зважування власних векторів за коефіцієнтами важливості чи пріоритетності критеріїв і обчислюють суми за усіма відповідними зваженими компонентами власних векторів кожного рівня ієрархії, що лежить нижче.

Узгодженість усієї ієрархії знаходять, перемножуючи кожний індекс узгодженості ІУ на пріоритет чи коефіцієнт важливості відповідного критерію і сумуючи отримані числа.

Результат потім розділяють на вираз такого ж типу, але із середньою випадковою узгодженістю, що відповідає розмірам кожної зваженої за пріоритетами матриці (див. табл. 3.4). Відзначимо, по-перше, що прийнятною є відносна узгодженість біля 10% або менше. У противному випадку якість суджень варто поліпшити, переглянувши спосіб чи засіб, за яким задаються питання при проведенні парних порівнянь. Якщо це не допоможе, то задачу варто більш точно структурувати, тобто групувати аналогічні елементи під більш значущими критеріями. Потрібно повернутися до етапу 2, навіть коли перегляду вимагають тільки сумнівні частини ієрархії.

При проведенні оцінок варто брати до уваги всі порівнювані елементи, щоб порівняння були релевантними. Неважко переконатися в тому, що для проведення обґрунтованих чисельних порівнянь не варто порівнювати більше ніж 7–9 елементів. У такому випадку маленька похибка в кожному відносному коефіцієнті змінює її не дуже суттєво. Якщо працюють з більш широкими групами порівнюваних елементів, то необхідно скористатися додатковими рівнями (групами) ієрархічної декомпозиції. Елементи групуються (у якості першої оцінки) у групи додаткового порівняння приблизно до 7 елементів у кожному. Процедура повторюється поки всі елементи не будуть порівняні подібним чином.

5.2. Метод Дельфі

Одним із перспективних методів прогнозування є метод Дельфи. В методі Дельфи замість колективного обговорення проблем проводиться індивідуальне опитування експертів звичайно в формі анкет для обчислення відносної важливості і термінів здійснення подій.

В основу методу Дельфи покладені такі положення:

- питання, що ставляться перед експертами, повинні допускати можливість відповіді у вигляді числа;
- експерти повинні мати достатньо інформації для того, щоб дати оцінку;
- відповідь на кожне питання (оцінка) повинна обґрунтовуватися експертом.

Процедура проведення опитування проводиться в чотири тури. Під час кожного туру експерт повинен висловлювати свою думку у вигляді числа за заздалегідь підготовленою шкалою оцінок.

Під час першого туру експерт повинен дати оцінку подіям, перелік яких розроблений аналітиком. Після першого туру опитувань аналітики проводять статистичну обробку отриманих оцінок, уточнюють перелік подій та аналізують оцінки. Припустимо, що від експертів отримали деяке число оцінок. Ці оцінки упорядковуються, наприклад, у порядку зменшення. Визначається медіана, за яку беруть середній член ряду, по відношенню до якого число оцінок з початку та з кінця ряду буде однаковим.

Діапазони цих квартилів у першому наближенні дорівнює значенням оцінок ряду в інтервалі, який дорівнює 25% від початку і 25% від кінця ряду.

Таким чином, медіана і квартилі створюють на осі ряду чотири інтервали, серед яких двом середнім віддається перевага.

Показники, що отримані таким чином, беруться за характеристики розподілу оцінок: медіана є характеристикою групової відповіді, а діапазон середніх квартилів – показниками розкидання індивідуальних оцінок.

Після першого туру кожному експертові повідомляється значення медіани і розмах між крайніми квартилями. Експертів, оцінки яких попали в крайні квартилі, просять обґрунтувати, тобто пояснити причини розходження з груповою думкою. Експерти можуть наводити будь-які аргументи (такі ж самі, які б приводили під час дискусії). Різниця полягає тільки в тому, що ці аргументи анонімні. Експерти можуть переглянути свою думку і при бажанні виправити оцінки. З отриманим обґрунтуванням знайомлять решту експертів, не визначаючи при цьому чиї вони. Така процедура дозволяє всім експертам враховувати обставини, які вони могли випадково не помітити, або якими зневажили в першому турі опитування.

Потім проводиться другій тур, здійснюється статистична обробка оцінок, з результатами якої знову знайомлять експертів. Всі експерти під час другого туру повинні обґрунтовувати свої оцінки, врахувати заперечення і прокоментувати їх.

Після третього туру опитування і відповідної статистичної обробки оцінок експертів, оцінки яких знову не ввійшли в інтервал між крайніми квартилями, просять надати контраргументи на користь своїх оцінок. На четвертому етапі експертизи всі обґрунтування знову доводяться до експертів, які мають останню можливість скорегувати свої відповіді. Медіана цих остаточних відповідей і береться за оцінку, найбільш близьку до єдиної думки групи експертів. Якщо експерти приходять до згоди раніше, наприклад після другого туру, то проводити всі чотири тури недоцільно.

Практика показує, що основні результати використання методу Дельфи полягають у наступному. Типовим для першого туру опитування є широке розкидання індивідуальних оцінок. За допомогою здійснення ітерацій і оберненого зв’язку індивідуальні відповіді сходяться, а групова відповідь (медіана остаточних індивідуальних оцінок) стає точнішою.

Недоліками методу є необхідність значних витрат часу на процедуру експертизи, а також неможливість прямого обговорення думок експертів.

Список рекомендованих джерел

1. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983. –512 с.
2. *Волошин О. Ф., Мащенко С. О.* Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник. –К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. –304 с.
3. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. –М.: Наука, 1971. –384 с.
4. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. –М.: Наука, 1976. –328 с.
5. *Губанов В. А., Захаров В. В., Коваленко А. Н.* Введение в системный анализ: Учебное пособие. –Санкт-Пет. ЛГУ. –1988. –232 с.
6. *Згуровский М. З., Панкротова Н. Д.* Системний аналіз: Проблеми, методологія, застосування. –К.: Наук. думка, 2005. –743 с.
7. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений. –М.: Логос, 2000. –296 с.
8. *Макаров И. М., Виноградская Т. М.* Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие. –М.: Наука, 1982. –328 с.
9. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации. –М.: Наука, –1986.
10. *Месарович М., Мако Д.,Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. –М.: Мир, 1973. –344 с.
11. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. –М.: Наука, 1981. –488 с.
12. *Перечудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ: Учебное пособие. –М.: Высшая школа, 1989. –367 с.
13. *Подаковский В. В., Ногин В. Д.* Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. –М.: Наука, 1982. –254 с.

14. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи а економіці, менеджменті та бізнесі: Навчальний посібник. Київ. –Либідь, 1995. –240 с.
15. *Дубовой В.М., Ковалюк О.О.* Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами. Монографія. – Вінииця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2008. – 185 с.