Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ “Ужгородський національний університет”
Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СКЛАДНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Методичні вказівки
до курсу для магістрів денної та заочної форм навчань
спеціальності 122 “Комп’ютерні науки”

Ужгород – 2020

Сучасні методи розв'язання складних оптимізаційних задач: методичні вказівки до курсу для магістрів денної та заочної форм навчань спеціальності 122 "Комп'ютерні науки". У методичних вказівках

до курсу "Сучасні методи розв'язання складних оптимізаційних задач" докладно розглядається матеріал, який пов'язаний із оптимізацією у нечітких умовах.

Розробник: Лавер В.О., к.ф.-м.н., доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

Рецензенти: Повхан І.Ф., к.т.н., доцент, доцент кафедри програмного забезпечення систем, декан факультету інформаційних технологій ДВНЗ "Ужгородський національний університет";

Гече Ф.Е., д.т.н., професор, завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики ДВНЗ "Ужгородський національний університет".

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (протокол No 2 від 10.01.2020 р.)

Зміст

1 Поняття нечіткості

При математичному моделюванні реальних процесів ми часто стикаємося з неможливістю чітко віднести той чи інший об'єкт до заданого класу. До прикладу, чи можна вважати, що 10 належить класу чисел які є "значно більшими, ніж 1"? Або чи можемо уявити клас "лисих чоловіків"? Тут постає необхідніть вказати не тільки на належність певного елемента заданому класу, а і на ступінь цієї належності.

Для адекватного опису класів "високих чоловіків", "гарних жінок", "чисел, що є досить близькими до x" апарату звичайної теорії множин виявляється недостатньо. Тож у статті "Нечіткі множини" [15] американський математик азербайджанського походження Лотфі А. Заде запропонував концепцію нечітких множин – множин, які містять інформацію не тільки про елементи, що їм належать, але і про ступінь належності даних елементів.

1.1 Означення нечіткої множини

Розглянемо деяку (чітку) множину $X = \{x\}$, яку будемо називати **універсальною множиною**.

Нечітка множина $\tilde{A}$ в X задається за допомогою **характеристичної функції** (функції належності) $\mu_{\tilde{A}}(x)$, яка кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність деяке дійсне число з інтервалу $[0, 1]$. Позначають $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$. При цьому значення $\mu_{\tilde{A}}(x)$ в точці $x \in X$ показує ступінь належності елемента x нечіткій множині A.

Слід заначити, що чіткі (звичайні) множини є частковим випадком нечітких множин. Це є множини з функцією належності

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Носієм нечіткої множини $\tilde{A}$ називається (чітка) множина

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Позначають також $\mathrm{supp}(\tilde{A})$.

Ядром нечіткої множини $\tilde{A}$ називається (чітка) множина

$$C(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Використовують також позначення $\mathrm{core}(\tilde{A})$.

Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **унімодальною**, якщо її ядро складається тільки з одного елемента, тобто $|C(\tilde{A})| = 1$.

Висотою нечіткої множини $\tilde{A}$ називається число $\sup\limits_{x \in X}(\mu_{\tilde{A}}(x))$.

Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **нормальною**, якщо її висота рівна 1 і **субнормальною** у протилежному випадку. Довільну субнормальну нечітку множину $\tilde{A}$ можна привести до нормального вигляду $\tilde{A}_{norm}$ шляхом нормування її функції належності:

$$\mu_{\tilde{A}_{norm}} = \frac{\mu_{\tilde{A}}}{\sup_{x \in X}(\mu_{\tilde{A}}(x))}.$$

Приклад 1. *Нехай $X = \mathbb{R}$. Можемо задати множину $\tilde{A}$ чисел, значно більших за один, зокрема, такою функцією належності: $\mu_{\tilde{A}}(0) = 0$, $\mu_1(0) = 0$, $\mu_{\tilde{A}}(5) = 0,01$, $\mu_{\tilde{A}}(100) = 0,95$, $\mu_{\tilde{A}}(500) = 1$.*

Приклад 2. *Розглянемо наступний приклад [13]. Нехай $X = \mathbb{R}^+$ – множина додатних цілих чисел. Вважатимемо, що ці числа означають вік людини. Тоді нечітка множина $\tilde{A}$ "молодих" людей матиме вигляд:*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 25; \\ \frac{40-x}{15}, & 25 \leq x < 40; \\ 0, & 40 \leq x. \end{cases}.$$

Графік даної функції матиме вигляд:

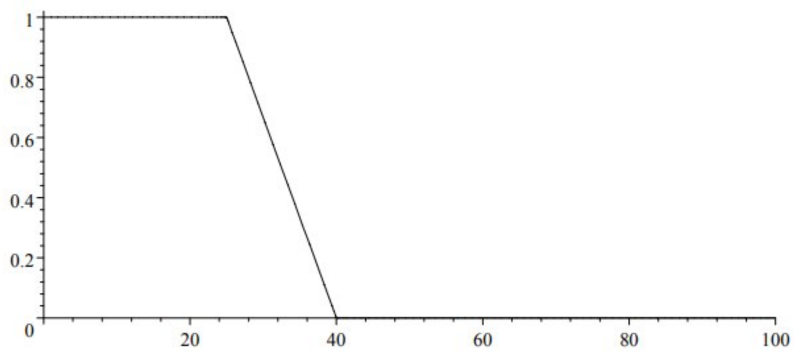

Рис. 1.1: Функція належності молодих людей.

Носієм даної нечіткої множини буде інтервал $(0, 40)$, ядром – інтервал $(0, 25)$. Висота даної нечіткої множини рівна 1.

α-перерізом нечіткої множини $\tilde{A}$ називається (чітка) множина елементів, ступінь належності яких не менший α:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Множина $A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ називається **сильним α-перерізом**.

Приклад 3. *Розглянемо приклад [17].*

Рієлтор хоче оцінити будинок, який він пропонує своїм клієнтам. Один із показників комфорту будинку є кількість спальних кімнат. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ є універсальною множиною, значення з якої вказують на кількість спальних кімнат у будинку. Тоді нечітка множина "будинок, комфортний для проживання сім'ї з чотирьох чоловік", може бути описана наступним чином:

$$\tilde{A} = \{(1; 0,2), (2; 0,5), (3; 0,8), (4; 1), (5; 0,7), (6; 0,3)\}.$$

Носієм даної нечіткої множини є $S(\tilde{A}) = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Можливі такі α-перерізи:

$$\begin{aligned} A_{0,2} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\ A_{0,5} &= \{2, 3, 4, 5\}; \\ A_{0,8} &= \{3, 4\}; \\ A_1 &= \{4\}. \end{aligned}$$

Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **опуклою**, якщо

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1].$$

1.2 Основні операції над нечіткими множинами

Введемо деякі означення та операції для нечітких множин, що є природнім розширенням відповідних понять для звичайних (чітких) множин.

Нечітка множина $\tilde{A}$ є **порожньою**, тоді і тільки тоді, коли $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$, $\forall x \in X$.

Нечіткі множини $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ є **рівними**, тоді і тільки тоді, коли $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, $\forall x \in X$.

Для чітких множин операції об'єднання, перетину та доповнення визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee \in B\}; \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge \in B\}; \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}; \\ \overline{A} &= \{x \in U \mid x \notin A\}. \end{aligned}$$

Записавши дані рівності мовою характеристичних функцій, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x), \} = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)\};\\
\chi_{A\cap B} &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x), \} = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)\};\\
\chi_{A\setminus B} &= \min\{\chi_A(x), 1-\chi_B(x), \} = \chi_A(x) \wedge \chi_{\overline{B}}(x)\};\\
\chi_{\overline{A}} &= 1-\chi_A.
\end{aligned}$$

Отже, ми можемо записати відповідні операції над нечіткими множинами:

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) &= \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)\};\\
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} &= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)\};\\
\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}} &= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(x), \} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\overline{\tilde{B}}}(x)\};\\
\mu_{\overline{\tilde{A}}} &= 1-\mu_{\tilde{A}}.
\end{aligned}$$

Приклад 4. *На універсальній множині $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано нечіткі множини $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$. Знайти $\tilde{A}\cup\tilde{B}$, $\tilde{A}\cap\tilde{B}$, $\overline{\tilde{B}}$, $\tilde{A}\setminus\tilde{B}$, якщо*

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \{(1; 0), (2; 0, 2), (3; 0, 8), (4; 1), (5; 0, 6)\},\\
\tilde{B} &= \{(1; 0, 3), (2; 0), (3; 1), (4; 0, 9), (5; 0, 3)\}.
\end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\cup\tilde{B} &= \{(1; 0, 3), (2; 0, 2), (3; 1), (4; 1), (5; 0, 6)\};\\
\tilde{A}\cap\tilde{B} &= \{(1; 0), (2; 0), (3; 0, 8), (4; 0, 9), (5; 0, 3)\};\\
\overline{\tilde{B}} &= \{(1; 0, 7), (2; 1), (3; 0), (4; 0, 1), (5; 0, 7)\};\\
\tilde{A}\setminus\tilde{B} &= \{(1; 0), (2; 0, 2), (3; 0), (4; 0, 1), (5; 0, 3)\}.
\end{aligned}$$

Для неперервних функцій належності графіки відповідних операцій зображено на рис. **??**.

1.3 Нечіткі бінарні відношення

Розглянемо спершу чіткі бінарні відношення.

Відношенням R, заданим на множинах A та B називається підмножина $R \subseteq A \times B$ декартового добутку цих множин.

Оскільки R зв'язує пари елементів з A, то таке відношення називається **бінарним**. Якщо $R \subseteq A_1 \times \cdots A_n$, то таке відношення називається

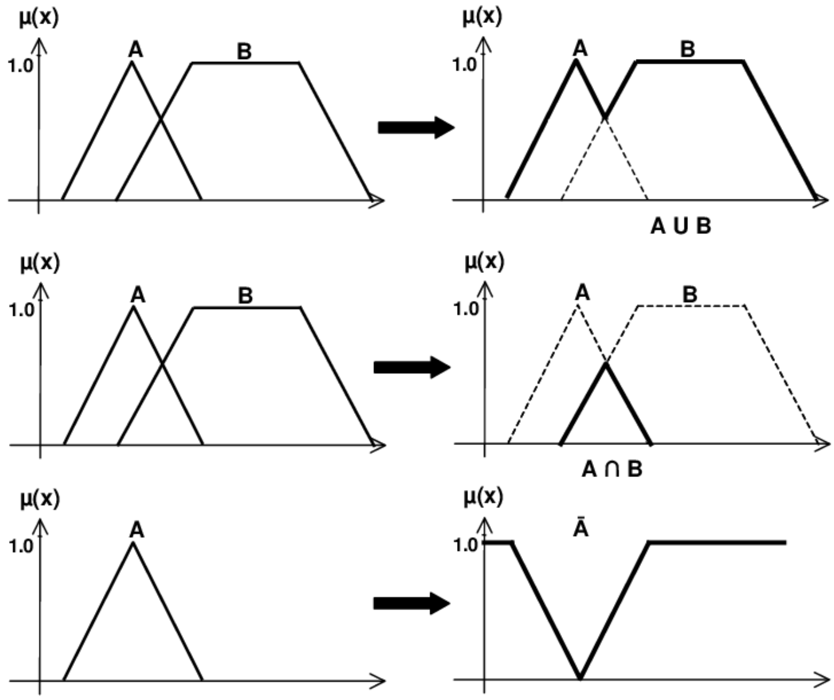

Рис. 1.2: Операції над нечіткими множинами.

n-арним. Якщо при цьому $A_1 = \dots = A_n = A$, то таке відношення називається n-арним в A.

Те, що елементи $x \in A$ та $y \in B$ зв'язані бінарним відношенням R позначають через xRy ($(x, y) \in R$). У протилежному випадку, коли $(x, y) \notin R$, записують $x\overline{R}y$ (тобто x не знаходиться з y у відношенні R). Бінарне відношення R можна задати такою характеристичною функцією:

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R; \\ 0, & (x, y) \notin R. \end{cases}$$

Для бінарних відношень так само визначаються звичайні теоретико-множинні операції, такі як об'єднання, перетин тощо.

Нехай $x, y, z \in A$. Відношення $R \in A \times A$ називається

1. рефлексивним, якщо $\forall x \in A$: xRx.
2. антирефлексивним, якщо $\forall x \in A$: $x\overline{R}x$.
3. симетричним, якщо $\forall x, y \in A$ з того, що xRy, випливає, що yRx.
4. асиметричним, якщо $\forall x, y \in A$ з того, що xRy, випливає, що $y\overline{R}x$.
5. антисиметричним, якщо $\forall x, y \in A$ з того, що xRy і yRx, випливає, що $x = y$.
6. транзитивним, якщо $\forall x, y, z \in A$ з того, що xRy і yRz, випливає,

що xRz.

Відношення R називається **відношенням еквівалентності**, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Відношення R називається **відношенням часткого порядку**, якщо воно є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним.

Відношення R називається **відношенням повного порядку**, якщо воно є відношенням часткового порядку, і для $\forall x, y \in A$ має місце або xRy, або yRx.

Нехай A і B – деякі непорожні чіткі множини. **Нечітке відношення** R є нечіткою підмножиною декартового добутку $A \times B$. Якщо при цьому $A = B$, то таке відношення називається **бінарним**.

Приклад 5. *Розглянемо приклад [8].*

Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Задамо відношення R як "приблизно дорівнює":

$$\mu_R(1,1) = \mu_R(2,2) = \mu_R(3,3) = 1;$$
$$\mu_R(1,2) = \mu_R(2,1) = \mu_R(2,3) = \mu_R(3,2) = 0,8;$$
$$\mu_R(1,3) = \mu_R(3,1) = 0,3.$$

У вигляді матриці це бінарне відношення можна записати таким чином:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 0,8 \\ 0,3 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}$$

Як ми вже зазначали, над нечіткими відношеннями можливі звичайні теоретико-множинні операції. Розглянемо приклад.

Приклад 6. *Розглянемо два бінарні відношення: R = "x значно менше, ніж y" та G = "x дуже близький до y". В даному прикладі ми опустимо визначення універсальної множини. Матрично дані відношення задаються так:*

$$R = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,7 \\ x_2 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0,4 & 0 & 0,9 & 0,6 \\ x_2 & 0,9 & 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ x_3 & 0,3 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Перетин R та G означає, що "x є значно меншим y" і "x є дуже близьким до y".

$$R \cap G = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0,4 & 0 & 0,1 & 0,6 \\ x_2 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ x_3 & 0,3 & 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Об'єднанням R та G є множина "x є значно меншим y" або "x є дуже близьким до y".

$$R \cup G = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0,5 & 0,1 & 0,9 & 0,7 \\ x_2 & 0,9 & 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ x_3 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,8 \end{array}.$$

Лабораторна робота №1

Задано універсальну множину $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і дві нечіткі підмножини: $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$, $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, $x, y \in X$.

Виконайте наступні завдання:

1. Зобразіть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ графічно.
2. Знайдіть ядра та носії даних нечітких чисел, а також α-перерізи для $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,8$.
3. Знайдіть та зобразити графічно множини $\overline{\tilde{A}}$, $\overline{\tilde{B}}$, , $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$, $\tilde{B} \setminus \tilde{A}$.

Варіанти завдань

Варіант 1.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0.6	0.3	0	0	0.5	0.5	0.9
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.7	0.4	0	0.5	0.8	1	1	0.6

Варіант 2.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.2	0.8	0.5	1	0	0.9	0.3	0.4
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.7	0	0	0.6	0.4	1	0	0.4

Варіант 3.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.5	0.3	0	1	0.9	0.3	0.4	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.5	1	1	0.8	0.7	0.2	0	0.1

Варіант 4.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	1	0.5	0.8	0.1	0.8	0.4	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.5	0.6	0.6	0.8	0.5	1	0.6	0.1

Варіант 5.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.4	0.1	0	1	1	0.3	0.7	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.5	0.7	0.5	0	1	0.8	0	0.1

Варіант 6.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0.3	0.7	0.8	0.9	0.4	0.7	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.5	0.7	0.3	0.5	0.9	1	0	0.1

Варіант 7.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.6	1	0.7	0.8	0	0.4	0.7	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.6	0.7	1	0.5	0.9	0	0	0.1

Варіант 8.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.1	0.3	0.4	0.5	1	0.4	0.7	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0.5	0.8	0.3	0.4	0.9	0	0	1

Варіант 9.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.1	0.3	1	1	0.6	0.4	0.7	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0	0.7	0.4	0.7	0.8	1	0	0.1

Варіант 10.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0.9	0.3	0.7	1	1	0.2	0.4	0.2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	1	0	0.3	0.6	0.9	0	0.6	0.1

2 Нечітка арифметика

2.1 Принцип узагальнення

Нехай $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ є нечіткими підмножинами універсальних множин X_1, …, X_n. **Декартовим добутком** нечітких множин $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ є нечітка підмножина $X_1 \times \cdots X_n$ з функцією належності

$$\mu_{\left(\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n\right)}(x) = \min_i \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \in X_i\}.$$

Нехай $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ і $\tilde{A}_1, \ldots \tilde{A}_n$ є нечіткими підмножинами $X_1, \ldots$, X_n відповідно; на X задано функцію $f : X \mapsto Y$, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Принип узагальнення, запропонований Л. Заде [16], дозволяє визначити нечітку підмножину $\tilde{B}$ в Y наступним чином:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in X\},$$

де

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Тут f^{-1} позначає обернену функцію до f.

Для $n = 1$ принцип узагальнення зводиться до

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y = f(x), x \in X\},$$

де

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Приклад 7. *Нехай* $\tilde{A} = \{(-1; 0,5), (0; 0,8), (1; 1), (2; 0,4)\}$, $f(x) = x^2$. *За допомогою принципу узагальнення, отримуємо:*

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0; 0,8), (1; 1), (4; 0,4)\}.$$

2.2 Поняття нечіткого числа

Нечітка підмножина $\tilde{P}$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається **нечітким числом** $\tilde{p}$, якщо вона задовольняє наступним умовам [9]:

1. $\tilde{P}$ є нормальною (тобто висота $\tilde{P}$ рівна 1);

2. $\tilde{P}$ є опуклою;
3. Існує єдине $\overline{x} \in \mathbb{R}$ таке, що $\mu_{\tilde{P}} = 1$ (тобто $\operatorname{core} \tilde{P} = \overline{x}$);
4. Функція належності $\mu_{\tilde{P}}$, $x \in \mathbb{R}$ є хоча б кусково-неперервною (або неперервною).

Якщо хоч одна із цих умов порушується, то дана нечітка множина не може називатися нечітким числом. Втім, якщо виконуються усі умови, крім четвертої (тобто $\operatorname{core}(\tilde{P})) = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) то така нечітка множина називається **нечітким інтервалом**.

Значення $\overline{x} = \operatorname{core}(\tilde{p})$, на якому досягається найбільший сутпінь належності, називається **модальним значенням** нечіткого числа $\tilde{p}$. Серед альтернативних назв можна зустріти "пікове значення", "центральне значення" або "середнє значення", причому останні два терміни застосовуються переважно до симетричних нечітких чисел. Саме ж нечітке число можна інтерпретувати як лінгвістичний терм "приблизно $\overline{x}$".

Множину усіх можливих нечітких чисел $\tilde{p}$ позначатимемо $\tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **симетричним**, якщо його функція належності задовольняє умові:

$$\mu_{\tilde{p}}(\overline{x} + x) = \mu_{\tilde{p}}(\overline{x} - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **(строго) додатним**, що позначається як $\tilde{p} > 0$ або $\operatorname{sign}(\tilde{p}) = +1$, якщо $\operatorname{supp}(\tilde{p}) \subseteq (0; +\infty)$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **(строго) від'ємним**, що позначається як $\tilde{p} < 0$ або $\operatorname{sign}(\tilde{p}) = -1$, якщо $\operatorname{supp}(\tilde{p}) \subseteq (-\infty; 0)$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **нечітким нулем**, що позначається $\operatorname{sign}(\tilde{p}) = 0$, якщо $0 \in \operatorname{supp}(\tilde{p})$.

Розглянемо деякі особливі види нечітких чисел.

Трикутним нечітким числом називається нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ з функцією належності

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 1 + \frac{x - \overline{x}}{\alpha_l}, & \overline{x} - \alpha_1 < x < \overline{x}; \\ 1 - \frac{x - \overline{x}}{\alpha_r}, & \overline{x} < x < \overline{x} + \alpha_r; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Параметр $\overline{x}$ позначає модальне значення нечіткого числа, α_l та α_r, відповідно, – ліве та праве відхилення. Інтервал

$$W = [w_l, w_r] = [\overline{x} - \alpha_l; \overline{x} + \alpha_r] = \operatorname{supp} \tilde{p} \cup \{\overline{x} - \alpha_l; \overline{x} + \alpha_r\}$$

називається **інтервалом нечіткості**. Для простоти нечіткі числа трикутного вигляду записують у вигляді трійки $\tilde{p} = \operatorname{tfn}(\overline{x}; \alpha_l; \alpha_r)$. Називатимемо такий спосіб запису нечітких чисел трикутного вигляду **записом**

через відхилення. Альтернативним способом запису є **запис через крайні точки**, тобто шляхом задання трійки $(\overline{x} - \alpha_l; \overline{x}; \overline{x} + \alpha_r)$. Обидві форми запису нечітких чисел трикутного вигляду доволі поширені у літературі.

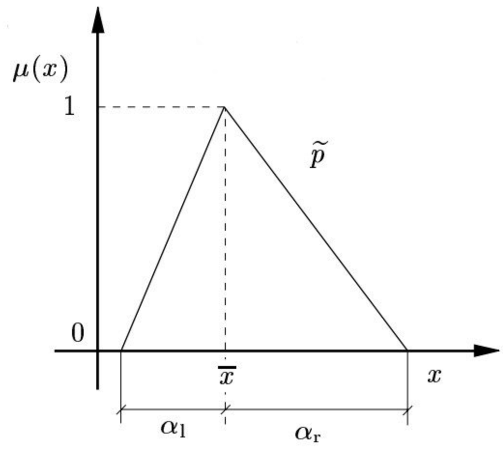

Рис. 2.3: Нечітке число трикутного вигляду.

Ще одним важливим типом нечітких чисел є **Гаусівські нечіткі числа**, функція належності яких характеризується нормальною та, у загальному випадку, асиметрично параметризованою Гаусівською функцією. Позначатимемо $\tilde{p} = \text{gfn}(\overline{x}, \sigma_l, sigma_r)$. Функція належності у цьому випадку матиме наступний вигляд:

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_l^2}}, & x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_r^2}}, & x \geq \overline{x}. \end{cases}$$

Модальне значення даного нечіткого числа рівне $\overline{x}$, а σ_1 та σ_2 позначають ліве та праве відхилення, що відповідають стандартним відхиленням Гаусівського розподілу (див. рис. **??**).

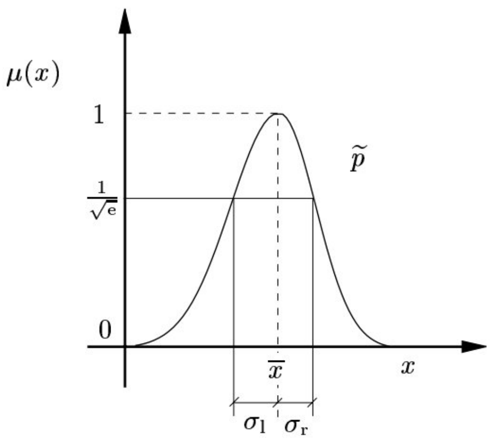

Рис. 2.4: Гаусівське нечітке число.

Визначають також **квазі-Гаусівські нечіткі числа**, які є Гаусівськими нечіткими числами, обрізаними для $x < \overline{x} - 3\sigma_l$ та $x > \overline{x} + 3\sigma_r$. Тобто степені належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$ нечіткого числа $\tilde{p}$ для усіх x, для яких $|x - \overline{x}|$ є більшими за, відповідно, $3\sigma_l$ та $3\sigma_r$ є рівними нулю. Введення таких обмежень вмотивоване тим, що для таких значень x степінь належності не перевищує $0,01$. Введемо позначення: $\tilde{p} = \mathrm{gfn}^*(\overline{x}, \sigma_l, \sigma_r)$. Функція належності у цьому випадку визначається виразом:

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \leq \overline{x} - 3\sigma_l; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_l^2}}, & \overline{x} - 3\sigma_l < x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_r^2}}, & \overline{x} \leq x < \overline{x} + 3\sigma_r; \\ 0, & x \geq \overline{x} + 3\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервалом нечіткості даного нечіткого числа є

$$W = [w_l, w_r] = [\overline{x} - 3\sigma_l; \overline{x} + 3\sigma_r] = \mathrm{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x} - 3\sigma_l; \overline{x} + 3\sigma_r\}.$$

Розглядають також **квадратичні нечіткі числа**, які позначають $\tilde{p} = \mathrm{qfn}(\overline{x}, \beta_l, \beta_r)$. Функція належності квадратичного нечіткого числа має вигляд:

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \leq \overline{x} - \beta_l; \\ 1 - \frac{(x-\overline{x})^2}{\beta_l^2}, & \overline{x} - \beta_l < x < \overline{x}; \\ 1 - \frac{(x-\overline{x})^2}{\beta_r^2}, & \overline{x} \leq x < \overline{x} + \beta_r; \\ 0, & x \geq \overline{x} + 3\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервал нечіткості визначається наступним чином:

$$W = [w_l, w_r] = [\overline{x} - \beta_l, \overline{x} + \beta_r] = \mathrm{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x} - \beta_l, \overline{x} + \beta_r\}.$$

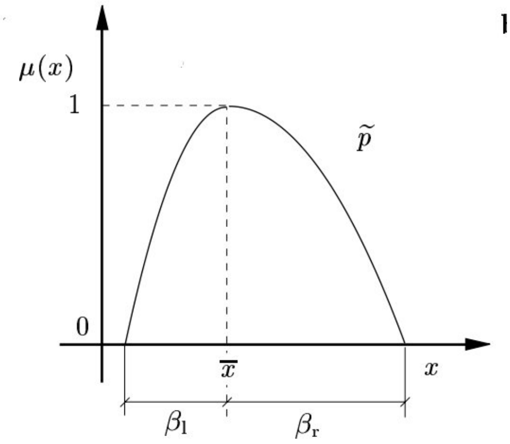

Рис. 2.5: Квадратичне нечітке число.

Експоненційне нечітке число, $\tilde{p} = \mathrm{efn}(\overline{x}, \tau_l, \tau_r)$ визначається функцією належності

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_l}}, & x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_r^2}}, & x \geq \overline{x}. \end{cases}$$

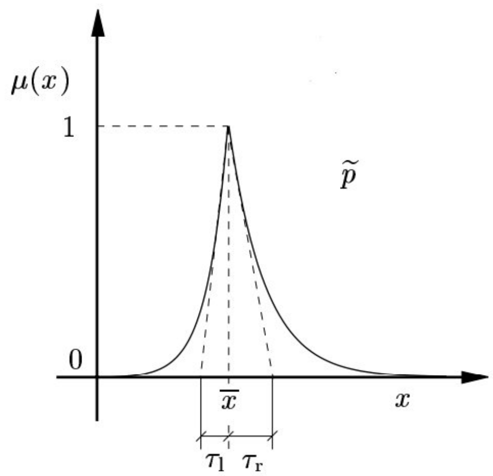

Рис. 2.6: Експоненційне нечітке число.

Аналогічно до випадку квазі-Гаусівських чисел, є зміст визначити **квазі-експоненційні нечіткі числа**. У цьому випадку функція належності квадратичного нечіткого числа прирівнюється до нуля для усіх $x \in \mathbb{R}$, таких, що $x < \overline{x} - 4,5\tau_l$ або $x > \overline{x} + 4,5\tau_r$. Можемо позначити $\tilde{p} = \text{efn}^*(\overline{x}, \tau_l, \tau_r)$. При цьому

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \leq \overline{x} - 4,5\sigma_l; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_l}}, & \overline{x} - 4,5\sigma_l < x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_r}}, & \overline{x} \leq x < \overline{x} + 4,5\sigma_r; \\ 0, & x \geq \overline{x} + 4,5\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервалом нечіткості буде

$$W = [w_l, w_r] = [\overline{x} - 4,5\tau_l, \overline{x} + 4,5\tau_r] = \text{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x} - 4,5\tau_l, \overline{x} + 4,5\tau_r\}.$$

Слід відмітити, що, як і у випадку із нечіткими множинами, нечіткі числа є узагальненням поняття "чіткого" числа. Функція належності у цьому випадку матиме вигляд

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \overline{x}; \\ 1, & x = \overline{x}; \\ 0, & x > \overline{x}. \end{cases}$$

2.3 Арифметичні операції над нечіткими числами

Так само, як і для нечітких множин є визначеними узагальнені теоретико-множинні операції, для нечітких чисел також існують узагальнені арифметичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення. Формальним підходом для означення цих операцій є застосування принципу узагальнення Заде (див. розділ 2.1). Нехай $\circ$ позначає одну із чотирьох стандартних арифметичних дій. Тоді функція належності нечіткого числа $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ визначається наступниим співвідношенням:

$$\mu_{\tilde{q}} = \sup_{z = x_1 \circ x_2} \min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Втім, оскільки для визначення результуючої функції налжності нам потрібно шукати $z = x_1 \circ x_2$ для всеможливих x_1, x_2, на практиці ця формула є досить важкою для застосування. Більш придатним для проблем практики є підхід, що базується на інтервальній арифметиці, запропонованій Рамоном Муром [12]. Відносно нечітких чисел даний підхід був розвинутий А. Кауфманом та М. Гуптою [10].

Зазначимо, що будь-яку нечітку множину $\tilde{A}$ можна представити у вигляді композиції її α-перерізів:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\mu_{cut_\alpha(\tilde{A})}(x),$$

де $\mu_{cut_\alpha(\tilde{A}}$ є характеристичною функцією звичайної множини $cut_\alpha(\tilde{A})$.

Для знаходження α-перерізу, який представляє задане нечітке число $\tilde{p}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$, інтервалом нечіткості $W = [w_l, w_r]$ та модальним значенням $\overline{x}$, слід виконати наступні дії:

1. Ліву частину α-перерізу знаходимо виразивши x з рівняння $\mu_{\tilde{p}}(x) = \alpha$, $w_l \le x \le \overline{x}$;
2. Праву частину α-перерізу знаходимо виразивши x з рівняння $\mu_{\tilde{p}}(x) = \alpha$, $\overline{x} \le x \le w_r$.

Для знаходження нечіткого числа по заданому α перерізу слід виконати зворотні дії. Розглянемо приклад.

Приклад 8. *Нехай задано нечітке число трикутного вигляду* $\tilde{p} = (4; 3; 2)$. *Функція належності даного нечіткого числа має вигляд:*

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-4}{3}, & 1 < x < 4; \\ 1 - \frac{x-4}{2}, & 4 < x < 6; \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Знайдемо лівий кінець інтервала:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x-4}{3} &= \alpha, \\ 3 + x - 4 &= 3\alpha, \\ x &= 1 + 3\alpha. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо правий кінець інтервалу:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x-4}{2} &= \alpha, \\ 2 - x + 4 &= 2\alpha, \\ x &= 6 - 2\alpha. \end{aligned}$$

Отже, $\tilde{p} = [1 + 3\alpha; 6 - 2\alpha]$. *Відмітимо, що при* $\alpha = 0$ *ми отримуємо інтервал* $[1, 6] = W_{\tilde{p}}$, *а при* $\alpha = 1$ *отримуємо точку* $4 = \overline{x}$.

З іншого боку, виразивши α *з рівностей* $x = 1 + 3\alpha$ *та* $x = 6 - 2\alpha$, *знаходимо функцію* $\mu_{\tilde{p}}(x)$.

В загальному випадку для нечіткого числа трикутного вигляду $\tilde{p} = (\overline{x}; \alpha_l; \alpha_r)$ α-переріз визначається як $[\overline{x} - \alpha_l + \alpha_l\alpha; \overline{x} + \alpha_r - \alpha_r\alpha]$.

Нехай задано два нечіткі числа $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ з α-перерізами $[p_l(\alpha); p_r(\alpha)]$ та $[q_l(\alpha); q_r(\alpha)]$ відповідно. Тоді арифметичні операції над даними нечіткими числами визначаються наступним чином:

- Додавання:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \oplus [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [p_l(\alpha) + q_l(\alpha); p_r(\alpha) + q_r(\alpha)];$$

- Віднімання:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \ominus [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [p_l(\alpha) - q_r(\alpha); p_r(\alpha) - q_l(\alpha)];$$

- Множення:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \otimes [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [\min(M_\alpha), \max(M_\alpha)],$$
$$M_\alpha = \{p_l(\alpha)q_l(\alpha), p_l(\alpha)q_r(\alpha), p_r(\alpha)q_l(\alpha), p_r(\alpha)q_r(\alpha)\};$$

- Ділення:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \oslash [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [\min(D_\alpha), \max(D_\alpha)],$$
$$D_\alpha = \{\frac{p_l(\alpha)}{q_l(\alpha)}, \frac{p_l(\alpha)}{q_r(\alpha)}, \frac{p_r(\alpha)}{q_l(\alpha)}, \frac{p_r(\alpha)}{q_r(\alpha)}\}.$$

Приклад 9. *Нехай задано два нечіткі числа трикутного вигляду:* $\tilde{p} = (10; 3; 2)$, $\tilde{p} = (5; 1; 3)$.

α*-перерізи даних чисел будуть рівними, відповідно,* $[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha]$, $[4 + \alpha; 8 - 3\alpha]$.

Знайдемо суму:

$$[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \oplus [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = [11 + 4\alpha; 20 - 5\alpha].$$

Ліва частина функції належності:

$$x = 11 + 4\alpha;$$
$$\alpha = \frac{x - 11}{4} = 1 + \frac{x - 15}{4}.$$

Аналогічно, для правої частини маємо: $\alpha = 1 - \frac{x-15}{5}$.

Отже, результатом додавання буде нечітке число трикутного вигляду $(15; 4; 5)$ *з функцією належності*

$$\mu_{\oplus}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-15}{4}, & 11 \le x \le 15; \\ 1 - \frac{x-15}{5}, & 15 < x \le 20; \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Для різниці маємо:

$$[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \ominus [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = [-1 + 6\alpha; 8 - 3\alpha].$$

Результатом буде нечітке число трикутного вигляду $(5; 6; 3)$ *з функцією належності*

$$\mu_{\ominus}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-5}{6}, & -1 \le x \le 5; \\ 1 - \frac{x-5}{3}, & 5 < x \le 8; \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Випадок множення та ділення є важчим, оскільки в результаті ми не отримаємо нечіткі числа трикутного вигляду. Так, для множення α*-переріз матиме вигляд:*

$$\begin{aligned} &[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \otimes [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = \\ &\qquad = [(7 + 3\alpha)(4 + \alpha); (12 - 2\alpha)(8 - 3\alpha)] \\ &\qquad = [3\alpha^2 + 19\alpha + 28; 6\alpha^2 - 52\alpha + 96]. \end{aligned}$$

Знайдемо ліву частину функції належності ($x \in [28; 50]$*).*

$$\begin{aligned} &3\alpha^2 + 19\alpha + 28 - x = 0; \\ &D = 19^2 - 4 \cdot 3 \cdot (28 - x) = 25 + 12x. \end{aligned}$$

Отримаємо два корені:

$$\alpha_1 = \frac{-19 + \sqrt{25 + 12x}}{6}; \qquad \alpha_2 = \frac{-19 - \sqrt{25 + 12x}}{6};$$

У випадку α_2 *функція належності буде від'ємною для всіх* $x \in [28; 50]$*, тож це сторонній корінь.*

Для правої частини маємо рівняння ($x \in [50; 96]$*):*

$$\begin{aligned} &6\alpha^2 - 52\alpha + 96 - x = 0; \\ &D = (-52)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (96 - x) = 400 + 24x. \end{aligned}$$

Коренями рівняння будуть

$$\alpha_1 = \frac{52 + \sqrt{400 + 24x}}{12}; \qquad \alpha_2 = \frac{52 - \sqrt{400 + 24x}}{12};$$

У цьому випадку стороннім коренем буде α_1*, так як для довільного* $x \in [50; 96]$ *результат буде більшим за* 1 *(а це є протиріччям, так як* 1 *є максимально можливим значенням функції належності нечіткого числа).*

Отже, результатом множення буде нечітке число з функцією належності

$$\mu_{\otimes}(x) = \begin{cases} \frac{-19+\sqrt{25+12x}}{6}, & 28 \leq x \leq 50; \\ \frac{52-\sqrt{400+24x}}{12}, & 50 < x \leq 96; \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Насамкінець розглянемо операцію ділення. α*-перерізом буде*

$$[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \oslash [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = \\ = [\frac{7 + 3\alpha}{8 - 3\alpha}; \frac{12 - 2\alpha}{4 + \alpha}].$$

Для лівої частини маємо рівняння ($x \in [\frac{7}{8}; 2]$*):*

$$x = \frac{7 + 3\alpha}{8 - 3\alpha};$$
$$8x - 3\alpha x = 7 + 3\alpha;$$
$$\alpha = \frac{8x - 7}{3x + 3}.$$

Аналогічно, для правої частини ($x \in [2; 3]$*), отримуємо:*

$$x = \frac{12 - 2\alpha}{4 + \alpha};$$
$$4x + \alpha x = 12 - 2\alpha;$$
$$\alpha = \frac{12 - 4x}{x + 2}.$$

Отже, результатом ділення буде нечітке число з функцією належності

$$\mu_{\otimes}(x) = \begin{cases} \frac{8x-7}{3x+3}, & \frac{7}{8} \leq x \leq 2; \\ \frac{12-4x}{x+2}, & 2 < x \leq 3; \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Основними мінусами нечіткої арифметики є такі:

1. Відсутність протилежного елемента. Тобто якщо за нейтральний елемент прийняти чітке число 0, то $\tilde{p} \ominus \tilde{p} \neq 0$.
2. Ввідсутність оберненого елемента при множенні.
3. Залежність результату від порядку виконання операцій.

Для ілюстрації останнього пункту розглянемо три вирази [9]

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{p}) &= \tilde{p}^3 - 2\tilde{p}^2 - 21\tilde{p} - 18; \\ f_2(\tilde{p}) &= \Big[(\tilde{p} - 2)\tilde{p} - 21\Big]\tilde{p} - 18; \\ f_3(\tilde{p}) &= (\tilde{p} + 3)(\tilde{p} + 1)(\tilde{p} - 6). \end{aligned}$$

Нехай $\tilde{p} = \text{tfn}(1,5; 1,5; 1,5)$. Тоді

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{p}) &= \text{tfn}(-50,625; 39,375; 59,625); \\ f_2(\tilde{p}) &= \text{tfn}(-50,625; 39,375; 32,625); \\ f_3(\tilde{p}) &= \text{tfn}(-50,625; 93,375; 41,625). \end{aligned}$$

В літературі даний ефект називається **завищенням**.

Нечітке число $\tilde{p}$ типу $L - R$ задається функцією належності [6]

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\overline{x} - x}{\alpha_l}\right), & \text{для} x \leq \overline{x}; \\ R\left(\frac{x - \overline{x}}{\alpha_r}\right), & \text{для} x \leq \overline{x}. \end{cases}$$

При цьому функція L задовільняє насутпним умовам:
1. $L(x) = L(-x)$;
2. $L(0) = 1$, $L(1) = 0$;
3. $L(x)$ є незростаючою на $[0, \inf)$.

Аналогічні умови накладаються і на R. Параметр $\overline{x}$ позначає модальне значення нечіткого числа, α_l та α_r, відповідно, – ліве та праве відхилення. Нечітке число $\tilde{p}$ типу $L - P$ прийнято позначати як $(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR}$

Очевидно, що нечітке число $\tilde{p} = (\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR}$ є додатним тоді і тільки тоді, коли $\overline{x} - \alpha_l > 0$ (відмітимо, що $L(1) = 0$).

Як приклад функції L можна навести, зокрема такі:

- $L(x) = \max(0, 1 - |x|^P)$, $P > 0$;
- $L(x) = e^{-|x|^P}$,$P > 0$;
- $L(x) = \frac{1}{1+|x|^P}$, $P > 0$.

Якщо $L(x)$ і $R(x)$ є лінійними, то відповідне нечітке число типу $L-R$ є трикутним нечітким числом.

Нехай задано два нечіткі числа типу $L-R$:

$$\tilde{p} = (\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r), \quad \tilde{q} = (\overline{y}, \beta_l, \beta_r).$$

Тоді

1. $(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR} \oplus (\overline{y}, \beta_l, \beta_r)_{LR} = (\overline{x} + \overline{y}, \alpha_l + \beta_l, \alpha_r + \beta_r)_{LR}$;
2. $(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR} \ominus (\overline{y}, \beta_l, \beta_r)_{LR} = (\overline{x} - \overline{y}, \alpha_l + \beta_r, \alpha_r + \beta_l)_{LR}$.

Множення визначається наступним чином:

1. $\tilde{p} > 0$, $\tilde{q} > 0$:

$$(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y}, \beta_l, \beta_r)_{LR} = (\overline{xy}, \overline{x}\beta_l + \overline{y}\alpha_l, \overline{x}\beta_r + \overline{y}\alpha_r)_{LR};$$

2. $\tilde{p} < 0$, $\tilde{q} > 0$:

$$(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y}, \beta_l, \beta_r)_{LR} = (\overline{xy}, \overline{y}\alpha_l - \overline{x}\beta_r, \overline{y}\alpha_r + \overline{x}\beta_l)_{LR};$$

3. $\tilde{p} < 0$, $\tilde{q} < 0$:

$$(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y}, \beta_l, \beta_r)_{LR} = (\overline{xy}, -\overline{y}\alpha_r - \overline{y}\beta_r, \overline{y}\alpha_l + \overline{x}\beta_l)_{LR};$$

Нечітке число, обернене до додатного нечіткого числа $(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)_{LR}$ наближено визначається як

$$(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r)^{-1}_{LR} \simeq (\overline{x}^{-1}, \alpha_r\overline{x}^{-2}, \alpha_l\overline{x}^{-2})_{RL}.$$

Схожа формула має місце і для від'ємних нечітких чисел, оскільки $-(\tilde{p}^{-1}) = (-\tilde{p}^{-1})$.

Ділення нечітких чисел визначається шляхом знаходження оберненого нечіткого числа для дільника і застосування формул для нечіткого множення.

Розглянемо частковий випадок вищенаведених форумл для нечітких чисел трикутного вигляду.

Нехай задано трикутне нечітке число $\tilde{p} = (\overline{x}; \alpha_l; \alpha_r)$. Поставимо йому у відповідність трійку $(p_1, p_2, p_3) = (\overline{x} - \alpha_l, \overline{x}, \overline{x} + \alpha_r)$. Аналогічним чином трикутному нечіткому числу $\tilde{q}$ поставимо у відповідність трійку (q_1, q_2, q_3). Припустимо, що дані нечіткі числа є невід'ємними. Тоді мають місце наступні співвідношення:

1. $(p_1, p_2, p_3) \oplus (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$;
2. $(p_1, p_2, p_3) \ominus (q_1, q_2, q_3) = (p_1 - q_3, p_2 - q_2, p_3 - q_1)$;
3. $(p_1, p_2, p_3) \otimes (q_1, q_2, q_3) \simeq (p_1 \cdot q_1, p_2 \cdot q_2, p_3 \cdot q_3)$;
4. $(p_1, p_2, p_3) \oslash (q_1, q_2, q_3) \simeq (p_1/q_3, p_2/q_2, p_3/q_1)$.

У якості самостійної вправи читачеві пропонується виконати попередній приклад, використовуючи вищенаведені арифметичні операції.

Лабораторна робота №2

Нехай $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ – два нечіткі числа трикутного вигляду.

Завдання:

1. Зобразити $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ графічно.
2. Знайти та зобразити графічно $\tilde{p} \ominus \tilde{q}$, $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$, $\tilde{p} \oslash \tilde{q}$.

Варіанти завдань

Варіант 1. $\tilde{p} = (10; 2; 1)$, $\tilde{q} = (5, 2, 3)$.
Варіант 2. $\tilde{p} = (15; 2; 2)$, $\tilde{q} = (3, 2, 3)$.
Варіант 3. $\tilde{p} = (8; 2; 1)$, $\tilde{q} = (4, 1, 1)$.
Варіант 4. $\tilde{p} = (12; 1; 2)$, $\tilde{q} = (3, 1, 1)$.
Варіант 5. $\tilde{p} = (14; 2; 1)$, $\tilde{q} = (2, 1, 2)$.
Варіант 6. $\tilde{p} = (9; 1; 1)$, $\tilde{q} = (3, 1, 2)$.
Варіант 7. $\tilde{p} = (16; 2; 3)$, $\tilde{q} = (4, 2, 1)$.
Варіант 8. $\tilde{p} = (10; 1; 3)$, $\tilde{q} = (2, 1, 1)$.
Варіант 9. $\tilde{p} = (18; 2; 1)$, $\tilde{q} = (9, 2, 3)$.
Варіант 10. $\tilde{p} = (6; 2; 1)$, $\tilde{q} = (2, 1, 2)$.

3 Нечіткі лінійні рівняння та нечіткі системи лінійних рівнянь

3.1 Нечіткі лінійні рівняння

Однією із базових задач лінійної алгебри є розв'язок звичайного лінійного рівняння $ax + b = c$ для заданих a, b, c, де $a \neq 0$. Розв'язком цього рівняння є $x = (c - b)/a$. Для отримання даного розв'язку слід відняти b від обох частин рівняння, а потім помножити рівняння на $\frac{1}{a}$.

Розглянемо нечітке рівняння

$$\tilde{a} \cdot \tilde{x} + \tilde{b} = \tilde{c},$$

відносно $\tilde{x}$, де $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ є трикутними нечіткими числами. При цьому, ми припускаємо, що нуль не належить носієві $\tilde{a}$: $0 \notin \operatorname{supp} \tilde{a}$.

Нехай коефіцієнти рівняння представлено наступними трійками: $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Нехай $\tilde{x} \simeq (x_1, x_2, x_3)$.

Виконаємо необхідні перетворення:

$$(\tilde{a})^{-1}(\tilde{a} \otimes \tilde{x} \oplus \tilde{b} \ominus \tilde{b}) = (\tilde{c} \ominus \tilde{b}) \oslash \tilde{a}.$$

Оскільки $\tilde{b} \ominus \tilde{b} \neq 0$ і $\tilde{a} \oslash \tilde{a} \neq 1$, тож ліва частина рівняння не дорівнює $\tilde{x}$.

Класичним підходом до розв'язання лінійних рівнянь з трикутними нечіткими числами є α-перерізів (прирівнюємо відповідні перерізи лівої та правої частини) [3]:

$$[a_l(\alpha), a_r(\alpha)][x_l(\alpha), x_r(\alpha)] + [b_l(\alpha), b_r(\alpha)] = [c_l(\alpha), c_r(\alpha)].$$

$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)]$ буде розв'язком даного рівняння, якщо виконуються наступні умови:

- $x_l(\alpha)$ є монотонно зростаючою функцією α, $0 \leq \alpha \leq 1$;
- $x_r(\alpha)$ є монотонно спадною функцією α, $0 \leq \alpha \leq 1$;
- $x_l(1) \leq x_r(1)$.

Приклад 10. *Нехай коефіцієнти представлені наступними трійками:* $\tilde{a} = (1, 2, 3)$, $\tilde{b} = (-3, -2, -1)$, $\tilde{c} = (3, 4, 5)$. *Тоді відповідні* α*-перерізи матимуть вигляд* $[1 + \alpha; 3 - \alpha]$, $[-3 + \alpha; -1 - \alpha]$, $[3 + \alpha; 5 - \alpha]$. *Рівняння зводиться до наступного інтервального представлення:*

$$[(1 + \alpha)x_l(\alpha) - 3 + \alpha, (3 - \alpha)x_r(\alpha) - 1 - \alpha] = [3 + \alpha; 5 - \alpha].$$

Звідси маємо, що

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{6}{1+\alpha}, \frac{6}{3-\alpha}\Big].$$

Відмітимо, що $x_l(\alpha)$ є спадною функцією, а $x_r(\alpha)$ – зростаючою. Це означає, що у даному випадку розв'язку не існує.

Приклад 11. *Нехай коефіцієнти представлені наступними трійками: $\tilde{a} = (8, 9, 19)$, $\tilde{b} = (-3, -2, -1)$, $\tilde{c} = (3, 5, 7)$ з α-перерізами $[8+\alpha; 10-\alpha]$, $[-3+\alpha; -1-\alpha]$, $[3+2\alpha; 7-2\alpha]$. Рівняння зводиться до наступного інтервального представлення:*

$$[(8+\alpha)x_l(\alpha) - 3 + \alpha, (10-\alpha)x_r(\alpha) - 1 - \alpha] = [3+2\alpha; 7-2\alpha].$$

Звідси маємо, що

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{6+\alpha}{8+\alpha}, \frac{8-\alpha}{10-\alpha}\Big].$$

Оскільки

$$x_l'(\alpha) = \frac{2}{(8+\alpha)^2} > 0; \quad x_r'(\alpha) = -\frac{2}{(10-\alpha)^2} < 0,$$

то $x_l(\alpha)$ є зростаючою функцією, а $x_r(\alpha)$ – спадною. При цьому $x_l(1) = x_r(1) = \frac{7}{9}$, а отже $[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \left[\frac{6+\alpha}{8+\alpha}, \frac{8-\alpha}{10-\alpha}\right]$ є розв'язком рівняння.

Другим підходом є застосування принципу узагальнення Заде. Чітким розв'язком рівняння $ax + b = c$ є $x = \frac{c-b}{a}$. Введемо нечіткість, замінивши відповідні коефіцієнти нечіткими числами:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{c} - \tilde{b}}{\tilde{a}}.$$

Застосуємо принцип узагальнення:

$$\tilde{x}(x) = sup_{x=\frac{c-b}{a}} \min\Big(\mu_{\tilde{a}}(a), \mu_{\tilde{b}}(b), \mu_{\tilde{c}}(c)\Big).$$

В даному випадку розв'язок завжди існує, хоч і не завжди чітко задовільняє вихідне рівняння.

Альтернативним підходом є застосування інтервальної арифметики, тобто представлення розв'язку у вигляді

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \frac{[c_l(\alpha), c_r(\alpha)] - [b_l(\alpha), b_r(\alpha)]}{[a_l(\alpha), a_r(\alpha)]},$$

тобто

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{c_l(\alpha) - b_r(\alpha)}{a_r(\alpha)}, \frac{c_r(\alpha) - b_l(\alpha)}{a_l(\alpha)}\Big],$$

при $a_l(\alpha) > 0$ для усіх α. В даному випадку розв'язок також існує, хоч і не завжди чітко задовільняє вихідне рівняння.

Приклад 12. *Продовжуючи останній приклад, маємо:*

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{4 + 3\alpha}{10 - \alpha}, \frac{10 - 3\alpha}{8 + \alpha}\Big].$$

3.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь із нечіткою правою частиною

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь широко застосовуються при моделюванні різних процесів. При цьому часом виникає необхідність розглянути системи з нечіткими вхідними даними.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \tilde{y_1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \tilde{y_2}; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \tilde{y_n}, \end{cases}$$

де матриця коєфіцієнтів $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ є чіткою $n \times n$ матрицею, а $\tilde{y_i}$ є нечіткими числами, називається **нечіткою системою лінійних алгебраїчних рівнянь** (далі НСЛАР)[7].

Вектор нечітких чисел $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \ldots, \tilde{x_n})^T$, де $\tilde{x_i} = [(x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha)]$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq r \leq 1$ називається **розв'язком НСЛАР**, якщо виконуються наступні умови:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x_j}\Big)_l = \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij}(x_j)(\alpha)_l\big) = (y_i)_l;$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x_j}\Big)_r = \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij}(x_j)(\alpha)_r\big) = (y_i)_r;$$

Запишемо дані дві умови у вигляді однієї системи розмірності $2n \times 2n$ від невідомих

$$X = \Big((x_1)_l(\alpha), \ldots, (x_n)_l(\alpha), -(x_1)_r(\alpha), \ldots, -(x_n)_r(\alpha)\Big)^T$$

і правою частиною

$$Y = \Big((y_1)_l(\alpha), \dots, (y_n)_l(\alpha), -(y_1)_r(\alpha), \dots, -(y_n)_r(\alpha)\Big)^T.$$

Коеєфіцієнти системи визначимо за таким правилом:

$$a_{ij} \geq 0 \implies s_{ij} = a_{ij}, s_{i+n,j} = a_{ij};$$
$$a_{ij} < 0 \implies s_{i,j+n} = -a_{ij}, s_{i+n,j} = -a_{ij}.$$

Усі інші s_{ij}, що не визначені попередніми умовами, прирівнюються до нуля.

Запишемо систему у матричному вигляді:

$$SX = Y.$$

При цьому матриця S матиме блочну структуру:

$$S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix},$$

де B містить усі додатні елементи початкової матриці A, C – абсолютні значення від'ємних елементів матриці A, $A = B - C$.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 1. *[7] Матриця S є невиродженою тоді і тільки тоді, коли матриці $A = B - C$ та $B + C$ є невиродженими.*

Існування та єдиність розв'язку НСЛАР визначається теоремою:

Теорема 2. *Розв'язок X існує та є єдиним для довільного вектору Y тоді і тільки тоді, коли матриця S^{-1} є невід'ємною (тобто $(S^{-1})_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq 2n$.*

Нехай усі нечіткі числа в НСЛАР є трикутними нечіткими числами і нехай $X = \{((x_i)_l(\alpha), -(x_i)_r(\alpha)), 1 \leq i \leq n\}$ є єдиним розв'язком НСЛАР. Вектор нечітких чисел $u = \{((u_i)_l(\alpha), (u_i)_r(\alpha)), 1 \leq i \leq n\}$, що визначається співвідношеннями

$$(u_i)_l(\alpha) = \min\{(x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha), (x_i)_l(1)\},$$
$$(u_i)_r(\alpha) = \max\{(x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha), (x_i)_l(1)\},$$

називається **нечітким розв'язком** системи $SX = Y$.

Якщо усі $((x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha))$ є нечіткими числами, тобто $(u_i)_l(\alpha) = (x_i)_l(\alpha)$ і $(u_i)_r(\alpha) = (x_i)_r(\alpha)$, для усіх $1 \leq i \leq n$, то u називається **сильним нечітким розв'язком**. В противному разі u називається **слабким нечітким розв'язком**.

Приклад 13. *Розглянемо наступну НСЛАР розмірності* 2×2*:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = [\alpha, 2-\alpha]; \\ x_1 + x_2 = [4+\alpha, 7-2\alpha]; \end{cases}$$

Сформуємо матрицю S*. У цьому випадку маємо:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком буде

$$X = \begin{pmatrix} (x_1)_l(\alpha) \\ (x_2)_l(\alpha) \\ -(x_1)_r(\alpha) \\ -(x_2)_r(\alpha) \end{pmatrix} = S^{-1}Y =$$
$$= \begin{pmatrix} 1,125 & -0,125 & 0,375 & -0,375 \\ -0,375 & -0,375 & -0,125 & 0,125 \\ 0,375 & -0,375 & 1,125 & -0,125 \\ -0,125 & 0,125 & -0,375 & -0,375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 4+\alpha \\ \alpha-2 \\ 2\alpha-7 \end{pmatrix},$$

тобто $\tilde{x}_1 = [1,375 + 0,625\alpha, 2,875 - 0,875\alpha]$, $\tilde{x}_2 = [0,875 + 0,125\alpha, 1,375 - 0,375\alpha]$. *Тут* $(x_i)_l(\alpha) \leq (x_i)_r(\alpha)$, $(x_i)_l$ *є монотонно спадними,* $i = 1, 2$. *А отже,* $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ *є сильним нечітким розв'язком НСЛАР.*

Приклад 14. *Розглянемо НСЛАР розмірності* 3×3*:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = [\alpha, 2-\alpha]; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = [2+\alpha, 3]; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = [-2, -1-\alpha]. \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектор Y при цьому рівний

$$Y = \big(\alpha, 2+\alpha, -2, \alpha-2, -3, 1+\alpha\big)^T.$$

Вектором розв'язків є

$$X = \begin{pmatrix} -2,31+3,62\alpha \\ -0,62+0,77\alpha \\ 1,08-2,15\alpha \\ -4,69+3,38\alpha \\ 1,62-0,23\alpha \\ 2,92-1,85\alpha \end{pmatrix}$$

Неважко переконатися (побудувавши графік), що $\tilde{x}_2$ та $\tilde{x}_3$ не є нечіткими числами. Тож у цьому випадку система матиме тільки слабкий нечіткий розв'язок:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= [-2,31+3,62\alpha, 4,69-3,38\alpha]; \\ \tilde{u}_2 &= [-1,62+0,23\alpha, -0,62-0,77\alpha]; \\ \tilde{u}_3 &= [-2,92+1,85\alpha, 1,08-2,15\alpha]. \end{aligned}$$

3.3 Повністю нечіткі системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Введемо декілька нових означень.

Матриця $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ називається **нечіткою матрицею**, якщо кожен її елемент є нечітким числом. Матриця $\tilde{A}$ називаєтсья **додатною** (від'ємною), що позначаєьбся як $\tilde{A} > 0$ ($\tilde{A} < 0$), якщо кожен елемент $\tilde{A}$ є додатним (від'ємним) нечітким числом. Аналогічно визначаються невід'ємні та недодатні нечіткі матриці.

Надалі у цьому розділі будемо розглядати додатні нечіткі числа типу $L - R$.

Враховуючи, що $\tilde{a}_{ij} = (\overline{x})_{ij}, (\alpha_{ij})_l, (\alpha_{ij})_r)$, нечітку матрицю $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ у цьому випадку зручно представляти у вигляді трьох чітких $n \times m$ матриць $A = (\overline{x}_{ij})$,$M = ((\alpha_{ij})_l)$,$N = ((\alpha_{ij})_r)$. Позначатимемо $\tilde{A} = (A, M, N)$.

Квадратна нечітка матриця $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ називається **верхньою трикутною нечіткою матрицею**, якщо $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0;0;0)$, $i > j$. Нечітка матриця, отримана транспонуванням верхньої трикутної нечіткої матриці називається **нижньою трикутною нечіткою матрицею**.

Нехай $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ і $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ – дві нечіткі матриці розмірності $m \times n$ та $n \times p$, відповідно. Введемо операцію **добутку** нечітких матриць, $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$. При цьому матриця розмірності $\tilde{C}$ є матрицею розмірності $m \times p$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$\tilde{c}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik} \otimes \tilde{b}_{kj}.$$

Розглянемо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_1; \\ (\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{22} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_2; \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

Матрична форма цієї системи $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$, або просто $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, де матриця коефіцієнтів $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ є нечіткою $n \times n$ матрицею, $\tilde{x}$,$\tilde{b}$ євекторами нечітких чисел (нечіткими векторами). Дана система називається **повністю нечіткою системою лінійних алгебраїчних рівнянь** (надалі ПНСЛАР).

Позначимо $\tilde{b} = (b, h, g) \geq 0$, $\tilde{x} = (x, y, z) \geq 0$. Маємо

$$(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, h, g).$$

Кажемо, що $\tilde{x}$ є нечітким розв'язком ПНСЛАР $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні (чіткі) рівності:

$$Ax = b, \quad Ay + Mx = g, \quad Az + Nx = h.$$

При цьому вважаємо, що для знаходження функцій належності розв'язку та коефіцієнтів системи застосовуються функції L та R одного і того самого типу.

Даний підхід до розв'язання ПНСЛАР було запропоновано в [4].

Відмітимо, що для знаходження чітких розв'язків вищенаведених трьох систем можуть бути застосовані відомі класичні методи (в тому числі і ітераційні, див. [5]).

Приклад 15. *Розглянемо систему*

$$\begin{cases} \tilde{5}\tilde{x}_1 \oplus \tilde{6}\tilde{x}_2 = \tilde{50}; \\ \tilde{7}\tilde{x}_1 \oplus \tilde{4}\tilde{x}_2 = \tilde{48}. \end{cases}$$

Перепишемо дану систему в наступному вигляді (при цьому присвоїмо конкретні значення нечітким коефіцієнтам):

$$\begin{cases} (5;1;1) \otimes (x_1;y_1;z_1) \oplus (6;1;2) \otimes (x_2;y_2;z_2) = (50;10;17); \\ (7;1;0) \otimes (x_1;y_1;z_1) \oplus (4;0;1) \otimes (x_2;y_2;z_2) \quad = (48,5,7). \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 50 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 48 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Далі ми маємо знайти розв'язок $Ay + Mx = g$. Оскільки x вже відомий, то перепишемо нашу систему у вигляді $Ay = g - Mx$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

На останньому кроці нам слід знайти розв'язок $Az + Nx = h$. Оскільки $Az = h - Nx$, маємо:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи є наступні нечіткі числа трикутного вигляду:

$$\tilde{x}_1 = \left(4, \tfrac{1}{11}, 0\right), \quad \tilde{x}_2 = \left(5, \tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Лабораторна робота №3

Завдання:

Розв'яжіть нижченаведену ПНСЛАР, де $v = 1, 2, \ldots, 10$ – номер варіанта.

$$\begin{cases} (2+v;1;1) \otimes \tilde{x}_1 + (17-v;2;1) \otimes \tilde{x}_2 & = (6;2;3); \\ (3;1;2) \otimes \tilde{x}_1 + (5+v;2;2) \otimes \tilde{x}_2 & = (5;1;2). \end{cases}$$

4 Методи порівняння нечітких чисел

Існують різні підходи до порівняння нечітких чисел. Умовно їх можна поділити на два великі класи:

1. **Методи порівняння першого типу** відображають нечіткі числа на дійсну числову пряму за допомогою деякої функції $M : \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ і використовують нестрогий порядок $\geq$. Для більшості методів має місце:
$$M(\tilde{p}) \geq M(\tilde{q}) \implies \tilde{p} \geq_M \tilde{q},$$
де $\geq_M$ – відношення переваги, індуковане M.
2. **Методи порівняння другого типу** генерують нечітке бінарне відношення. У цьому випадку $M : \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \times \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \to [0,1]$, де значення $M(\tilde{p}, \tilde{q}) \in [0,1]$ показує степінь, з якою $\tilde{p}$ переважає $\tilde{q}$. Відповідно, нечіткі числа впорядковуються згідно із наступним правилом:
$$M(\tilde{p}, \tilde{q}) \geq M(\tilde{q}, \tilde{p}) \implies \tilde{p} \geq_M \tilde{q}.$$

Порівняльний аналіз даних методів наведено у [2].

4.1 Методи порівняння нечітких чисел першого типу

4.1.1 Метод Адамо

Метод, запропонований Адамо полягає у порівнянні правих частин α-перерізів для заданого α:
$$AD_\alpha(A) = \alpha_\alpha^+.$$

Для порівняння нечітких чисел за цим методом спершу потрібно задати рівень α.

Приклад 16. *Розглянемо два нечітких числа трикутного вигляду, задані через крайні точки:* $\tilde{p} = (0; 0,2; 1)$, $\tilde{q} = (0,2; 0,4; 0,5)$ *(див. рис. 4.7). В інтервальному вигляді маємо:*
$$\tilde{p} = [0,2\alpha; 1 - 0,8\alpha], \quad \tilde{q} = [0,2 + 0,2\alpha; 0,5 - 0,1\alpha].$$

Для порівняння за методом Адамо нам потрібно задати рівень α *і порівняти праві частини інтервалів, тобто* $1 - 0,8\alpha$ *і* $0,5 - 0,1\alpha$. *Очевидно наступне:*
$$\begin{aligned} \tilde{p} < \tilde{q}, &\qquad \alpha < \tfrac{5}{7}; \\ \tilde{p} = \tilde{q}, &\qquad \alpha = \tfrac{5}{7}; \\ \tilde{p} > \tilde{q}, &\qquad \alpha > \tfrac{5}{7}. \end{aligned}$$

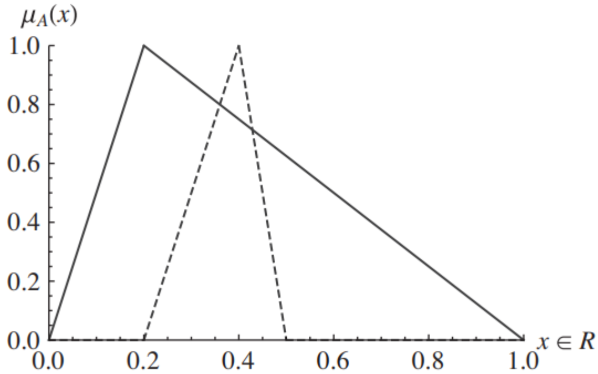

Рис. 4.7: Порівняння нечітких чисел.

4.1.2 Метод порівняння центрів ядер

Даний метод полягає у порівнянні центрів ядер відповідних нечітких множин. У випадку нечітких чисел (які є унімодальними нечіткими множинами) даний метод зводиться до порівняння значень, на яких функції належності відповідних нечітких множин приймають значення 1.

4.1.3 Метод порівняння центрів тяжіння

Центр тяжіння нечіткого числа визначається за формулою:

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx}.$$

Узагальненням даного методу є метод, запропонований Ягером:

$$Y_1(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} g(x)\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx},$$

де $g(x)$ показує важливість x.

Приклад 17. *Порівняємо нечіткі числа із попереднього прикладу. Спершу запишемо їхні функції належності:*

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 5x, & 0 < x \leq 0,2; \\ 1,25 - 1,25x, & 0,2 < x \leq 1; \\ 0, & \textit{в інших випадках}; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} 5x-1, & 0,2 < x \leq 0,4; \\ 5-10x, & 0,4 < x \leq 0,5; \\ 0, & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайдемо центр тяжіння для $\tilde{p}$:

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx} =$$

$$= \frac{\int_0^{0,2} x \cdot 5xdx + \int_{0,2}^1 x \cdot (1,25 - 1,25x)dx}{\int_0^{0,2} 5xdx + \int_{0,2}^1 1,25 - 1,25xdx}$$

$$= \frac{5\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,2} + (1,25\frac{x^2}{2} - 1,25\frac{x^3}{3})\Big|_{0,2}^1}{5\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,2} + (1,25x - 1,25\frac{x^2}{2})\Big|_{0,2}^1} \approx 0,4.$$

Аналогічно для $\tilde{q}$ маємо:

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{q}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{q}}(x)dx} =$$

$$= \frac{\int_{0,2}^{0,4} x \cdot (5x-1)dx + \int_{0,4}^{0,5} x \cdot (5-10x)dx}{\int_{0,2}^{0,4}(5x-1)dx + \int_{0,4}^{0,5}(5-10x)dx}$$

$$= \frac{(5\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{0,2}^{0,4} + (5\frac{x^2}{2} - 10\frac{x^3}{3})\Big|_{0,4}^{0,5}}{(5\frac{x^2}{2} - x)\Big|_{0,2}^{0,4} + (5x - 10\frac{x^2}{2})\Big|_{0,4}^{0,5}} \approx 0,366.$$

Оскільки $0,4 > 0,366$, то $\tilde{p} > \tilde{q}$.

4.1.4 Метод порівняння медіан

Нехай задано нечітке число у інтервальному вигляді: $\tilde{p} = [a_l(\alpha); a_r(\alpha)]$. **Потужністю** нечіткого числа $\tilde{p}$ називається площа, обмежена його функцією належності:

$$\operatorname{card} \tilde{p} = \int_0^1 (a_r(\alpha) - a_l(\alpha))d\alpha.$$

Нехай $\operatorname{supp} \tilde{p} = [a, b]$. **Медіанним значенням** нечіткого числа $\tilde{p}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$ є дійсне число $m_{\tilde{p}}$ з носія нечіткого числа [1] таке, що:

$$\int_a^{m_{\tilde p}} \mu_{\tilde p}(x)dx = \int_{m_{\tilde p}}^b \mu_{\tilde p}(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{card}\tilde p.$$

Тобто $m_{\tilde p}$ є точкою, яка ділить навпіл площу, обмежену функцією належності $\tilde p$.

Для порівняння двох нечітких чисел $\tilde p$ та $\tilde q$ спершу слід знайти їх медіанні значення, а потім порівняти їх:

$$\begin{aligned} \tilde p < \tilde q, &\qquad m_{\tilde p} < m_{\tilde q}; \\ \tilde p = \tilde q, &\qquad m_{\tilde p} = m_{\tilde q}; \\ \tilde p > \tilde q, &\qquad m_{\tilde p} > m_{\tilde q}. \end{aligned}$$

Приклад 18. *Продовжимо попередній приклад. Знайдемо медіану* $\tilde p$. *За формулою площі трикутника знайдемо* $\operatorname{card}\tilde p = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 0,5$. *Площа під лівою частиною функції належності* $\tilde p$ *рівна* $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,2 = 0,1$, *під правою, відповідно,* $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,8 = 0,4$. *Беручи до уваги, що* $\frac{1}{2}\cdot\operatorname{card}\tilde p = 0,25$, *таку точку* $m_{\tilde p} \in [0,2;1]$, *що* $\int_{0,2}^{m_{\tilde p}} \mu_{\tilde p} = 0,15$. *Еквівалентно, можемо записати:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-m_{\tilde p})(1,25-1,25\cdot m_{\tilde p}) &= 0,35; \\ (1-m_{\tilde p})^2 &= 0,56; \\ m_{\tilde p} &\approx 0,252. \end{aligned}$$

Аналогічно, $\operatorname{card}\tilde p = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,3 = 0,15$, $\frac{1}{2}\cdot\operatorname{card}\tilde p = 0,075$. *Площа під лівою частиною функції належності* $\tilde q$ *рівна* $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,2 = 0,1$. *Отже, медіану шукатимемо наступним чином:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_{\tilde q}-0,2)(5m_{\tilde q}-1) &= 0,15; \\ 5m_{\tilde q}^2 - 2m_{\tilde q} - 0,05 &= 0; \\ m_{\tilde q} &\approx 0,424. \end{aligned}$$

Оскільки $m_{\tilde p} < m_{\tilde q}$, *робимо висновок, що* $\tilde p < \tilde q$.

4.1.5 Метод порівняння можливих середніх значень

Можливе середнє значення нечіткого числа (the possibilistic mean value) заданого у інтервальному вигляді, $\tilde p = [a_l(\alpha), a_r(\alpha)]$, визначається як зважене середнє значення α-перерізів нечіткого числа $\tilde p$:

$$E_P(\tilde p) = \int_0^1 \alpha(a_l(\alpha) + a_r(\alpha))d\alpha.$$

Існує версія даного методу, де замість α використовується узагальнена вагова функція $f(\alpha)$.

Приклад 19. *Нагадаємо, що в інтервальному вигляді розглядувані нами нечіткі числа записуються наступним чином:*

$$\tilde{p} = [0,2\alpha; 1 - 0,8\alpha], \quad \tilde{q} = [0,2 + 0,2\alpha; 0,5 - 0,1\alpha].$$

Тоді

$$\begin{aligned} E_P(\tilde{p}) &= \int_0^1 \alpha(0,2\alpha + 1 - 0,8\alpha))d\alpha \\ &= \int_0^1 (-0,6\alpha^2 + \alpha)d\alpha = 0,3; \\ E_P(\tilde{q}) &= \int_0^1 \alpha(0,2 + 0,2\alpha + 0,5 - 0,1\alpha))d\alpha \\ &= \int_0^1 (0,1\alpha^2 + 0,7\alpha)d\alpha \approx 0,383. \end{aligned}$$

Оскільки $E_P(\tilde{p}) < E_P(\tilde{q})$, робимо висновок, що $\tilde{p} < \tilde{q}$.

4.2 Методи порівняння нечітких чисел другого типу

У даному підрозділі розглянемо тільки один із даного класу методів – а саме метод порівняння, що базується на обчисленні площ відповідних нечітких чисел.

Для знаходження ступню, з яким одне нечітке число менше або рівне за інше, можна скористатися наступною функцією [11]:

$$P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = \tfrac{S_{\inf(\tilde{p}) \leq \sup(\tilde{q})}}{S_{\tilde{p}} + S_{\tilde{q}}},$$

де

$$S_{\inf(\tilde{p}) \leq \sup(\tilde{q})} = \textstyle\int_0^1 \big(\max(0, q_r(\alpha) - p_l(\alpha)) - \max(0, q_l(\alpha) - p_r(\alpha)\big)d\alpha,$$

де $S_{\tilde{p}}$ і $S_{\tilde{q}}$ є площами заданих нечітких чисел. Очевидно, що дане відношення задовільняє наступним важливим властивостям:

i. $0 \leq P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) \leq 1$;

ii. $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = 1$ тоді і тільки тоді, коли правий кінець першого нечіткого числа, менший або рівний лівому кінцю другого;

iii. $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли лівий кінець носія першого числа, є більшим або рівним правому кінцю носія другого числа;

iv. $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) + P(\tilde{q} \leq \tilde{p}) = 1$.

З останньої умови випливає, що $P(\tilde{p} \leq \tilde{p}) = \frac{1}{2}$.

Для вимірювання схожості нечітких чисел, можна використати наступну формулу:

$$S(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{S_{\tilde{p}\cap\tilde{q}}}{S_{\tilde{p}}+S_{\tilde{q}}-S_{\tilde{p}\cap\tilde{q}}},$$

де $S_{\tilde{p}}, S_{\tilde{q}}, S_{\tilde{p}\cap\tilde{q}}$ є площами відповідних нечітких чисел.

Легко бачити, що пропонована міра задовільняє насутпним умовам:

i. $0 \leq S(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq 1$;

ii. $S(\tilde{p}, \tilde{p}) = 0$;

iii. $S(\tilde{p}, \tilde{q}) = S(\tilde{q}, \tilde{p})$;

iv. $S(\tilde{p}, \tilde{q}) = 1 \iff \tilde{p} = \tilde{q}$.

Приклад 20. *Порівняємо числа із попереднього прикладу.*

$S_{tildep} = \operatorname{card} \tilde{p} = 0,5,\ S_{\tilde{q}} = \operatorname{card} \tilde{p} = 0,15$. *З іншого боку,*

$$\begin{aligned}
&S_{\inf(\tilde{p})\leq\sup(\tilde{q})} = \\
&= \int_0^1 \big(\max(0, 0,5 - 0,1\alpha - 0,2\alpha) - \max(0, 0,2 + 0,2\alpha - 1 + 0,8\alpha\big) d\alpha \\
&= \int_0^1 \big(\max(0, 0,5 - 0,3\alpha) - \max(0, -0,8 + \alpha\big) d\alpha \\
&= \int_0^1 (0,5 - 0,3\alpha) d\alpha - \int_{0,8}^1 (-0,8 + \alpha) d\alpha = 0,35 - 0,02 = 0,33.
\end{aligned}$$

Отже,

$$P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = \frac{S_{\inf(\tilde{p})\leq\sup(\tilde{q})}}{S_{\tilde{p}}+S_{\tilde{q}}} = \frac{0,33}{0,5+0,15} \approx 0,508.$$

За даним методом порівняння $\tilde{p}$ *є меншим* $\tilde{q}$ *зі ступенем* $0,508$.

Лабораторна робота №4

Нехай $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ – два нечіткі числа трикутного вигляду.

Завдання:

1. Зобразити $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ графічно.

2. Порівняти $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ використовуючи методи порівняння першого та другого типу.

Зауваження: У варіантах завдань даної лабораторної роботи нечіткі числа задані **через крайні точки**.

Варіанти завдань

Варіант 1. $\tilde{p} = (7; 10; 13)$, $\tilde{q} = (9, 11, 12)$.
Варіант 2. $\tilde{p} = (1; 5; 7)$, $\tilde{q} = (3, 4, 8)$.
Варіант 3. $\tilde{p} = (5; 7; 8)$, $\tilde{q} = (7, 8, 10)$.
Варіант 4. $\tilde{p} = (4; 8; 9)$, $\tilde{q} = (5, 7, 11)$.
Варіант 5. $\tilde{p} = (5; 9; 10)$, $\tilde{q} = (6, 8, 9)$.
Варіант 6. $\tilde{p} = (4; 7; 9)$, $\tilde{q} = (5, 6, 8)$.
Варіант 7. $\tilde{p} = (1; 3; 4)$, $\tilde{q} = (2, 4, 7)$.
Варіант 8. $\tilde{p} = (6; 9; 13)$, $\tilde{q} = (5, 10, 11)$.
Варіант 9. $\tilde{p} = (3; 8; 10)$, $\tilde{q} = (4, 5, 6)$.
Варіант 10. $\tilde{p} = (7; 9; 11)$, $\tilde{q} = (7, 10, 15)$.

5 Нечітке лінійне програмування

Класична модель лінійного програмування має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) = c^T x &\to \max; \\ Ax &\le b; \\ x &\ge 0; \\ c, x \in \mathbb{R}^n&, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Логічним кроком для узагальнення даної моделі є відмова від класичних припущень щодо того, що коефіцієнти A, b та c є чіткими числами, що $\le$ мається на увазі у чіткому сенсі, і що максимізація також є чіткою.

Можливі різні можифікації стандартної моделі лінійного програмування. По-перше особа, що приймає рішення, може не вимагати максимізації чи мінімізації цільової функції, а, натомість, вимагати досягнення певного прийматися як нечіткі, такі, що показують бажаний, нестрогий, рівень обмежень. Насамкінець, обмеження на змінні можуть також бути нечіткими.

Взагалі кажучи, існує велика кількість нечітких узагальнень класичної задачі лінійного програмування, єдиного уніфікованого підходу не існує.

5.1 Симметричне лінійне програмування

Припустимо, що особа, що приймає рішення, задає бажаний рівень z для цільової функції. Тоді задача може бути сформульована наступним чином:

$$\begin{aligned} c^T x &\gtrsim z; \\ Ax &\lesssim b; \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

Тут $\gtrsim$ означає "значно більше, або рівно", а $\lesssim$ – "значно менше, або рівно". Дана модель є симетричною відносно цільової функції та обмежень. Позначимо $\binom{-c}{A} = B$, $\binom{-z}{b} = d$. Тоді наша модель запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} Bx &\lesssim d; \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

Кожен із $(m+1)$ рядків даної моделі можна представити функцією належності $\mu_i(x)$. Функцією належності розв'язку буде

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_i \{\mu_i(x)\}.$$

$\mu_i(x)$ можна інтерпретувати як ступінь, з яким x задовільняє нерівність $B_i x \le d_i$ (де B_i позначає i-тий рядок матриці B).

Припускаючи, що особа, що приймає рішення, зацікавлена не у нечіткій множині, а у "оптимальному" розв'язку, ми можемо розглянути "максимізуючий розв'язок", який отримується із наступної задачі (не)лінійного програмування:

$$\max_{x \ge 0} \min\{\mu_i(x)\} = \max_{x \ge 0} \mu_{\tilde{D}}(x).$$

Визначимо вигляд функцій $\mu_i(x)$. $\mu_i(x)$ повинні бути рівними нулю, якщо обмеження (включаючи цільову функцію) строго порушуються, і рівними одиниці, якщо обмеження строго задовольняються (тобто задовольняються у чіткому сенсі). $\mu_i(x)$ повинні бути монотонно зростаючими від 0 до 1, тобто

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad B_i x \le d_i; \\ \in [0,1], & \text{якщо} \quad d_i < B_i x \le d_i + p_i; \\ 0, & \text{якщо} \quad B_i x > d_i + p_i. \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, m+1;$$

Використовуючи найпростіший тип функції належності, ми припускаємо, що функція належності зростає лінійно:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad B_i x \le d_i; \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}, & \text{якщо} \quad d_i < B_i x \le d_i + p_i; \\ 0, & \text{якщо} \quad B_i x > d_i + p_i. \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, m+1;$$

p_i є суб'єктивно вибраними сталими допустимих відхилень обмежень та цільової функції. Чіткий розв'язок шукатимемо з умови:

$$\max_{x \ge 0} \min_i \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}\right).$$

Вводячи нову змінну, зводимо дану задачу до чіткої задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} &\lambda \to max; \\ \lambda p_i + B_i x \le d_i + p_i;& \qquad i = 1, \ldots, m+1; \\ &x \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши дану задачу, отримуємо оптимальний розв'язок (λ, x_0).

Іншим підходом є заданння ступеней відхилення для i-тої умови: t_i, $i = 1, \ldots, m+1$, $0 \le t_i \le p_i$. Тоді функції належності задаються наступним чином:

$$\mu_i(x) = 1 - \frac{t_i}{p_i}.$$

Чітким еквівалентом даної моделі є наступна задача:

$$\begin{aligned} \lambda &\to max; \\ \lambda p_i + t_i &\le p_i; \qquad i = 1, \ldots, m+1; \\ B_i x - t_i &\le d_i; \\ t_i &\le p_i; \\ x, t &\ge 0. \end{aligned}$$

Приклад 21. *[17] Компанія оптимізує свій гараж. Розглядаються чотири типи вантажівок із вантажопідйомністю x_i, $i = 1, \cdots, 4$. Метою є мінімізувати витрати на автопарк, при цьому забезпечивши усіх споживачів товаром (що приводить до обмежень на сумарну вантажопідйомність та до обмежень на оптимальний маршрут). Також, із певних причин, вимагається наявність не менш, ніж шести маленьких вантажівок. Поставлені умови привели до такої задачі лінійного програмування:*

$$\begin{aligned} 41400x_1 + 44300x_2 + 48100x_3 + 49100x_4 &\to min; \\ 0,84x_1 + 1,44x_2 + 2,16x_3 + 2,4x_4 &\ge 170; \\ 16x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 16x_4 &\ge 1300; \\ x_1 &\le 6; \\ x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язком цієї задачі є $x_1 = 6$, $x_2 = 16,29$, $x_3 = 0$, $x_4 = 58,96$, мінімальні витрати рівні 3864975.

Керівництво компанії було задоволено запропонованим планом, але вирішило послабити певні умови. Оскільки для формулювання обмежень було використане прогнозоване навантаження на транспорт, то дана модель не враховувала пікові навнтаження у період піку замовлень.

Також виявилося, що на автопарк виділяється фіксований бюджет, тож умова щодо "мінімізації" витрат також є дещо надлишковою.

Після перегляду моделі було запропоновано наступні послаблення. Нижні межі інтервалів толерантності:

$$d_1 = 3700000, \quad d_2 = 170, \quad d_3 = 1300, \quad d_4 = 6.$$

Чітка	Нечітка
$x_1 = 6$	$x_1 = 17,414$
$x_2 = 16,29$	$x_2 = 0$
$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_4 = 58,96$	$x_4 = 66,54$
$Z = 3864975$	$Z = 3988250$
Обмеження	
1. 170	174,33
2. 1300	1343,328
3. 6	17,414

Табл. 1: Розв'язки чіткої та нечіткої задач

Довжини інтервалів толерантності:

$$p_1 = 500000, \quad p_2 = 10, \quad p_3 = 100, \quad p_4 = 6.$$

Після певних перетворень, приходимо до наступної задачі:

$$\begin{aligned} \lambda \to max; \\ 0,083x_1 + 0,089x_2 + 0,096x_3 + 0,098x_4 + \lambda \le 8,4; \\ 0,084x_1 + 0,144x_2 + 0,216x_3 + 0,24x_4 - \lambda \ge 17; \\ 0,16x_1 + 0,16x_2 + 0,16x_3 + 0,16x_4 - \lambda \ge 13; \\ 0,167x_1 - \lambda \le 1; \\ \lambda, x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язки чіткої та нечіткої задач наведено у табл. 1. Як можна бачити із розв'язків, "послаблення" умов було досягнуто за рахунок збільшення вартості на $3,2\%$.

Основною перевагою нечіткого підходу, порівняно із чітким, є те, що особа, що приймає рішення, не повинна чітко формулювати постановку задачі. Достатньо тільки опису завдання у нечітких термінах.

Також слід відмітити, що лінійні функції є досить грубим наближенням. Втім, більш складні функції, що монотонно зростають (або спадають) на інтервалі $[d_i, d_i + p_i]$ також можуть використовуватися при моделюванні.

	$\mu = 0$	$\mu = 1$
Цільова функція	36	38
Обмеження 1	6	4
Обмеження 2	10	6
Обмеження 3	25	18

Табл. 2: Значення поступок

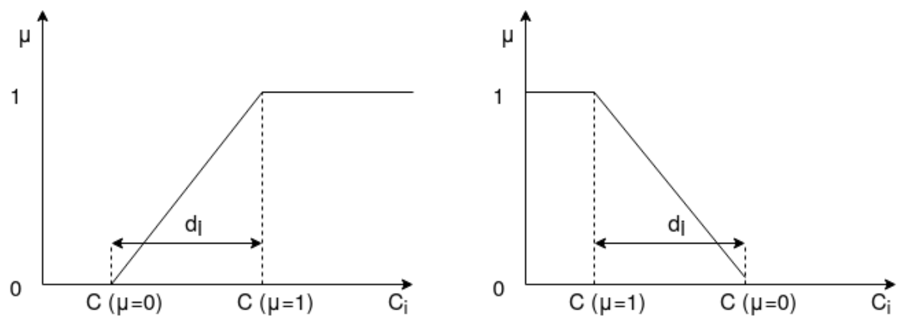

Рис. 5.8: Функції належності цільової функції та обмежень.

Приклад 22. *Нехай маємо наступну задачу лінійного програмування:*

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to max;$$
$$x_1 \leq 4;$$
$$2x_2 \leq 12;$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18;$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язком даної задачі є

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 6; \quad z = 36.$$

Нехай ми хочемо отримати значення цільової функції більше, ніж 36. Для цього ми згодні поступитися на кілька одиниць по обмеженням. Величини поступок наведено у таблиці **??**. *Відповідний загальний вигляд функцій належності – на рис. 5.8.*

В загальному вигляді наші обмеження можна записати так:

$$\mu(C_i) \geq \lambda.$$

Розглянемо цільову функцію. Вигляд її функції належності наведено на рис. **??**.

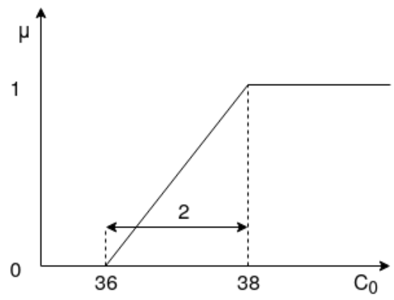

Рис. 5.9: Функція належності цільової функції.

Нагадаємо формулу рівняння прямої, що проходить через задані дві точки (x_0, y_0), (x_1, y_1)*:*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot (y_1 - y_0).$$

Використаємо останню формулу для рис. **??**.

$$\mu(C_0) = 0 + \frac{(C_0) - 36}{38 - 36} \cdot (1 - 0).$$

$$\mu(C_0) = \frac{(C_0) - 36}{2} = \frac{(3x_1 + 5x_2) - 36}{2}.$$

Останній вираз повинен бути не меншим λ*, тож отримуємо:*

$$\frac{3x_1 + 5x_2 - 36}{2} \geq \lambda;$$

$$1.5x_1 + 2.5x_2 - 18 \geq \lambda;$$

$$1.5x_1 + 2.5x_2 - \lambda \geq 18;$$

Аналогічним чином знаходимо цільові функції обмежень. Для першого обмеження див. рис. **??**.

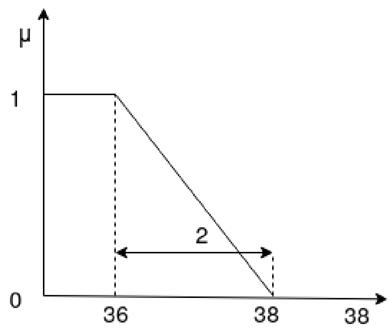

Рис. 5.10: Функція належності першого обмеження.

$$\mu(C_1) = \frac{6 - x_1}{2} \geq \lambda;$$
$$-x_1 - 2\lambda \geq -6;$$
$$x_1 + 2\lambda \leq 6;$$

Кінцево, отримуємо насутпну чітку задачу:

$$\begin{aligned} \lambda &\to \max; \\ 1.5x_1 + 2.5x_2 - \lambda &\geq 18; \\ x_1 + 2\lambda &\leq 6; \\ 0.25x_2 + \lambda &\leq 2.5; \\ 0.43\lambda + 0.286x_2 + \lambda &\leq 3.57; \\ x_1, x_2, \lambda &\leq 0. \end{aligned}$$

Розв‘язком нечіткої задачі є:

$$x_1 = 1.95; \quad x_2 = 6.39; \quad z = 37.8.$$

5.2 Задача нечіткого лінійного програмування із чіткою цільовою функцією

Модель, у якій цільова функція є чіткою, а обмеження нечіткими, не є симетричною – ролі цільової функції та обмежень відрізняються. Обмеження задають простір можливих розв'язків у чіткому або нечіткому вигляді, а цільова функція задає порядок на множині можливих розв'язків. Основною проблемою при цьому є шкалювання цільової функції (множина визначення якої не є нормалізованою) при узгодженні її із (нормалізованими) обмеженнями.

Є два підходи до розв'язання даної задачі:

1. Задання нечіткої множини “розв’язок задачі”.
2. Визначення чіткого “максимізуючого розв’язку” шляхом агрегування цільової функції після відповідних перетворень, здійснених над обмеженнями.

5.2.1 Задання нечіткої множини “розв’язок задачі”.

В [14] було запропоновано обчислення для усіх α-перерізів простору можливих розв’язків, відповідні оптимальні значення для цільової функції розглядаються як нечітка множина “розв’язок задачі” з оптимальними значеннями цільової функції та відповідними степенями належності α.

Приклад 23. *[17] Розглянемо наступну задачу:*

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 &\lesssim 3; \\ x_1 + x_2 &\lesssim 4; \\ 5x_1 + x_2 &\lesssim 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

“Інтервали толерантності” обмежень рівні $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$.

Тоді відповідна параметрична задача лінійного програмування для визначення взаємозв’язку між $f(x) = \alpha$ та ступеню належності матиме вигляд:

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 &\leq 9 - 6\alpha; \\ x_1 + x_2 &\leq 8 - 4\alpha; \\ 5x_1 + x_2 &\leq 5 - 2\alpha; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Праві частини нерівностей отримані за наступним алгоритом. Нехай $\mu_i(x)$ – функція належності правої частини. Тоді i-те обмеження запишеться у вигляді:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq \mu^{-1}(\alpha).$$

У випадку лінійної функції належності, маємо

$$\mu^{-1}(\alpha) = b_i + p_i(1 - \alpha).$$

Так, у нашому прикладі маємо наступні дані:

Особа, що приймає рішення, повинна визначити, які пари $(\alpha, \mu_{f(\alpha)})$ є для неї прийнятними.

i	b_i	p_i	Права частина
1	3	6	$3+6(1-\alpha)=9-6\alpha$
2	4	4	$4+4(1-\alpha)=8-4\alpha$
2	3	2	$3+2(1-\alpha)=5-2\alpha$

Табл. 3: Праві частини параметричної задачі

5.2.2 Визначення чіткого "максимізуючого розв'язку" шляхом агрегування цільової функції.

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – цільова функція, $\tilde{R}$ – нечітка область (простір розв'язків), $S(\tilde{R})$ – носій $\tilde{R}$. **Максимізуюча множина над нечіткою множиною** $\tilde{M}R(f)$ тоді визначається наступною функцією належності:

$$\mu_{\tilde{M}R(f)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad f(x) \le \inf_{S(\tilde{R})} f; \\ \frac{f(x)-\inf_{S(\tilde{R})} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \inf_{S(\tilde{R})} f}, & \text{якщо} \quad \inf_{S(\tilde{R})} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f; \\ 1, & \text{якщо} \quad \sup_{S(\tilde{R})} f \le f(x). \end{cases}$$

Перетин цієї множини із нечіткою множиною "розв'язок задачі" може бути використаний для знаходження максимізуючого розв'язку x_0, як розв'язку із найвищим ступенем належності у даній нечіткій множині. Оптимальним був би пошук найбільш можливого значення f зі ступенем належності 1 у множині визначення.

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – цільова функція, $\tilde{R}$ – нечітка область (простір розв'язків), $S(\tilde{R})$ – носій $\tilde{R}$, R_1 – α-переріз множини $\tilde{R}$ для $\alpha = 1$. **Функція належності мети** (цільової функції) над простором розв'язків $\tilde{R}$ визначається наступним чином:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad f(x) \le \sup_{R_1} f; \\ \frac{f(x)-\sup_{R_1} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \sup_{R_1} f}, & \text{якщо} \quad \sup_{R_1} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f; \\ 1, & \text{якщо} \quad \sup_{S(\tilde{R})} f \le f(x). \end{cases}$$

Відповідна функція належності у функціональному просторі матиме вигляд:

$$\mu_{\tilde{G}}(\alpha) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)}, & \text{якщо} \quad r \in \mathbb{R}, f^{-1}(\alpha) \ne \varnothing; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Приклад 24. *Розглянемо задачу із попереднього прикладу. Для даної* *моделі R_1 визначатиметься із співвідношень:*

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3; \\ x_1 + x_2 &\leq 4; \\ 5x_1 + x_2 &\leq 3; \\ xgeq &0. \end{aligned}$$

Супремумом цільової функції у цій області є

$$\sup_{R_1} 2x_1 + x_2 = 7.$$

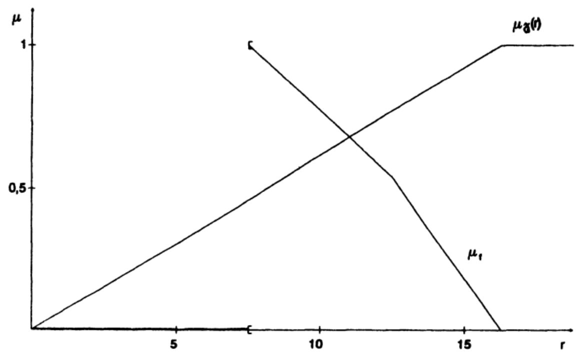

Рис. 5.11: Функції належності цілі та розв'язку.

Використовуючи мінімаксний підхід, отримуємо розв'язок:

$$x_1^0 = 5,84; \quad x_2^0 = 0,05; \quad r_0 = 11,73; \quad \mu_{\tilde{R}}(x_0) = 0,53.$$

Припустимо тепер, що у нашій моделі є як чіткі, так і нечіткі обмеження:

$$\begin{aligned} f(x) = c^T x &\to \max; \\ Ax &\lesssim b; \\ Dx &\leq b'; \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Множину обмежень позначатимемо $\tilde{R}$.

Нехай функції належності нечітких обмежень мають вигляд:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad A_i x \leq b_i; \\ \frac{b_i + p_i - A - ix}{p_i}, & \text{якщо} \quad b_i < A_i x \leq b_i + p_i; \\ 1, & \text{якщо} \quad A_i x > b_i + p_i. \end{cases}$$

Функція належності цільової функції може бути визначена розв'язанням наступних двох задач лінійного програмування:

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x &\to \max; \\
Ax &\le b; \\
Dx &\le b'; \\
x &\ge 0,
\end{aligned}
$$

звідки отримуємо $\sup_{R_1} f = (c^T x)_{opt} = f_1$, і

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x &\to \max; \\
Ax &\le b + p; \\
Dx &\le b'; \\
x &\ge 0,
\end{aligned}
$$

звідки отримуємо $\sup_{S(\tilde{R})} f = (c^T x)_{opt} = f_0$.

Тож функція належності цільової функції матиме вигляд:

$$
\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad f_0 \le c^T x; \\ \frac{c^T x - f_1}{f_0 - f_1}, & \text{якщо} \quad f_1 < c^T x \le f_0; \\ 0, & \text{якщо} \quad c^T x > f_1. \end{cases}
$$

Для знаходження розв'язку у даному випадку нам слід розв'язати наступну чітку задачу лінійного програмування:

$$
\begin{aligned}
\lambda &\to \max; \\
\lambda(f_0 - f_1) - c^T x &\le -f_1; \\
\lambda p + Ax &\le b + p; \\
Dx &\le b'; \\
\lambda &\le 1; \\
\lambda, x &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Лабораторна робота №5

Завдання:

Розв'яжіть задану задачу лінійного програмування. Самостійно задайте поступки для цільової функції та обмежень, розв'яжіть відповідну нечітку задачу.

Варіант 1.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \max; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 2.

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 3.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 4.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \min; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 5.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \max; \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 18, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 6.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 7.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 8.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 9.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 - 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 10.

$$
\begin{aligned}
12x_1 + 3x_2 \to \max;\\
2x_1 + 3x_2 \geq 6,\\
2x_1 + 6x_2 \leq 18,\\
2x_1 + x_2 \leq 12,\\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Література

[1] S. Bodjanova. Median value and median interval of a fuzzy number. *Inf. Sci.*, 172(1–2):73–89, June 2005.

[2] M. Brunelli and J. Mezei. How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study. *Internat. J. Approx. Reason.*, 54(5):627–639, 2013.

[3] J. J. Buckley and E. Eslami. *Advances in Soft Computing: An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets.* Physica-Verlag GmbH, DEU, 2002.

[4] M. Dehghan, B. Hashemi, and M. Ghatee. Computational methods for solving fully fuzzy linear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 179(1):328 – 343, 2006.

[5] M. Dehghan, B. Hashemi, and M. Ghatee. Solution of the fully fuzzy linear systems using iterative techniques. *Chaos, Solitons and Fractals*, 34(2):316 – 336, 2007.

[6] D. DuBois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, Inc., USA, 1997.

[7] M. Friedman, M. Ming, and A. Kandel. Fuzzy linear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 96(2):201–209, 1998.

[8] R. Fuller. *Neural Fuzzy Systems.* 11 1998.

[9] M. Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications.* Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

[10] A. Kaufmann and M. Gupta. *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications.* Electrical-Computer Science and Engineering Series. Van Nostrand Reinhold Company, 1985.

[11] X. Liu. Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2):263 – 275, 2001.

[12] R. E. Moore. *Interval analysis [by] Ramon E. Moore.* Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J, 1966.

[13] H. T. Nguyen and E. A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic, Third Edition.* Chapman & Hall/CRC, 2005.

[14] O. S.A. On programming with fuzzy constraint sets. 6(3):197–201, Jan 1977.

[15] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.

[16] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, 8(3):199 – 249, 1975.

[17] H.-J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory – and Its Applications*, volume 2001. 01 2001.