МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСУ «ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА»

для студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету,
напряму підготовки „Електронні прилади та системи”
Частина 1

Ужгород – 2016

Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу „Обчислювальна математика” для студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету, напряму підготовки „Електронні прилади та системи”. Частина 1

Укладачі: Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри комп’ютерних систем та мереж;
Горват П.П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри комп’ютерних систем та мереж;
Тютюнникова Г.С., старший викладач кафедри комп’ютерних систем та мереж;
Самусь Є.І., старший викладач кафедри комп’ютерних систем та мереж.

Рецензент: Бутурлакін О.П. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри приладобудування, інженерно-технічного факультету, УжНУ.

Відповідальний за випуск – Туряниця І.І., канд. фіз.-мат. наук, професор, декан інженерно-технічного факультету.

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол №5 від 28 січня 2016 року та методичної комісії інженерно-технічного факультету протокол №1 від 5 лютого 2016 року.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

«Обчислювальна математика» – одна з фундаментальних дисциплін у підготовці фахівців інженерно-технічного факультету для спеціальності «Електронні прилади та системи», побудована на основі математичних знань. Для засвоєння дисципліни потрібна ґрунтовна математична база, особливо з математичного аналізу, алгебри, диференціального числення, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, математичного моделювання. Дисципліна дозволяє застосовувати математичні кількісні методи для обґрунтування рішень та розв'язування прикладних задач в різних галузях цілеспрямованої людської діяльності.

Зауважимо, що чисельні методи з огляду на громіздкість обчислень та вимоги до точності результатів вивчаються за комп'ютерної підтримки. Знання, здобуті студентами під час вивчення обчислювальної математики, широко застосовуються в маркетингу, менеджменті, в системах підтримки прийняття рішень, моделюванні економіки та бізнес-процесів тощо.

Під час вивчення дисципліни «Обчислювальна математика» студенти мають опанувати класифікацію задач та методів, постановку організаційних задач з використанням математичного апарату, основні означення, теореми і методи, типи економіко-математичних моделей, що застосовуються для вироблення й прийняття управлінських рішень; набути практичних навичок постановки і рішення організаційних задач з використанням математичного апарату, застосовування адекватних математичних моделей та методів для отримання найбільш раціонального рішення в конкретній ситуації, використовувати методики багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень, використовувати прикладні програми при проведенні обчислень на ПЕОМ.

Дидактичною метою лабораторного заняття є практичне підтвердження окремих теоретичних положень даної навчальної дисципліни, набуття практичних умінь та навичок роботи з обладнанням, обчислювальною технікою, методикою експериментальних досліджень в даній предметній галузі.

Лабораторні заняття проводяться з групою в якій не більше 15 осіб. Основними етапами підготовки та проведення лабораторної роботи є: інструктаж з техніки безпеки; проведення попереднього контролю підготовленості студентів до виконання лабораторної роботи; виконання завдань згідно з запропонованою тематикою; оформлення та захист індивідуального звіту; оцінювання результатів роботи і звіту.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Звіт до лабораторної роботи має містити основні структурні елементи: назву, тему, мету, завдання, розрахункові формули. Результати аналітичного дослідження та висновок про отримані результати.

Основна мета перевірки виконання лабораторного практикуму – виявлення здатності студента одержувати нові знання в процесі практичної діяльності, узагальнювати, систематизувати та фіксувати їх. Захист роботи відбувається після її виконання на основі письмового звіту за умови повного додержання вимог до його оформлення.

«Відмінно» ставиться, якщо студент демонструє знання про методи одержання, узагальнення та систематизації, наведеного в звіті матеріалу на рівні 90-100 %;

«Добре» – якщо студент демонструє знання про методи одержання, узагальнення та систематизації наведеного в звіті матеріалу на рівні 75-90 %;

«Задовільно» – якщо студент демонструє знання про методи одержання, узагальнення та систематизації наведеного в звіті матеріалу на рівні 50-75 %;

Якщо ж студент не може пояснити методи одержання, узагальнення та систематизації менше половини, наведеного в звіті матеріалу, то робота не зараховується.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема: Апроксимація експериментальних даних за допомогою поліноміальних функцій.

Мета роботи: Вивчити методи апроксимації даних за допомогою поліноміальних функцій. Засвоїти методику знаходження відповідних залежностей за допомогою програми *Microcal Origin*.

Короткі теоретичні відомості

Нехай задана згладжуючи крива $f(x)$ між опорними точками $x_n \le x \le x_{n+1}$.

При апроксимації шукану криву необхідно провести за деякою визначеною стратегією між парами величин (розсіяними чи зашумленими), не досягаючи того, щоб на опорних точках x_n значення функції $f(x_n)$ збігалися з виміряними значеннями y_n.

Прив'язку згладжуючої кривої $f(x)$ до заданих пар вимірювань (x_n, y_n) можна проводити різними методами:

а) сума абсолютних різниць $|f(x_n) - y_n|$ повинна наближатися до мінімуму:

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_n) - y_n| \to Min! \qquad (1.1)$$

б) сума квадратів різниць повинна наближатися до мінімуму:

$$\sum_{i=1}^{N} (f(x_n) - y_n)^2 \to Min! \qquad (1.2)$$

в) максимальна різниця між згладжуючою кривою та виміряною величиною повинна залишатися в межах області D:

$$\max|f(x_b) - y_n| \le D. \qquad (1.3)$$

Надалі будемо застосовувати виключно метод найменших квадратів, який у порівнянні з мінімізацією абсолютної норми, легший для практичної реалізації.

Апроксимуючі криві, за виключенням періодичних сигналів у загальному випадку монотонно спадні чи монотонно зростаючі. Екстремуми не очікуються, оскільки тоді характеристика буде багатозначною. Таким чином, для згладжування будемо шукати коефіцієнти поліномів не вище третього ступеня, тобто прямі, квадратичні та кубічні параболи. У загальному випадку згладжуючий поліном $P(x)$ знаходиться у вигляді:

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad (1.4)$$

Розглянемо згладжуючу пряму. Вираз (1.4) справедливий і тоді, коли характеристика повинна бути прямою. В цьому випадку коефіцієнти c і d дорівнюють нулю.

Однак, у випадках, коли досліджується лінійна залежність, апроксимуючий поліном доцільно задати лінійною функцією:

$$f(x) = a + bx \tag{1.5}$$

Далі необхідно мінімізувати суму S:

$$S = \sum (a + bx_n - y_n)^2 = Min! \tag{1.6}$$

Знайшовши частинні похідні $\frac{\partial S}{\partial a}$ і $\frac{\partial S}{\partial b}$ та, прирівнявши їх до нуля, в результаті отримаємо нормальні рівняння:

$$aN + b\sum x_n = \sum y_n , \tag{1.7}$$

$$a\sum x_n + b\sum x^2{}_n = \sum x_n y_n . \tag{1.8}$$

Рівняння (1.7) розв’яжемо відносно a:

$$a = \frac{\sum y_n - b \cdot \sum x_n}{N} \tag{1.9}$$

і підставляємо одержаний розв’язок у (8), звідки знаходять:

$$b = \frac{N \cdot \sum x_n y_n - \sum x_n \cdot \sum y_n}{N \cdot \sum x_n^2 - \sum x_n \cdot \sum x_n} \tag{1.10}$$

Таким чином, рівняння (1.9) та (1.10) визначають шукані коефіцієнти a та b.

<u>Приклад</u>. Здійснити апроксимацію лінійною функцією $f(x) = a + bx$ через п’ять наведених пар вимірювань x_n, y_n . Дані задачі наведені у таблиці (табл.1.1):

Ё ё Таблиця 1.1

n	1	2	3	4	5
x_n	1	2	3	4	5
y_n	1	2	3	3	4

Із числових значень отримуємо суми:

$$\sum_{n=1}^{5} x_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

$$\sum_{n=1}^{5} x^2{}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{n=1}^{5} y_n = 1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13,$$

$$\sum_{n=1}^{5} x_n y_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 46.$$

Далі, використовуючи формули (1.9) та (1.10), знаходимо коефіцієнти:

$$b = \frac{5 \cdot 46 - 15 \cdot 13}{5 \cdot 55 - 15 \cdot 15} = 0{,}7;$$

$$a = \frac{13 - 0{,}7}{5} = 0{,}5.$$

Отже, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$y = 0{,}5 + 0{,}7x.$$

Індивідуальні завдання та порядок виконання роботи:

У середовищі *Origin* виконати завдання: наведені пари значень вимірювань (x_n, y_n) апроксимувати прямою $f(x) = a + bx$ та поліномами другого і третього порядків. Обчислити відповідні коефіцієнти a, b та побудувати графіки.

1. Запустити програму *Microcal Origin*. Вивчити основні елементи вікна програми.
2. Заповнити таблицю *Data 1* даними згідно варіанту .
3. Виділити стовпчик *A(X)* і вивчити команди в меню *Column*, а також можливості команди *Format\ Column…*
4. Представити табличні дані у формі точкового графіка. Для цього слід виділити обидва стовпчики таблиці і дати команду *Plot\Scatter*.
5. Вивчити можливості команд *Format\Plot…*, *Format\Axes, Format\Axes Tick Labels*, *Format\Axes Titles*. Використовуючи ці команди, оформити графік до такого вигляду:

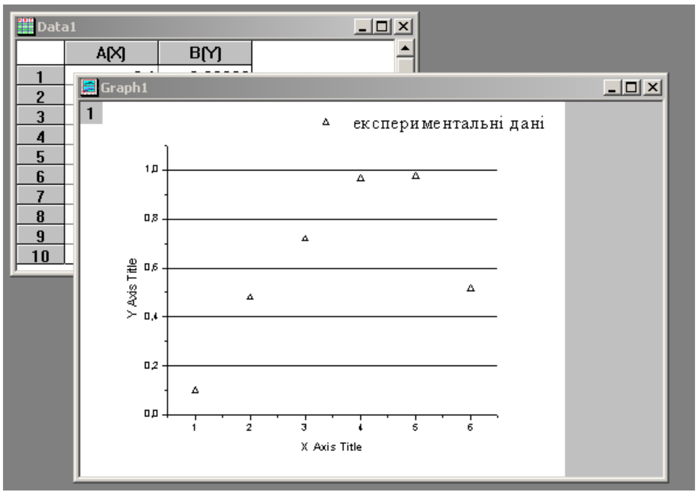


Рисунок 1.1 — Експериментальні дані

6. Провести лінійну апроксимацію даних, використавши команду *Analysis\Fit Linear*. Проаналізувати зміст вікна *Results*. Результати апроксимації записати у звіт.
7. Провести апроксимацію за допомогою полінома другого порядку. Щоб мати можливість зобразити обидві апроксимуючі залежності на графіку,

попередньо слід включити опцію *Tools\Polynomial Fit\Setting\New Curve*. Після цього можна у діалоговому вікні *Polynomial Fit* дати команду *Operation\Fit*. У цьому ж вікні можна вибрати порядок (*Order*) кривої.

8. Графік апроксимуючої кубічної параболи можна одержати при виборі *Order* рівним 3.
9. Оформити звіт про виконання роботи, в якому навести короткі теоретичні відомості, постановку завдань та результати їх виконання.

Варіанти індивідуальних завдань

№	x_0 / y_0	x_1 / y_1	x_2 / y_2	x_3 / y_3	x_4 / y_4	x_5 / y_5
1	0.1 0.09983	0.5 0.47943	0.8 0.71736	1.3 0.96356	1.8 0.97385	2.6 0.5155
2	0.1 0.995	0.5 0.87758	0.8 0.69671	1.3 0.2675	1.8 -0.2272	2.6 -8.5689
3	0.1 1.10517	0.5 1.64872	0.8 2.22554	1.3 3.6693	1.8 6.04965	2.6 13.46374
4	0.1 0.90484	0.5 0.60653	0.8 0.44933	1.3 0.27253	1.8 0.1653	2.6 0.07427
5	0.1 0.10017	0.5 0.5211	0.8 0.88811	1.3 1.69838	1.8 2.94217	2.6 6.69473
6	0.1 1.005	0.5 1.12763	0.8 1.33743	1.3 1.97091	1.8 3.10747	2.6 6.76901
7	0.1 0.09983	0.6 0.56464	1.2 0.93204	1.8 0.97385	2.5 0.59847	3.1 0.04158
8	0.1 0.995	0.6 0.82534	1.2 0.36236	1.8 -0.2272	2.5 -0.80114	3.1 0.99914
9	0.1 1.10517	0.6 1.82212	1.2 3.32012	1.8 6.04965	2.5 12.1825	3.1 22.19795
10	0.1 0.90484	0.6 0.54881	1.2 0.30119	1.8 0.1653	2.5 0.08208	3.1 0.04505
11	0.1 0.10017	0.6 0.63665	1.2 1.50946	1.8 2.94217	2.5 6.0502	3.1 11.07645
12	0.1 1.005	0.6 1.18547	1.2 1.81066	1.8 3.10747	2.5 6.13229	3.1 11.1215
13	1 0.84147	1.6 0.99957	2.5 0.59847	3.1 0.04158	3.8 -0.61186	4.5 -0.97753
14	1 0.5403	1.6 -0.0292	2.5 -0.80114	3.1 -0.99914	3.8 -0.79097	4.5 -0.2108
15	1 2.71828	1.6 4.95303	2.5 12.18249	3.1 22.19795	3.8 44.70118	4.5 90.01713

Контрольні запитання:

1. Постановка задачі апроксимації експериментальних даних.
2. Інтерполяція експериментальних даних.
3. Суть методу найменших квадратів Гауса.
4. Рівняння МНК у випадку лінійно апроксимації.
5. Обчислення коефіцієнтів апроксимуючої прямої.
6. Рівняння МНК для апроксимації кубічним поліномом.
7. Структура вікна програми *Microcal Origin*.
8. Введення та редагування табличних даних.
9. Побудова та форматування графіків.
10. Лінійна та поліноміальна апроксимація у *Microcal Origin*.
11. Робота з файлами у *Origin*.
12. Використання панелі *Tools*.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема: Апроксимація експериментальних даних за допомогою експоненціальних функцій.

Мета роботи: Вивчити методи апроксимації даних за допомогою експоненціальних функцій. Засвоїти методику знаходження відповідних залежностей за допомогою програми *Microsoft Excel*.

Короткі теоретичні відомості

1. Апроксимація за допомогою експоненціальної функції $f(x) = A\cdot\left(1-e^{-Bx}\right)+c.$

Перетворення координат допомагає при апроксимації у випадку використання наведеної нижче експоненціальної функції $f(x)$, яка зустрічається досить часто і при $B>0$ не спадає:

$$f(x) = A\cdot\left(1-e^{-Bx}\right)+C \tag{1.1}$$

Дана формула містить коефіцієнти A та C, що не залежать від x. Продиференціювавши вираз (1.1), отримаємо:

$$f'(x) = A\cdot B\cdot e^{-Bx}. \tag{1.2}$$

Так само потрібно перетворити також виміряні величини y_i. Із них необхідно утворити відношення різниць

$$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}. \tag{1.3}$$

Це означає, що із N опорних величин можна обчислити тільки $N-1$ похідних. Далі можна прологарифмувати (1.2) та (1.3), причому рівняння (1.2) знову перетворюється в рівняння прямої

$$f^*(x) = \ln f'(x) = \ln(AB) - Bx, \tag{1.4}$$

$$y_i^* = \ln(y_i') = \ln\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right). \tag{1.5}$$

Для одержання кращих наближень вводиться значення абсцис $x^*{}_i$, які отримаємо за формулою:

$$x^*{}_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}. \tag{1.6}$$

Невідомі коефіцієнти прямої за рівнянням (1.4) отримують через порівняння з рівнянням прямої виду

$$f(x) = a + bx \tag{1.7}$$

В результаті маємо,

$$\ln(AB) = a,\quad B = -b \tag{1.8}$$

Коефіцієнти a та b можна обчислити за наступними формулами:

$$a = \frac{\sum y_i^* - b \cdot \sum x^*_i}{N-1}, \; b = \frac{(N-1)\sum x_i^* y_i^* - \sum x_i^* \sum y_i^*}{(N-1)\sum (x_i^*)^2 - \sum x_i^* \sum x_i^*} \qquad (1.10)$$

За знайденими значеннями коефіцієнтів a та b визначають коефіцієнти A та B експоненціальної функції. Залишається визначити константу C, для чого скористаємось рівнянням:

$$\sum \left(f(x_i) - y_i \right) = 0, \qquad \sum y_i = \sum f(x_i), \qquad (1.11)$$

$$\sum y_i = \sum A \cdot \left(1 - e^{-Bx_i}\right) + N \cdot C \qquad (1.12)$$

Із рівняння (2.12) випливає, що

$$C = \frac{1}{N}\left(\sum y_i - \sum A \cdot \left(1 - e^{-Bx_i}\right)\right) \qquad (1.13)$$

<u>Приклад 1.</u> Через п'ять опорних точок (табл. 1.1) необхідно провести апроксимуючу криву, що задана експоненціальною функцією $f(x) = A \cdot \left(1 - e^{-Bx}\right) + C$. Опорні точки обчислюються при цьому за формулою $f(x) = y(x) = 3 \cdot \left(1 - e^{0,5x}\right)$. Необхідне обчислення проміжкових значень наведено в табл. 2.1.

Таблиця 1.1 — Обчислення проміжкових значень

N	x_n	y_n	y'_n	y_n^*	x_n^*	x_n^{*2}	$x_n^* y_n^*$
1	0	0	1,18	0,166	0,5	0,25	0,083
2	1	1,18	0.72	-0,328	1,5	2,25	-0,492
3	2	1,90	0.43	-0,844	2,5	6,25	-2,110
4	3	2,33	0.26	-1,347	3,5	12,25	-4,715
5	4	2,59	$\sum$	-2,353	8,0	21	-7,234

Використовуючи формули (1.10) для обчислення коефіцієнтів a та b, отримаємо:

$$b = \frac{(N-1)\sum x_i^* y_i^* - \sum x_i^* y_i^*}{(N-1)\sum (x_i^*)^2 - \sum x_i^* \sum x_i^*} = \frac{4 \cdot (-7,234) - 8 \cdot (-2,353)}{4 \cdot 21 - 8 \cdot 8} = \frac{-28,936 + 18,824}{84 - 64}$$

$$= \frac{-10,112}{20} \approx -0,5;$$

$$a = \frac{\sum y_i^* - b \cdot \sum x_i^*}{(N-1)} = \frac{-2,353 - (-0,5) \cdot 8}{4} = \frac{-2,353 + 4}{4} = -0,411;$$

Якщо далі перерахувати коефіцієнти прямої в коефіцієнти функції, то при $B = -b = 0,5$ і $A = \frac{e^a}{B} = \frac{e^{0,411}}{0,5} = 3,0$ знайдемо знову початкову криву.

2. Апроксимація за допомогою експоненціальної функції $f(x) = A \cdot e^{B/x}$

Дана функція завжди застосовується тоді, коли в досліджуваному ефекті значна роль належить розподілу Больцмана з фактором Больцмана $e^{W/kT}$ (W - енергія, k - константа Больцмана і T - абсолютна температура).

Нехай в результаті певних вимірів отримали N величин y_i, які необхідно апроксимувати функцією:

$$f(x) = A \cdot e^{B/x} \tag{2.1}$$

Для лінеаризації доцільно виконати подальші кроки:

1) показник степеня $1/x$ змінити на z з обчисленням цього аргументу;
2) нову функцію $f(z) = A \cdot e^{Bz}$ прологарифмувати:

$$\ln f(z) = \ln A + Bz = a + bz; \tag{2.2}$$

(Рівняння (2.2) – є рівнянням прямої з нахилом $b = B$, яка перетинає вісь ординат у точці $a = \ln A$)

3) виміряні величини y_i логарифмуються:

$$y_i^* = \ln y_i;$$

4) коефіцієнти прямих обчислюються за формулами:

$$b = \frac{N \cdot \sum z_i y_i^* - \sum z_i \sum y_i^*}{N \cdot \sum z_i^2 - \sum z_i \cdot \sum z_i}; \; a = \frac{\sum y_i^* - b\sum z_i}{N} \tag{2.3}$$

5) звідси отримують невідомі коефіцієнти експоненціальної

$$A = e^a; \; B = b \tag{2.4}$$

<u>Приклад. 2.</u> За допомогою сталих матеріалу $K_0[Ом]$ і $B[K]$ виразити опір $R(T)$ терморезистора в залежності від абсолютної температури $T[K]$.

$$R(T) = K_0 e^{B/T} \tag{2.5}$$

Вимірюються значення опору $R(T)$ при $\nu = 0{,}50{,}100^\circ C$. Для значень із таблиці 2.2 обчислюються по формулам (2.16) коефіцієнти $B = b$ та a:

$$B = \frac{3 \cdot 71{,}87 \cdot 10^{-3} - 9{,}44 \cdot 10^{-3} \cdot 22{,}36}{3 \cdot 30{,}19 \cdot 10^{-6} - 89{,}11 \cdot 10^{-6}} = 3082 \tag{2.6}$$

$$a = \frac{22{,}36 - 3082 \cdot 9{,}44 \cdot 10^{-3}}{3} = -2{,}245 \tag{2.7}$$

З врахуванням (2.4) отримуємо $K_0 = e^{-2{,}245} = 0{,}106$.

Таким чином невідома крива, має вигляд:

$$R(T) = 0{,}106 e^{3082/T} [Ом].$$

Таблиця 2.1

$v[^{\circ}C]$	$T[K]$	$R(T)\,[Ом]$	$z=\frac{1}{T}\,[K^{-1}]$	$R(z)\,[Ом]$	$y_i^*=\ln y_i$	$z_i\cdot y_i^*\,[K^{-1}]$	$z_i^2\,[K^{-1}]$
0	273	8542	$3{,}663\cdot10^{-3}$	8542	9,05	$33{,}15\cdot10^{-3}$	$13{,}42\cdot10^{-6}$
50	323	1473	$3{,}096\cdot10^{-3}$	1473	7,3	$22{,}61\cdot10^{-3}$	$9{,}58\cdot10^{-6}$
100	373	407	$2{,}681\cdot10^{-3}$	407	6,01	$16{,}11\cdot10^{-3}$	$7{,}19\cdot10^{-6}$
$\sum$	-	-	$9{,}44\cdot10^{-3}$	-	22,36	$71{,}87\cdot10^{-3}$	$30{,}19\cdot10^{-6}$

Індивідуальні завдання

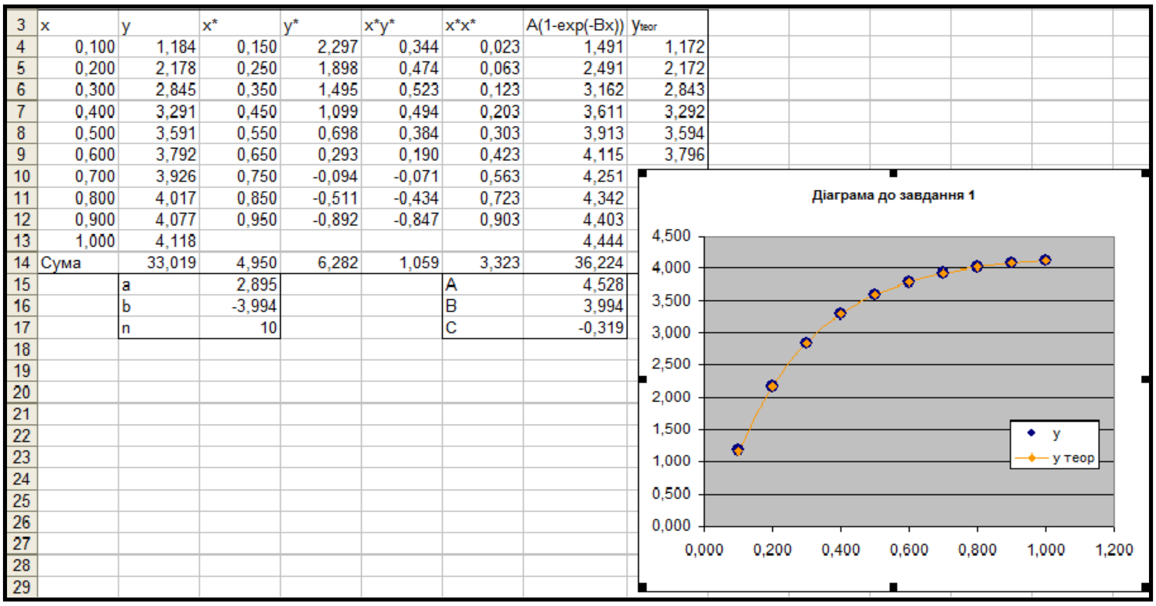
Завдання 1. Наведені у таблиці 1.1 пари значень вимірювань (x_i, y_i) необхідно апроксимувати функцією $f(x)=A\cdot(1-e^{-Bx})+c.$ Виконавши необхідні підготовчі обчислення у середовищі *Excel*, провести лінійну апроксимацію. За її результатами знайти коефіцієнти A, B, C.

Завдання 2. За допомогою сталих матеріалу $K[Ом]$ та $B[K]$ виразити опір $R(T)$ терморезистора в залежності від абсолютної температури $T[K]$ згідно формули $R(T)=K\cdot e^{B/T}$. Виміряні значення опору $R(T)$ при $T=0{,}25{,}50{,}75{,}100{,}125^{\circ}C$ наведено в табл. 2.1. Для знаходження коефіцієнти K, B використати можливості середовища *Excel*.

Послідовність виконання роботи

Завдання 1.

1. Завдання виконувати в електронній таблиці згідно теоретичного матеріалу відповідної теми.
2. Ознайомитись із зразком виконаної роботи (рис.1.1)



3	x	y	x*	y*	x*y*	x*x*	A(1-exp(-Bx))	yteor
4	0,100	1,184	0,150	2,297	0,344	0,023	1,491	1,172
5	0,200	2,178	0,250	1,898	0,474	0,063	2,491	2,172
6	0,300	2,845	0,350	1,495	0,523	0,123	3,162	2,843
7	0,400	3,291	0,450	1,099	0,494	0,203	3,611	3,292
8	0,500	3,591	0,550	0,698	0,384	0,303	3,913	3,594
9	0,600	3,792	0,650	0,293	0,190	0,423	4,115	3,796
10	0,700	3,926	0,750	-0,094	-0,071	0,563	4,251	
11	0,800	4,017	0,850	-0,511	-0,434	0,723	4,342	
12	0,900	4,077	0,950	-0,892	-0,847	0,903	4,403	
13	1,000	4,118					4,444	
14	Сума	33,019	4,950	6,282	1,059	3,323	36,224	
15		a	2,895			A	4,528	
16		b	-3,994			B	3,994	
17		n	10			C	-0,319	
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								

Рисунок 1.1— Зразок виконання роботи

3. Рядок 3 заповнити відповідними назвами. Блок початкових даних сформувати у клітинках $A4:B13$.

4. Організувати обчислення проміжних величин у блоці $G4:G13$ за відповідними формулами.

5. Використовуючи автосумування знайти відповідні суми (рядок 14).

6. За формулами лінійної апроксимації обчислити коефіцієнти a, b. Організувати обчислення A, B, C.

7. Порівняти результати апроксимації із результатами одержаними за допомогою стандартної функції ЛИНЕЙН.

8. Побудувати графік, на якому представити апроксимуючу криву разом з експериментальними даними.

9. Знайти теоретичні дані (стовпчик H) згідно відповідної формули $y_{teor} = A(1 - e^{-Bx_i}) + C$.

Таблиця 1.2 — Дані для завдання 1

1	x	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
	y	9,363	18,003	24,404	29,146	32,695	35,262	37,189	38,618	39,676	40,460
2	x	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800	1,900	2,000
	y	3,503	3,649	3,777	3,890	3,989	4,075	4,151	4,218	4,277	4,329
3	x	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800	2,900	3,000
	y	10,550	10,568	10,585	10,602	10,618	10,634	10,649	10,663	10,678	10,691
4	x	3,100	3,200	3,300	3,400	3,500	3,600	3,700	3,800	3,900	4,000
	y	-0,314	-0,300	-0,287	-0,276	-0,267	-0,258	-0,250	-0,243	-0,237	-0,232
5	x	4,100	4,200	4,300	4,400	4,500	4,600	4,700	4,800	4,900	5,000
	y	14,709	14,769	14,826	14,882	14,936	14,987	15,037	15,085	15,132	15,177
6	x	5,100	5,200	5,300	5,400	5,500	5,600	5,700	5,800	5,900	6,000
	y	30,957	30,963	30,968	30,972	30,976	30,979	30,982	30,984	30,986	30,988
7	x	0,565	1,565	2,565	3,565	4,565	5,565	6,565	7,565	8,565	9,565
	y	-69,611	-67,710	-66,348	-65,371	-64,671	-64,170	-63,810	-63,552	-63,368	-63,235
8	x	0,550	1,550	2,550	3,550	4,550	5,550	6,550	7,550	8,550	9,550
	y	-0,398	1,243	1,848	2,070	2,152	2,182	2,194	2,198	2,199	2,200
9	x	2,530	2,630	2,730	2,830	2,930	3,030	3,130	3,230	3,330	3,430
	y	86,069	86,178	86,275	86,360	86,435	86,502	86,560	86,612	86,657	86,698
10	x	0,150	0,250	0,350	0,450	0,550	0,650	0,750	0,850	0,950	1,050
	y	52,093	69,281	80,803	88,527	93,704	97,174	99,500	101,060	102,105	102,805
11	x	-0,250	-0,150	-0,050	0,050	0,150	0,250	0,350	0,450	0,550	0,650
	y	3,791	6,270	8,201	9,705	10,876	11,788	12,499	13,052	13,483	13,819
12	x	5,000	5,250	5,500	5,750	6,000	6,250	6,500	6,750	7,000	7,250
	y	6,472	6,476	6,481	6,485	6,488	6,492	6,495	6,498	6,501	6,504
13	x	2,000	2,200	2,400	2,600	2,800	3,000	3,200	3,400	3,600	3800
	y	227,258	243,527	258,911	273,457	287,211	300,2115	312,512	324,139	335,132	345,527
14	x	0,000	2,000	4,000	6,000	8,000	10,000	12,000	14,000	16,000	18,000
	y	0,700	0,709	0,718	0,726	0,735	0,743	0,751	0,756	0,767	0,775
15	x	-1,000	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000
	y	-1,604	-0,030	1,136	2,000	2,640	3,115	3,466	3,726	3,919	4,062

Завдання 2.Завдання виконувати в електронній таблиці згідно теоретичного матеріалу відповідної теми. Таблиці та результати обчислень записати у звіт.

Таблиця 2.1 — Дані для завдання 2

1.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	8541,79	3294,80	1472,83	739,12	406,83	241,38
2.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	2284,80	980,18	479,35	259,80	152,86	96,13
3.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	5585,28	2250,48	1043,80	540,62	305,83	185,84
4.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	13461,93	4949,57	2124,68	1029,89	550,10	317,92
5.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	7864,47	3056,93	1375,40	694,08	383,88	228,72
6.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	9371,91	3601,69	1605,00	803,30	441,14	261,20
7.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	8394,65	3240,03	1449,10	727,54	400,61	237,77
8.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	9430,45	3636,46	1625,13	815,37	448,72	266,18
9.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	6606,76	2430,61	1043,92	506,24	270,51	156,38
10.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	7171,21	2784,89	1252,02	631,40	349,02	207,84
11.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	3180,59	1306,61	616,02	323,56	185,27	113,78
12.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	2037,27	916,90	466,95	262,01	158,86	102,57
13.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	6863,73	2576,10	1125,24	553,62	299,55	175,08
14.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	288,95	120,76	57,77	30,72	17,78	11,02
15.	T, K	273,00	298,00	323,00	348,00	373,00	398,00
	$R, Ом$	5765,48	2286,96	1046,16	536,04	300,27	180,90

Контрольні запитання:

1. Методика апроксимації експериментальних даних за допомогою функції $f(x) = A(1 - e^{-Bx}) + c$.
2. Методика апроксимації експериментальних даних за допомогою функції $f(x) = Ae^{B/T}$.
3. Використання функцій та формул в табличному редакторі *Excel*.
4. Методика знаходження параметрів лінійної апроксимації у програмі *Excel*.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема: Чисельне згладжування, диференціювання та інтегрування.

Мета роботи: Вивчити основні методи згладжування, диференціювання та інтегрування експериментальних даних. Засвоїти методику згладжування і знаходження похідних та інтегралів у пакетах *Microcal Origin* та *Microsoft Excel*.

Короткі теоретичні відомості

1 Згладжування

Шуми виміряних величин і випадків, похибки вимірювального приладу спричиняють в загальному випадку розсіяння виміряних величин y_i. Тому раціонально їх згладити перед подальшою обробкою, тобто усереднити.

1.1 Лінійне згладжування через три точки

Найпростішим способом у даному випадку є такий, коли із трьох виміряних величин y_{i-1}, y_i, y_{i+1} обчислюється згладжена величина як середнє арифметичне

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3} \tag{1.1}$$

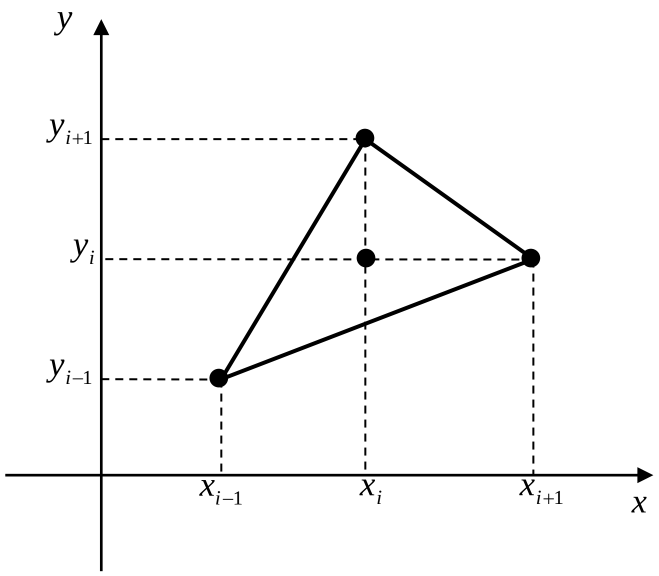


Рисунок 1.1 — Геометрична інтерпретація згладжування через три точки

Для N виміряних величин набирається $N-2$ згладжених. При згладжуванні через три точки усереднена виміряна величина y_i знаходиться в центрі ваги трикутника, побудованого за цими точками (рис. 1.1).

Можливе також трикратне згладжування, якщо двократне не дає бажаних наслідків:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\bar{y}_{i-1} + \bar{y}_i + \bar{y}_{i+1}}{3} \tag{1.2}$$

1.2 Згладжуючий поліном третього порядку через п’ять точок

Щоб згладити в точці x_i знайдену величину y_i, необхідно через п’ять пар точок провести поліном третього ступеня $P(x)$ (рис.1.2). значення цього полінома в точці x_i буде тоді виступати як згладжена виміряна величина $\bar{y}_i$:

$$P(x_i) = \bar{y}_i \tag{1.3}$$

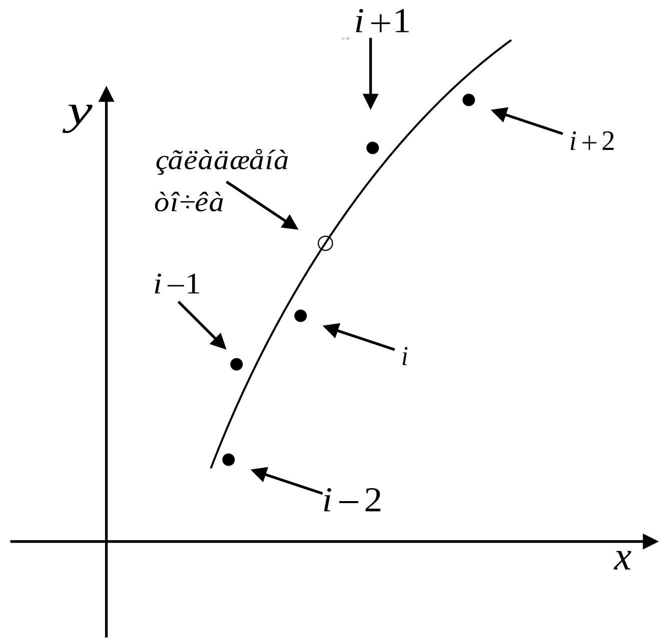


Рисунок 1.2 — Згладжування через п’ять точок

У системі координат, де ордината проходить через x_i маємо рівняння кубічної параболи з коефіцієнтами a, b, c, d:

$$P(x) = a + b(x - x_i) + c(x - x_i)^2 + d(x - x_i)^3 \tag{1.4}$$

Парабола повинна згладжувати п’ять вузлових точок (x_{i+k}, y_{i+k}), де
$k = -2; -1; 0; 1; 2;$.

Згідно методу найменших квадратів будуємо суму S квадратів відстаней:

$$S = \sum_{k=-2}^{2} \left(P(x_{i+k}) - y_{i+k}\right)^2. \tag{1.5}$$

Далі для знаходження невідомих коефіцієнтів слід прирівняти частинні похідні від S до нуля, визначити значення сум в отриманих нормальних рівняннях.

Функціональними значеннями полінома будуть згладжені виміряні величини $P(x_{i+k}) = \bar{y}_{i+k}$, які можна обчислити за допомогою наведених нижче згладжуючих формул:

$$\bar{y}_{i-2} = \frac{1}{70}\left(69y_{i-2} + 4y_{i-1} - 6y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}\right),$$
$$\bar{y}_{i-1} = \frac{2}{70}\left(2y_{i-2} + 27y_{i-1} + 12y_i - 8y_{i+1} + 2y_{i+2}\right),$$
$$\bar{y}_{i} = \frac{1}{35}\left(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}\right), \qquad (1.6)$$
$$\bar{y}_{i+1} = \frac{2}{70}\left(2y_{i-2} - 8y_{i-1} + 12y_i + 27y_{i+1} + 2y_{i+2}\right),$$
$$\bar{y}_{i+2} = \frac{1}{70}\left(-y_{i-2} + 4y_{i-1} - 6y_i + 4y_{i+1} + 69y\right).$$

2 Чисельне диференціювання

У деяких випадках необхідно знаходити нахил виміряних (розсіяних) пар величин, наприклад, коли з виміряної швидкості потрібно обчислити прискорення. Розглянемо два способи розв’язання.

2.1 Різницеве відношення

Якщо виміряні величини y_i в залежності від параметра x_i одержані еквідистантно через відрізки $x_{i+1} - x_i = h$, то з розкладу в ряд Тейлора

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i, \qquad y_{i-1} = y_i - hy'_i \qquad (2.1)$$

Можна подати алгоритми обчислення похідної y'_i

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}, \qquad (2.2)$$

що є різницевим відношенням суміжних до (x_i, y_i) вузлових точок.

2.2 Нахил полінома третього порядку

Відповідно з рівнянням (1.4) через п’ять точок можна провести апроксимуючий поліном третього порядку. Якщо диференціювати цей поліном по x, то отримаємо

$$P'(x_{i+k}) = b + 2c(x_{i+k} - x_i) + 3d(x_{i+k} - x_i)^2 \qquad (2.3)$$

Коефіцієнт b буде відповідати нахилу полінома при x_i:

$$P(x_i) = b = \overline{y'_i} \qquad (2.4)$$

Шуканий коефіцієнт b (нахил y'_i) обчислюється за формулою

$$\overline{y'_i} = \frac{1}{12h}\left(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}\right) \qquad (2.5)$$

Для інших чотирьох вузлових точок, через які проходить згладжуючий поліном, можна також обчислити нахил:

$$\overline{y'}_{i-2} = \frac{1}{84h}\left(-125y_{i-2} + 136y_{i-1} + 48y_i - 88y_{i+1} + 29y_{i+2}\right),$$
$$\overline{y'}_{i-1} = \frac{1}{84h}\left(-38y_{i-2} - 2y_{i-1} + 24y_i + 26y_{i+1} - 10y_{i+2}\right),$$
$$\overline{y'}_{i+1} = \frac{1}{84h}\left(10y_{i-2} - 26y_{i-1} - 24y_i + 2y_{i+1} + 38y_{i+2}\right), \qquad (2.6)$$
$$\overline{y'}_{i+2} = \frac{1}{84h}\left(-29y_{i-2} + 88y_{i-1} - 48y_i - 136y_{i+1} + 125y_{i+2}\right).$$

Друга похідна по аргументу x_i обчислюється за формулою:

$$\overline{y''}_{i} = \frac{1}{84h}\left(-29y_{i-2} + 88y_{i-1} - 48y_i - 136y_{i+1} + 125y_{i+2}\right). \qquad (2.7)$$

Поліноми вище третього порядку є причиною пульсації, тому за деяких обставин нахил згладжуючого полінома значно відхиляється від виміряного дійсного різницевого відношення.

3 Чисельне інтегрування

Розглянемо послідовність із N виміряних величин (x_i, y_i)- вузлових точок, причому $x_{i+1} - x_i = h$. Потрібно обчислити площу фігури, яка обмежена цими парами вимірів.

3.1 Правило прямокутників

Інтегрування за методом прямокутників полягає в тому, що інтервал інтегрування $[a;b]$ ділиться точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на n рівних частин $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ з кроком $h = (b-a)/n$. Наближене значення інтеграла на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ можна знайти, якщо функцію $f(x)$ замінити інтерполяційним многочленом нульового степеня, тобто для всіх $x \in [x_{i-1}; x_i]$ покласти $f(x) = f(c)$, де $c \in [x_{i-1}; x_i]$. Тоді дістанемо наближену рівність

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \cdot f(c). \qquad (*)$$

Якщо $f(x) \ge 0$ і неперервна на $[x_{i-1}; x_i]$, то наближену рівність (*) можна тлумачити як наближене значення площі криволінійної трапеції *ABCD* (рис. 3.3), обмеженої знизу віссю абсцис,

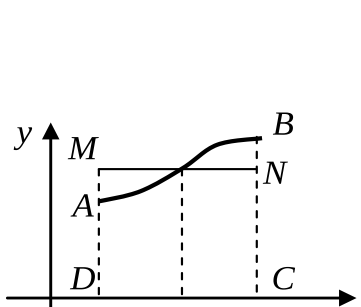


Рисунок 3.1

зверху графіком функції $f(x)$ а з боків прямими $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$, за яку береться значення площі прямокутника *MNCD*. Тому формула (*) дістала назву *формули прямокутників*.

Якщо $c = x_i$ або $c = x_{i+1}$, або $c = x_i + \frac{1}{2}h$, то формулу (*) називають відповідно *формулою лівих* або *правих*, або *середніх прямокутників*.

Тобто отримаємо наступні формули для обчислення площ *i*-го прямокутника:

$$S_i^{\ell} = h \cdot f(x_i) = hy_i,\quad S_i^{r} = h \cdot f(x_{i+1}) = hy_{i+1},\quad S_i^{m} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}) = hy_{i+\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

де $i = 1, \overline{N-1}$.

Загальна площа при цьому обчислюється згідно формул, як сума відповідних S_i, тобто:

$$S^{\ell} = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i,\qquad S^{r} = h\sum_{i=1}^{N-1} y_{i+1}.,\qquad S^{m} = h\sum_{i=1}^{N-1} y_{i+\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

3.2 Правило трапецій

Вузлові точки попарно з’єднуються між собою прямою. При цьому утворюються трапеції з площею (рис.3.4)

$$S_i = h\frac{y_i + y_{i+1}}{2},\ i = 1, \overline{N-1}. \tag{3.3}$$

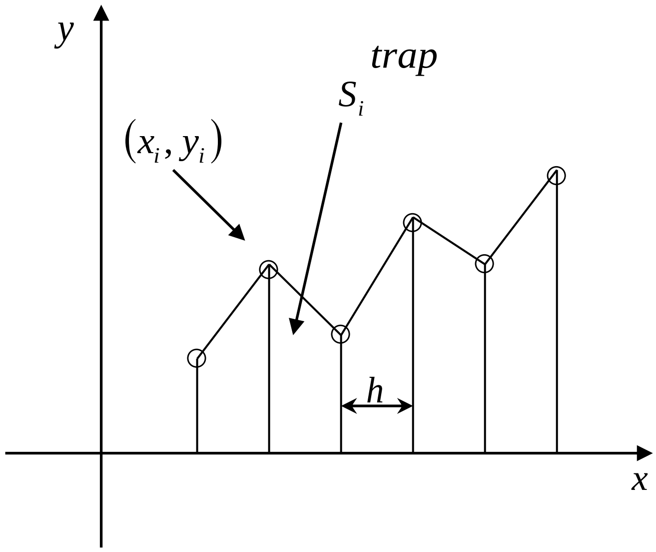


Рисунок 3.2— Геометрична інтерпретація методу трапецій

Загальна площа буде становити :

$$S_t = h\left(\frac{y_1}{2} + \sum_{i=2}^{N-1} y_i + \frac{y_N}{2}\right) \tag{3.4}$$

3.3 Правило Кеплера

Для обчислення площі через кожні три вузлові точки проводиться інтерполяційний поліном другого порядку (рис.3.5)

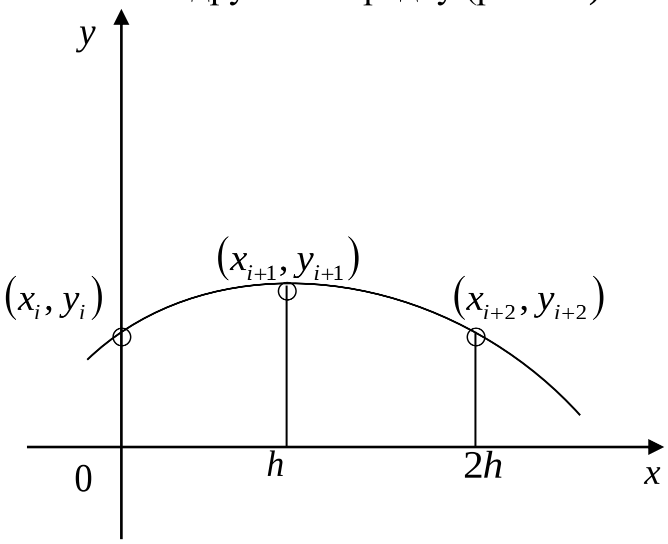


Рисунок 3.3 — Геометрична інтерпретація правила Кеплера

По цій квадратичній параболі потім проводиться інтегрування. Правило Кеплера для обчислення площі виводиться в системі координат при $x_i = 0$; $x_{i+1} = h$; $x_{i+2} = 2h$.

Рівняння полінома другого порядку у цій системі має вигляд:

$$y(x) = a + bx + cx^2. \qquad (3.5)$$

Інтеграл K по параболі обчислюється так:

$$K = \int_{x=0}^{2h} y(x)dx = \int_{0}^{2h} \left(a + bx + cx^2\right)dx = 2ah + 2bh^2 + \frac{8}{3}ch^3.$$

Після підстановки коефіцієнтів, одержимо правило Кеплера

$$K_2 = 2h\frac{y_1 + 4y_2 + y_3}{6}. \qquad (3.7)$$

3.4. Правило 3/8

Проведемо поліном третього порядку через чотири вузлові точки (рис.3.6)

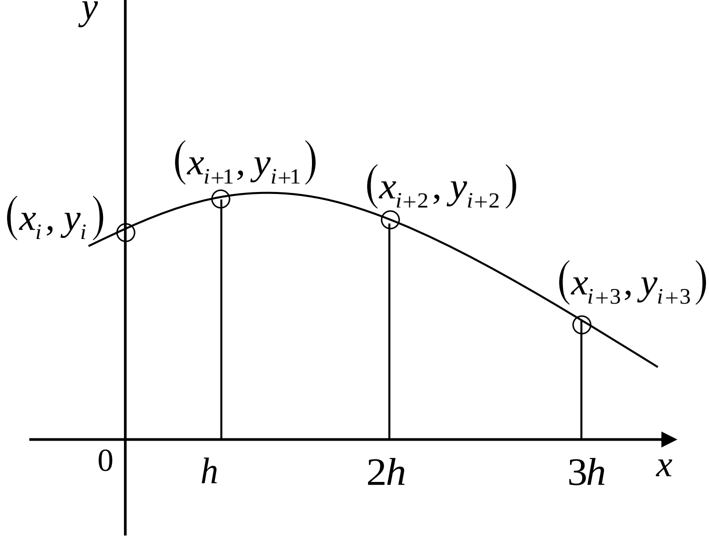


Рисунок 3.4 — Геометрична інтерпритація правила 3/8

Поліном третього порядку має вигляд:

$$y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{3.7}$$

Площа, яка складається з трьох смужок, обчислюється таким чином:

$$S_{3/8} = 3h \cdot \frac{y_1 + 3y_2 + y_4}{8}. \tag{3.8}$$

Якщо точок більше чотирьох, то загальний інтеграл можна отримати як суму часткових інтегралів, причому, залишок смужок обчислюється за правилами Кеплера або трапецій.

Індивідуальні завдання

Ознайомитися з наданим зразком (див. лістинг 3.1)та виконати наведені нижче завдання для власного варіанту значень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Дані		Згладжування			Диференціювання		Інтегрування за правилами				
2	h=	0,5				а, м/с^2						
3	t, *с*	v, *м/с*	лінійне1	лінійне2	поліном	лінійне	поліном	ліві пр-ки	праві пр-ки	трапеції	Кеплера	3/8
4	2,00	4,020			4,044		4,723	2,010				
5	2,50	5,336	4,799		5,241	1,020	0,602	4,678	2,668	2,339		
6	3,00	5,040	5,317	5,409	5,183	0,239	-0,298	7,198	5,188	4,933	5,067	
7	3,50	5,575	6,111	6,209	5,913	2,679	3,077	9,986	7,976	7,587		7,636
8	4,00	7,719	7,200	7,109	7,389	2,731	3,144	13,845	11,835	10,910	10,911	
9	4,50	8,306	8,016	7,866	8,197	0,303	-0,137	17,998	15,988	14,917		19,199
10	5,00	8,022	8,383	8,414	8,277	0,516	0,360	22,009	19,999	18,999	19,071	
11	5,50	8,822	8,844	9,002	8,718	1,667	1,803	26,420	24,410	23,210		33,145
12	6,00	9,689	9,779	9,617	9,883	2,003	2,313	31,265	29,255	27,837	27,905	
13	6,50	10,825	10,227		10,696	0,479	0,627	36,677	34,667	32,966		
14	7,00	10,168			10,200		-2,918		39,751	38,214	38,431	38,394

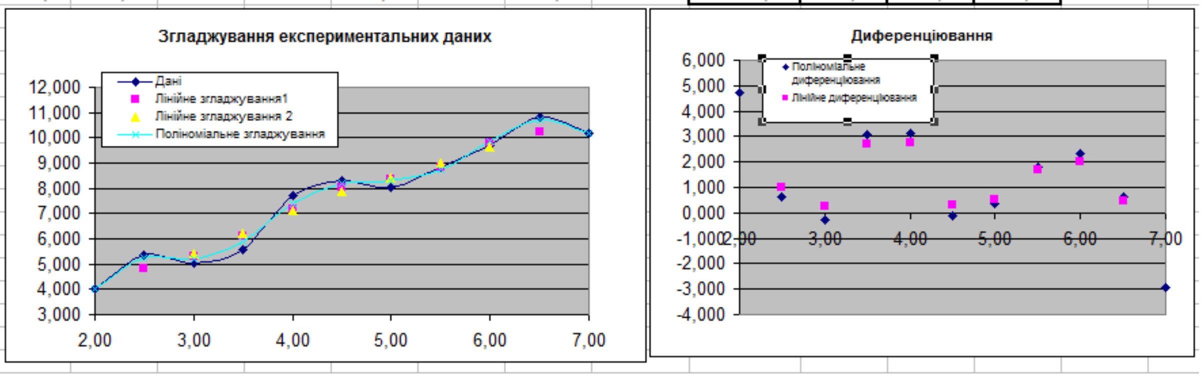


Рисунок 3.5 — Виконання завдання засобами *Excel*

У табл.3 наведено експериментально визначену залежність швидкості руху від часу.

1. Згладити визначені величини швидкості за допомогою методик: лінійне згладжування через три точки, згладжування поліномом третього порядку.

2. Використати диференціювання за допомогою різницевого відношення і поліноміальних формул, знайти значення прискорення для кожного моменту часу.

3. На основі виміряних значень швидкості обчислити пройдені відстані. Для чисельного інтегрування використати квадратурні формули Ньютона-Котеса.

4. Для кожного методу провести необхідні розрахунки в *Excel*. Представити результати у вигляді таблиці і графіків.

5. Оформити звіт про виконання роботи, в якому навести короткі теоретичні відомості, постановку завдань та результати їх виконання.

Індивідуальні завдання

№.	*i*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	t	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
	v	10,295	9,591	9,099	9,043	9,079	11,027	10,455	10,307	9,547	9,183	9,215
2	*t*	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
	v	10,183	9,439	10,599	10,543	10,487	10,423	9,627	9,043	9,691	10,055	10,956
3	*t*	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15
	v	9,731	11,003	10,063	9,043	10,803	10,603	9,699	9,827	9,711	11,023	9,231
4	*t*	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
	v	9,123	9,463	10,307	9,833	9,067	9,155	10,703	9,671	9,307	10,027	10,331
5	*t*	6	6,5	27	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
	v	9,307	10,403	9,991	10,475	10,663	10,227	10,203	9,283	9,263	10,247	10,823
6	*t*	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
	v	10,663	9,319	10,707	10,715	10,063	10,059	9,927	9,767	10,139	9,695	9,111
7	*t*	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
	v	9,523	10,679	9,803	9,727	10,487	9,787	10,491	9,983	10,191	9,259	9,791
8	*t*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	v	10,747	9,747	9,183	10,039	10,379	9,063	10,999	10,515	9,183	10,075	9,919
9	*t*	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
	v	10,487	9,843	9,235	9,275	9,099	9,453	9,031	9,903	10,135	10,643	9,495
10	*t*	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
	v	9,183	10,415	10,211	9,247	9,603	9,287	10,119	10,319	10,323	9,775	9,167
11	*t*	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
	v	10,483	10,171	9,291	9,995	9,435	9,339	10,191	11,003	9,979	10,095	9,575
12	*t*	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
	v	9,911	10,699	10,647	10,003	9,907	9,423	9,127	9,271	10,743	9,047	10,027
13	*t*	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
	v	9,275	9,275	9,783	10,359	9,699	10,711	9,747	10,327	10,031	9,051	10,903
14	*t*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	v	9,195	9,167	10,135	10,247	9,987	10,775	9,899	9,835	9,971	10,367	10,547
15	*t*	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
	v	9,059	10,683	10,371	10,199	10,819	9,187	10,051	10,091	10,151	9,831	10,003

Контрольні питання:

1. Лінійне згладжування експериментальних точок, згладжування експериментальних точок за допомогою кубічного полінома.
2. Диференціювання експериментальних даних за допомогою різницевого відношення та за допомогою кубічного апроксимуючого полінома.
3. Інтегрування експериментальних даних за допомогою формул Ньютона-Котеса.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема: Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь

Мета роботи: Вивчення методів розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь і набуття навичок їх реалізації за допомогою математичного пакету Mathcad.

Короткі теоретичні відомості

В інженерній практиці досить часто зустрічаються задачі, які зв'язані з необхідністю знаходження коренів нелінійних рівнянь. Такі задачі, як правило, виникають як елементарні складові при розв'язанні різноманітних технічних і наукових проблем.

Розглянемо нелінійне рівняння вигляду

$$f(x) = 0, \tag{4.1}$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому скінченому або нескінченому інтервалі $a < x < b$.

Якщо функція представляє собою многочлен, то рівняння (4.1) називається алгебраїчним, якщо ж функція містить елементарні (тригонометричні, логарифмічні, показникові та ін.) функції, то такі рівняння називаються трансцендентними.

Будь-яке значення x^*, яке перетворює функцію в нуль, тобто таке, що $f(x*) = 0$, називається коренем рівняння (4.1).

На відміну від лінійних, квадратних, елементарних тригонометричних, показникових, логарифмічних та ще деяких типів рівнянь не існує прямих методів розв'язання нелінійних рівнянь. У зальному випадку процедура розв'язання нелінійних рівнянь зводиться до розв'язання двох задач: попереднє знаходження інтервалів, що містять лише один корінь (локалізація або відокремлення коренів) і подальше уточнення коренів (знаходження коренів із заданою точністю).

При розв'язанні першої задачі (відокремлення коренів) можна скористатись відомою теоремою: якщо на кінцях деякого відрізка неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків, то на цьому відрізку рівняння (4.1) має хоча би один корінь.

Для розв'язання другої задачі застосовують методи, які дають можливість уточнювати знайдені наближення коренів. До таких методів відносяться ітераційні методи: діленням навпіл, ітерацій, Ньютона, хорд, січних та ін.

1 Відокремлення коренів

Корінь x^* рівняння (4.1) вважається відокремленим на відрізку $[a;b]$, якщо $x^* \in [a;b]$ і на цьому відрізку дане рівняння не має інших коренів. Щоб відокремити корені рівняння (4.1), треба розбити область визначення даного рівняння на проміжки, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь або немає жодного кореня. Як правило відокремлення коренів здійснюється графічним або табличним методом.

Для відокремлення коренів графічним методом будують графік функції $y = f(x)$ і знаходять точки перетину графіка з віссю абсцис та кінці відрізків ізоляції коренів. Часто рівняння (4.1) записують у вигляді $h(x) = g(x)$ і будують графіки функцій $y_1 = h(x)$ і $y_2 = g(x)$, після чого знаходять межі інтервалів, в яких знаходяться абсциси точок перетину графіків функцій.

Приклад 1. Відокремити корені рівняння $f(x) = 2\cos(x) - \frac{4}{3\pi}x + 2 = 0$.

Графічний метод відокремлення коренів, реалізований в пакеті Mathcad, наведено на рис. 4.1.

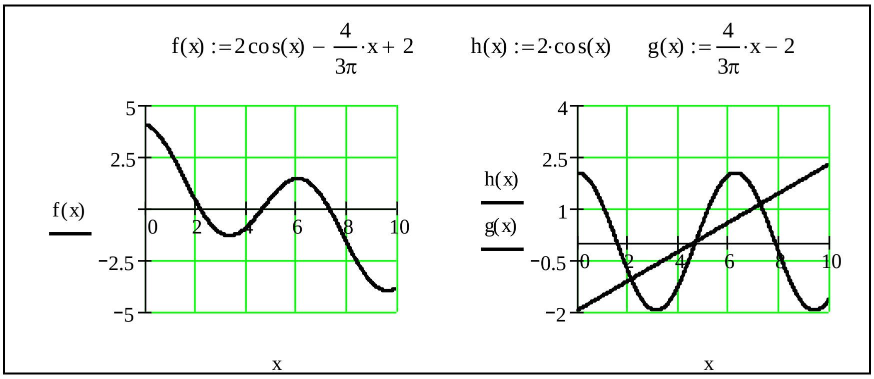


Рис 4.1.

$i := 0..10$

$z_i := 2\cdot\cos(i) - \frac{4}{3\pi}\cdot i + 2$

z =

	0
0	4
1	2.656
2	0.319
3	-1.253
4	-1.005
5	0.445
6	1.374
7	0.537
8	-1.686
9	-3.642
10	-3.922

Рис. 4.2

Інколи для відокремлення коренів можна скористатись табличним методом. Він полягає в знаходженні послідовності значень функції з певним кроком і виявлені зміни знака в значення членів послідовності. Для цього, за допомогою дискретної змінної, будують вектор із значень функції, який дає можливість побачити зміни знака функції, що свідчить про наявність коренів (рис. 4.2).

2. Метод поділу відрізка навпіл

Нехай потрібно знайти корінь рівняння (4.1), який знаходиться на відрізку $[a_0, b_0]$. У випадку єдиного кореня на вказаному відрізку буде виконуватись умова

$$f(a_0)\cdot f(b_0) < 0. \tag{4.2}$$

Далі відрізок починають зменшувати, визначаючи на кожному кроці алгоритму координати його нових граничних точок a_n і b_n за значеннями a_{n-1}, b_{n-1} та координати середини відрізка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$:

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

У залежності від знаку функції в точці x_n новий відрізок $[a_n, b_n]$ знаходження кореня встановлюється за допомогою наступного правила:

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}, x_n], \ \textit{якщо} \ f(a_{n-1})\cdot f(x_n) < 0, \\ [x_n, b_{n-1}], \ \textit{якщо} \ f(x_n)\cdot f(b_{n-1}) < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

де $n = 1,2,...$; x_n – середня точка відрізку $[a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Довжина відрізка ізоляції кореня після виконання n кроків зменшується до величини

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

а значення кореня x^*, обумовлено координатою середньої точки, і його похибки задаються виразами:

$$x^* = x_{n+1} \pm \xi_n, \quad \xi_n = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \tag{4.4}$$

Приклад 2. Користуючись методом поділу відрізка навпіл обчислити корені рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ із заданою точністю та підрахунком числа ітерацій.

Лістинг обчислення кореня рівняння, який знаходиться на відрізку $[2;3]$ методом поділу відрізка навпіл, реалізованого в пакеті Mathcad, наведено на рис. 3.

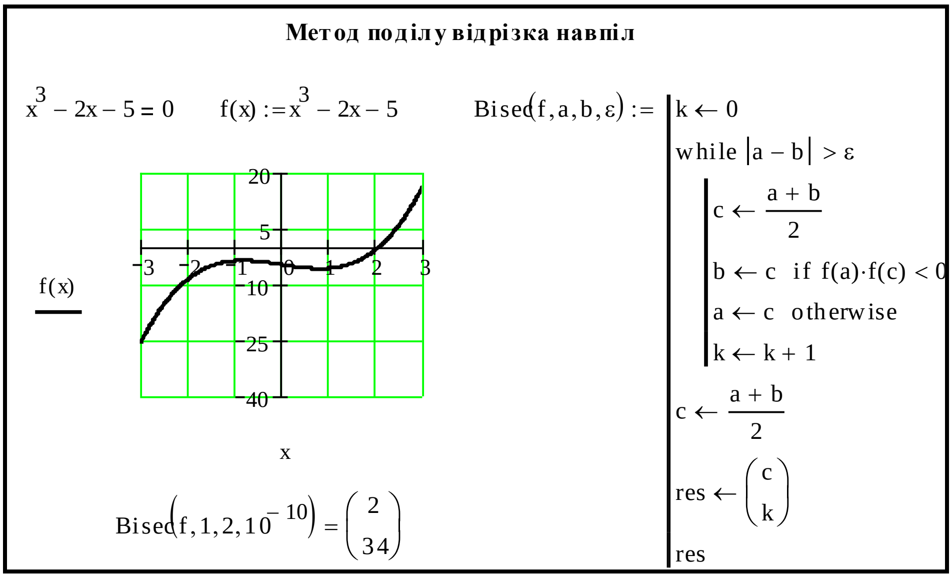


Рисунок 4.3 — Метод поділу відрізка навпіл

3. Метод простої ітерації

Метод простої ітерації полягає в тому, що рівняння (4.1) записують у канонічному вигляді:

$$x = \varphi(x), \tag{4.5}$$

а ітерації здійснюються за правилом

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,2,..., \tag{4.6}$$

де початкове наближення x_0 задається з відрізка $[a_0, b_0]$, який містить корінь рівняння.

Якщо процес обчислень збігається до розв'язку x^* рівняння (4.5), тобто $x^* = \varphi(x^*)$, то припустивши, що функція $\varphi(x)$ визначена, неперервна і диференційована на відрізку, який містить шуканий корінь, можна встановити умову збіжності ітераційного процесу у вигляді:

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \varphi(x_x) - \varphi(x^*) \approx \varphi'(\xi)(x_n - x^*) = \varphi'(\xi)\varepsilon_n,\ \xi \in [x_n, x^*]. \tag{4.7}$$

Із рівності (4.7) випливає достатня умова збіжності методу простої ітерації, а саме, $|\varepsilon_{n+1}|$ буде менше $|\varepsilon_n|$ за умови

$$|\varphi'(\xi)| < 1. \tag{4.8}$$

Якщо покласти $|\varphi'(\xi)| = M$, то достатня умова збіжності методу простої ітерації має вигляд $M < 1$. Чим менше значення M, тим швидше збігається ітераційний процес.

Оцінювання глобальної похибки $|x_{n+1} - x^*|$ зручно виконувати на основі значень локальної похибки, тобто за значеннями наближень, отриманих на сусідніх ітераціях за аналогією з формулою (4.7). Для цього формулу (4.7) запишемо у вигляді:

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \varphi'(\xi)\left[\left(x_{n+1} - x^*\right) + \left(x_n - x_{n+1}\right)\right],$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{M}{1-M}\left|x_{n+1} - x_n\right|. \qquad (4.9)$$

Якщо обчислення починати від початкового значення x_0, то для поточної похибки на n-й ітерації згідно з формулами (4.7) і (4.9) можна одержати оцінку

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{M^n}{1-M}\left|x_1 - x_0\right|. \qquad (4.10)$$

Приклад 3. Користуючись методом ітерацій уточнити корінь рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$, який знаходиться на відрізку $[2;3]$. Для можливості його застосування перетворимо його до вигляду $x = \sqrt[3]{2x+5}$.

Лістинг відокремлення кореня та обчислення його методом ітерацій, реалізованого в пакеті Mathcad, наведено на рис. 4.4.

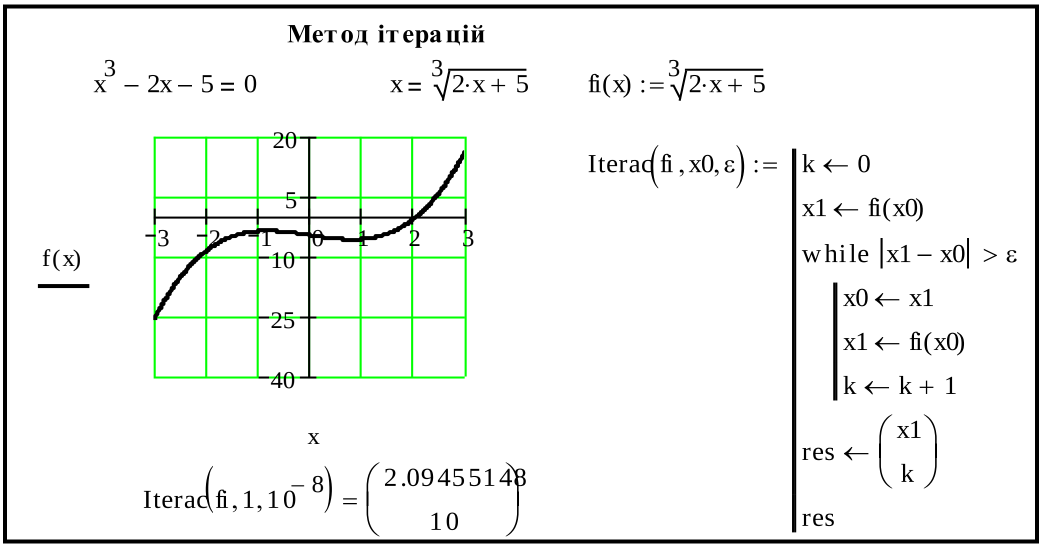


Рисунок 4.4 — Метод ітерацій

Якщо покласти $q = M = \max\left|\varphi'(x)\right|$, $x \in [a_0, b_0]$, то оцінку (4.10) можна записати у вигляді

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|\varphi(x_0) - x_0\right|, \; n = 1,2,... \qquad (4.11)$$

Якщо похибка обчислення кореня рівняння не повинна перевищувати наперед заданого значення ε, то згідно з формулою (11) можна знайти необхідну кількість ітерацій n

$$n \ge \frac{\ln\left[\varepsilon(1-q)/\left|\varphi(x_0) - x_0\right|\right]}{\ln q} \qquad (4.12)$$

У тих випадках, коли не вдається явно розв’язати вихідне рівняння $f(x)=0$ відносно невідомої x, так щоб у рівнянні (5) функція $\varphi(x)$ задовольняла умову збіжності (8), ітерації можна виконувати за правилом:

$$x_{n+1} = x_n + \tau(x_n) f(x_n), \quad n = 0,1,... \tag{4.13}$$

Тут допоміжна функція $\tau(x_n)$ не повинна змінювати свій знак на відрізку, де шукають корінь. Зокрема, якщо $\tau(x_n) = \tau = const$, одержимо метод релаксації:

$$x_{n+1} = x_n + \tau\, f(x_n), \quad n = 0,1,... \tag{4.14}$$

для якого $\varphi'(x) = 1 + \tau f'(x)$ і умова збіжності має вигляд

$$|\varphi'(x)| < 1 \to -1 < 1 + \tau\, f'(x) < 1 \to -2 < \tau\, f'(x) < 0, \tag{4.15}$$

Якщо в деякому околі кореня виконуються умови $f'(x) < 0$, $0 < m < |f'(x)| < M$, то метод ітерації збігається в разі $\tau \in \left(0, \dfrac{2}{M}\right)$. Оптимальне значення параметра в такому випадку має вигляд $\tau = \dfrac{2}{m+M}$.

Приклад 4. Користуючись модифікованим методом ітерацій уточнити корінь рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$, який знаходиться на відрізку $[1;3]$.

Лістинг відокремлення кореня та обчислення його методом ітерацій, реалізованого в пакеті MathCAD, наведено на рис. 4.5.

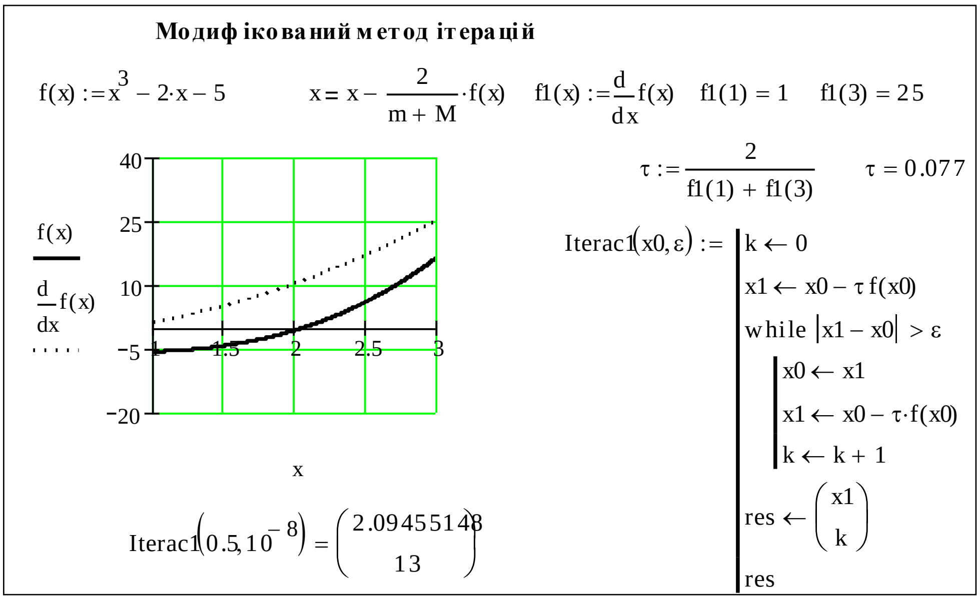


Рисунок 4.5 — Модифікований метод ітерацій

4. Метод Ньютона

Для прискорення збіжності ітераційного процесу методу простої ітерації (4.6) функцію $\varphi(x)$ можна вибрати у вигляді

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{4.16}$$

У цьому випадку чергове наближення x_{n+1} буде знаходитись за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,... \qquad (4.17)$$

Цю формулу можна отримати з рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$, де x_n – n-е наближення до кореня рівняння (рис. 4.5).

Як відомо, рівняння дотичної має вигляд

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

де (x, y) – довільна точка на дотичній. Поклавши в рівнянні дотичної $y = 0,\ x = x_{n+1}$ (точка перетину дотичної з віссю OX) дістанемо формулу (4.17).

Припустивши, що в околі кореня $f'(x) \neq 0$ і $f''(x) \neq 0$ неважко одержати оцінку збіжності обчислень за формулою (4.17). Для чого в околі кореня рівняння розкладемо функцію $f(x)$ в ряд Тейлора з урахуванням третього члена, що визначає нелінійність апроксимації:

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_n)^2,\ \xi \in [x^*, x_n]. \qquad (4.18)$$

Врахувавши, що $f(x^*) = 0$ рівність (4.18) можна перетворити до вигляду (з врахуванням (4.17)):

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n = x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

Оскільки $\varepsilon_n = x^* - x_n$ і $\varepsilon_{n+1} = x^* - x_{n+1}$, то з умови, що $x_n \to x^*$, одержуємо квадратичну залежність похибки на послідовних ітераціях:

$$\varepsilon_{n+1} \to c\varepsilon_n^2, \text{ де } c = -\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}. \qquad (4.19)$$

Таким чином метод Ньютона має квадратичну збіжність

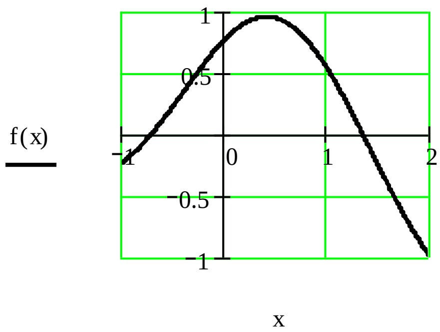
$$|\varepsilon_{n+1}| \leq q\varepsilon_n^2,\ q = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right|. \qquad (4.20)$$

Приклад 5. Користуючись методом Ньютона для простих коренів уточнити корені рівняння $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0$, які знаходяться на відрізках $[-1;\ 0]$ і $[1; 2]$.

Лістинг відокремлення кореня та обчислення його методом Ньютона, реалізованого в пакеті MathCAD, наведено на рис. 4.6.

Метод Ньютона (для простих коренів)

$$f(x) := \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad fN(x) := x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}$$




```
Njuton(x0, ε) := | k ← 0
                 | x1 ← fN(x0)
                 | while |x1 − x0| > ε
                 |     | x0 ← x1
                 |     | x1 ← fN(x0)
                 |     | k ← k + 1
                 | res ← (x1, k)
                 | res
```

$$Njuton\left(-1, 10^{-8}\right) = \begin{pmatrix} -0.6932349431 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Njuton\left(1, 10^{-8}\right) = \begin{pmatrix} 1.3520442115 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4.6 — Метод Ньютона (для простих коренів)

5. Метод Ньютона для кратних коренів

Швидкість збіжності методу Ньютона падає, якщо рівняння $f(x)$ має кратні корені. Разом з тим квадратичну збіжність можна зберегти, якщо побудувати дещо іншу ітераційну формулу, яка базується на наступному відомому факті. Якщо функція $f(x)$ має деякий корінь кратності k, то її похідна $f'(x)$ має цей самий корінь кратності $k-1$.

У більшості випадків кратність коренів невідома, тому для збереження квадратичної збіжності на базі заданого рівняння з кратним коренем x^* розглядають рівняння

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \tag{4.21}$$

яке має корінь x^* кратності одиниця, незалежно від його кратності k у вихідному рівнянні $f(x)=0$.

Як відомо, для рівняння $g(x)=0$ ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Знайшовши похідну $g'(x)$ і підставивши її в останню дістанемо формулу методу Ньютона для кратних коренів, яка має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{4.22}$$

Приклад 6. Користуючись методом Ньютона для кратних коренів уточнити кратний корінь рівняння $(x-3)\cdot(x-1)^2=0$, який знаходиться на відрізку $[0.5;1.5]$. Неважко переконатись, що це є корінь $x^*=1$, який має кратність два.

Лістинг з відокремленням кореня та обчислення його методом Ньютона для кратних коренів, реалізованого в пакеті Mathcad, наведено на рис. 4.7. Для порівняння на (рис. 4.8) наведено лістинг уточнення кореня медом Ньютона для простих коренів. Різниця в кількості ітерацій значна – 4 і 25 відповідно.

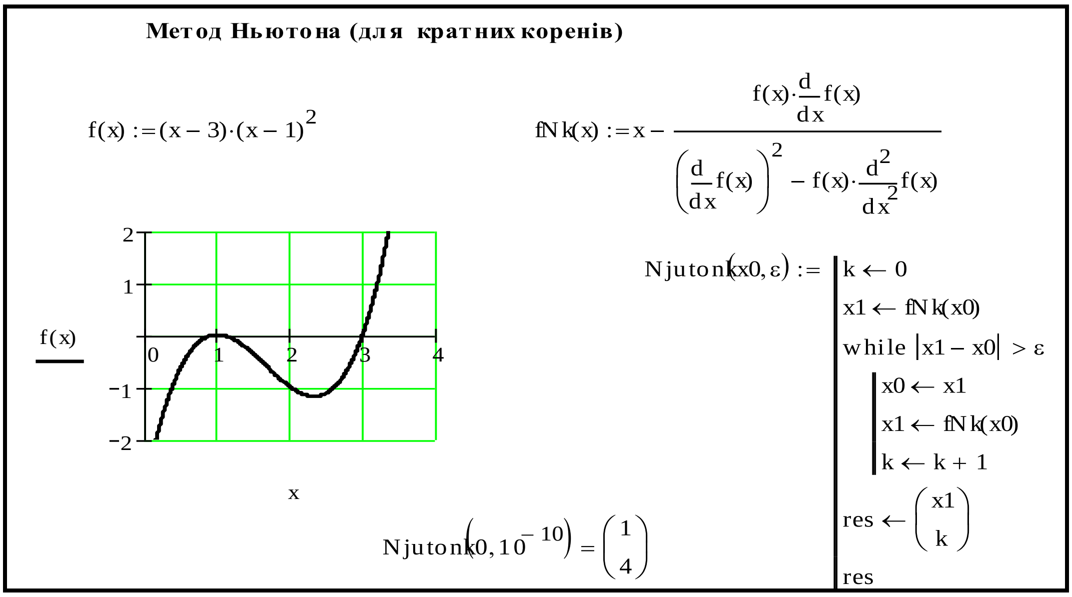


Рисунок 4.7 — Метод Ньютона (для кратних коренів)

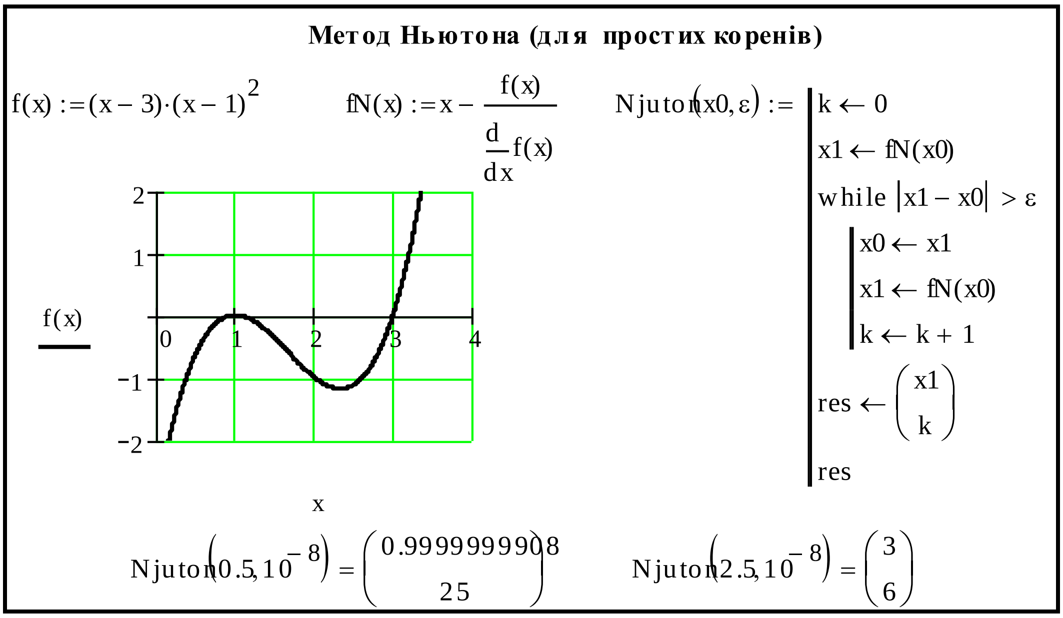


Рисунок 4.8 — Метод Ньютона (для простих коренів)

6. Застосування методу Ньютона для знаходження екстремальних точок функції.

Задачу обчислення значень аргументу функції x_e, за яких функція $f(x)$ досягає своїх екстремальних значень (максимального чи мінімального), можна звести до задачі розв’язання нелінійних рівнянь, оскільки в даних точках похідна від функції дорівнює нулю, тобто $f'(x_e)=0$. При цьому ітераційна формула набуває вигляду:

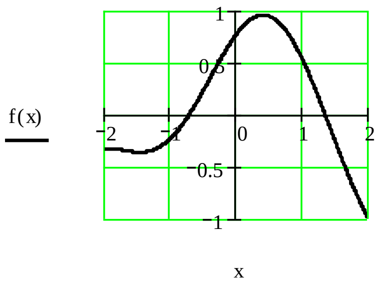
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)},\ n = 0,1,... \tag{4.23}$$

Приклад 7. Користуючись методом Ньютона знайти координати екстремальної точки функції $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^2$, яка знаходяться на відрізках $[0;1]$.

Лістинг обчислення координати екстремальної точки та значення екстремуму, реалізованого в пакеті Mathcad, наведено на рис. 4.9. На цьому ж лістингу наведено результат, одержаний за допомогою вбудованої процедури root.

Метод Ньютона для визначення екстремальних точок

$f(x) := \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \quad fnk(x) := x - \frac{f1(x)}{f2(x)}$




```
Njutonk(x0, ε) := | k ← 0
                  | x1 ← fnk(x0)
                  | while |x1 − x0| > ε
                  |    | x0 ← x1
                  |    | x1 ← fnk(x0)
                  |    | k ← k + 1
                  | res ← (x1
                  |        k)
                  | res
```

$Njutonk(1, 10^{-4}) = \begin{pmatrix} 0.41826 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(0.41826) = 0.94521$

Точка екстремуму знайдена за длопомогою процедури root

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 2\cdot\sin\left(x+\frac{1}{3}\cdot\pi\right)\cdot\cos\left(x+\frac{1}{3}\cdot\pi\right)-\frac{1}{2}\cdot x \qquad root(f1(x), x, 0, 1) = 0.418257$

Рисунок 4.9 — Метод Ньютона для визначення екстремальних точок

7. Метод хорд

Нехай потрібно розв’язати рівняння (4.1), яке має єдиний корінь на інтервалі $[a,b]$, для якого виконується умова $f(a)\cdot f(b)<0$. Для побудови ітераційної формули методу хорд запишемо рівняння прямої (хорди), яка проходить через дві точки $(x_0; f(x_0))$ і $(x_n; f(x_n))$:

$$\frac{y - f(x_n)}{f(x_0) - f(x_n)} = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n}$$

Поклавши в одержаному рівнянні $y = 0$, $x = x_{n+1}$ дістанемо формулу для обчислення наближень вигляду:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \tag{4.24}$$

де $x_0 = a$ – нерухома точка.

Можна показати, що за нерухому точку x_0 береться той із кінців відрізка $[a,b]$, для якого виконується умова $f(x) \cdot f''(x) > 0$. Інший кінець інтервалу приймається за початкове наближення x_1 (рис. 4.10).

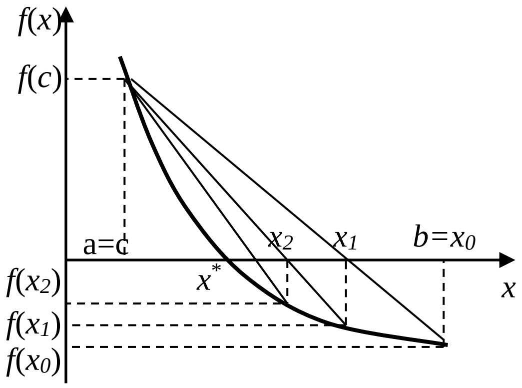


Рисунок 4.10 — Геометрична інтерпретація методу хорд

Ітераційний процес закінчується в разі виконання умови $\frac{1}{m}|f(x_{n+1})| < \varepsilon$,

де $m \le \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, тому що існує оцінка $\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{1}{m}|f(x_{n+1})|$.

8. Комбінований метод

Оскільки в методах хорд і дотичних наближення кореня обчислюється відповідно з недостачею і з надлишком (залежно від вигляду кривої) був розроблений метод, який об'єднав обидва підходи (рис. 4.11). Процес закінчується, коли

$$\left|x_n^{(H)} - x_n^{(X)}\right| < 2\varepsilon .$$

Кінцеве наближення обчислюється за формулою

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{(H)} + x_n^{(X)}}{2},$$

де $x_n^{(H)}$ і $x_n^{(X)}$ – наближення кореня, отримані методами Ньютона та хорд.

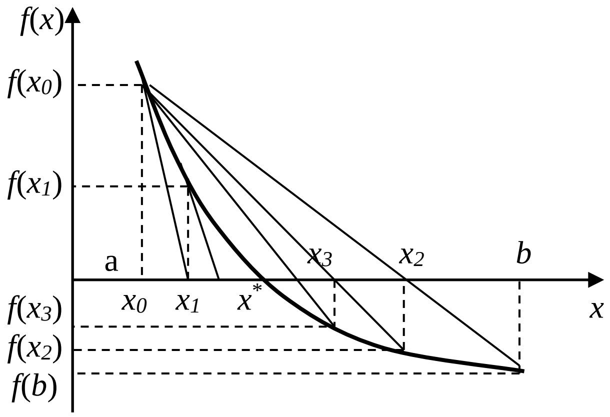


Рисунок 4.11 — Геометрична інтерпретація комбінованого методу

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Для кожного з наведених в табл.4.1 трансцендентних рівнянь потрібно:

1) відокремити корені;

2) обчислити значення відокремлених коренів з похибкою $\varepsilon = 10^{-6}$ у відповідності зі вказаним номером метода розв’язання (1 – метод поділу відрізка навпіл, 2 – метод ітерацій або модифікований метод ітерацій, 3 – метод Ньютона, 4 – метод хорд, 5 – комбінований метод);

3) перевірити правильність одержаних результатів засобами математичного пакету Mathcad;

Завдання 2. Для кожного з наведених в табл. 1 алгебраїчних рівнянь потрібно:

1) відокремити дійсні корені;

2) користуючись методом Ньютона обчислити значення дійсних та комплексних коренів з похибкою $\varepsilon = 10^{-6}$;

3) користуючись методом Ньютона обчислити значення екстремальних точок функції, яка є лівою частиною алгебраїчного рівняння;

4) перевірити правильність одержаних результатів засобами математичного пакету Mathcad;

Для кожного завдання зробити висновки та оформити звіт про виконання роботи, в якому навести короткі теоретичні відомості, постановку завдань та результати їх виконання.

Таблиця 4.1 — Варіанти індивідуальних завдань

№	Рівняння	Метод	№	Рівняння	Метод
1	$x-0.2\sin(x+0.5)=0$, $x^2-\lg(x+2)=0$, $x^4-6x^3+22x^2-48x+40=0$	1-3, 4	9	$x-3\cos^2 1.04x=0$, $2^x-2x^2-1=0$, $x^4+(2x)^3+x^2+12x+20=0$	1-3, 4
2	$x^2-20\sin(x)=0$, $\ln x+(x+1)^3=0$, $x^4-10x^3+46x^2-114x+117=0$	1-3, 5	10	$\sqrt{x}-\cos 0.387x=0$, $e^x+2(x-1)^2=0$, $x^4-10x^3+53x^2-156x+180=0$	1-3, 5
3	$x^2-\sin 5x=0$, $e^x+x^2=2$, $x^4-6x^3+22x^2-30x+13=0$	1-3, 4	11	$\sqrt{x}-2\cos\frac{\pi}{2}x=0$, $e^{-x}-(x-1)^2=0$, $x^4-8x^3+31x^2-42x+18=0$	1-3, 4
4	$1.8x^2-\sin 10x=0$, $2\ln x-\frac{1}{x}=0$, $x^4-10x^3+42x^2-112x+160=0$	1-3, 5	12	$\lg x-\frac{1}{x^2}=0$, $2-xe^x=0$, $x^4-4x^3+2x^2+20x+13=0$	1-3, 5
5	$\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}=0$, $x\ln x-100=0$, $x^4+4x^3+2x^2+12x+45=0$	1-3, 4	13	$3x-\cos x=0$, $2\lg x-\frac{x}{2}=-1$, $x^4-6x^3+5x^2+32x+20=0$	1-3, 4
6	$x-\cos x=0$, $e^{-x}+x^2=0$, $x^4-10x^3+41x^2-84x+72=0$	1-3, 5	14	$x^2-\cos\pi x=0$, $2x\ln x-1=0$, $x^4-4x^3-2x^2+48x+72=0$	1-3, 5
7	$x^2-\cos(x^2)=0$, $(x-1)^2-0.5e^x=0$, $x^4-12x^3+61x^2-168x+208=0$	1-3, 4	15	$x^2\cos 2x+1=0$, $5^x-3x+2=0$, $x^4+4x^3+7x^2+42x+90=0$	1-3, 4
8	$\sqrt{x}-2\cos x=0$, $2-x=\ln x$, $x^4+6x^3+10x^2+48x+16=0$	1-3, 5	16	$\cos(x+0.5)-x^3=0$, $2e^x-5x=0$, $x^4-14x^3+82x^2-222x+225=0$	1-3, 5

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Тема. Чисельні методи розв'язання систем лінійних рівнянь

Мета роботи: Вивчення методів розв'язання систем лінійних рівнянь і набуття навичок їх реалізації за допомогою математичного пакету Mathcad.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, записану у матричній формі

$$Ax = b, \tag{5.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

де A – матриця коефіцієнтів системи, b – вектор вільних членів, x – вектор невідомих і Ab – розширена матриця системи. Будемо вважати, що $\det A \neq 0$, тобто система (5.1) має єдиний розв'язок.

1. Метод вилучення Гаусса – схема єдиного ділення

Найпростішим варіантом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод вилучення Гаусса за *схемою єдиного ділення*. Відповідно до даної схеми для виключення невідомої x_i, *i*-те рівняння $(i = 1, 2, \dots, n)$, яке називається *головним*, ділять на провідний елемент $a_{ii} \neq 0$. Потім отримане таким чином рівняння множать на $a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{n,i}$ і віднімають відповідно із $(i+1)$-го, $(i+2)$-го, і т.д, n-го рядків системи (5.1). В результаті таких перетворень, приходимо до системи з трикутною матрицею з одиничними діагональними елементами, яка є еквівалентна вихідній системі. Якщо провідний елемент на *i*-му кроці перетворюється в нуль $(a_{ii} = 0)$, то для продовження процесу, у відповідній системі *i*-й рядок потрібно поміняти місцями з одним із наступних рядків. Остаточно розв'язок системи одержується шляхом розв'язання одержаної системи з трикутною матрицею, що уже не складає труднощів.

Розглянемо цей алгоритм детальніше. Нехай маємо систему n рівнянь з n невідомими (5.1).

Для зручності записів введемо позначення: $a_{ij}^0 = a_{ij}$, $b_i^0 = b_i$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Тоді системи (5.1) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 & + & a_{12}^0 x_2 & + & \dots & + & a_{1n}^0 x_n & = & b_1^0, \\ a_{21}^0 x_1 & + & a_{22}^0 x_2 & + & \dots & + & a_{2n}^0 x_n & = & b_2^0, \\ \dots & \dots & \dots & + & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^0 x_1 & + & a_{n2}^0 x_2 & + & \dots & + & a_{nn}^0 x_n & = & b_n^0, \end{cases} \tag{5.2}$$

Метод виключення Гаусса, прийнято реалізовувати за два ходи: *прямого* і *зворотного*. На прямому ході, за допомогою еквівалентних перетворень, систему (5.2) зводять до верхнього трикутного вигляду, а на зворотному ході, з одержаної системи знаходять, значення невідомих, тобто розв'язок системи.

Прямий хід методу Гаусса. Нехай $a_{11}^0 \neq 0$. Розділимо усі коефіцієнти першого рівняння системи (5.1) на коефіцієнт a_{11}^0. Одержимо рівняння вигляду

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \tag{5.3}$$

де $c_{1j} = \dfrac{a_{1j}^0}{a_{11}^0}, \quad j = 2,3,\ldots,n, \quad d_1 = \dfrac{b_1^0}{a_{11}^0}$.

Використаємо рівняння (5.3) для виключення невідомого x_1 із всіх рівнянь системи (2), починаючи з другого. Спочатку до другого рівняння додамо перше, помножене на $-a_{21}^0$, а потім до третього рівняння додамо перше, помножене на $-a_{31}^0$ і т.д. В результаті одержимо системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \dots & + & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & a_{22}^1 x_2 & + & \dots & + & a_{2n}^1 x_n & = & b_2^1, \\ & & \dots & + & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_{n2}^1 x_2 & + & \dots & + & a_{nn}^1 x_n & = & b_n^1, \end{cases} \tag{5.4}$$

де $a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - c_{ij}a_{i1}^0, \quad b_i^1 = b_i^0 - d_1 a_{i1}^0, \; i = 2,3,\ldots,n \quad j = 2,3\ldots,n$.

У системі (5.4) невідоме x_1 є тільки в першому рівнянні, тому далі доцільно проводити перетворення другого і наступних рівнянь. Якщо $a_{22} \neq 0$, то з системи (5.4) аналогічно можна виключити невідоме x_2.

Продовжуючи процес за даною схемою далі, на *n*-му кроці одержимо трикутну систему вигляду

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12}x_2 & + c_{13}x_3 + & \dots & + & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & x_2 & + c_{23}x_3 + & \dots & + & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & x_3 + & \dots & + & c_{3n}x_n & = & d_3, \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & x_n & = & d_n, \end{cases} \tag{5.5}$$

На цьому закінчується прямий хід методу Гаусса.

Зворотний хід. На зворотному ході методу Гаусса знаходимо значення невідомих в оберненому порядку.

З останнього рівняння системи (5.5) маємо $x_n = d_n$. Тоді з передостаннього рівняння системи (5.5) знаходимо: $x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1n} x_n$ і т.д. Нарешті з першого рівняння знаходимо: $x_1 = d_1 - c_{12} x_2 - c_{13} x_3 - \ldots - c_{1n} x_n$.

У загальному випадку під час прямого ходу методу Гаусса коефіцієнти системи та праві частини обчислюються за наведеними нижче формулами:

$$a_{ij}^0 = a_{ij},\; b_i^0 = b_i,\; i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$c_{k,j} = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}},\; d_k = \frac{b_k^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}},\; j = k+1, k+2, \ldots, n;\; k = 1, 2, \ldots, n; \tag{5.6}$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - c_{ij} a_{ij}^{k-1},\; b_i^k = b_i^{k-1} - d_i a_{ij}^{k-1},\; i, j = k+1, k+2, \ldots, n;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Зворотний хід при цьому здійснюється за формулами:

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j,\; i = n-1, \ldots, 1;\; x_n = d_n. \tag{5.7}$$

Основним обмеженням методу Гаусса є припущення про те, що всі ведучі елементи a_{kk}^{k-1} відмінні від нуля. Слід мати на увазі, що якщо якийсь ведучий елемент не дорівнює нулю, а просто близький до нього, то в процесі обчислень може відбутись значне накопичення похибок. Уникнути цього дозволяє метод *Гаусса з вибором головного елемента*, одним із варіантів якого є *схема з вибором головного елемента по стовпцях*.

Ідея такого методу Гаусса полягає в наступному. Серед елементів k-го стовпця кожної проміжної матриці з номером $(k-1)$ вибирають найбільший за модулем елемент $\left|a_{rk}^{k-1}\right| = \max\limits_i \left|a_{ik}^{k-1}\right|,\; i = k, k+1, \ldots, n,\; k = 1, 2, \ldots, n$ і роблять його ведучим, проводячи при цьому перестановку k-го та r-го рівнянь.

Зауважимо, що при практичній реалізації розглядуваного методу вказані перетворення зручно виконувати над елементами розширеної матриці системи Ab. На лістингу 1 наведено процедури прямого (GAUSS_VGE(A)) і оберненого (OXG_1(A)) ходів методу Гаусса з вибором головного елемента по стовпцях в застосуванні до розширеної матриці системи, реалізовані в пакеті Mathcad.

Лістинг 1. Метод Гаусса з вибором головного елемента

```
ORIGIN:= 1     Процедура прямого ходу                    Процедура оберненого ходу

GAUSS_VGE(A) := | n ← rows(A)                           OXG(A) := | n ← rows(A)
                | for k ∈ 1..n − 1                                | x_n ← A_{n,n+1}
                |   | max ← |A_{k,k}|                              | for i ∈ n − 1..1
                |   | r ← k                                        |                          n
                |   | for i ∈ k + 1..n − 1                         |   x_i ← A_{i,n+1} −   Σ    A_{i,j}·x_j
                |   |   | z ← |A_{i,k}|                            |                        j = i+1
                |   |   | max ← |A_{i,k}|  if z > max              | x
                |   | for i ∈ k + 1..n − 1
                |   |   | z ← |A_{i,k}|
                |   |   | r ← i  if z > max
                |   | for j ∈ 1..n + 1
                |   |   | c ← A_{k,j}
                |   |   | A_{k,j} ← A_{r,j}
                |   |   | A_{r,j} ← c
                |   | for s ∈ n + 1..k
                |   |   A_{k,s} ← A_{k,s} / A_{k,k}
                |   | for i ∈ k + 1..n
                |   |   | M ← A_{i,k} / A_{k,k}
                |   |   | for j ∈ k..n + 1
                |   |   |   A_{i,j} ← A_{i,j} − M·A_{k,j}
                | r ← A_{n,n}
                | for s ∈ n..n + 1
                |   A_{n,s} ← A_{n,s} / r
                | A
```

Приклад 1. Користуючись вище наведеними процедурами розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Ілюстрацію реалізації розглядуваного алгоритму наведено на лістингу 2. Для утворення розширеної матриці та її розщеплення застосовуються процедури пакету Mathcad: augmetnt(A,b) – формування розширеної матриці та submatrix(A,i_1, ,i_2, j_1, ,j_2) – виділення підматриць.

Лістинг 2. Ілюстрація алгоритму методу Гаусса з вибором головного елемента по стовпцях

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad Ab := \mathrm{augment}(A, b) \qquad Ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix}$$

$$Ab := \mathrm{GAUSS\_R\_1}(Ab) \qquad Ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 0.667 & -3.667 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x := \mathrm{OXG}(Ab) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Метод Гаусса з розкладанням матриці на множники

Алгоритм методу вилучення Гаусса можна компактно записати в матричних позначеннях. Він відповідає розкладанню матриці A на добуток більш простих матриць. Є дві модифікації алгоритму матричного вилучення. Одна з них полягає у перетворені початкової матриці до трикутної, на діагоналі у якої стоять одиниці (цей випадок розглянуто вище), а друга, коли на діагоналі стоять провідні елементи.

Спочатку розглянемо перший варіант. Для простоти викладок розглянемо систему $Ax = b$, що складається з трьох рівнянь:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Вилучення невідомого x_1 з двох останніх рівнянь системи (5.8) здійснюється виконанням множення системи зліва на елементарну нижню трикутну матрицею вигляду

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Перетворимо за допомогою матриці L_1 початкову систему, тобто запишемо її у вигляді $L_1Ax = L_1b$. У результаті отримаємо систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}} & a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 - \frac{b_1 a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

і виконаємо другий крок методу Гаусса, тобто вилучимо невідоме x_2 з останнього рівняння. Це виконується множенням системи (5.11) зліва на елементарну матрицю L_2:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}^1} & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

У результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1} \\ 0 & 0 & a_{13}^1 - \frac{a_{23}^1 a_{32}^1}{a_{22}^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \frac{b_2^1}{a_{22}^1} \\ b_3^1 - \frac{b_2^1 a_{32}^1}{a_{22}^1} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Таким чином, після другого кроку вилучення приходимо до системи $L_2 L_1 Ax = L_2 L_1 b$, яку після перепозначень можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ b_3^2 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Нарешті, помноживши (5.14) на матрицю

$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}^2} \end{pmatrix}$,одержимо систему $L_3 L_2 L_1 Ax = L_3 L_2 L_1 b$ у якої матриця $U = L_3 L_2 L_1 A$ є верхньою трикутною матрицею з одиничною головною діагоналлю. У розгорнутому вигляді ця система має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Зауважимо, що для розв’язання системи (15) достатньо виконати зворотний хід методу Гаусса, який описаний вище.

Розглянемо матрицю $U = L_3 L_2 L_1 A$. З цієї рівності можна виразити матрицю A у вигляді

$$A = L \cdot U, \tag{5.16}$$

де $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$ – нижня трикутна матриця. Отже, $L \cdot U$ – розкладання матриці A можна отримати за допомогою елементарних трикутних матриць у такий спосіб: спочатку будують матриці L_1, L_2, L_3 і обчислюють матрицю $U = L_3 L_2 L_1 A$, а потім знаходять матрицю $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$. Відзначимо, що обернені матриці L_k^{-1} мають простий вигляд:

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^1 & 0 \\ 0 & a_{32}^1 & 1 \end{pmatrix}, \ L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

При цьому матриця L є нижньою трикутною матрицею:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^1 & 0 \\ a_{31} & a_{32}^1 & a_{33}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

на головній діагоналі якої розташовані ведучі елементи методу виключення.

Зауваження. За допомогою матриці L легко обчислити визначник матриці A, а саме: $\det A = \det L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$ – добуток діагональних елементів матриці L.

3. Матрична форма методу Гаусса з вибором головного елемента

Як уже відмічалося вище, метод Гаусса з послідовним вилученням невідомих можна застосовувати, якщо жодний із ведучих елементів не дорівнює нулю. Якщо ця умова не виконується, то застосовують одну з модифікацій методу Гаусса – *метод Гаусса з вибором головного елемента*.

Є три варіанти алгоритму Гаусса з вибором головного елемента: вибір головного (максимального за модулем) елемента по стовпцях, вибір головного елемента по рядках і вибір головного елемента матриці. Оскільки другий і третій варіанти зв’язані з перестановкою стовпців (що вимагає перенумерації змінних), то ми обмежимось розглядом тільки першого варіанту, де вимагається перестановка тільки рядків.

Формально метод Гаусса з вибором головного елемента по рядках можна реалізувати, використовуючи матриці перестановок, які визначаються таким чином.

Матрицею перестановок P називається квадратна матриця, у якої у кожному рядку і кожному стовпці лише один відмінний від нуля і рівний одиниці елемент.

Елементарною матрицею перестановок P_{ik} називається матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою *k*-го і *i*-го рядків.

Наприклад, елементарними матрицями перестановок третього порядку є матриці:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Користуючись методом Гаусса з вибором головного елемента та розкладанням матриці на множники розв'язати систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Нижче наведено покрокову реалізацію алгоритму методу Гаусса з вибором головного елемента по стовпцях та розв'язання системи рівнянь розкладанням матриці на множники**.**

1⁰. Задаємо матрицю коефіцієнтів та вектор вільних членів:

$$A \cdot x = b \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2⁰. Формуємо матрицю перестановки 1-го і 3-го рядків і переставляємо їх в матриці та правій частині:

$$P13 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P13 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad P13 \cdot b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3⁰. Формуємо матрицю для утворення нулів на відповідних місцях у 1-му стовпчику та утворюємо їх:

$$L1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-2}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L1 \cdot P13 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 2.75 & 0.5 \\ 0 & -4.5 & 5 \end{pmatrix} \qquad L1 \cdot P13 \cdot b = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 10.25 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

4⁰. Формуємо матрицю перестановки 2-го і 3-го рядків і переставляємо їх в матриці та правій частині:

$$P23 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & -4.5 & 5 \\ 0 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot b = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 2.5 \\ 10.25 \end{pmatrix}$$

5^0. Формуємо матрицю для утворення нулів на відповідних місцях у 1-му стовпчику та утворюємо їх:

$$L2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-4.5} & 0 \\ 0 & \frac{2.75}{4.5} & 1 \end{pmatrix} \quad L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1.111 \\ 0 & 0 & 3.556 \end{pmatrix} \quad L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot b = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.556 \\ 11.778 \end{pmatrix}$$

6^0. Формуємо матрицю для утворення одиниці на відповідному місці у 3-му стовпчику та утворюємо її:

$$L3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{32} \end{pmatrix} \quad L3 \cdot L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1.111 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L3 \cdot L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot b = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.556 \\ 3.313 \end{pmatrix}$$

В результаті таких перетворень ми прийшли до системи з верхньою трикутною матрицею вигляду $UA \cdot x = Lb$, де:

$$UA := L3 \cdot L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot A \quad UA = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1.111 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Lb := L3 \cdot L2 \cdot P23 \cdot L1 \cdot P13 \cdot b \quad Lb = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.556 \\ 3.313 \end{pmatrix}$$

7^0. За допомогою оберненого ходу методу Гаусса одержуємо розв'язок системи та робимо перевірку:

$$x_3 := Lb_3 \quad x_2 := Lb_2 - UA_{2,3} \cdot x_3 \quad x_1 := Lb_1 - UA_{1,2} \cdot x_2 - UA_{1,3} \cdot x_3 \quad x = \begin{pmatrix} 1.688 \\ 3.125 \\ 3.313 \end{pmatrix} \quad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Алгоритм розв'язання можна значно спростити, якщо використати процедури, необхідні для реалізації методу Гаусса з розкладанням матриці на множники. А саме: процедуру перестановка рядків (побудова матриці P), процедуру ділення елементів і-го рядка на ведучий елемент та виключення невідомої x_i з наступних рядків (подова матриці L) та процедуру, яка реалізовує обернений хід методу Гаусса.

Лістинг 3. Процедури для реалізації методу Гаусса з розкладанням матриці на множники.

$ORIGIN := 1$

$$P(i,j,n) := \left| \begin{array}{l} E \leftarrow \mathrm{identity}(n) \\ E_{i,i} \leftarrow 0 \\ E_{i,j} \leftarrow 1 \\ E_{j,i} \leftarrow 1 \\ E_{j,j} \leftarrow 0 \\ E \end{array} \right.$$

$$Lp(B,i,n) := \left| \begin{array}{l} L \leftarrow \mathrm{identity}(n) \\ L_{i,i} \leftarrow \dfrac{1}{B_{i,i}} \\ k \leftarrow i+1 \\ \text{while } k \le n \\ \quad \left| \begin{array}{l} L_{k,i} \leftarrow \dfrac{-B_{k,i}}{B_{i,i}} \\ k \leftarrow k+1 \end{array} \right. \\ L \end{array} \right.$$

$$OXG(A,b) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \mathrm{cols}(A) \\ x_n \leftarrow \dfrac{b_n}{A_{n,n}} \\ \text{for } i \in n-1..1 \\ \quad x_i \leftarrow \dfrac{1}{A_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j \right) \\ x \end{array} \right.$$

Послідовність розв'язання системи рівнянь з прикладу 2 з використанням наведених процедур:

Задаємо матрицю, праву частину та будуємо розширену матрицю. Дані операції наведені на наступному лістингу, включаючи коментарі.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \quad n := \mathrm{cols}(A) \quad Ab := \mathrm{augment}(A,b) \quad Ab = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Утворюємо матрицю L1 і робимо нулі в 1-му стовпці

$$L1 := Lp(Ab,1,n) \quad L1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Ab := L1 \cdot Ab \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 & -0.75 \\ 0 & 2.75 & 0.5 & 10.25 \\ 0 & -4.5 & 5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Міняємо 2-й і 3-й рядки $Ab := P(2,3,n) \cdot Ab \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 & -0.75 \\ 0 & -4.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 2.75 & 0.5 & 10.25 \end{pmatrix}$

Утворюємо матрицю L2 і робимо нулі в 2-му стовпці

$$L2 := Lp(Ab,2,n) \quad L2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.222 & 0 \\ 0 & 0.611 & 1 \end{pmatrix} \quad Ab := L2 \cdot Ab \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 & -0.75 \\ 0 & 1 & -1.111 & -0.556 \\ 0 & 0 & 3.556 & 11.778 \end{pmatrix}$$

Утворюємо матрицю L3 і робимо 1 на діагоналі

$$L3 := Lp(Ab,3,n) \quad L3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.281 \end{pmatrix} \quad Ab := L3 \cdot Ab \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 & -0.75 \\ 0 & 1 & -1.111 & -0.556 \\ 0 & 0 & 1 & 3.313 \end{pmatrix}$$

Розщеплюємо матрицю Ab на складові A і b

$$A := \mathrm{submatrix}(Ab,1,3,1,3) \quad b := \mathrm{submatrix}(Ab,1,3,4,4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1.111 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.556 \\ 3.313 \end{pmatrix}$$

Виконуємо обернений хід методу Гауса і перевіряємо розв'язок	$x := OXG(A, b)$ $x = \begin{pmatrix} 1.688 \\ 3.125 \\ 3.313 \end{pmatrix}$	$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Обчислення оберненої матриці методом Гаусса

Один з методів обчислення оберненої матриці базується на розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай задана деяка матриця A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Необхідно знайти матрицю $B = A^{-1}$, яка є оберненою до матриці A, тобто мають місце рівності: $A \cdot Y = Y \cdot A = E$, де E – одинична матриця. Нехай

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді можемо записати матричну рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності випливає, що для знаходження оберненої матриці потрібно розв'язати n систем рівнянь вигляду $A \cdot Y^{<j>} = E^{<j>}$, $j = 1, 2, \dots, n$, де $Y^{<j>}$, $E^{<j>}$ – відповідно j-й стовпець матриці невідомих Y і матриці правих частин E.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса з вибором головного елемента та знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -4, \\ 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$$

На лістингу 4 наведено процедуру Ob_matr(A), яка реалізовує процедуру знаходження оберненої матриці за допомогою методу Гаусса На лістингу 5 наведено процедуру GAUSS_PR_OB(A), яка реалізовує метод Гаусса з вибором головного елемента по рядках (прямий і обернений ходи). Справа від процедури наведено приклад розв’язання системи рівнянь за допомогою даної процедури. Для порівняння наведено результати, одержані за допомогою процедури lsolve(A,b) з пакету Mathcad..

Лістинг 4. Процедура знаходження оберненої матриці методом Гаусса з вибором головного елемента

```
Ob_matr(A) := | n ← cols(A)
              | E ← identity(n)
              | for i ∈ 1..n
              |   | Ab ← augment(A, E⟨i⟩)
              |   | Y⟨i⟩ ← GAUSS_PR_OB(Ab)
              | Y
```

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Aob := Ob\_matr(A)$$

$$Aob = \begin{pmatrix} 0.059 & -0.062 & 0.036 \\ 0.199 & 0.179 & -0.156 \\ -0.124 & 0.02 & 0.147 \end{pmatrix} \qquad A \cdot Aob = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x := Aob \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{239}{307} \\ -\frac{94}{307} \\ -\frac{27}{307} \end{pmatrix} \qquad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Лістинг 5. Процедура методу Гаусса з вибором головного елемента

ORIGIN:= 1

```
GAUSS_PR_OB(A) := | n ← rows(A)
                  | for  k ∈ 1..n − 1
                  |   | max ← |A_{k,k}|
                  |   | r ← k
                  |   | for  i ∈ k + 1..n − 1
                  |   |   | z ← |A_{i,k}|
                  |   |   | max ← |A_{i,k}|  if  z > max
                  |   | for  i ∈ k + 1..n − 1
                  |   |   | z ← |A_{i,k}|
                  |   |   | r ← i  if  z > max
                  |   | for  j ∈ 1..n + 1
                  |   |   | c ← A_{k,j}
                  |   |   | A_{k,j} ← A_{r,j}
                  |   |   | A_{r,j} ← c
                  |   | for  s ∈ n + 1..k
                  |   |   A_{k,s} ← A_{k,s} / A_{k,k}
                  |   | for  i ∈ k + 1..n
                  |   |   | M ← A_{i,k} / A_{k,k}
                  |   |   | for  j ∈ k..n + 1
                  |   |   |   A_{i,j} ← A_{i,j} − M·A_{k,j}
                  | r ← A_{n,n}
                  | for  s ∈ n..n + 1
                  |   A_{n,s} ← A_{n,s} / r
                  | A
                  | x_n ← A_{n,n+1}
                  | for  i ∈ n − 1..1
                  |   x_i ← A_{i,n+1} − Σ_{j=i+1}^{n} A_{i,j}·x_j
                  | x
```

Приклад застосування процедури GAUSS_PR_OB(A)

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5\times -2 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Ab := \mathrm{augment}(A, b)$$

$$Ab = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -10 & -4 \\ 8 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{GAUSS\_PR\_OB}(Ab)$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{398}{217} \\ -\frac{661}{217} \\ -\frac{297}{217} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.776\times 10^{-15} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Застосування процедури lsolve(A, b) пакету Matcad

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b)$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{398}{217} \\ -\frac{661}{217} \\ -\frac{297}{217} \end{pmatrix}$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Знайти розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь використавши методи:

1) Метод Гаусса з вибором головного елемента.

2) Матричну форму Методу Гаусса з вибором головного елемента.

3) Матричним методом, обчисливши обернену матрицю методом Гаусса з вбором головного елемента.

4) Оформити звіт про виконання роботи, в якому навести короткі теоретичні відомості, постановку завдань та результати їх виконання.

Варіанти індивідуальних завдань:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -10, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ 20 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

Тема: Дослідження парної лінійної регресії у Microsoft Excel.

Мета роботи: Вивчити метод апроксимації за допомогою парної лінійної регресії, реалізувати алгоритм розв'язування задачі з використанням електронних таблиць.

Короткі теоретичні відомості

Вводиться гіпотеза, що між фактором *x* та показником *y* існує лінійна стохастична залежність:

$$y = ax + b \tag{6.1}$$

Оцінки параметрів парної регресії обчислюються за формулами:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad , \; b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{6.2}$$

Коефіцієнти кореляції та детермінації обчислюються відповідно за формулами (6.3) та (6.4):

$$R_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}; \tag{6.3}$$

$$R_d = R_{xy} \tag{6.4}$$

Робота виконується на окремому аркуші книги. У першому рядку електронної таблиці вводиться назва роботи, у другому — назви стовпців. Блок початкових даних x_i, y_i формується в діапазоні даних B3:C15. Далі іде блок проміжкових розрахунків D3:F15.

Для визначення відповідних сум у рядку 17 використовується кнопка авто сумування на панелі інструментів або вбудована функція СУММ(Діапазон даних). Середні значення обчислюються за допомогою вбудованої статистичної функції СРЗНАЧ(Діапазон даних) відповідно у рядку 18. Для обчислень a, b, R_{xy}, R_d у рядку 20 вводяться відповідно формули (6.2), (6.3), (6.4).

У комірках G3:G15 вводяться формули для обчислення прогнозованих значень згідно з формулою (6.1) з абсолютним посиланням на значення параметрів a, b та відносними посиланнями на значення x_i.

Для оцінки довірчої зони базисних даних та оцінки довірчого інтервалу прогнозу розраховується блок проміжкових обчислень G3:M15. Для обчислень використовуються наступні формули:

$$\Delta y_i = \frac{t(p,n)S}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{n(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}; \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{pi})^2}{n-2}}. \qquad (6.5)$$

Для розрахунків також необхідно використати значення *n, p* та значення коефіцієнта Стьюдента з діапазону А2:А10.

Для оцінки адекватності прийнятої моделі експериментальним даним використовується *F*-критерій Фішера. Розрахункове значення критерію Фішера обчислюється за формулою:

$$F = \frac{R_{xy}^{\ 2}}{1 - R_{xy}^{\ 2}} \cdot \frac{n-m-1}{m}.$$

Табличне значення *F*-критерію для *P*=0,95 і числа ступенів вільності $K_1 = m$, $K_2 = n - m - 1$ наводиться у А11.

Для наочного представлення одержаних розрахунків будуються графіки: фактичних даних, лінії регресії для базисних даних та прогнозу, довірчої зони для базисних даних та прогнозу. Для перевірки правильності розрахунків використати стандартні вбудовані функції *Excel*: ЛИНЕЙН, КОРРЕЛ.

Індивідуальні завдання

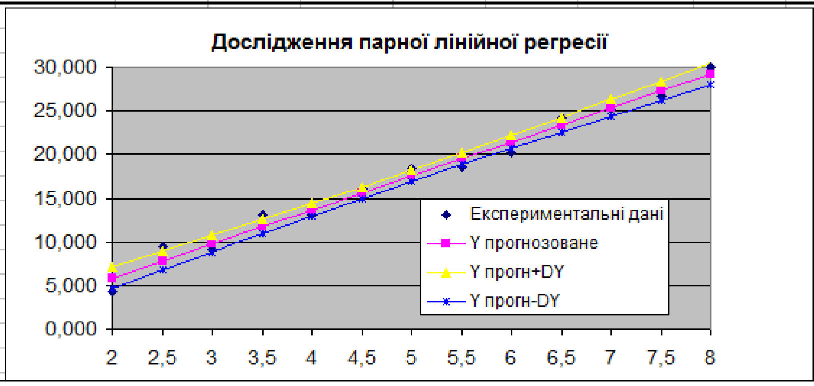
На основі статистичних даних випадкової величини *y* і аргументу *x* (згідно варіантів індивідуальних завдань) знайти оцінки коефіцієнта кореляції R_{xy} та параметрів лінії регресії $y = ax + b$.

Використовуючи критерій Фішера, з надійністю *P*=0,95 оцінити адекватність прийнятої моделі статистичним даним. Якщо модель адекватна статистичним даним, то знайти: довірчі зони базисних даних, прогноз показника та його надійні інтервали.

Побудувати графіки фактичних даних, лінії регресії для базисних даних та прогнозу, довірчої зони для базисних даних та прогнозу та на основі одержаної моделі зробити висновки.

Зразок виконання роботи

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		y	x	y*x	x*x	y*y	y прогн.(yp)	(y-yp)^2	(y-ys)^2	(x-xs)^2	dy	yp+dy	yp-dy
2	n=	4,330	2	8,660	4,000	18,749	5,882	2,409	174,927	9,000	1,218	7,100	4,664
3	13	9,497	2,5	23,743	6,250	90,193	7,830	2,781	64,947	6,250	1,076	8,906	6,754
4	p=	9,123	3	27,369	9,000	83,229	9,777	0,428	71,115	4,000	0,994	10,771	8,783
5	0,95	13,012	3,5	45,542	12,250	169,312	11,725	1,658	20,648	2,250	0,826	12,551	10,899
6	t(n,p)=	13,124	4	52,496	16,000	172,239	13,672	0,300	19,643	1,000	0,731	14,403	12,941
7	2,18	16,051	4,5	72,230	20,250	257,635	15,620	0,186	2,265	0,250	0,667	16,287	14,953
8	m=	18,431	5	92,155	25,000	339,702	17,567	0,746	0,766	0,000	0,645	18,212	16,922
9	1	18,521	5,5	101,866	30,250	343,027	19,515	0,987	0,931	0,250	0,667	20,182	18,848
10	F(m,n-m-1)=	20,177	6	121,062	36,000	407,111	21,462	1,651	6,870	1,000	0,731	22,193	20,731
11	4,84	24,145	6,5	156,943	42,250	582,981	23,410	0,541	43,415	2,250	0,826	24,236	22,584
12		25,252	7	176,764	49,000	637,664	25,357	0,011	59,228	4,000	0,944	26,301	24,413
13		26,741	7,5	200,558	56,250	715,081	27,305	0,318	84,364	6,250	1,076	28,381	26,229
14		29,949	8	239,592	64,000	896,943	29,252	0,486	153,586	9,000	1,218	30,470	28,034
15	Сума	228,353	65,000	1318,978	370,500	4713,866		12,501		45,500			
16	Середні (s)	17,566	5,000	101,460	28,500	362,605							
17	a=	3,895	b=	-1,908	R=	0,991	S=	1,066	Rd=	0,982	F=	607,3214	



Варіанти індивідуальних завдань:

№	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00
	y	8,161	9,463	10,599	12,387	14,077	15,656	16,684	18,485	20,105	21,213	23,204	24,624	25,604
2	x	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00
	y	20,857	22,352	23,997	25,784	26,699	28,294	30,281	31,592	32,632	34,438	35,738	37,894	39,200
3	x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00
	y	22,194	24,919	27,739	30,992	34,246	37,156	40,258	43,363	46,185	49,211	52,250	54,981	58,030
4	x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00
	y	7,023	8,711	10,161	11,386	13,050	14,359	15,866	17,781	18,883	20,730	21,603	23,248	25,069
5	x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00
	y	15,342	16,750	19,342	21,218	22,858	25,057	26,688	28,679	31,186	33,308	35,188	37,276	38,927
6	x	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00
	y	27,353	29,889	32,164	34,344	37,287	39,626	42,088	44,370	46,738	49,136	51,874	54,786	56,961
7	x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00
	y	21,830	24,681	26,917	29,510	32,302	34,646	36,734	39,725	42,396	44,518	46,887	49,777	51,615
8	x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00
	y	19,348	21,161	23,208	24,706	27,181	28,543	30,197	31,710	33,004	34,282	35,874	37,743	39,236
9	x	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00
	y	21,251	22,434	23,855	25,214	26,942	28,543	30,097	31,710	33,004	34,282	35,874	37,743	39,236
10	x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00
	y	6,346	6,806	8,229	8,800	10,124	10,745	12,208	13,323	13,977	15,196	16,054	17,083	18,338
11	x	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00
	y	33,269	36,346	40,240	43,363	46,655	50,180	53,924	57,392	61,386	64,599	68,029	71,743	74,713
12	x	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00
	y	12,912	13,778	15,121	15,834	17,163	18,410	18,836	20,097	20,665	22,192	22,785	24,081	25,399
13	x	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00
	y	7,913	8,180	8,599	9,219	10,371	10,552	10,731	11,715	11,983	12,587	13,204	13,638	13,748

Висновки:

1. Оскільки $F_{розр} > F_{таб}$, то з надійністю P=0,95 отриману модель можна вважати адекватною експериментальним даним і на підставі прийнятої моделі можна проводити аналіз.

2. Отриманий в результаті обчислень коефіцієнт кореляції $R_{xy} = 0{,}99$ свідчить про тісний лінійний зв'язок фактора та показника.

Контрольні питання

1. Метод апроксимації за допомогою парної лінійної регресії.
2. Оцінки параметрів парної регресії.
3. Коефіцієнти кореляції та детермінації. Критерій Фішера.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці /Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. Алексеев Е.П. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, VFTLAB 7, Maple 9 /Алексеев Е.П., Чесноков О.В. М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
3. Ляшенко М.Я. Чисельні методи / Ляшенко М.Я., Головань М.С. Підручник. К.: Либідь. 1996. – 288 с.
4. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики /Демидович Б.П., Марон И.А. / К.: Физматгиз, 1963. – 660 с.
5. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие.- М.: Высш. шк., 1993. – 336 с.
7. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах/ Пантелеев А.В., Летова Т.А. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.
8. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами Excel: Практикум. – СПб.: Питер, 2003. – 240 с.