УДК 517.925

©2008 р. І. І. Король

Ужгородський національний університет

# ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням у резонансному випадку.

We consider a numerically-analytic investigation method for periodic solutions of nonlinear differential equation systems with delays in resonance case.

Диференціальні рівняння з відхиляючим аргументом, зокрема рівняння з запізненням, знаходять своє широке практичне застосування при дослідженні різноманітних прикладних задач. Їх дослідженню присвячена велика кількість праць як українських, так і закордонних вчених, зокрема [1-5].

У даній роботі для дослідження існування та наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням застосовано чисельно-аналітичний алгоритм, який був раніше запропонований для дослідження періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [6].

Розглянемо лінійну неоднорідну $T$ - періодичну систему диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + h(t), \quad (19)$$

де матриці-функції $A(t), B(t)$ і вектор-функція $h(t)$ є неперервними при $t\in\mathbb{R}$, $A(t+T) = A(t)$, $B(t+T) = B(t)$, $h(t+T) = h(t)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$. Дослідимо $T$ - періодичні розв'язки системи (19), тобто

$$x(t+T) = x(t), \quad x(t) = \begin{cases} x(t), & t\in[0,T], \\ x(T+t), & t\in[-\Delta, 0], \end{cases}$$

Відомо [1], що розв'язок системи (19) має вигляд

$$x(t,x_0) = W(0,t)x_0 + \int_0^t W(s,t)h(s)ds + \\ + \int_0^{\Delta} W(s,t)B(s)x(s-\Delta,x_0)ds, \quad (20)$$

де рядки матриці $W(s,t)$ є розв'язками спряженої до (19) системи

$$\frac{dw(t)}{dt} = -w(t)A(t) - w(t)B(t+\Delta), \quad (21)$$

і $W(t,t) = E_n$, $W(s,t) \equiv 0$ при $t \le s \le t+\Delta$.

При цьому розглянемо критичний випадок – коли

А) відповідна лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta), \quad (22)$$

має $k$ лінійно незалежних $T$ - періодичних розв'язків, $1 \le k \le n$.

Нехай $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ – лінійно незалежні $T$ - періодичні розв'язки спряженої системи (21), тоді без обмеження загальності можемо прийняти, що

$$W(s,t) = \begin{pmatrix} \Psi(s,t) \\ \Theta(s,t) \end{pmatrix},$$

де $\Psi(s,t) = col(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t))$ – $(k \times n)$ - матриця, а рядки $((n-k)\times n)$ - вимірної матриці $\Theta(s,t)$ утворені тими розв'язками системи (21), які не є $T$ - періодичними. Підставимо (20) у періодичні крайові умови:

$$x(0) = W(0,0)x_0 + \int\limits_0^{\Delta} W(s,0)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$x(T) = W(0,T)x_0 + \int\limits_0^{T} W(s,T)h(s)ds +$$
$$+ \int\limits_0^{\Delta} W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

Отже,

$$\Big(W(0,0) - W(0,T)\Big)x_0 +$$
$$+ \int\limits_0^{\Delta}\Big(W(s,0) - W(s,T)\Big)B(s)x(s-\Delta)ds =$$
$$= \int\limits_0^{T} W(s,T)h(s)ds.$$

Беручи до уваги $T$ - періодичність по $t$ матриці $\Psi(s,t)$, одержимо

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(0,0) - \Theta(0,T) \end{pmatrix} x_0 =$$
$$= \int\limits_0^{T} \begin{pmatrix} \Psi(s,T) \\ \Theta(s,T) \end{pmatrix} h(s)ds - \qquad (23)$$
$$- \int\limits_0^{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(s,0) - \Theta(s,T) \end{pmatrix} B(s)x(s-\Delta)ds.$$

Алгебраїчна система (23) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)h(s)ds = 0,$$

і при цьому початковим значенням $T$ - періодичного розв'язку системи (19) є

$$x_0 = P_{G_k}\xi +$$
$$+ G^{+}\Big(\int\limits_0^{T} \Theta(s,T)h(s)ds - \int\limits_0^{\Delta} G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\Big),$$

де $G(s) = \Theta(s,0) - \Theta(s,T)$, $G = G(0)$ є $((n-k)\times n)$-вимірними матрицями рангу $(n-k)$, $G^{+}$ — єдина псевдообернена матриця до $G$.

**Лема 1.** *Якщо система (22) має $k$ лінійно незалежних $T$- періодичних розв'язків, то для кожної $T$- періодичної функції $h(t)$ існує функція $H(t)$ періоду $T$ така, що система*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + h(t) - H(t), \quad (24)$$

*має $k$ - параметричну сім'ю $T$ - періодичних розв'язків.*

**Доведення.** Як було показано вище, система (24) має $T$ -періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)\big(h(s) - H(s)\big)ds = 0.$$

Покладемо

$$H(s) = \Psi^{*}(s,T)\cdot\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}^n,$$

тоді

$$\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)\big(h(s) - \Psi^{*}(s,T)\cdot\alpha\big)ds,$$

$$\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)\Psi^{*}(s,T)ds\cdot\alpha = \int\limits_0^{T} \Psi(s,T)h(s)ds.$$

Позначимо

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{t} \Psi(s,t)\Psi^{*}(s,T)ds \\ \int\limits_0^{t} \Theta(s,t)\Psi^{*}(s,T)ds \end{pmatrix},$$

$$U(s,t) = \begin{pmatrix} U_1(s,t) \\ U_2(s,t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \Psi(s,t) - P_1(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T) \\ \Theta(s,t) - P_2(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T) \end{pmatrix},$$

$$V(s,t) = \begin{pmatrix} V_1(s,t) \\ V_2(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} P_1^{-1}(T)\Psi(s,T).$$

Оскільки рядки матриці $\Psi(s,t)$ є лінійно незалежними розв'язками системи (21), то $detP_1(t) \neq 0$, а тому

$$\alpha = P_1^{-1}(T)\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)h(s)ds,$$

$$H(s) = \Psi^{*}(s,T)P_1^{-1}(T)\int\limits_0^{T} \Psi(s,T)h(s)ds,$$

а $T$ - періодичні розв'язки системи (24) мають вигляд

$$x(t,x_0) = W(0,t)x_0 + \int_0^\Delta W(s,t)B(s)x(s-\Delta)ds + \int_0^t W(s,t)\Big\{h(s) - \Psi^*(s,T)P_1^{-1}(T)\int_0^T\Psi(\sigma,T)h(\sigma)d\sigma\Big\}ds. \quad (25)$$

Лема доведена.

Для знаходження початкового значення $T$ - періодичного розв'язку системи (24) підставимо (25) у $T$ - періодичні крайові умови:

$$x(0,x_0) = W(0,0)x_0 + \int_0^\Delta W(s,0)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$x(T,x_0) = W(0,T)x_0 + \int_0^\Delta W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds + \int_0^T W(s,T)h(s)ds - \int_0^T W(s,T)\Psi^*(s,T)dsP_1^{-1}(T)\int_0^T\Psi(\sigma,T)h(\sigma)d\sigma =$$

$$= W(0,T)x_0 + \int_0^\Delta W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds + \int_0^T\begin{pmatrix}\Psi(s,T)\\ \Theta(s,T)\end{pmatrix}h(s)ds - \begin{pmatrix}P_1(T)\\ P_2(T)\end{pmatrix}P_1^{-1}(T)\int_0^T\Psi(s,T)h(s)ds =$$

$$= W(0,T)x_0 + \int_0^\Delta W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds + \int_0^T\begin{pmatrix}0\\ \Theta(s,T)-P_2(T)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T)\end{pmatrix}h(s)ds.$$

Таким чином, $x_0$ повинно задовольняти алгебраїчну систему

$$Gx_0 = \int_0^T U_2(s,T)h(s)ds - \int_0^\Delta G(s)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

отже

$$x_0 = P_{G_k}\xi + G^+\Big\{\int_0^T U_2(s,T)h(s)ds - \int_0^\Delta G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\Big\}.$$

Остаточно $T$ - періодичні розв'язки системи (24) можемо записати у вигляді

$$x(t,\xi) = W(0,t)P_{G_k}\xi + W(0,t)G^+\Big\{\int_0^T U_2(s,T)h(s)ds - \int_0^\Delta G(s)B(s)x(s-\Delta)ds\Big\} + \int_0^\Delta W(s,t)B(s)x(s-\Delta))ds + \int_0^t U(s,t)h(s)ds - \int_t^T V(s,t)h(s)ds,\ \xi\in R^k,$$

де $P_{G_k}$ — $(n\times k)$ - вимірна матриця-ортопроектор з простору $R^n$ на нуль простір $Ker(G)$ матриці $G$, причому її стовпці є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $Ker(G)$ матриці $G$:

$$P_{G_k}\colon R^k \to Ker(G), \quad Ker(G) = P_{G_k}R^n.$$

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + f(t,x(t),x(t-\Delta)), \quad (26)$$

де $t\in\mathbb{R}$, $x\colon D\to\mathbb{R}^n$, $f\colon\mathbb{R}\times D\times D\to\mathbb{R}^n$, $A(t)$, $B(t)$, $f(t,x,y)$ – неперервні по своїм змінним, періодичні по $t$ зі спільним періодом $T$: $A(t+T)=A(t)$, $B(t+T)=B(t)$, $f(t+T,x,y)=f(t,x,y)$, $D=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq a\}$.

Введемо до розгляду відображення $Lx\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, сім'ю $k$ - параметричних відображень $N_\xi x\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, де $\xi$ – $k$-вимірний параметр, і функціонал

$\mu(x): C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^k$:

$$(Lx)(t) \stackrel{def}{=} \int_0^t U(s,t) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds -$$

$$- \int_t^T V(s,t) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds +$$

$$+ W(0,t) G^+ \int_0^T U_2(s,T) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds,$$

$$(N_\xi x)(t) \stackrel{def}{=} W(0,t) P_{G_k} -$$

$$- W(0,t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x(s-\Delta)ds +$$

$$+ \int_0^\Delta W(s,t) B(s) x(s-\Delta)ds,$$

$$\mu(x) \stackrel{def}{=} \int_0^T \Psi(s,t) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds.$$

Для наближеного знаходження $T$ - періодичних розв'язків системи (26) побудуємо послідовність $T$- періодичних функцій

$$x_m(t,\xi) = x_0^{m-1}(t,\xi) +$$

$$+ W(0,t) G^+ \int_0^T U_2(s,T) f(s, x_{m-1}(s,\xi), x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds +$$

$$+ \int_0^t U(s,t) f(s, x_{m-1}(s,\xi), x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds -$$

$$- \int_t^T V(s,t) f(s, x_{m-1}(s,\xi), x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds, \quad (27)$$

$$x_0^m(t,\xi) = W(0,t) P_{G_k} \xi -$$

$$- W(0,t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x_m(s-\Delta,\xi)ds +$$

$$+ \int_0^\Delta W(s,t) B(s) x_m(s-\Delta,\xi)ds, \ m \in \mathbb{N},$$

де $x_0^0(t,\xi)$ - $T$ - періодичний розв'язок лінійної однорідної системи (22):

$$x_0(t,\xi) = x_0^0(t,\xi) = W(0,t) P_{G_k} \xi -$$

$$- W(0,t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x_0^0(s-\Delta,\xi)ds +$$

$$+ \int_0^\Delta W(s,t) B(s) x_0^0(s-\Delta,\xi)ds.$$

Розглянемо критичний випадок - коли виконується умова **A**. Крім того, припускаємо, що в області $(t,x,y) \in \Omega = \mathbb{R} \times D \times D$ справджуються наступні умови:

**B**) вектор-функція $f(t,x,y)$ задовольняє умови обмеженості та Ліпшіца

$$|f(t,x,y)| \le m(t), \quad (28)$$

$$|f(t,x',y') - f(t,x'',y'')| \le$$

$$\le K_1(t)|x'-x''| + K_2(t)|y'-y''|,$$

де $m(t)$ - неперервна $T$ - періодична векторфункція з невід'ємними елементами, $K_1(t)$, $K_2(t)$ - $(n \times n)$ - вимірні неперервні $T$ - періодичні матриці-функції з невід'ємними елементами. Матричні та векторні нерівності розуміємо покомпонентно;

**C**) існує непорожня множина точок $\xi \in D_0 \in \mathbb{R}^k$, $D_0 \subset D$ така, що вектор-функція $x_0^0(t,\xi)$ лежить в області $D$ разом із своїм $(E+Q_N)^{-1}\beta$ - околом,

$$\beta = \max_{t\in[0,T]} \left\{ \int_0^T |W(0,t) G^+ U_2(s,T)| m(s) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t |U(s,t)| m(s) ds + \int_t^T |V(s,t)| m(s) ds \right\}; \quad (29)$$

**D**) спектральні радіуси операторів $Q_N$ і $Q = Q_N + Q_L$ менші за одиницю, де

$$(Q_L x)(t) = \int_0^t |U(s,t)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds +$$

$$+ \int_t^T |V(s,t)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds +$$

$$+ \int_0^t |W(0,t) G^+ U_2(s,T)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds,$$

$$(Q_N x)(t) =$$

$$= \int_0^\Delta |(W(s,t) - W(0,t) G^+ G(s)) B(s)| x(s-\Delta) ds.$$

Зауважимо, що

$$(Lx)(t) = \int_0^t W(s,t) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds +$$

$$+ W(0,t) G^+ \int_0^T U_2(s,T) f(s, x(s), x(s-\Delta))ds - \quad (30)$$

$$- P(t) P_1^{-1}(T) \mu(x).$$

Дослідимо умови існування $T$ - періодичного розв'язку системи (26). Необхідні умови існування містить наступне твердження.

**Лема 2.** *Нехай виконується умова* **A** *і* $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ *є* $T$*- періодичним розв'язком системи з запізненням (26). Тоді значення параметра* $\xi=\xi^*$ *таке, що* $\mu(\varphi(\cdot,\xi^*))=0$ *і* $\varphi(t)$ *приймає початкове значення*

$$\varphi(0)=\varphi(0,\xi^*)=W(0,0)P_{G_k}\xi^*+ \\ +W(0,0)G^+\left\{\int_0^T\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds- \right. \\ \left. -\int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\}+ \\ +\int_0^\Delta W(s,0)B(s)\varphi(s-\Delta)ds. \tag{31}$$

**Доведення.** Нехай функція $\varphi(t)$ є $T$- періодичним розв'язком системи (26). Тоді

$$\varphi(t)\equiv W(0,t)\varphi_0+ \\ +\int_0^\Delta W(s,t)B(s)\varphi(s-\Delta)ds+ \\ +\int_0^t W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

При підстановці $\varphi(t)$ в $T$ - періодичні крайові умови одержимо, що

$$\Big(W(0,0)-W(0,T)\Big)\varphi_0= \\ =-\int_0^\Delta(W(s,0)-W(s,T))\,B(s)\varphi(s-\Delta)ds+ \\ +\int_0^T W(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds,$$

$$\begin{pmatrix}0\\G\end{pmatrix}\varphi_0=-\int_0^\Delta\begin{pmatrix}0\\G(s)\end{pmatrix}B(s)\varphi(s-\Delta)ds+ \\ +\int_0^T\begin{pmatrix}\Psi(s,T)\\ \Theta(s,T)\end{pmatrix}f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi)=0$. При цьому маємо, що

$$P_{G_k^*}\left\{\int_0^T\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds- \right. \\ \left. -\int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\}=0,$$

$$\varphi_0=P_{G_k}\xi^*+G^+\left\{\int_0^T\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds- \right. \\ \left. -\int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\},$$

і $\varphi(0)$ має вигляд (31). Тут $P_{G_k^*}$ — $(k\times n)$- вимірна матриця-ортопроектор з простору $R^n$ на нуль простір $Ker(G^*)$ матриці $G^*$, причому рядки матриці $P_{G_k^*}$ утворюють повний базис ядра матриці $G^*$:

$$P_{G_k^*}:R^n\to Ker(G^*),\quad Ker(G^*)=P_{G_k^*}R^n, \\ rank(P_{G_k})=rank(P_{G_k^*})=k=n-rank(G).$$

Вкажемо достатні умови існування $T$ - періодичного розв'язку системи (26).

**Лема 3.** *Нехай виконується умова* **A**. *Якщо при цьому параметр* $\xi=\xi^*$ *і функція* $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ *такі, що виконується система рівнянь*

$$\varphi=(N_\xi+L)\varphi, \tag{32}$$

$$\mu(\varphi)=0, \tag{33}$$

*тоді* $\varphi(t)$ *є* $T$ *- періодичним розв'язком системи із запізненням (26) і приймає початкове значення (31).*

**Доведення.** Нехай параметр $\xi=\xi^*$ і функція $\varphi(t)=\varphi(t,\xi^*)$ задовольняють рівняння (32), (33), тоді з (30) випливає, що

$$\varphi(t)\equiv W(0,t)P_{G_k}\xi^*+ \\ +W(0,t)G^+\left\{\int_0^T\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds- \right. \\ \left. -\int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds\right\}+ \\ +\int_0^\Delta W(s,t)B(s)\varphi(s-\Delta)ds+ \\ +\int_0^t W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds.$$

Підставляючи $t=0$ в останню тотожність бачимо, що $\varphi(t)$ приймає початкове значення (31), а диференціюючи її переконуємося, що $\varphi(t)$ задовольняє систему (26). Підставитепер $\varphi(t)$ в крайові умови:

$$\varphi(0)-\varphi(T)=(W(0,0)-W(0,T))\varphi_0+ \int_0^{\Delta} G(s)B(s)\varphi(s-\Delta))ds- -\int_0^{\Delta} W(s,t)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix}\varphi_0+\int_0^{\Delta}\begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix}B(s)\varphi(s)ds- \tag{34}$$

$$-\int_0^{T}\begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(s,T) \end{pmatrix}f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ GG^{+}-E_{n-k} \end{pmatrix}\int_0^{T}\{\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds\}=$$

$$=-P_{G_k^*}\int_0^{T}\Theta(s,T)f(s,\varphi(s),\varphi(s-\Delta))ds=0.$$

Лема доведена.

На підставі аналізу властивостей послідовності $\{x_m(t,\xi)\}$, за аналогією до теореми 2 [6] можемо довести наступне твердження, яке обґрунтовує можливість застосування запропонованої схеми для наближеної побудови $T$- періодичного розв'язку системи з запізненням (26).

**Теорема 1.** *Нехай система (26) задовольняє умови* $\mathbf{A}$ – $\mathbf{D}$. *Тоді*

*1) послідовність функцій $x_m(t,\xi)$ вигляду (27) при $m\to\infty$ рівномірно збігається відносно $(t,\xi)\in\mathbb{R}\times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$ і при всіх натуральних $m$ справджуються оцінки збіжності*

$$|x^*(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le(E-Q)^{-1}(Q)^m\beta;$$

*2) гранична функція $x^*(t,\xi)$ є $T$- періодичною по $t$ і приймає початкове значення*

$$x^*(0)=x^*(0,\xi^*)=W(0,0)P_{G_k}\xi^*+ +W(0,0)G^{+}\left\{\int_0^{T}\Theta(s,T)f(s,x^*(s),x^*(s-\Delta))ds- -\int_0^{\Delta}G(s)B(s)x^*(s-\Delta)ds\right\}+ +\int_0^{\Delta}W(s,0)B(s)x^*(s-\Delta)ds; \tag{35}$$

*3) функція $x^*(t)=x^*(t,\xi^*)$ є $T$- періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь (26) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi=\xi^*$ є розв'язком рівняння (33).*

**Доведення.** З (27), (28), (29) та вигляду операторів $N_\xi$, $L$ випливає, що

$$|x_1(t,\xi)-x_0^0(t,\xi)|=\beta,$$

$$|x_2(t,\xi)-x_0^0(t,\xi)|= =|((N_\xi+L)x_1(\cdot,\xi))(t)-(N_\xi x_0^0(\cdot,\xi))(t)|\le \le|(N_\xi(x_1(\cdot,\xi)-x_0^0(\cdot,\xi)))(t)|+|(Lx_1(\cdot,\xi))(t)|\le \le(Q_N|x_1(\cdot,\xi)-x_0^0(\cdot,\xi)|)(t)+\beta\le(E+Q_N)\beta.$$

За індукцією можемо показати, що

$$|x_m(t,\xi)-x_0^0(t,\xi)|\le\left(\sum_{i=0}^{m-1}Q_N^i\right)\beta,$$

тоді з умови $\mathbf{D}$ випливає, що

$$|x_m(t,\xi)-x_0^0(t,\xi)|\le(E-Q_N)^{-1}\beta,$$

тобто $x_m(t,\xi)\in D$ при всіх $\xi\in D_0$. Крім того,

$$|x_{m+1}(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le|x_0^m(t,\xi)-x_0^{m-1}(t,\xi)|+ +|(L(x_m(\cdot,\xi)-x_{m-1}(\cdot,\xi)))(t)|\le \le(Q|x_m(\cdot,\xi)-x_{m-1}(\cdot,\xi)|)(t)\le \le(Q^2|x_{m-1}(\cdot,\xi)-x_{m-2}(\cdot,\xi)|)(t)\le \le(Q^m|x_1(\cdot,\xi)-x_0(\cdot,\xi)|)(t)\le Q^m\beta.$$

Міркуючи далі так, як і при доведенні теореми 2 [6], завершуємо доведення теореми.

Конструктивні достатні умови існування $T$- періодичних розв'язків, для перевірки яких не потрібно шукати граничну функцію $x^*(t,\xi)$ послідовності (27), а досить знати тільки послідовні наближення $x_m(t,\xi)$, містить наступне твердження, яке можемо довести за аналогією до теореми 3 [6].

**Теорема 2.** *Нехай для системи (26) виконуються припущення* $\mathbf{A}$ – $\mathbf{D}$ *і, крім того:*

*1) існує опукла, замкнена область $D_1\subset D_0$ така, що при деякому фіксованому натуральному $m$ в області $D_1$ міститься єдина особлива точка $\xi=\xi_m$ ненульового індексу відображення $\Delta_m(\xi):\ D_0\to\mathbb{R}^k$:*

$$\Delta_m(\xi)\overset{def}{=}\int_0^{T}\Psi(s,t)f(s,x_{m-1}(s,\xi),x_{m-1}(s-\Delta,\xi))ds,$$

2) *на границі* $\partial D_1$ *області* $D_1$ *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi\in\partial D_1} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(E-Q_N)^{-1}Q_N^m\beta,$$

де

$$Q_1 = \int_0^T |\Psi(s,T)|(K_1(s)+K_2(s))ds.$$

*Тоді система* (26) *має* $T$- *періодичний розв'язок* $x(t)=x^*(t,\xi^*)$ *з початковим значенням* $x(0)=x^*(0,\xi^*)$ *вигляду* (35), *де* $\xi^*\in D_1$.

У даній роботі обгрунтовано чисельно-аналітичний алгоритм інтегрування періодичних систем диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом. Побудовано рівномірно збіжну послідовність $k$- параметричних періодичних наближень, встановлено умови збіжності та оцінки похибки. Досліджено зв'язок граничної функції цієї послідовності з точним періодичним розв'язком вихідної системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием — К.: Вища школа, 1979 — 248 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. *Хейл Дж.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.

4. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Доп.НАН України. — 1991.— N 9.— С.9–13.

5. Стельмащук Л.В. Періодичні розв'язки диференціальних рівнянь з запізненням: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: НАН Украины. Ін-т матем. – К.. 2004. – 16 с.

6. Король І.І., Перестюк М.О. Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М.Самойленка// Укр. мат. журн. — 2006.— **58**, №4. — С.472–488.