

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням у резонансному випадку.

We consider a numerically-analytic investigation method for periodic solutions of nonlinear differential equation systems with delays in resonance case.

Диференціальні рівняння з відхиляючим аргументом, зокрема рівняння з запізненням, знаходять своє широке практичне застосування при дослідженні різноманітних прикладних задач. Їх дослідженню присвячена велика кількість праць як українських, так і закордонних вчених, зокрема [1-5].

У даній роботі для дослідження існування та наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізненням застосовано чисельно-аналітичний алгоритм, який був раніше запропонований для дослідження періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [6].

Розглянемо лінійну неоднорідну T -періодичну систему диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \Delta) + h(t), \quad (19)$$

де матриці-функції $A(t)$, $B(t)$ і вектор-функція $h(t)$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}$, $A(t+T) = A(t)$, $B(t+T) = B(t)$, $h(t+T) = h(t)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$. Дослідимо T -періодичні розв'язки системи (19), тобто

$$x(t+T) = x(t), \quad x(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ x(T+t), & t \in [-\Delta, 0], \end{cases}$$

Відомо [1], що розв'язок системи (19) має

вигляд

$$x(t, x_0) = W(0, t)x_0 + \int_0^t W(s, t)h(s)ds + \int_0^\Delta W(s, t)B(s)x(s - \Delta, x_0)ds, \quad (20)$$

де рядки матриці $W(s, t)$ є розв'язками спряженої до (19) системи

$$\frac{dw(t)}{dt} = -w(t)A(t) - w(t)B(t + \Delta), \quad (21)$$

і $W(t, t) = E_n$, $W(s, t) \equiv 0$ при $t \leq s \leq t + \Delta$.

При цьому розглянемо критичний випадок – коли

А) відповідна лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \Delta), \quad (22)$$

має k лінійно незалежних T -періодичних розв'язків, $1 \leq k \leq n$.

Нехай $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$ – лінійно незалежні T -періодичні розв'язки спряженої системи (21), тоді без обмеження загальності можемо прийняти, що

$$W(s, t) = \begin{pmatrix} \Psi(s, t) \\ \Theta(s, t) \end{pmatrix},$$

де $\Psi(s, t) = \text{col}(\psi_1(t), \dots, \psi_k(t))$ – $(k \times n)$ -матриця, а рядки $((n-k) \times n)$ -вимірної матриці $\Theta(s, t)$ утворені тими розв'язками системи (21), які не є T -періодичними. Під-

ставимо (20) у періодичні крайові умови:

$$x(0) = W(0,0)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s,0)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

$$x(T) = W(0,T)x_0 + \int_0^T W(s,T)h(s)ds + \int_0^{\Delta} W(s,T)B(s)x(s-\Delta)ds,$$

Отже,

$$\begin{aligned} & (W(0,0) - W(0,T))x_0 + \\ & + \int_0^{\Delta} (W(s,0) - W(s,T))B(s)x(s-\Delta)ds = \\ & = \int_0^T W(s,T)h(s)ds. \end{aligned}$$

Беручи до уваги T -періодичність по t матриці $\Psi(s,t)$, одержимо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(0,0) - \Theta(0,T) \end{pmatrix} x_0 = \\ & = \int_0^T \begin{pmatrix} \Psi(s,T) \\ \Theta(s,T) \end{pmatrix} h(s)ds - \\ & - \int_0^{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(s,0) - \Theta(s,T) \end{pmatrix} B(s)x(s-\Delta)ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Алгебраїчна система (23) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds = 0,$$

і при цьому початковим значенням T -періодичного розв'язку системи (19) є

$$x_0 = P_{G_k}\xi + G^+ \left(\int_0^T \Theta(s,T)h(s)ds - \int_0^{\Delta} G(s)B(s)x(s-\Delta)ds \right),$$

де $G(s) = \Theta(s,0) - \Theta(s,T)$, $G = G(0) \in ((n-k) \times n)$ -вимірними матрицями рангу $(n-k)$, G^+ — єдина псевдообернена матриця до G .

Лема 1. Якщо система (22) має k лінійно незалежних T -періодичних розв'язків, то для кожної T -періодичної функції

$h(t)$ існує функція $H(t)$ періоду T така, що система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\Delta) + h(t) - H(t), \quad (24)$$

має k -параметричну сім'ю T -періодичних розв'язків.

Доведення. Як було показано вище, система (24) має T -періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^T \Psi(s,T)(h(s) - H(s))ds = 0.$$

Покладемо

$$H(s) = \Psi^*(s,T) \cdot \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T \Psi(s,T)(h(s) - \Psi^*(s,T) \cdot \alpha)ds, \\ & \int_0^T \Psi(s,T)\Psi^*(s,T)ds \cdot \alpha = \int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds. \end{aligned}$$

Позначимо

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t \Psi(s,t)\Psi^*(s,T)ds \\ \int_0^t \Theta(s,t)\Psi^*(s,T)ds \end{pmatrix},$$

$$U(s,t) = \begin{pmatrix} U_1(s,t) \\ U_2(s,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Psi(s,t) - P_1(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T) \\ \Theta(s,t) - P_2(t)P_1^{-1}(T)\Psi(s,T) \end{pmatrix},$$

$$V(s,t) = \begin{pmatrix} V_1(s,t) \\ V_2(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} P_1^{-1}(T)\Psi(s,T).$$

Оскільки рядки матриці $\Psi(s,t)$ є лінійно незалежними розв'язками системи (21), то $\det P_1(t) \neq 0$, а тому

$$\alpha = P_1^{-1}(T) \int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds,$$

$$H(s) = \Psi^*(s,T)P_1^{-1}(T) \int_0^T \Psi(s,T)h(s)ds,$$

а T - періодичні розв'язки системи (24) мають вигляд

$$x(t, x_0) = W(0, t)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s, t)B(s)x(s - \Delta)ds + \int_0^t W(s, t) \left\{ h(s) - \Psi^*(s, T)P_1^{-1}(T) \int_0^T \Psi(\sigma, T)h(\sigma)d\sigma \right\} ds. \quad (25)$$

Лема доведена.

Для знаходження початкового значення T - періодичного розв'язку системи (24) підставимо (25) у T - періодичні крайові умови:

$$\begin{aligned} x(0, x_0) &= W(0, 0)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s, 0)B(s)x(s - \Delta)ds, \\ x(T, x_0) &= W(0, T)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s, T)B(s)x(s - \Delta)ds + \int_0^T W(s, T)h(s)ds - \int_0^T W(s, T)\Psi^*(s, T)ds P_1^{-1}(T) \int_0^T \Psi(\sigma, T)h(\sigma)d\sigma = \\ &= W(0, T)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s, T)B(s)x(s - \Delta)ds + \int_0^T \left(\begin{matrix} \Psi(s, T) \\ \Theta(s, T) \end{matrix} \right) h(s)ds - \left(\begin{matrix} P_1(T) \\ P_2(T) \end{matrix} \right) P_1^{-1}(T) \int_0^T \Psi(s, T)h(s)ds = \\ &= W(0, T)x_0 + \int_0^{\Delta} W(s, T)B(s)x(s - \Delta)ds + \int_0^T \left(\begin{matrix} 0 \\ \Theta(s, T) - P_2(T)P_1^{-1}(T)\Psi(s, T) \end{matrix} \right) h(s)ds. \end{aligned}$$

Таким чином, x_0 повинно задовольняти алгебраїчну систему

$$Gx_0 = \int_0^T U_2(s, T)h(s)ds - \int_0^{\Delta} G(s)B(s)x(s - \Delta)ds,$$

отже

$$x_0 = P_{G_k}\xi + G^+ \left\{ \int_0^T U_2(s, T)h(s)ds - \int_0^{\Delta} G(s)B(s)x(s - \Delta)ds \right\}.$$

Остаточно T - періодичні розв'язки системи (24) можемо записати у вигляді

$$x(t, \xi) = W(0, t)P_{G_k}\xi + W(0, t)G^+ \left\{ \int_0^T U_2(s, T)h(s)ds - \int_0^{\Delta} G(s)B(s)x(s - \Delta)ds \right\} + \int_0^{\Delta} W(s, t)B(s)x(s - \Delta)ds + \int_0^t U(s, t)h(s)ds - \int_t^T V(s, t)h(s)ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^k,$$

де P_{G_k} — $(n \times k)$ - вимірна матриця-ортопроектор з простору \mathbb{R}^n на нуль простір $\text{Ker}(G)$ матриці G , причому її стовпці є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $\text{Ker}(G)$ матриці G :

$$P_{G_k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \text{Ker}(G), \quad \text{Ker}(G) = P_{G_k}\mathbb{R}^n.$$

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \Delta) + f(t, x(t), x(t - \Delta)), \quad (26)$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(t)$, $B(t)$, $f(t, x, y)$ - неперервні по своїм змінним, періодичні по t зі спільним періодом T : $A(t+T) = A(t)$, $B(t+T) = B(t)$, $f(t+T, x, y) = f(t, x, y)$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}$.

Введемо до розгляду відображення $Lx : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, сім'ю k - параметричних відображень $N_\xi x : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, де ξ - k - вимірний параметр, і функціонал

$\mu(x) : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t U(s, t) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds - \\ &- \int_t^T V(s, t) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds + \\ &+ W(0, t) G^+ \int_0^T U_2(s, T) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds, \\ (N_\xi x)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} W(0, t) P_{G_k} - \\ &- W(0, t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x(s-\Delta) ds + \\ &+ \int_0^\Delta W(s, t) B(s) x(s-\Delta) ds, \\ \mu(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \Psi(s, t) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds. \end{aligned}$$

Для наближеного знаходження T -періодичних розв'язків системи (26) побудуємо послідовність T -періодичних функцій

$$\begin{aligned} x_m(t, \xi) &= x_0^{m-1}(t, \xi) + \\ &+ W(0, t) G^+ \int_0^T U_2(s, T) f(s, x_{m-1}(s, \xi), x_{m-1}(s-\Delta, \xi)) ds + \\ &+ \int_0^t U(s, t) f(s, x_{m-1}(s, \xi), x_{m-1}(s-\Delta, \xi)) ds - \\ &- \int_t^T V(s, t) f(s, x_{m-1}(s, \xi), x_{m-1}(s-\Delta, \xi)) ds, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0^m(t, \xi) &= W(0, t) P_{G_k} \xi - \\ &- W(0, t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x_m(s-\Delta, \xi) ds + \\ &+ \int_0^\Delta W(s, t) B(s) x_m(s-\Delta, \xi) ds, \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

де $x_0^0(t, \xi)$ - T -періодичний розв'язок лінійної однорідної системи (22):

$$\begin{aligned} x_0(t, \xi) &= x_0^0(t, \xi) = W(0, t) P_{G_k} \xi - \\ &- W(0, t) G^+ \int_0^\Delta G(s) B(s) x_0^0(s-\Delta, \xi) ds + \\ &+ \int_0^\Delta W(s, t) B(s) x_0^0(s-\Delta, \xi) ds. \end{aligned}$$

Розглянемо критичний випадок - коли виконується умова А. Крім того, припускаємо, що в області $(t, x, y) \in \Omega = \mathbb{R} \times D \times D$ справджуються наступні умови:

В) вектор-функція $f(t, x, y)$ задовольняє умови обмеженості та Ліпшица

$$|f(t, x, y)| \leq m(t), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} |f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| &\leq \\ &\leq K_1(t) |x' - x''| + K_2(t) |y' - y''|, \end{aligned}$$

де $m(t)$ - неперервна T -періодична вектор-функція з невід'ємними елементами, $K_1(t)$, $K_2(t)$ - $(n \times n)$ -вимірні неперервні T -періодичні матриці-функції з невід'ємними елементами. Матричні та векторні нерівності розуміємо покомпонентно;

С) існує непорожня множина точок $\xi \in D_0 \in \mathbb{R}^k$, $D_0 \subset D$ така, що вектор-функція $x_0^0(t, \xi)$ лежить в області D разом із своїм $(E + Q_N)^{-1} \beta$ -околом,

$$\begin{aligned} \beta &= \max_{t \in [0, T]} \left\{ \int_0^T |W(0, t) G^+ U_2(s, T)| m(s) ds + \right. \\ &+ \left. \int_0^t |U(s, t)| m(s) ds + \int_t^T |V(s, t)| m(s) ds \right\}; \quad (29) \end{aligned}$$

Д) спектральні радіуси операторів Q_N і $Q = Q_N + Q_L$ менші за одиницю, де

$$\begin{aligned} (Q_L x)(t) &= \int_0^t |U(s, t)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds + \\ &+ \int_t^T |V(s, t)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds + \\ &+ \int_0^t |W(0, t) G^+ U_2(s, T)| (K_1(s) + K_2(s)) x(s) ds, \\ (Q_N x)(t) &= \end{aligned}$$

$$\int_0^\Delta |W(s, t) - W(0, t) G^+ G(s) B(s)| x(s-\Delta) ds.$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \int_0^t W(s, t) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds + \\ &+ W(0, t) G^+ \int_0^T U_2(s, T) f(s, x(s), x(s-\Delta)) ds - \\ &- P(t) P_1^{-1}(T) \mu(x). \quad (30) \end{aligned}$$

Дослідимо умови існування T -періодичного розв'язку системи (26). Необхідні умови існування містить наступне твердження.

Лема 2. Нехай виконується умова **A** і $\varphi(t) = \varphi(t, \xi^*)$ є T -періодичним розв'язком системи з запізненням (26). Тоді значення параметра $\xi = \xi^*$ таке, що $\mu(\varphi(\cdot, \xi^*)) = 0$ і $\varphi(t)$ приймає початкове значення

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(0, \xi^*) = & W(0, 0)P_{G_k}\xi^* + \\ & + W(0, 0)G^+ \left\{ \int_0^T \Theta(s, T)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds - \right. \\ & \left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds \right\} + \\ & + \int_0^\Delta W(s, 0)B(s)\varphi(s-\Delta)ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Доведення. Нехай функція $\varphi(t) \in T$ -періодичним розв'язком системи (26). Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(t) \equiv & W(0, t)\varphi_0 + \\ & + \int_0^\Delta W(s, t)B(s)\varphi(s-\Delta)ds + \\ & + \int_0^t W(s, t)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds. \end{aligned}$$

При підстановці $\varphi(t)$ в T -періодичні крайові умови одержимо, що

$$\begin{aligned} & (W(0, 0) - W(0, T))\varphi_0 = \\ & = - \int_0^\Delta (W(s, 0) - W(s, T))B(s)\varphi(s-\Delta)ds + \\ & + \int_0^T W(s, T)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \varphi_0 = & - \int_0^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix} B(s)\varphi(s-\Delta)ds + \\ & + \int_0^T \begin{pmatrix} \Psi(s, T) \\ \Theta(s, T) \end{pmatrix} f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds. \end{aligned}$$

Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi) = 0$. При цьому маємо, що

$$\begin{aligned} P_{G_k} \left\{ \int_0^T \Theta(s, T)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds - \right. \\ \left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds \right\} = 0, \\ \varphi_0 = P_{G_k}\xi^* + G^+ \left\{ \int_0^T \Theta(s, T)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds - \right. \\ \left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds \right\}, \end{aligned}$$

і $\varphi(0)$ має вигляд (31). Тут P_{G_k} — $(k \times n)$ -вимірна матриця-ортопроектор з простору R^n на нуль простір $\text{Ker}(G^*)$ матриці G^* , причому рядки матриці P_{G_k} утворюють повний базис ядра матриці G^* :

$$\begin{aligned} P_{G_k} : R^n \rightarrow \text{Ker}(G^*), \quad \text{Ker}(G^*) = P_{G_k}R^n, \\ \text{rank}(P_{G_k}) = \text{rank}(P_{G_k^*}) = k = n - \text{rank}(G). \end{aligned}$$

Вкажемо достатні умови існування T -періодичного розв'язку системи (26).

Лема 3. Нехай виконується умова **A**. Якщо при цьому параметр $\xi = \xi^*$ і функція $\varphi(t) = \varphi(t, \xi^*)$ такі, що виконується система рівнянь

$$\varphi = (N_\xi + L)\varphi, \quad (32)$$

$$\mu(\varphi) = 0, \quad (33)$$

тоді $\varphi(t)$ є T -періодичним розв'язком системи із запізненням (26) і приймає початкове значення (31).

Доведення. Нехай параметр $\xi = \xi^*$ і функція $\varphi(t) = \varphi(t, \xi^*)$ задовольняють рівняння (32), (33), тоді з (30) випливає, що

$$\begin{aligned} \varphi(t) \equiv & W(0, t)P_{G_k}\xi^* + \\ & + W(0, t)G^+ \left\{ \int_0^T \Theta(s, T)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds - \right. \\ & \left. - \int_0^\Delta G(s)B(s)\varphi(s-\Delta)ds \right\} + \\ & + \int_0^\Delta W(s, t)B(s)\varphi(s-\Delta)ds + \\ & + \int_0^t W(s, t)f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta))ds. \end{aligned}$$

Підставляючи $t=0$ в останню тотожність бачимо, що $\varphi(t)$ приймає початкове значення (31), а диференціюючи її переконуємося, що $\varphi(t)$ задовольняє систему (26). Підстави-

то тепер $\varphi(t)$ в крайові умови:

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varphi(T) &= (W(0, 0) - W(0, T)) \varphi_0 + \\ &+ \int_0^\Delta G(s) B(s) \varphi(s - \Delta) ds - \\ &- \int_0^\Delta W(s, t) f(s, \varphi(s), \varphi(s - \Delta)) ds = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix} \varphi_0 + \int_0^\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ G(s) \end{pmatrix} B(s) \varphi(s) ds - \\ &- \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta(s, T) \end{pmatrix} f(s, \varphi(s), \varphi(s - \Delta)) ds = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ G G^+ - E_{n-k} \end{pmatrix} \int_0^T \Theta(s, T) f(s, \varphi(s), \varphi(s - \Delta)) ds = \\ &= -P_{G^+} \int_0^T \Theta(s, T) f(s, \varphi(s), \varphi(s - \Delta)) ds = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Лема доведена.

На підставі аналізу властивостей послідовності $\{x_m(t, \xi)\}$, за аналогією до теореми 2 [6] можемо довести наступне твердження, яке обґрунтовує можливість застосування запропонованої схеми для наближеної побудови T -періодичного розв'язку системи з запізненням (26).

Теорема 1. *Нехай система (26) задовольняє умови $A - D$. Тоді*

1) *послідовність функцій $x_m(t, \xi)$ вигляду (27) при $m \rightarrow \infty$ рівномірно збігається відносно $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times D_0$ до граничної функції $x^*(t, \xi)$ і при всіх натуральних m справедливі оцінки збіжності*

$$|x^*(t, \xi) - x_m(t, \xi)| \leq (E - Q)^{-1} (Q)^m \beta;$$

2) *гранична функція $x^*(t, \xi)$ є T -періодичною по t і приймає початкове значення*

$$\begin{aligned} x^*(0) &= x^*(0, \xi^*) = W(0, 0) P_{G^+} \xi^* + \\ &+ W(0, 0) G^+ \left\{ \int_0^T \Theta(s, T) f(s, x^*(s), x^*(s - \Delta)) ds - \right. \\ &- \left. \int_0^\Delta G(s) B(s) x^*(s - \Delta) ds \right\} + \\ &+ \int_0^\Delta W(s, 0) B(s) x^*(s - \Delta) ds; \end{aligned} \quad (35)$$

3) *функція $x^*(t) = x^*(t, \xi^*)$ є T -періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь (26) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком рівняння (33).*

Доведення. З (27), (28), (29) та вигляду операторів N_ξ, L випливає, що

$$|x_1(t, \xi) - x_0^0(t, \xi)| = \beta,$$

$$|x_2(t, \xi) - x_0^0(t, \xi)| =$$

$$\begin{aligned} &= |(N_\xi + L)x_1(\cdot, \xi)(t) - (N_\xi x_0^0(\cdot, \xi))(t)| \leq \\ &\leq |(N_\xi(x_1(\cdot, \xi) - x_0^0(\cdot, \xi)))(t)| + |(Lx_1(\cdot, \xi))(t)| \leq \\ &\leq (Q_N |x_1(\cdot, \xi) - x_0^0(\cdot, \xi)|)(t) + \beta \leq (E + Q_N)\beta. \end{aligned}$$

За індукцією можемо показати, що

$$|x_m(t, \xi) - x_0^0(t, \xi)| \leq \left(\sum_{i=0}^{m-1} Q_N^i \right) \beta,$$

тоді з умови **D** випливає, що

$$|x_m(t, \xi) - x_0^0(t, \xi)| \leq (E - Q_N)^{-1} \beta,$$

тобто $x_m(t, \xi) \in D$ при всіх $\xi \in D_0$. Крім того,

$$\begin{aligned} |x_{m+1}(t, \xi) - x_m(t, \xi)| &\leq |x_0^m(t, \xi) - x_0^{m-1}(t, \xi)| + \\ &+ |(L(x_m(\cdot, \xi) - x_{m-1}(\cdot, \xi)))(t)| \leq \\ &\leq (Q |x_m(\cdot, \xi) - x_{m-1}(\cdot, \xi)|)(t) \leq \\ &\leq (Q^2 |x_{m-1}(\cdot, \xi) - x_{m-2}(\cdot, \xi)|)(t) \leq \\ &\leq (Q^m |x_1(\cdot, \xi) - x_0(\cdot, \xi)|)(t) \leq Q^m \beta. \end{aligned}$$

Міркуючи далі так, як і при доведенні теореми 2 [6], завершуємо доведення теореми.

Конструктивні достатні умови існування T -періодичних розв'язків, для перевірки яких не потрібно шукати граничну функцію $x^*(t, \xi)$ послідовності (27), а досить знати тільки послідовні наближення $x_m(t, \xi)$, містить наступне твердження, яке можемо довести за аналогією до теореми 3 [6].

Теорема 2. *Нехай для системи (26) виконуються припущення $A - D$ і, крім того:*

1) *існує опукла, замкнена область $D_1 \subset D_0$ така, що при деякому фіксованому натуральному m в області D_1 міститься єдина особлива точка $\xi = \xi_m$ ненульового індексу відображення $\Delta_m(\xi) : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$:*

$$\Delta_m(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \Psi(s, t) f(s, x_{m-1}(s, \xi), x_{m-1}(s - \Delta, \xi)) ds$$

2) на границі ∂D_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(E - Q_N)^{-1} Q_N^m \beta,$$

де

$$Q_1 = \int_0^T |\Psi(s, T)|(K_1(s) + K_2(s)) ds.$$

Тоді система (26) має T -періодичний розв'язок $x(t) = x^*(t, \xi^*)$ з початковим значенням $x(0) = x^*(0, \xi^*)$ вигляду (35), де $\xi^* \in D_1$.

У даній роботі обгрунтовано чисельно-аналітичний алгоритм інтегрування періодичних систем диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом. Побудовано рівномірно збіжну послідовність k -параметричних періодичних наближень, встановлено умови збіжності та оцінки похибки. Досліджено зв'язок граничної функції цієї послідовності з точним періодичним розв'язком вихідної системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием — К.: Вища школа, 1979 — 248 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
3. Хейл Дж.К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.
4. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Доп. НАН України. — 1991. — N 9. — С.9—13.
5. Стельмашук Л.В. Періодичні розв'язки диференціальних рівнянь з запізненням: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: НАН України. Ін-т матем. — К., 2004. — 16 с.
6. Король І.І., Перестюк М.О. Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М.Самойленка// Укр. мат. журн. — 2006. — 58, №4. — С.472—488.