ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОНТИНУАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ В РЕЛЯТИВІСТСЬКІЙ СТАТИСТИЧНІЙ МЕХАНІЦІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

М. В. Шльонзак

Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, 79005, Львів
e-mail: marjana@ktf.franko.lviv.ua

Розглянуто рівноважну статистичну систему N релятивістських безспінових частинок з масою m та зарядом e і електромагнітного поля, породженого зарядами. Показано, що після усереднення за польовими змінними можна знайти інтеграл дії системи релятивістських зарядів з прямою взаємодією між ними. Запропоновано певну процедуру перенормування маси частинок. Отримано інтеграл дії для однієї частинки, в якому враховано вплив на неї власного поля.

Вступ

Традиційна схема статистичної механіки ґрунтується на використанні функції Гамільтона. Проте дуже часто трапляються випадки, коли перехід до гамільтонових змінних є нетривіальним. Як приклад можна навести слаборелятивістську систему заряджених частинок, яка описується лаґранжіаном Дарвіна [1]. Цей лаґранжіан, як і інші постньютонівські лаґранжіани (для прикладу можна навести лаґранжіан Айнштайна–Інфельда–Гофмана [2] системи частинок із гравітаційною взаємодією або лаґранжіан Кеннеді [3] системи нейтральних частинок), характеризується складною залежністю від швидкостей частинок. Тому перехід від лаґранжевих змінних до канонічних гамільтонових може бути зроблений лише наближено. Якщо у задачах класичної та квантової механіки для цього можна скористатися методом послідовних наближень (наприклад, за степенями $1/c$, де c — швидкість світла у вакуумі), то у статистичній механіці зробити це важко, оскільки потрібно враховувати термодинамічний граничний перехід.

У працях [4, 5] було розвинуто функціональне формулювання статистичної механіки, у якому всі співвідношення теорії виражаються лише через лаґранжеві змінні, що дає можливість уникнути доволі складного переходу до канонічних змінних. Формалізм ґрунтується на певній модифікації фейнманівського інтегрування за траєкторіями конфігураційного простору. Ми розглянемо тут систему N релятивістських безспінових частинок з масою m та зарядом e, які взаємодіють між собою через електромагнітне поле.

Загальні співвідношення

При застосуванні функціонального формалізму статистичну суму нашої системи можна записати у вигляді

$$\Xi = \int \prod_{\mathbf{k},\tau} d\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau) d\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) \Phi[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau), \varphi_{\mathbf{k}}(\tau)] \int d^{3N} r C^{3N} \int D^{3N} u(\tau) e^{S} \prod_j \delta\left(\hbar \int_0^\beta d\tau \mathbf{u}_j(\tau) \right). \tag{1}$$

Тут $Du(\tau)=\prod_{\tau} du(\tau)$, C — нормуюча постійна, $\delta(\ldots)$ — дельта-функція Дірака. Функціонал S отримується з інтеграла дії системи заміною $it/\hbar \to \beta$ (i — уявна одиниця, t — час, β — обернена температура, $\hbar$ — стала Планка). У нашому випадку він складається з трьох доданків:

$$S = S_{\mathrm{f}} + S_0 + S_{\mathrm{int}}, \tag{2}$$

S_0 описує вільні частинки, S_{f} — вільне поле, S_{int} — взаємодію поля та частинок.

$$S_0 = -\int_0^{\beta} d\tau \sum_j mc^2 \left(1+\frac{u_j^2(\tau)}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$S_{\mathrm{f}} = \int_0^{\beta} d\tau \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2}{8\pi V} \left\{ |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 - |\mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{|\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2}{(\hbar ck)^2} \right\}, \tag{4}$$

$$S_{\mathrm{int}} = \int_0^{\beta} d\tau \sum_j \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathrm{j}}(\tau)} \left\{ i\frac{e}{c}\left(\mathbf{u}_{\mathrm{j}}(\tau)\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)\right) - e\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) \right\} \tag{5}$$

де $\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)$ та $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)$ — фур'є-зображення скалярного та векторного потенціалів електромагнітного поля відповідно; $\mathbf{u}_{\mathrm{j}}(\tau)$ — швидкість частинок; крапкою позначено похідну по τ.

Явний вигляд функціоналу $\Phi[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau),\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)]$ залежить від умов калібрування для $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)$ та $\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)$ [6]. Його можна виключити, якщо замість $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)$ та $\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)$ ввести нові змінні $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ [7] згідно з такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} -i\frac{\sqrt{4\pi V}}{k^2}\left(\mathbf{k}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\right) &= \varphi_{\mathbf{k}}; \\ -\frac{\sqrt{4\pi V}}{k^2}\left[\mathbf{k}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\right] &= \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{6}$$

Підставивши (6) у (4) та (5) і виконавши ряд елементарних перетворень, можна отримати такі вирази для S_{f} і S_{int}:

$$S_{\mathrm{f}} = \int_0^{\beta} d\tau \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \left(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}\right) + \frac{1}{(\hbar ck)^2}\left[\left(\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}}\right) - \frac{\left(\mathbf{k}\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}}\right)\left(\mathbf{k}\dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}}\right)}{k^2} \right] \right\} \tag{7}$$

$$S_{\mathrm{int}} = \int_0^{\beta} d\tau \sum_{\mathbf{k}} \sum_j i\nu_k \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\mathbf{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j(\tau)} \tag{8}$$

Тут використано позначення:

$$\begin{aligned} \nu_k^2 &= \frac{4\pi e^2}{Vk^2}; \\ \mathbf{f}_{\mathbf{k}} &= \frac{\mathbf{k}}{k} + \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\mathbf{u}_{\mathrm{j}}(\tau)\right]; \\ \mathbf{r}_{\mathrm{j}}(\tau) &= \mathbf{r}_{\mathrm{j}} - \hbar\int_{\tau}^{\beta} d\tau'' \mathbf{u}_{\mathrm{j}}(\tau'') \end{aligned} \tag{9}$$

Опісля цього формула (1) набуде вигляду

$$\Xi = B\int \prod_{\mathbf{k},\tau} d\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{S_{\mathrm{f}}} \left[Z_1\left(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\right)\right]^N \tag{10}$$

Тут $Z_1(\mathbf{R}_{\mathbf{k}})$ має характер одночастинкової статистичної суми в зовнішньому полі $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}$:

$$Z_1\left(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\right) = \\ = \int d^3r C^3 \int d^3u(\tau) e^{S_0+S_{\mathrm{int}}} \delta\left(\hbar\int_0^{\beta} d\tau \mathbf{u}(\tau)\right) \tag{12}$$

При відсутності частинок $Z_1(\mathbf{R}_{\mathbf{k}})=1$. Тоді інтеграл по польових змінних $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ у формулі (11) є ґауссівським і, вибравши належним чином постійну нормування B, після інтегрування отримаємо формулу для статистичної суми вільного електромагнітного поля.

$$\Xi = B\int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)e^{S_{\mathrm{f}}} = \\ = \exp\left\{-\beta\sum_{k}\hbar ck - 2\sum_{k}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar ck}\right)\right\} \quad (13)$$

Зауважимо, що записані вище співвідношення для Ξ узгоджуються з результатами польової теорії, у якій частково реалізована процедура перенормування.

Отримані результати

Розглянемо систему з N частинок. При наявності частинок у формулі (11) в показнику експоненти буде доданок, лінійний по $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$. Звичайним перетворенням зсуву знову отримуємо ґауссівський інтеграл і, порахувавши інтеграл по польових змінних, отримаємо такий вираз для статистичної суми Ξ:

$$\Xi = \Xi_f Z_N, \quad (14)$$

де

$$Z_N = B\int d^{3N}rC^{3N}\int D^{3N}u(\tau)e^{S_0}\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right)\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{j,l}\sum_{\mathbf{k}}v_k^2 e^{i\left(\mathbf{kr}_j(\tau)-\mathbf{kr}_l(\tau)\right)}\left[\delta(\tau-\tau')+\frac{1}{c^2}l_{\mu\nu}^{\perp}u_j^{\mu}(\tau)u_l^{\nu}(\tau')D_k(\tau-\tau')\right]\right\}, \quad (15)$$

$$D_k(\tau-\tau') = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{i\omega_n(\tau-\tau')}\left[1+\left(\frac{\omega_n}{\hbar ck}\right)^2\right]^{-1}. \quad (16)$$

$$l_{\mu\nu}^{\perp} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (17)$$

Отримані співвідношення узгоджуються з електродинамікою Уіллера-Фейнмана, у якій взаємодію між частинками описують півсумою запізнюючих і випереджуючих потенціалів.

У цих формулах m є "голою" масою частинки. Щоби провести перенормування маси, будемо виходити з наступного: при $c\to\infty$ $D_k(\tau-\tau')\to\delta(\tau-\tau')$. Тоді, відкинувши члени самодії ($j = l$), отримаємо звичайну дарвінівську формулу. Тому можна очікувати, що в загальному випадку у формулі (15) можна відкинути доданки з $j = l$ при співпадінні "часових" арґументів, але залишити їх при $\tau\neq\tau'$. Це означає, що формулу (15) можна замінити такою:

$$Z_N = B\int d^{3N}rC^{3N}\int D^{3N}u(\tau)e^{S}\delta\left(\hbar\int_0^\beta d\tau u(\tau)\right), \quad (18)$$

де ми ввели позначення:

$$S = S_0 - \frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{j\neq l}\sum_{\mathbf{k}}v_k^2 e^{i\left(\mathbf{kr}_j(\tau)-\mathbf{kr}_l(\tau')\right)}\left[\delta(\tau-\tau')+\frac{1}{c^2}l_{\mu\nu}^{\perp}u_j^{\mu}(\tau)u_l^{\nu}(\tau')D_k(\tau-\tau')\right]- \\ -\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{j}\sum_{\mathbf{k}}v_k^2 e^{i\hbar\int_\tau^{\tau'}d\tau''\mathbf{u}_j(\tau'')\mathbf{k}}\frac{1}{c^2}l_{\mu\nu}^{\perp}u_j^{\mu}(\tau)u_j^{\nu}(\tau')\left(D_k(\tau-\tau')-\delta(\tau-\tau')\right) \quad (19)$$

Зокрема, для однієї частинки, отримуємо інтеграл дії з фізичною масою у вигляді:

$$S=-\int_0^\beta d\tau mc^2\sqrt{1+\frac{u^2(\tau)}{c^2}}-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2 e^{i\hbar\int_\tau^{\tau'}d\tau''\mathbf{u}(\tau'')\mathbf{k}}\frac{1}{c^2}l_{\mu\nu}^{\perp}u_\mu(\tau)u_\nu(\tau')\left[D_k(\tau-\tau')-\delta(\tau-\tau')\right]$$

Другий доданок у цій формулі описує вплив на частинку її власного поля. Як бачимо, він має неадитивний характер, що є відображенням запізнення взаємодії частинки з полем.

Література

1. C. G. Darwin, Phil. Mag. 39, 357 (1920).
2. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, Ann. Math. 39, 65 (1938).
3. F. D. Kennedy, Am. J. Phys. 40, 63 (1972).
4. Л. Ф. Блажиевский, ТМФ. 6, 409 (1986).
5. Л.Ф.Блажиевский, УФЖ. 24, 1737 (1979).
6. В. Н. Попов, Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. (Атомиздат, Москва, 1976).
7. L. F. Blazhyjevskii, Condens. Matter Phys., Iss. 6, 23 (1995).

APPLICATION OF PATH INTEGRAL TECHNIQUES FOR STATISTICAL MECHANICS OF RELATIVISTIC PLASMA

M. Shljonzak

Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics
12 Drahomanov St., 79005, Lviv, Ukraine
e-mail: marjana@ktf.franko.lviv.ua

An equilibrium system of N relativistic spinless particles with charge e and mass m interacting with the electromagnetic field is considered. We show that after averaging over the field variables the action integral of the system of relativistic particles with direct action can be calculated. A certain procedure of renormalization for the particle mass is proposed. The action integral for a single particle with the account of the influence of its own field is obtained.