УДК 517.9

С.І. Балога[1], к.ф.-м.н.
І.І. Король[2], д.ф.-м.н., доцент

Періодичні розв'язки вироджених імпульсних систем

Одержано необхідні і достатні умови існування періодичних розв'язків алгебраїчно-диференціальних систем з імпульсною дією загального вигляду у випадку, коли вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми. Встановлено структуру та побудовано періодичні розв'язки таких систем.

Ключові слова: вироджені системи, диференціально-алгебраїчні системи, імпульсні системи, періодичні розв'язки.

[1] Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: baloga_switlana@e-mail.ua

[2] Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Підгірна, 46,
e-mail: korol_ihor@ukr.net

S.I.Baloga[1], Ph.D.
I.I.Korol[2], Dr.Sci., Associate Professor

Periodical solutions of singular impulsive systems

We obtain a necessary and sufficient conditions of existence of periodical solutions of algebraic-differential systems with impulse effect of general form in case when degenerate system of differential equations can be reduced to central canonical form. We found the structure and constructed periodic solutions of such systems.

Key Words: singular systems, differential-algebraic systems, impulsive systems, periodical solutions.

[1] National University of Uzhhorod, 88000, Uzhhorod, Pidhgirna str., 46,
e-mail: baloga_switlana@e-mail.ua

[2] National University of Uzhhorod, 88000, Uzhhorod, Pidhgirna str., 46
e-mail: korol_ihor@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Постановка задачі

Дослідимо питання існування T-періодичних розв'язків виродженої T-періодичної імпульсної диференціальної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \tau_i, \qquad (1)$$

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \qquad (2)$$

де $rank B(t) = n - r = const$ $\forall t \in \mathbb{R}, r > 0$; вектор-функція $f(t)$ і $(n \times n)$-матриці $A(t)$, $B(t)$ є періодичними по t зі спільним періодом T і достатньо гладкими: $f(t) \in C^k_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $A(t), B(t) \in C^k_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{nxn})$, k – деяке натуральне число; сталі $(m_i \times n)$-матриці M_i, N_i, $1 \leqslant m_i \leqslant n$, сталі вектори α_i і моменти часу $t = \tau_i$ такі, що існує натуральне число p таке, що $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$M_{i+p} = M_i, \quad N_{i+p} = N_i, \quad \alpha_{i+p} = \alpha_i,$$

$$\tau_0 < 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p < T, \ \tau_{i+p} = \tau_i + T.$$

Під T-періодичним розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти [1-5] T-періодичну кусково неперервно диференційовну на $\mathbb{R}\backslash\{\tau_i\}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0+kT, \tau_1+kT], \\ x_i(t), & t \in (\tau_i+kT, \tau_{i+1}+kT], \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1) і імпульсні умови (2). Будемо вважати функції $x_j(t)$ визначеними і неперервними на відповідних замкнених інтервалах $x_j(t) \in C[\tau_j, \tau_{j+1}]$:

$$x_j(\tau_j) = x_j(\tau_j + 0) = \lim_{t \to \tau_j + 0} x_j(t),$$

і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i - 0} x_{i-1}(t).$$

Основний результат

Для дослідження задачі (1), (2) застосуємо підхід запропонований в [7, 8, 9, 10]. Припускаємо, що за допомогою невиродженого лінійного перетворення система (1) може бути зведена до центральної канонічної форми.

Позначимо через $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ фундаментальні $(n\times(n-s))$-вимірні матриці, стовпці яких є розв'язками відповідно однорідної виродженої системи

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x(t), \tag{3}$$

та спряженої до (3) системи

$$\frac{d}{dt}B^{\top}(t)y=-A^{\top}(t)y;$$

c_0 – $(n-s)$-вимірний вектор-стовпчик довільних сталих;

$$R(t)=\left(\Psi^{\top}(t)L(t)\Phi(t)\right)^{-1},$$

$$L(t)=A(t)-B(t)\frac{d}{dt} \text{ – лінійний оператор:}$$

$$L:C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n).$$

Вважаємо, що $rankB(t)=n-q=const\ \forall t\in\mathbb{R}$, матриця $B(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з q ланцюжків завдовжки s_j, $j=\overline{1,q}$, $q=max s_j$. Через $\Phi(t)$ і $\Psi(t)$ позначимо $n\times s$-вимірні матриці, які складаються з векторів, що утворюють жорданові набори відповідно матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і транспонованої матриці $B^{\top}(t)$ відносно оператора $L^{\top}(t)$, де

$$L^{\top}(t)=A^{\top}+\frac{d}{dt}B^{\top}y,$$

$$\Phi(t)=\left[\varphi_1^{(1)}(t),\cdots,\varphi_1^{(s_1)}(t);\varphi_2^{(1)}(t),\cdots,\right.$$

$$\left.\cdots,\varphi_2^{(s_2)}(t);\cdots,\varphi_q^{(1)}(t),\cdots,\varphi_q^{(s_q)}(t)\right],$$

$$\Psi(t)=\left[\psi_1^{(1)}(t),\cdots,\psi_1^{(s_1)}(t);\psi_2^{(1)}(t),\cdots,\right.$$

$$\left.\cdots,\psi_2^{(s_2)}(t);\cdots,\psi_q^{(1)}(t),\cdots,\psi_q^{(s_q)}(t)\right].$$

Тоді загальний розв'язок сингулярної системи (1) на інтервалі $t\in[0,\tau_1]$ має вигляд [7, 8, 9, 10]:

$$x(t,c_0)=x_0(t,c_0)=X_{n-s}(t)c_0+$$

$$+\int_0^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma- \tag{4}$$

$$-\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^{\top}(t)f(t).$$

Після дії імпульсного збурення в точці $t=\tau_1$ продовжимо розв'язок $x(t)=x_0(t,c_0)$ вигляду (4) з інтервалу $t\in[0,\tau_1]$ на $(n-s)$-параметричний розв'язок $x_1(t)$:

$$x_1(t)=x_1(t,c_1)=X_{n-s}(t)c_1+$$

$$+\int_{\tau_1}^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma- \tag{5}$$

$$-\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^{\top}(t)f(t),\ c_1\in\mathbb{R}^{n-s},$$

який визначений на інтервалі $[\tau_1,\tau_2]$. Зв'язок між ними визначається умовою (2) при $i=1$. Беручи до уваги неперервність справа функції $x_1(t)=x_1(t,c_1)$ в точці $t=\tau_1$, можемо записати умову (2) в цій точці наступним чином:

$$M_1x_1(\tau_i)+N_1x_0(\tau_i)=\alpha_1. \tag{6}$$

Підставляючи (4), (5) в (6), одержимо лінійне неоднорідне відносно c_0, c_1 матричне рівняння

$$\widetilde{M_1}c_1+\widetilde{N_1}c_0=\alpha_1+M_1\gamma_1-N_1F_1,$$

де через $\widetilde{M_i}$, $\widetilde{N_i}$ для кожного $i=\overline{1,p}$ будемо позначати $(m_i\times(n-s))$-вимірні матриці вигляду

$$\widetilde{M_i}=M_iX_{n-s}(\tau_i),\quad \widetilde{N_i}=N_iX_{n-s}(\tau_i),$$

а через F_i, γ_i – n-вимірні вектори:

$$\gamma_i=\Phi(\tau_i)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(\tau_i)\Psi^{\top}(\tau_i)f(\tau_i),\ i=\overline{1,p},$$

$$F_0=\int_0^{\tau_i}X_{ns}(\tau_i)Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\gamma_i,$$

$$F_i = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_{n-s}(\tau_i) Y^{\top}_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \gamma_i, \quad i = \overline{2,p}.$$

Оскільки на кожному з інтервалів $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ розв'язок визначається за формулою

$$x(t) = x_i(t, c_i) = X_{n-s}(t) c_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} X_{n-s}(t) Y^{\top}_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^{\top}(t) f(t), \quad c_i \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{7}$$

то аналогічним чином одержимо, що в кожній точці імпульсу $t = \tau_i$ відповідні $(n-s)$-вимірні вектори довільних сталих c_{i-1}, c_i повинні задовольняти рівняння

$$\widetilde{M}_i c_i + \widetilde{N}_i c_{i-1} = \alpha_i + M_i \gamma_i - N_i F_i. \tag{8}$$

Підставляючи розв'язки $x_j(t)$ вигляду (4), (7) у періодичні крайові умови

$$x(0) - x(T) = 0,$$

одержимо:

$$X_{n-s}(0) c_0 - X_{n-s}(T) c_p = \Phi(0) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^{\top}(0) f(0) - \int\limits_{\tau_p}^{T} X_{n-s}(T) Y^{\top}_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \Phi(T) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^{\top}(T) f(T). \tag{9}$$

Об'єднуючи (9) з (8) при всіх $i = \overline{1,p}$, одержимо систему матричних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} X_{n-s}(0) c_0 - X_{n-s}(T) c_p = \\ \quad = \Phi(0) \left(\sum\limits_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^{\top}(0) f(0) + \\ \quad + \int\limits_{\tau_{p-1}}^{T} X_{n-s}(T) Y^{\top}_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ \quad - \Phi(T) \left(\sum\limits_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^{\top}(T) f(T), \\ \widetilde{N}_1 c_0 + \widetilde{M}_1 c_1 = \alpha_1 + M_1 \gamma_1 - N_1 F_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{N}_p c_{p-1} + \widetilde{M}_p c_p = \alpha_p + M_p \gamma_p - N_p F_p, \end{cases}$$

яку можемо записати у вигляді

$$Dc = \beta, \tag{10}$$

де D – $((n+m) \times (p+1)(n-s))$-вимірна матриця, $m = \sum_{i=1}^{p} m_i$, а $c_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^n$, $c_i, \beta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$:

$$D = \begin{pmatrix} X_{n-s}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & -X_{n-s}(T) \\ \widetilde{N}_1 & \widetilde{M}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{N}_2 & \widetilde{M}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widetilde{N}_p & \widetilde{M}_p \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_p \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

$$\beta_0 = \Phi(0) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(0) \right) \Psi^{\top}(0) f(0) + \int\limits_{\tau_{p-1}}^{T} X_{n-s}(T) Y^{\top}_{n-s}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \Phi(T) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(T) \right) \Psi^{\top}(T) f(T),$$

$$\beta_i = \alpha_i + M_i\gamma_i - N_iF_i, \quad i = \overline{1,p}.$$

Згідно [5, 6], необхідною і достатньою умовою сумісності лінійної неоднорідної алгебраїчної системи (10) є умова ортогональності

$$P_{D_v^\top}\beta = 0, \tag{11}$$

і у випадку її виконання розв'язки системи (10) мають вигляд

$$c^\top = c^\top(\xi) = P_{D_u}\xi + D^+\beta, \quad \xi \in \mathbb{R}^u,$$

де D^+ – $((p+1)(n-s) \times (n+m))$- вимірна матриця, яка є єдиною псевдооберненою за Муром-Пенроузом матрицею до матриці D; $c^\top = col(c_0^\top(\xi), \cdots, c_p^\top(\xi)) \in \mathbb{R}^{(p+1)(n-s)}$, а через P_{D_u} позначено $((p+1)(n-s) \times u)$-вимірну матрицю, $u = (p+1)(n-s) - r$, $r = rankD \leqslant min((p+1)(n-s), m)$, яка складається з лінійно незалежних стовпців $((p+1)(n-s) \times (p+1)(n-s))$-вимірної матриці P_D, яка є ортопроектором з простору $R^{(p+1)(n-s)}$ на нуль простір $Ker(D)$ матриці D:

$$P_D : R^{(p+1)(n-s)} \to Ker(D),$$
$$Ker(D) = P_D R^{(p+1)(n-s)},$$

причому стовпці матриці P_{D_u} утворюють повний базис ядра $Ker(D)$. Через $P_{D_v^\top}$ будемо позначати $(v \times (n+m))$-вимірну матрицю, $v = n + m - r$, рядками якої є лінійно незалежні рядки матриці $P_{D^\top}$, яка, в свою чергу, є ортопроектором з простору R^m на нуль простір $Ker(D^\top)$ матриці $D^\top$:

$$P_{D^\top} : R^m \to Ker(D^\top), \qquad Ker(D^\top) = P_{D^\top}R^m,$$

причому рядки матриці $P_{D_v^\top}$ утворюють повний базис ядра матриці $D^\top$.

Таким чином, можемо сформулювати основний результат.

Теорема 1. *Вироджена T-періодична лінійна диференціальна система* (1) *з імпульсною дією* (2) *має T-періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (11). *При цьому T-періодичні розв'язки задачі* (1), (2) *утворюють u-параметричну сім'ю вигляду*

$$x(t) = x(t,\xi) = \begin{cases} x_0(t, c_0^\top(\xi)), & t \in [0, \tau_1], \\ x_i(t, c_i^\top(\xi)), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases} \tag{12}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^u$, $i = \overline{1,p}$, $c_i(\xi) \in \mathbb{R}^{n-s}$,

$$x_i(t,\xi) = X_{n-s}(t)c_i^\top(\xi) + \int_{\tau_i} X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \Phi(t).\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \tfrac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^\top(t)f(t).$$

Список використаних джерел

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Differential equations with impulse action.– Kyiv.: Vyshcha Shkola, 1987. – 288 p. (in Russian).
2. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Scientific, 1995. — 462 p.
3. *Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skrypnyk N.V.* Differential equations with impulse effects: multivalued and discontinuated right hand side.– Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2007. – 428 p. (in Russian).
4. *Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skrypnyk N.V.* Impulsive differential equations with multivalued right hand sides with discontinuities. – De Gruiter studies in mathematics; 40, 2011. – 308 p.
5. *Boichuk A.A., Zhuravlev V.F., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Noetherian Boundary Value Problems.– Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 1995. – 318 p. (in Russian).
6. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.
7. *Samoilenko A.M., Shkil M.II., Yakovets V.P.* Linear systems of dufferential equations with singularities.– Kyiv.: Vyshcha Shkola, 2000. – 294 p. (in Russian).
8. *Korol I.I.* Investigaions of solutions of singular differential systems with impulse action // Scientific Herald of Uzhhorod University. Series: Mathemmatics and Informatics — 2009. – V.18. — P. 73–84. (in Ukrainian).
9. *Korol I.I.* Investigaions of solutions of Noehtherian boundary value problems for impulsive differential systems with singularity// Herald of Kyiv University. Series: Physical and Mathematical Sciences. — 2009. – V3. — P. 71–80. (in Ukrainian).
10. *Korol I.I.* Solving of singular differential systems with singularities in impulsive conditions // Scientific Herald of Uzhhorod University. Series: Mathemmatics and Informatics — 2009. — V.19. — P. 42–52. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 23.11.2012