УДК 517.925

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І. І. Король

Ужгород нац. ун-т
Україна, 88000, Ужгород, вул. Підгірна, 46

A new numerical-analytic algorithm for investigating boundary-value problems for semilinear differential systems is suggested.

Предложен новый численно-аналитический алгоритм исследования краевых задач для полулинейных систем дифференциальных уравнений.

Одним із напрямків теорії звичайних диференціальних рівнянь, який бурхливо розвивається, є теорія крайових задач. Різним її аспектам присвячено велику кількість робіт (див., наприклад, [1–9]). Серед них важливе місце займають питання існування і наближеної побудови розв'язків як лінійних, так і нелінійних крайових задач.

Розглянемо питання існування і наближеної побудови розв'язків систем диференціальних рівнянь із виділеною лінійною частиною

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad x, f \in R^n, \tag{1}$$

підпорядкованих лінійним крайовим умовам

$$\ell x = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $A(t)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця з дійсними компонентами, $A(t) \in C[a,b]$, ℓ — лінійний вектор-функціонал, $\ell : C[a,b] \to R^n$, $\alpha \in R^n$ — сталий вектор.

Згідно з теоремою Ф. Рісса [10], для будь-якого лінійного функціонала ℓ, заданого на просторі неперервних на $[a,b]$ функцій, існує матричнозначна функція $C(t)$ обмеженої варіації така, що лінійний функціонал можемо записати за допомогою інтеграла Рімана – Стільтьєса, а отже, можемо записати крайові умови (2) у вигляді

$$\int_a^b [dC(t)]x(t) = \alpha.$$

Зауваження 1. Будь-яку визначену на $[a,b]$ функцію $C(t)$ з обмеженою варіацією можна подати у вигляді $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, де $C_1(t) \in C[a,b]$, а $C_2(t)$ — стала функція на $[a,b]$, за винятком скінченної або зліченної множини точок, у яких $C_2(t)$ має розриви першого роду. У випадку скінченної множини точок розриву з (1), (2) одержуємо лінійну багатоточкову крайову задачу. При цьому $C_1(t) = 0$, а точками розриву функції $C_2(t)$ є точки, значення розв'язку в яких входить у крайові умови.

Припустимо, що:

A) $\det(F) \neq 0$, де $F = \int_a^b Z(s)\,ds = \int_a^b [dC(t)] \int_a^t \Omega_s^t ds$, $Z(s) = \int_s^b [dC(\tau)]\Omega_s^\tau$, Ω_a^t — матрицант відповідної (1) лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{3}$$

Крім того, нехай при $(t, x) \in [a, b] \times D$, де $D \subset R^n$ — замкнена обмежена область, виконуються умови:

B) вектор-функція $f(t, x)$ неперервна і виконуються оцінки

$$|f(t, x)| \leq M(t), \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leq K(t)\,|x' - x''|, \tag{4}$$

де $M(t)$ і $K(t)$ — відповідно вектор-функція і матриця-функція з невід'ємними інтегровними компонентами, $|f(t, x)| = \operatorname{col}(|f_1(t, x)|, \ldots, |f_n(t, x)|)$ і всі нерівності в роботі розглядаємо покомпонентно;

C) $D_\beta \equiv \{\xi \in R^n | B(x_0(t, \xi), \beta) \subseteq D,\ t \in [a, b]\} \neq \varnothing$,

де

$$x_0(t, \xi) = \Omega_a^t \xi, \quad B(y, \varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \varrho\}, \quad \beta = \beta(\xi) = \max_{t \in [a,b]} (\beta_1(t, \xi) + \beta_2(t)),$$

$$\beta_1(t, \xi) = |\Omega_a^t R(t) F^{-1}(\alpha - G\xi)|, \quad \beta_2(t) = \int_a^b |L(t, s)| M(s) ds,$$

$$G = Z(a) = \ell\Omega_a^\bullet = \int_a^b [dC(t)]\Omega_a^t,$$

$$R(t) = \int_a^t \Omega_s^a ds, \quad L(t, s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_a^t R(t) F^{-1} Z(s), & 0 \leq s \leq t \leq b, \\ -\Omega_a^t R(t) F^{-1} Z(s), & 0 \leq t < s \leq b; \end{cases}$$

D) найбільше власне значення матриці Q менше за одиницю,

$$Q = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |L(t, s)| K(s)\, ds.$$

Розглянемо оператор $\mathcal{Q} : C([a, b], R^n) \to C([a, b], R^n)$, сім'ю відображень $\mathcal{L}_\xi : C([a, b], R^n) \to C([a, b], R^n)$ і вектор-функціонал $\mu : C\,([a, b], R^n) \to R^n$, де $C([a, b], R^n)$ — простір неперервних при $t \in [a, b]$ n-вимірних вектор-функцій, які визначено згідно з формулами

$$(\mathcal{Q}x)(t) = \int_a^b |L(t, s)| K(s) x(s) ds,$$

$$(\mathcal{L}_\xi x)(t) = \Omega_a^t(\xi + R(t)F^{-1}(\alpha - G\xi)) + \int_a^b L(t,s)f(s,x(s))ds,$$

$$\mu(x) = F^{-1}\left(\alpha - G\xi - \int_a^b Z(s)f(s,x(s))ds\right).$$

Лема. *Нехай виконується умова* **A**. *Тоді для того щоб функція* $\varphi(t)$, $\varphi(a) = \xi$ *була розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і достатньо, щоб* $\varphi(t)$ *була розв'язком системи рівнянь*

$$x = \mathcal{L}_\xi x, \tag{5}$$

$$\mu(x) = 0. \tag{6}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\varphi(t)$ є розв'язком системи рівнянь (1). Тоді

$$\varphi(t) = \Omega_a^t\xi + \int_a^t \Omega_s^t f(s,\varphi(s))ds. \tag{7}$$

Підставляючи (7) у крайові умови (2), одержуємо

$$G\xi + \int_a^b Z(s)f(s,\varphi(s))ds = \alpha,$$

тобто $\mu(\varphi) = 0$. З того, що

$$\mathcal{L}_\xi x = \Omega_a^t\xi + \int_a^t \Omega_s^t f(s,x(s))ds + \Omega_a^t R(t)\mu(x), \tag{8}$$

випливає, що $\varphi(t)$ є розв'язком системи рівнянь (5), (6).

Достатність. Нехай $\varphi(t)$ є розв'язком рівняння $x = \mathcal{L}_\xi x$. Підставимо $\varphi(t)$ у крайові умови (2):

$$\alpha - \ell\varphi = \alpha - \int_a^b [dC(t)]\varphi(t) =$$

$$= \alpha - \int_a^b [dC(t)]\Omega_a^t\xi - \int_a^b [dC(t)]\int_a^t \Omega_s^t f(s,\varphi(s)) + \int_a^b [dC(t)]\int_a^t \Omega_s^t ds\,\mu(\varphi) = 0.$$

Отже, $\varphi(t)$ задовольняє крайові умови (2). Крім того, оскільки $\mu(\varphi) = 0$, то з (8) випливає, що $\varphi(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь (1), що завершує доведення леми.

Для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) побудуємо рекурентну послідовність функцій

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \Omega_a^t R(t) F^{-1}(\alpha - G\xi) + \int_a^t \Omega_s^t f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds -$$

$$- \int_a^b \Omega_a^t R(t) F^{-1} Z(s) f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds, \quad x_0(t,\xi) = \Omega_a^t \xi, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

які задовольняють крайові умови (2) при всіх натуральних m.

Зауваження 2. При $A = 0$ маємо $\Omega_a^t = I_n$, де I_n — одинична матриця порядку n, і з (9) одержуємо послідовні наближення чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка для багатоточкової крайової задачі. Зокрема, якщо $\ell x = \sum_{k=1}^{p} A_k x(t_k)$, $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_p = b$, то

$$G = \sum_{k=1}^{p} A_k, \quad F = \sum_{k=1}^{p} A_k t_k,$$

$$x_m(t,\xi) = \xi + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds + tF^{-1}\left(\alpha - G\xi - \sum_{k=1}^{p}\left(A_k \int_a^{t_k} f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds\right)\right),$$

$$x_0(t,\xi) = \xi, \quad m \in \mathbb{N},$$

що відповідає формулі (180) з [11].

Беручи до уваги (4), (9), одержуємо оцінки

$$|(\mathcal{L}_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)| \le |\Omega_a^t R(t) F^{-1}(\alpha - G\xi)| + \int_a^t |L(t,s)| M(s) ds \le \beta, \tag{10}$$

$$|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le |(\mathcal{L}_\xi(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)))(t)| \le$$

$$\le \int_a^t |L(t,s)| |f(s, x_m(s,\xi)) - f(s, x_{m-1}(s,\xi))| ds \le$$

$$\le \int_a^t |L(t,s)| K(s) |x_m(s,\xi) - x_{m-1}(s,\xi)| ds \le (\mathcal{Q}|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)|)(t) \le$$

$$\le (\mathcal{Q}^2 |x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)|)(t) \le \ldots \le (\mathcal{Q}^m |x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|)(t) \le \mathcal{Q}^m \beta, \tag{11}$$

$$|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \leq \sum_{i=0}^{j-1} |x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \left(Q^{m+i} \left| x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi) \right| \right)(t) \leq \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta. \tag{12}$$

З (11) і умови **C** випливає, що $(\mathcal{L}_\xi x)(t) \in D$ при всіх $\xi \in D_\beta$, $t \in [a,b]$, $x \in C([a,b],D)$. Оскільки $\ell\mathcal{L}_\xi x = \alpha$, то оператор $\mathcal{L}_\xi$ відображає підпростір $\mathbb{K}([a,b],\mathbb{R}^n) \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$ неперервних функцій, які задовольняють крайові умови (2), у себе. Крім того, з (11) і умови **D** випливає, що $\mathcal{L}_\xi$ є стискуючим оператором. Згідно з принципом стиснутих відображень, рівняння (5) має в $\mathbb{K}([a,b],D)$ єдиний розв'язок $x^*(t,\xi)$, який при всіх $\xi \in D_\beta \subset \mathbb{R}^n$ є границею послідовності функцій (9): $x^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$. Переходячи в (12) до границі при $j \to \infty$ і враховуючи умову **D**, одержуємо оцінку відхилень послідовних наближень від граничної функції:

$$|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \leq (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \tag{13}$$

Якщо при цьому $\xi = \xi^*$ таке, що $\mu(x^*(\cdot,\xi^*)) = 0$, то згідно з лемою $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2).

Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі (1), (2) справджуються припущення* **A – D**. *Тоді:*

1) при всіх $t \in [a,b]$, $\xi \in D_\beta \subset R^n$ послідовність (9) рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції $x^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$; для збіжності послідовних наближень при всіх натуральних m виконуються оцінки (13);

2) гранична функція $x^*(t,\xi)$ задовольняє крайові умови (2) і при $t = a$ набуває початкового значення $x^*(a,\xi) = \xi$;

3) функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком визначального рівняння $\Delta(\xi) = 0$, де

$$\Delta(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F\mu(x^*(\cdot,\xi)) = \alpha - G\xi - \int\limits_a^b Z(s) f(s, x^*(s,\xi))\, ds.$$

Таким чином, для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) потрібно спочатку знайти члени $x_m(t,\xi)$ послідовності (9), де $\xi \in R^n$ — довільний параметр, та граничну функцію $x^*(t,\xi)$. Після цього слід знайти значення $\xi = \xi^*$ таке, що $\Delta(\xi^*) = 0$. В результаті одержимо функцію $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, яка є шуканим розв'язком задачі (1), (2). Проте при практичному знаходженні розв'язку важливо вміти робити висновки про існування розв'язків крайової задачі на підставі аналізу властивостей самих тільки послідовних наближень $x_m(t,\xi)$, без знаходження їх граничної функції.

Зауваження 3. Запропонований алгоритм можна застосувати до дослідження крайових задач як у резонансному випадку (коли $\det(G) = 0$ і відповідна лінійна однорідна крайова задача має нетривіальні розв'язки), так і в нерезонансному.

Наступне твердження містить достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай для крайової задачі (1), (2) справджуються припущення* **A – D** *і, крім того:*

1) існує опукла замкнена область $D' \subsetneq D_\beta \subset R^n$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *відображення* $\Delta_m(\xi) : D_\beta \to R^n$:

$$\Delta_m(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F\mu(x_m(\cdot,\xi)) = \alpha - G\xi - \int\limits_a^b Z(s) f(s, x_m(s,\xi))\, ds$$

містить в області D' *єдину особливу точку* ξ_{0m} *ненульового індексу;*

2) на границі $\partial D'$ *області* D' *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi \in \partial D'} |\Delta_m(\xi)| > Q_1 (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta, \tag{14}$$

де $Q_1 = \int_a^b |Z(s)| K(s) ds.$

Тоді існує розв'язок $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $x^*(a) = \xi^*$ *крайової задачі (1), (2), де* $\xi^* \in D'$.

Доведення. З (13) і умови Ліпшиця (4) маємо оцінку

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| = \left| \int\limits_a^b Z(s)(f(s, x^*(s,\xi)) - f(s, x_m(s,\xi)))ds \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |Z(s)| K(s) |x^*(s,\xi) - x_m(s,\xi)| ds \leq Q_1 (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \tag{15}$$

З'єднаємо поля $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$ за допомогою сім'ї $\Delta(\theta,\xi)$ неперервних на $\partial D'$ векторних полів:

$$\Delta(\theta,\xi) = \Delta_m(\xi) + \theta(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \Delta(0,\xi) = \Delta_m(\xi), \quad \Delta(1,\xi) = \Delta(\xi).$$

Припустимо, що існує $\theta_0 \in [0,1]$ таке, що $\Delta(\theta_0, \xi) = 0$. Тоді

$$\Delta_m(\xi) = -\theta_0(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)), \tag{16}$$

і, беручи до уваги (15), одержуємо оцінку

$$|\Delta_m(\xi)| \leq |\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \leq Q_1 (E_n - Q)^{-1} Q^m \beta,$$

яка суперечить умові (14). Отже, при $\theta \in [0,1]$, $\xi \in \partial D'$ сім'я полів $\Delta(\theta,\xi)$ є невиродженою, а тому векторні поля $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$ гомотопні. Це означає, що в D' існує точка ξ^*, яка є розв'язком рівняння $\Delta(\xi) = 0$.

Теорему доведено.

Зауваження 4. Відмінністю запропонованого в даній роботі методу від інших модифікацій чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка є те, що на величину лінійної частини системи (1) не накладається жодних обмежень. Всі обмеження методу стосуються нелінійної складової $f(t,x)$ та крайових умов, що суттєво розширює клас задач, які можуть бути досліджені.

Зауваження 5. При практичному знаходженні наближених розв'язків виникає питання побудови матриціанта лінійної неавтономної однорідної диференціальної системи (3). Проте, його завжди можна явно записати, якщо матриця $A(t)$ є сталою, або задовольняє умову Лаппо – Данилевського. Крім того, даний метод можна застосувати до дослідження достатньо широкого класу задач у випадку, коли $A(t) = A + B(t)$, де A — деяка стала матриця, $B(t)$ — достатньо мала матриця-функція. Нарешті, матриціант також може бути знайдений чисельно [12, 13].

Приклад. Для ілюстрації алгоритму розглянемо рівняння типу Дуффінга

$$x'' + x - \frac{1}{4}\,x^2\sin(t) + \frac{1}{4}\,xx'\sin(t) = \frac{1}{400}\,e^{4t}\sin(t) + \frac{1}{2}\,e^{2t},$$

підпорядковане двоточковим крайовим умовам

$$-2x(0) - 4x'(0) + \sqrt{2}x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{10}e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$-\frac{3}{2}x(0) - \frac{1}{2}x'(0) + \sqrt{2}\,x\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Використавши заміну $x_1 = x$, $x_2 = \dfrac{dx}{dt}$, можемо записати цю задачу у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + \frac{1}{4}\,x_1^2\,\sin(t) - \frac{1}{4}\,x_1\,x_2\,\sin(t) + \frac{1}{400}\,e^{4t}\,\sin(t) + \frac{1}{2}\,e^{2t}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{\sqrt{2}\,e^{\pi/2}}{10} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Крайову задачу (17), (18) будемо розглядати в області

$$(t,x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times D, \quad D = \left\{ x = (x_1, x_2) : \ |x_1| \le \frac{6}{5},\ |x_2| \le 2 \right\}.$$

Зауважимо, що відповідна (17), (18) лінійна однорідна крайова задача

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

має нетривіальні розв'язки, які утворюють однопараметричну сім'ю:

$$x(t) = ((-3\cos(t) + \sin(t))c, (3\sin(t) + \cos(t))c),$$

тобто має місце критичний випадок. В результаті розрахунків одержуємо

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}-3}{2} \end{pmatrix}, \quad M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{24\sin(t)}{25} + \frac{e^{4t}\sin(t)}{400} + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix},$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{11\sin(t)}{10} & \frac{3\sin(t)}{10} \end{pmatrix}, \quad \beta = \beta(\xi) = \max_{t\in[a,b]} (\beta_1(t,\xi) + \beta_2(t)),$$

$$\beta_1(t,\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t,\xi) \\ \beta_{12}(t,\xi) \end{pmatrix}, \quad \max_{t\in[0,\frac{\pi}{4}]} \beta_2(t) = \begin{pmatrix} 0,062473987 \\ 0,653282272 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{11}(t,\xi) = \left|\frac{(-10+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}} + 10\xi_1 + 30\xi_2)((2\sqrt{2}-3)\sin(t) + (\sqrt{2}+1)\cos(t) - 1 - \sqrt{2})}{40-20\sqrt{2}}\right| + \\ + \left|\frac{(\sqrt{2}-1)\sin(t) + \cos(t) - 1}{8-4\sqrt{2}}\right|,$$

$$\beta_{12}(t,\xi) = \left|\frac{(-10+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}} + 10\xi_1 + 30\xi_2)((2\sqrt{2}-3)\cos(t) - (\sqrt{2}+1)\sin(t) + 3 - 2\sqrt{2})}{40-20\sqrt{2}}\right| + \\ + \left|\frac{\sin(t) + (1-\sqrt{2})\cos(t) - 1 + \sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}\right|.$$

Безпосередньою перевіркою можемо переконатися, що $D_\beta \supset D_1$, $D_\beta \supset D_2$, де $D_1 = [0,09;\ 0,28] \times [-0,12;\ 0,23]$, $D_2 = [-0,4;\ -0,32] \times [0,3;\ 0,36]$, тобто умова **C** виконується. Крім того, оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3889087298 & 0,3068142473 \\ 0,1060660172 & 0,08367661288 \end{pmatrix}$$

найбільшим її власним значенням є $\lambda_{\max}(Q) = 0,4725853423$, то крайова задача (17), (18) у вказаній області задовольняє умови $\mathbf{A} - \mathbf{D}$.

Наближені розв'язки будемо шукати за формулою (9), де

$$\Omega_a^t = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad x_0(t,\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos(t) + \xi_2 \sin(t) \\ -\xi_1 \sin(t) + \xi_2 \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) - 1 \\ 1 - \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ \frac{3}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) & \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{3}{2}\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, x_m(t,\xi)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}x_{m1}^2(t,\xi)\sin(t) - \frac{1}{4}x_{m1}(t,\xi)\,x_{m2}(t,\xi)\sin(t) + \frac{1}{400}e^{4t}\sin(t) + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Початкові значення $\xi = \xi_{m-1} = (\xi_{m-1,1}, \xi_{m-1,2})$, $m \in \mathbb{N}$, наближеного розв'язку $x_m(t) = x_m(t, \xi_{m-1})$ на кожному кроці побудови послідовних наближень знаходимо як корені $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \xi_{m-1}$ визначального рівняння

$$\Delta_{m-1}(\xi) = 0, \tag{19}$$

де

$$\Delta_m(\xi) = (\Delta_{m1}(\xi), \Delta_{m2}(\xi)),$$

$$\Delta_{m1}(\xi) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{10}e^{\frac{\pi}{4}} + \xi_1 + 3\xi_2 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(s) - \sin(s)) \left(\frac{1}{4}x_{m1}^2(s,\ \xi)\sin(s) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}x_{m1}(s,\ \xi)x_{m2}(s,\ \xi)\sin(s) + \frac{1}{400}e^{4s}\sin(s) + \frac{1}{2}e^{2s} \right) ds,$$

$$\Delta_{m2}(\xi) = -\frac{1}{4} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos(s) - \frac{3}{2}\sin(s) \right) \left(\frac{1}{4}x_{m1}^2(s,\ \xi)\sin(s) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}x_{m1}(s,\ \xi)x_{m2}(s,\ \xi)\sin(s) + \frac{1}{400}e^{4s}\sin(s) + \frac{1}{2}e^{2s} \right) ds.$$

При $m=1$ рівняння (19) не має дійсних розв'язків, а при $m=2$ має два розв'язки:

$$\breve{\xi}_1 = (\breve{\xi}_{1,1}, \breve{\xi}_{1,2}) = (0,09730310773;\ 0,2009014753),$$

$$\bar{\xi}_1 = (\bar{\xi}_{1,1}, \bar{\xi}_{1,2}) = (-0,3345358573;\ 0,3461115090).$$

Підставивши їх у (9), одержимо при $m=1$ два перших наближення: $\breve{x}_1(t) = x_1(t,\breve{\xi}_1) = (\breve{x}_{11}(t), \breve{x}_{12}(t)) = (x_{11}(t,\breve{\xi}_1), x_{12}(t,\breve{\xi}_1))$ і $\bar{x}_1(t) = x_1(t,\bar{\xi}_1) = (\bar{x}_{11}(t), \bar{x}_{12}(t)) = (x_{11}(t,\bar{\xi}_1), x_{12}(t,\bar{\xi}_1))$, а при $m=2$ — відповідно два других наближення: $\breve{x}_2(t) = x_2(t,\breve{\xi}_1) = (\breve{x}_{21}(t), \breve{x}_{22}(t)) = (x_{21}(t,\breve{\xi}_1), x_{22}(t,\breve{\xi}_1))$ і $\bar{x}_2(t) = x_2(t,\bar{\xi}_1) = (\bar{x}_{21}(t), \bar{x}_{22}(t)) = (x_{21}(t,\bar{\xi}_1), x_{22}(t,\bar{\xi}_1))$.

Наближене визначальне рівняння $\Delta_2(\xi) = 0$ також має два розв'язки:

$$\breve{\xi}_2 = (\breve{\xi}_{21}, \breve{\xi}_{22}) = (0,1000716330;\ 0,1999762023),$$

$$\bar{\xi}_2 = (\bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}) = (-0,3353716152;\ 0,3464003743).$$

Зауважимо, що $\breve{\xi}_1, \breve{\xi}_2 \in D_1$, $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \in D_2$. Обчислюючи значення функцій (9) при $m=3$ і підставляючи в них значення $\breve{\xi}_2$ і $\bar{\xi}_2$, отримуємо відповідні їм треті наближення: $\breve{x}_3(t) = (\breve{x}_{31}(t), \breve{x}_{32}(t)) = (x_{31}(t,\breve{\xi}), x_{32}(t,\breve{\xi}))$ і $\bar{x}_3(t) = (\bar{x}_{31}(t), \bar{x}_{32}(t)) = (x_{31}(t,\bar{\xi}), x_{32}(t,\bar{\xi}))$ до розв'язку крайової задачі (17), (18).

Зауважимо, що $\breve{x}_1(t)$, $\breve{x}_2(t)$, $\breve{x}_3(t)$ є послідовними наближеннями до точного розв'язку $x^*(t) = \left(\dfrac{e^{2t}}{10}, \dfrac{e^{2t}}{5}\right)$ задачі (17), (18), а їх похибки складають:

$$|\breve{x}_{1,1}(t) - x_1^*(t)| \leq 2,7\cdot 10^{-3}, \quad |\breve{x}_{1,2}(t) - x_2^*(t)| \leq 2,6\cdot 10^{-3},$$

$$|\breve{x}_{2,1}(t) - x_1^*(t)| \leq 2,7\cdot 10^{-3}, \quad |\breve{x}_{2,2}(t) - x_2^*(t)| \leq 2,6\cdot 10^{-3},$$

$$|\breve{x}_{3,1}(t) - x_1^*(t)| \leq 1,8\cdot 10^{-5}, \quad |\breve{x}_{3,2}(t) - x_2^*(t)| \leq 1,7\cdot 10^{-5}.$$

Якщо ж підставити у систему (17) наближення $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$, $\bar{x}_3(t)$, то одержимо, що відхил для $\bar{x}_{11}(t)$, $\bar{x}_{21}(t)$, $\bar{x}_{31}(t)$ не перевищує відповідно $2,7\cdot 10^{-3}$, $8,1\cdot 10^{-5}$, $1,9\cdot 10^{-6}$, а для $\bar{x}_{12}(t)$, $\bar{x}_{22}(t)$, $\bar{x}_{32}(t)$ менший відповідно за $4,6\cdot 10^{-2}$, $9,1\cdot 10^{-5}$ і $1,6\cdot 10^{-5}$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 320 p.
5. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач // Тр. Ин-та математики НАН Украины. — 1999. — **29.** — 220 с.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
7. *Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. — Praha: Academia, 1979. — 248 p.

8. *Король І. І.* Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 4. — С. 483–495.

9. *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка // Там же. — 2006. — **58**, № 4. — С. 472–489.

10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пос. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.

11. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 7. — С. 960–971.

12. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.

13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Одержано 15.03.07,
після доопрацювання — 22.12.08