МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

В.В. Рубіш

ПОДВІЙНІ ТА ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

УЖГОРОД–2020

Рубіш В.В. Подвійні та потрійні інтеграли. Їх обчислення та застосування: навчально-методичний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. – 41 с.

Посібник створено для студентів фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ» спеціальностей 125 «Кібербезпека» та 172 «Телекомунікації та радіотехніка». Він містить короткі теоретичні відомості, приклади розв'язаних завдань та вправи для самостійної роботи по темі «Подвійні та потрійні інтеграли», яка є традиційною для курсу «Вища математика».

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерних спеціальностей університетів.

Розробник:

Рубіш Василь Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Рекомендовано до друку методичною комісією фізичного факультету (протокол № 6 від 18 лютого 2020 року)

ЗМІСТ

1 ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Означення подвійного інтеграла та умови його існування

Нехай в обмеженій і замкненій області D на координатній площині Oxy задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область D довільним чином на n частин $D_1\, D_2, \dots, D_n$, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких відповідно рівні $\triangle S_1$, $\triangle S_2, \dots, \triangle S_n$. Діаметром $d(D_i)$ області D_i $(i = 1, \dots, n)$ назвемо довжину найбільшої з хорд, що з'єднує довільні дві точки її межі. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей D_i: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i)$.

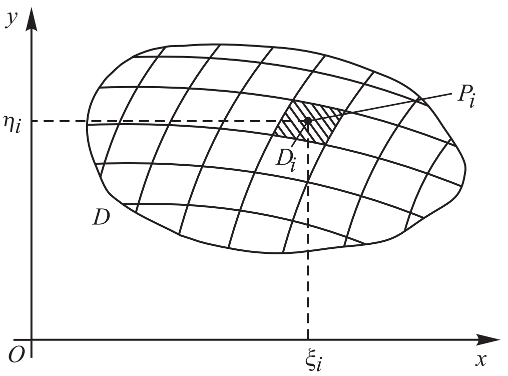


Рис. 1.1. Розбиття області інтегрування D на частини D_i

У кожній з областей D_i (усередині чи на її межі) виберемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ (див. рис. 1.1) і помножимо значення функції $z = f(P) = f(\xi, \eta)$ в точці P_i на $\triangle S_i$: $f(P_i)\triangle S_i = f(\xi_i, \eta_i)\triangle S_i$. Далі із всіх таких добутків складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\triangle S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle S_i, \qquad (1.1)$$

яка називається **інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ в області D.**

Означення 1.1. *Якщо інтегральна сума* (1.1) *при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається* ***подвійним інтегралом від функції*** $f(x, y)$ ***по області*** D *і позначається:*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle S_i, \qquad (1.2)$$

де $f(x, y)$ називається ***підінтегральною функцією****, D –* ***областю інтегрування****, а dS –* ***диференціалом площі****.*

У прямокутній системі координат диференціал площі dS дорівнює: $dS = dxdy$; тоді подвійний інтеграл можна записати у вигляді

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Теорема 1.1 (про існування подвійного інтеграла)**.** *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує подвійний інтеграл*

$\iint\limits_D f(x,y)\,dS$, *тобто існує границя (1.2) інтегральної суми (1.1), яка не залежить ні від розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок P_i в них.*

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Подібно до того, як звичайний інтеграл від невід'ємної функції однієї змінної $f(x)$ визначає площу фігури, обмеженої зверху її графіком, так подвійний інтеграл від невід'ємної функції $f(x,y) \geqslant 0$ по області D дорівнює об'єму циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x,y)$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy. \tag{1.3}$$

Якщо у формулі (1.3) покласти $f(x,y) \equiv 1$, $\forall (x,y) \in D$, то одержимо формулу для обчислення площі S замкнутої і обмеженої області D:

$$S = \iint\limits_D dxdy. \tag{1.4}$$

1.2 Властивості подвійних інтегралів

Сформулюємо основні властивості подвійних інтегралів.

1. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_D C\,f(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy, \quad C = \text{const}. \tag{1.5}$$

2. Якщо в області D функції $f(x,y)$, $g(x,y)$ інтегровні, то інтегровними є і функції $f(x,y) \pm g(x,y)$, причому

$$\iint\limits_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy. \tag{1.6}$$

3. Якщо для інтегровних в D функцій виконується нерівність $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy. \tag{1.7}$$

4. Якщо $f(x, y)$ інтегровна в D, то інтегровною є і $|f(x, y)|$, причому

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy. \tag{1.8}$$

5. (Адитивність подвійного інтеграла.) Якщо область D, в якій задана функція $f(x, y)$, поділена на дві підобласті D_1, D_2, що не мають спільних внутрішніх точок, то з інтегровності функції $f(x, y)$ у всій області випливає її інтегрованість у підобластях, і навпаки – з інтегровності функцій у підобластях D_1, D_2 випливає інтегровність у D. Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy. \tag{1.9}$$

   Ця властивість справедлива для довільного скінченого числа областей, що складають область D і не мають спільний внутрішніх точок.

6. (Оцінка подвійного інтеграла.) Нехай m і M – найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D, S – площа цієї області. Тоді

$$m\,S \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leqslant M\,S. \tag{1.10}$$

Теорема 1.2 (про середнє значення функції). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує точка $P(x_0, y_0)$, що*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(P)\,S.$$

Величину

$$f(P) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \tag{1.11}$$

називають ***середній значенням функції*** *$f(x, y)$ в області D.*

1.3 Обчислення подвійного інтеграла

При обчисленні подвійного інтеграла спочатку треба з'ясувати в напрямку якої координатної осі область D є правильною.

Означення 1.2. *Область D називається* ***правильною*** *в напрямі осі Oy (осі Ox), якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy (осі Ox), перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.*

Розглянемо типові випадки.

1. Область інтегрування D обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, а з знизу і зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x))$, кожна з яких перетинається з прямою $x = X = \mathrm{const}$ $(a < X < b)$ лише один раз. Визначена таким чином область D є правильною вздовж осі Oy (див. рис. 1.2 (а)), коротко будемо її позначати так: $D = \{\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$. Тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1.12}$$

Праву частину формули (1.12) називають **повторним інтегралом** від функції $f(x,y)$ по області D. Інтеграл за змінною y називають **внутрішнім**, а за змінною x – **зовнішнім**.

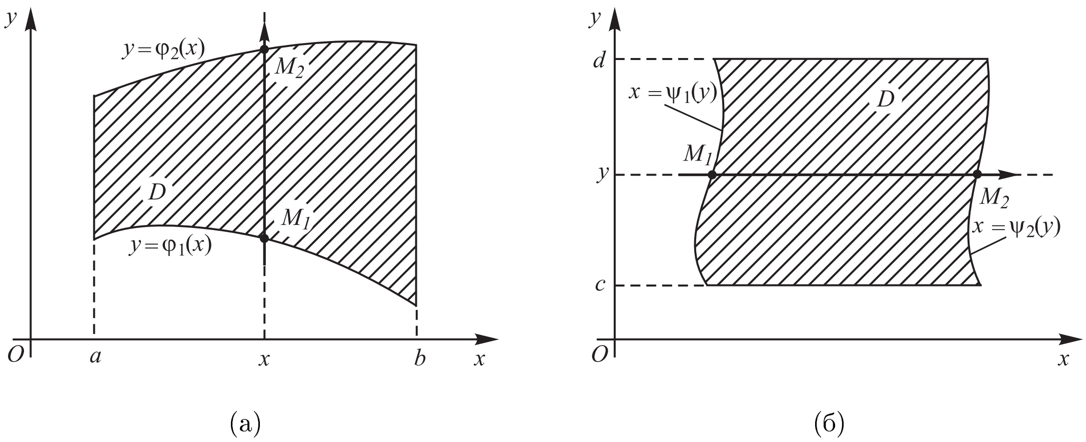


Рис. 1.2. (а) Область D правильна в напрямку осі Oy; (б) область D правильна в напрямку осі Ox. M_1 – точка входу, M_2 – точка виходу з області

Для обчислення повторного інтеграла потрібно спочатку обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, вважаючи x сталою. Нижньою межею інтегрування є ордината точки входу M_1: $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$, а верхньою межею інтегрування є ордината точки виходу M_2: $y_{\text{вих}} = \varphi_2(x)$, які відповідають даному фіксованому значенню x. Результат обчислення цього інтеграла буде функцією тільки від x. Інтегруючи тепер цю функцію в межах від a до b, одержимо значення подвійного інтеграла.

2. Якщо область D визначена нерівностями $c \leqslant y \leqslant d$, $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$ (визначена таким чином область є правильною вздовж осі Ox (див. рис. 1.2 (б)), позначатимемо її $D = \{\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$), причому кожна із неперервних кривих $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ перетинаються з

горизонталлю $y = Y = \text{const}$ $(c < Y < d)$ тільки в одній точці, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx, \qquad (1.13)$$

де при обчисленні інтегралу $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ величину y вважають сталою.

Зауваження 1. Якщо область D не є правильною ні в напрямку Ox, ні в напрямку Oy, то її розбивають на кілька правильних областей D_1, $D_2, \ldots D_n$, обчислюють подвійні інтеграли по кожній з цих областей або за формулою (1.12) або (1.13), а потім на основі властивості адитивності подвійного інтеграла підсумовують результати.

Зауваження 2. Якщо область інтегрування D є правильною як в напрямку осі Oy, так і Ox, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (1.12), так і за формулою (1.12). Результат буде однаковим.

Зауваження 3. Якщо область D – прямокутник із сторонами, паралельними координатним осям, обмежений прямими $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ (див. рис. 1.3 (а)), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \qquad (1.14)$$

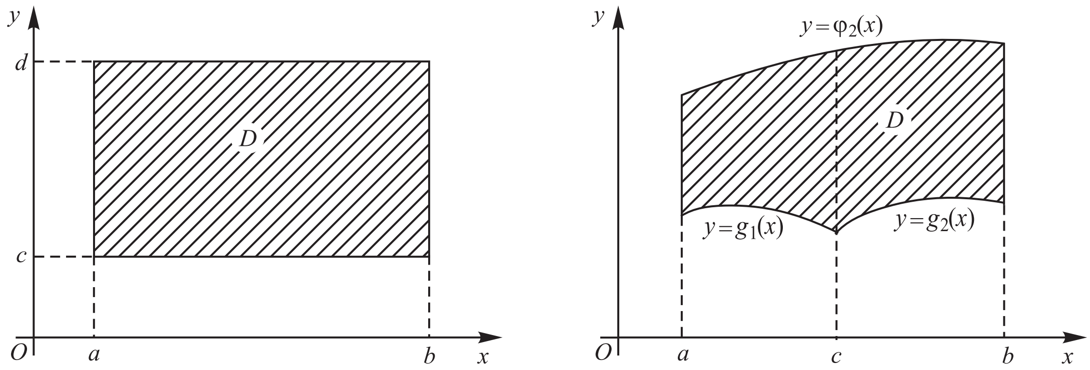
крім того, якщо підінтегральна функція має вигляд $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то подвійний інтеграл може бути зведений до вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f_1(x) \cdot f_2(y)\,dy = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \int\limits_c^d f_2(y)\,dy. \qquad (1.15)$$

Зауваження 4. Під час обчислення подвійного інтеграла (1.12) може статися так, що хоча б одна з функцій $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ не може бути задана одним аналітичним виразом на усьому інтервалі $x \in [a,b]$. (Кажуть, що область не є простою в напрямку осі Oy). Нехай, наприклад,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [a,c], \\ g_2(x), & x \in [c,b], \end{cases}$$

де $g_1(x)$, $g_2(x)$ – інтегровні на відповідних відрізках функції; c – точка спряження (див. рис. 1.3 (б)). Тоді прямою $x = c$, що проходить через точку спряження, область D може бути поділена на дві прості в напрямку Oy підобласті D_1 та D_2, причому $D_1 = \{g_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant c\}$, а



(а) (б)

Рис. 1.3. (а)) Область інтегрування – прямокутник; (б)) – область, що не є простою в напрямку Oy

$D_2 = \{g_2(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ c \leqslant x \leqslant b\}$. Тоді згідно з властивістю адитивності подвійного інтеграла матимемо

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{a}^{c} dx \int\limits_{g_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_{c}^{b} dx \int\limits_{g_2(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (1.16)$$

Алгоритм знаходження подвійного інтеграла.

1. Зображуємо криві, що обмежують область D, та заштрихуємо її.

2. Аналізуємо вигляд області D та вибираємо оптимальну послідовність інтегрування. Якщо область D проста у напрямку осі Oy, то внутрішній інтеграл беремо за змінною y, а зовнішній – за x, і навпаки – якщо область D проста у напрямку осі Ox, то внутрішнє інтегрування слід виконувати за змінною x, а зовнішнє – за y. Якщо область інтегрування не є простою в жодному напрямку, то її ділять на декілька простих в одному напрямку підобластей.

3. Встановлюємо межі інтегрування: спочатку для зовнішнього інтеграла, потім – для внутрішнього. Якщо зовнішнє інтегрування виконується за змінною x (див. рис. 1.2 а), то область проектують на вісь Ox, отримуючи деякий відрізок $[a,b]$, кінці якого a та b є відповідно нижньою та верхньою межами зовнішнього інтеграла (межі зовнішнього інтеграла завжди сталі). Для знаходження меж внутрішнього інтеграла за змінною y визначаємо $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ з рівняння ліній,

що обмежують область знизу та зверху. Аналогічно знаходимо інтеграл, якщо зовнішнє інтегрування здійснюється за змінною y (область проста в напрямку Ox, рис. 1.2 б). Тоді область проектуємо на вісь Oy і одержуємо межі зовнішнього інтеграла; щоб знайти межі внутрішнього інтеграла за змінною x виражають $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_1(y)$ з рівняння ліній, що обмежують область D ліворуч і праворуч.

4. Знаходимо повторний інтеграл. Спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона–Лейбніца (змінну зовнішнього інтеграла вважаємо сталою), а далі одержаний вираз інтегруємо за зовнішньою змінною.

Приклад 1.1. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$*, якщо областю інтегрування* D *є трикутник, обмежений прямими* $y=0$*,* $x=2$*,* $y=\dfrac{x}{2}$ *(див. рис. 1.4).*

Розв'язок

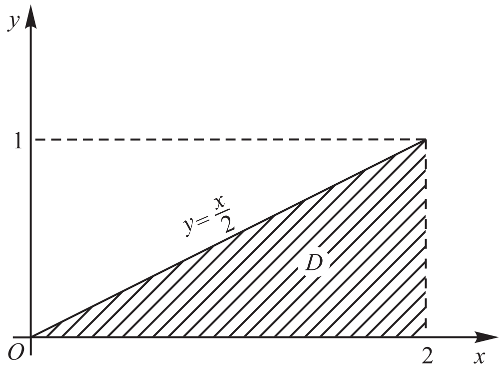


Рис. 1.4

Якщо для обчислення подвійного інтеграла скористатися формулою (1.12)*, то тут* $y_{вх} = \varphi_1(x) = 0$*,* $y_{вих} = \varphi_2(x) = \dfrac{x}{2}$ $\Big($*оскільки точка входу лежить на осі* Ox*, а точка виходу – на прямій* $y = \dfrac{x}{2}\Big)$*;* $a = 0$*,* $b = 2$*.*

Тому, застосовуючи формулу (1.12)*, маємо*

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} (x^2+y^2)\,dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл, в якому вважаємо x *сталою:*

$$\int\limits_0^{\frac{x}{2}} (x^2+y^2)\,dy = \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{x}{2}} = x^2\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{13}{24}\,x^3.$$

Відповідно,

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^2 \frac{13}{24}\,x^3dx = \frac{13}{24}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{13}{6}.$$

Використаємо тепер для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$ *формулу* (1.13). *Враховуючи, що в цьому випадку* $x_{вх} = \psi_1(y) = 2y$, $x_{вих} = \psi_2(y) = 2$ *(оскільки точка входу лежить на прямій* $y = \dfrac{x}{2}$ *або* $x = 2y$*, а точка виходу на прямій* $x = 2$*),* $c = 0$*,* $d = 1$ *(*d *– це ордината точки перетину прямих* $y = \dfrac{x}{2}$*,* $x = 2$*, див. рис. 1.4), одержимо*

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2y}^2 (x^2+y^2)\,dx.$$

Так як

$$\int\limits_{2y}^2 (x^2+y^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_{2y}^2 = \left(\frac{8}{3}+2y^2\right)-\left(\frac{8y^3}{3}+2y^3\right) =$$

$$= \frac{8}{3}+2y^2-\frac{14}{3}y^3,$$

то

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{14}{3}y^3\right)dy = \left(\frac{8y}{3}+\frac{2y^3}{3}-\frac{7y^4}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Якщо взяти до уваги геометричний зміст подвійного інтеграла, то $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$ *дає об'єм* V *циліндричного тіла, обмеженого зверху частиною параболоїда обертання* $z = x^2 + y^2$*, яка проектується на площину* Oxy *в трикутник* D*.*

Приклад 1.2. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D xy\,dxdy$*, якщо область інтегрування* D *обмежена віссю* Ox *і верхнім півкругом* $(x-2)^2+y^2 = 1$ *(див. рис. 1.5).*

Розв'язок

Запишемо рівняння ліній, які обмежують область інтегрування: $y = 0$ *– рівняння осі* Ox*, а* $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$ *– рівняння верхньої частини круга*

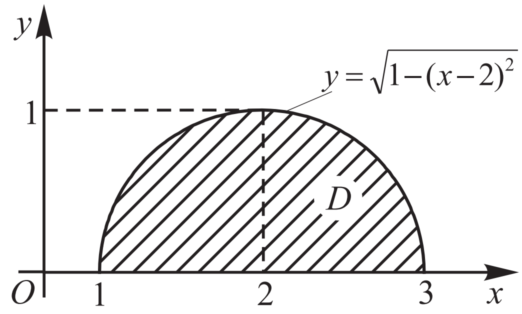


Рис. 1.5

(з центром в точці $(2,0)$ *і радіусом 1). Хоча область D є правильною в напрямку обох координатних осей, але в даному випадку зручніше вважати її правильною вздовж осі Oy ($D = \{0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-(x-2)^2},\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$). Тому для обчислення подвійного інтеграла скористаємось формулою* (1.12), *де $y_{вх} = \varphi_1(x) = 0$, $y_{вих} = \varphi_2(x) = \sqrt{1-(x-2)^2}$, $a = 1$, $b = 3$. Тоді*

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл, в якому вважаємо x сталою:

$$\int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = x\,\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \frac{x(1-(x-2)^2)}{2} = \frac{-x^3+4x^2-3x}{2}.$$

Відповідно,

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_1^3(-x^3+4x^2-3x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\bigg|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 1.3. *Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, якщо область інтегрування D обмежена лініями $x = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x^2$ (рис. 1.6).*

Розв'язок.

Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують область D:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0,\\ y = \sqrt{x} &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow O(0,0), \qquad \left.\begin{aligned} x &= 0,\\ y = 2-x^2 &= 2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(0,2),$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{x},\\ y &= 2-x^2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2-x^2-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow A(1,1).$$

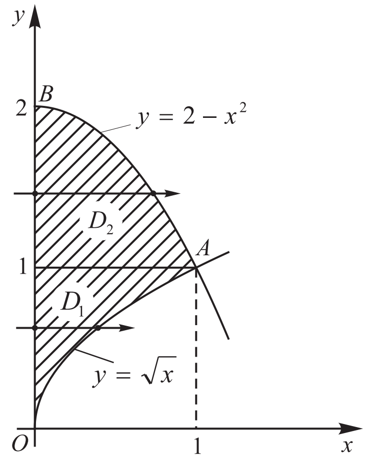


Рис. 1.6

Для обчислення подвійного інтеграла застосуємо формулу (1.12). *Тут* $y_{вх} = \varphi_1(x) = \sqrt{x}$, $y_{вих} = \varphi_2(x) = 2 - x^2$, $a = 0$, $b = 1$. *Тому*

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x^2} (x+y)\,dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл, в якому вважаємо x сталою:

$$\int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x^2} (x+y)\,dy = x\cdot y\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x^2} = 2 + \frac{3}{2}x - x^{3/2} - 2x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4.$$

Отже,

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(2 + \frac{3}{2}x - x^{3/2} - 2x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) dx =$$
$$= \left(2x + \frac{3x^2}{4} - \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 =$$
$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{23}{15}.$$

Якщо при обчисленні подвійного інтеграла $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$ *скористатися формулою* (1.13), *то доведеться область інтегрування D розбити на дві частини D_1 і D_2 (див. рис. 1.6), оскільки лінія OAB, на якій розташовані точки виходу на окремих ділянках, задається різними рівняннями (див. зауваження 4). Згідно властивості адитивності подвійного інтеграла*

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+y)\,dxdy.$$

Застосовуємо формулу (1.13) до кожного з інтегралів, що стоять в правій частині останньої рівності:

$$\iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} (x+y)\,dx,$$

тому що, $x_{вх} = \psi_1(y) = 0$, $x_{вих} = \psi_2(y) = y^2$, $c = 0$, $d = 1$. *Обчислимо внутрішній інтеграл, пам'ятаючи, що y – стала:*

$$\int\limits_0^{y^2} (x+y)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + y\,x\right)\Bigg|_0^{y^2} = \frac{y^4}{4} + y^3.$$

Тоді

$$\iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\frac{y^4}{4} + y^3\right) dy = \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{20}.$$

Аналогічно знаходимо

$\iint\limits_{D_2} (x+y)\,dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} (x+y)\,dx$, *тому що,* $x_{вх} = 0$, $x_{вих} = \sqrt{2-y}$, $c = 1$, $d = 2$.

$$\int\limits_0^{\sqrt{2-y}} (x+y)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + y\,x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2-y}} = \frac{2-y}{2} + y\sqrt{2-y}.$$

Відповідно

$$\iint\limits_{D_2} (x+y)\,dxdy = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{y}{2} + y\sqrt{2-y}\right) dy = \left(y - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 + \int\limits_1^2 y\sqrt{2-y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{4} + \int\limits_1^2 y\sqrt{2-y}\,dy = \left|\begin{array}{cc} \sqrt{2-y} = t, & dy = -2t\,dt, \\ y = 1 \Rightarrow t = 1, & y = 2 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4} + 2\int\limits_0^1 \left(2 - t^2\right) t^2 dt = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{71}{60}.$$

Таким чином, остаточно,

$$\iint\limits_{D} (x+y)\,dxdy = \frac{7}{20} + \frac{71}{60} = \frac{23}{15}.$$

Цей приклад демонструє, що для знаходження подвійного інтеграла $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$ *в даному конкретному випадку зручніше застосовувати формулу* (1.12). *Цю обставину слід мати на увазі при обчисленні подвійних інтегралів і використовувати ту з формул* (1.12) *чи* (1.13), *застосування якої приводить до менш громіздких обчислень.*

Приклад 1.4. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D (3x + 2xy)\,dxdy$, *якщо область інтегрування D обмежена лініями* $y = 0$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{2}(3 - x)$ *(рис. 1.7).*

Розв'язок.

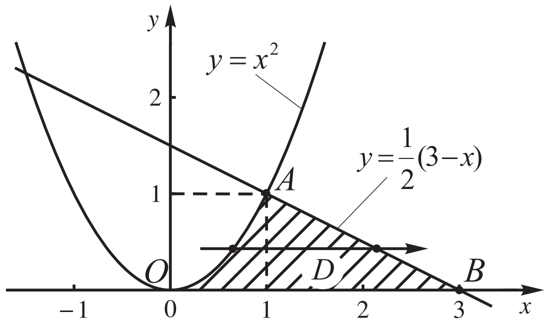


Рис. 1.7

Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують область D:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= \tfrac{1}{2}(3 - x), \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 = 1,\ y_1 = 1; \\ x_2 = -\tfrac{3}{2},\ y_2 = \tfrac{9}{4}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(1, 1),$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ y &= x^2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow O(0, 0), \qquad \left.\begin{aligned} y &= 0, \\ y &= \tfrac{1}{2}(3 - x), \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow B(3, 0).$$

Як видно з рис. 1.7, якщо область інтегрування D вважати правильною вздовж осі Oy, то точки виходу будуть лежати на лінії OAB, яка на проміжку $[0, 1]$ задається рівнянням $y = x^2$, а на проміжку $[1, 3]$ – рівнянням $y = \dfrac{1}{2}(3 - x)$. Тоді область D доведеться розбивати на частини D_1 та D_2, що є нераціональним. В даному випадку область інтегрування вигідніше розглядати правильною вздовж Ox: $D = \left\{\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 3 - 2y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}$. Тоді для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D (3x + 2xy)\,dxdy$ застосуємо формулу (1.13)

$$\iint\limits_D (3x + 2xy)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} (3 + 2y)x\,dx.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл, пам'ятаючи, що y – стала:

$$\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} (3+2y)x\,dx = (3+2y)\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{y}}^{3-2y} = \frac{1}{2}\left(8y^3 - 14y^2 - 21y + 27\right).$$

Остаточно

$$\iint\limits_{D} (3x+2xy)\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(8y^3 - 14y^2 - 21y + 27\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2y^4 - \frac{14y^3}{3} - \frac{21y^2}{2} + 27y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{83}{12}.$$

Приклад 1.5. *Знайти середнє значення функції $f(x,y) = 12 - 2x - 3y$ в області D, яка обмежена прямими $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.*

Розв'язок.

Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують область D (див. рис. 1.8):

$$\left.\begin{array}{r} x = 0, \\ 12 - 3y = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,4), \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0, \\ 12 - 2x = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow B(6,0).$$

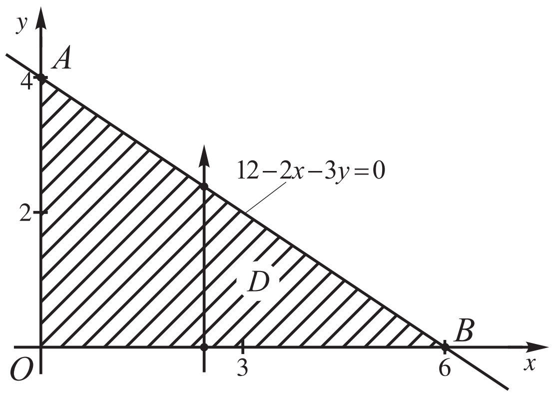


Рис. 1.8

Середнє значення функції $f(x,y)$ в області D будемо шукати за формулою (1.11), де S – площа цієї області (див. (1.4)). Вважатимемо що область D правильна у напрямку осі Oy. Тоді точка входу буде лежати на прямій $y = 0$, точка виходу на прямій $y = 4 - \dfrac{2}{3}x$, а область інтегрування буде визначена наступним чином: $D = \{0 \leqslant y \leqslant 4 - \frac{2}{3}x,\ 0 \leqslant x \leqslant 6\}$.

Для обчислення подвійного інтеграла, що фігурує в (1.4) застосуємо формулу (1.12). Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} dy = \int\limits_0^6 \left(4 - \frac{2}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 12.$$

Підставивши одержане значення площі S в (1.11) переходимо до знаходження середнього значення функції $f(P)$:

$$f(P) = \frac{1}{S}\iint\limits_D (12 - 2x - 3y)dxdy = \frac{1}{12}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} (12 - 2x - 3y)dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} (12 - 2x - 3y)dy = \left((12 - 2x)y - \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{4-\frac{2}{3}x} = 4\left(6 - 2x + \frac{x^2}{6}\right)$$

і остаточно знаходимо

$$f(P) = \frac{4}{12}\int\limits_0^6 \left(6 - 2x + \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{1}{3}\left(6x - x^2 + \frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 = 4.$$

1.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Одним із методів спрощення обчислення подвійного інтеграла є метод заміни змінних у подвійному інтегралі.

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D, тоді існує інтеграл

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{1.17}$$

ми переходимо в подвійному інтегралі I до нових змінних u та v. Вважатимемо, що з формул (1.17) однозначно можна визначити u та v:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{1.18}$$

Нехай множина всіх точок $M^*(u,v)$ утворює обмежену замкнену область D^*. За допомогою формул (1.18) кожній точці $M(x,y)$ із області D ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u,v)$ із області D^*. Формули (1.17) називають **формулами перетворення координат**, а формули (1.18) – **формулами оберненого перетворення**.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.3. *Якщо перетворення* (1.18) *переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції* (1.17) *мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник*

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad (1.19)$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива наступна формула заміни змінних:

$$I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \qquad (1.20)$$

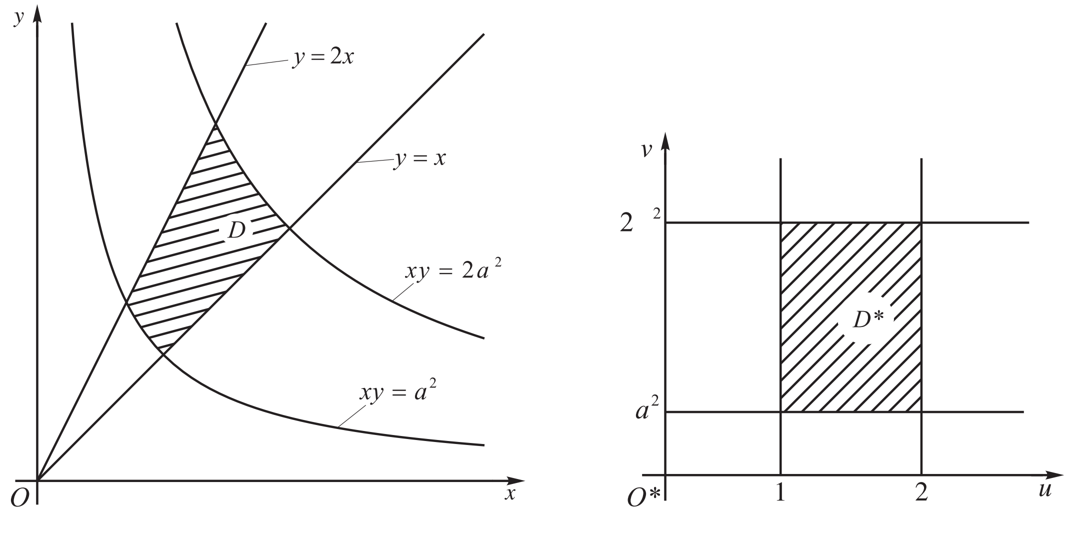
Функціональний визначник (1.19) називається **визначником Якобі або якобіаном**. Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (1.17), ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u,v)|\,dudv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Приклад 1.6. *Обчислити інтеграл* $\iint\limits_{D} \frac{x}{y}\,dxdy$, *якщо область D обмежена лініями $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0,\ y>0)$ (див. рис. 1.9 (a)).*

Розв'язок.

Безпосереднє обчислення цього інтеграла надто громіздке, тому що як в напрямку осі Ox так і в напрямку осі Oy область D потрібно спочатку розбити на три області, а потім обчислювати три подвійних інтеграли. Тому перейдемо до нових змінних u і v за формулами $u=\frac{y}{x}$, $v=xy$. Тоді

$$x=\sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y=\sqrt{uv};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}\sqrt{v}u^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}};$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}.$$



(а) (б)

Рис. 1.9

Обчислюємо якобіан переходу

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{v}u^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}, \quad |J(u,v)| = \frac{1}{2u}.$$

Рівняння ліній набувають вигляду: $v = a^2$, $v = 2a^2$, $u = 1$, $u = 2$. *Область* D *площини* Oxy *перетворюється в прямокутник* D^* *площини* O^*uv *(рис. 1.9 (б)). Застосовуючи формулу* (1.20), *дістанемо*

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} \frac{1}{u^2}\,dudv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{du}{u^2}\int\limits_{a^2}^{2a^2} dv = \frac{a^2}{2}\int\limits_1^2 \frac{du}{u^2} = -\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{u}\Big|_1^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \quad (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Оскільки

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(u,v)| = \rho, \tag{1.21}$$

то формула (1.20) набуває вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho d\varphi. \tag{1.22}$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy, а D^* – відповідна їй область в полярній системі координат. Вираз $\rho\, d\rho d\varphi$ є елементом площі в полярних координатах. Формула (1.22) виражає правило заміни змінних у подвійному інтегралі при переході до полярних координат. (В подальшому для спрощення запису позначення D будемо вживати, як для області заданій в декартовій системі координат, так і для області заданій в полярній системі координат.)

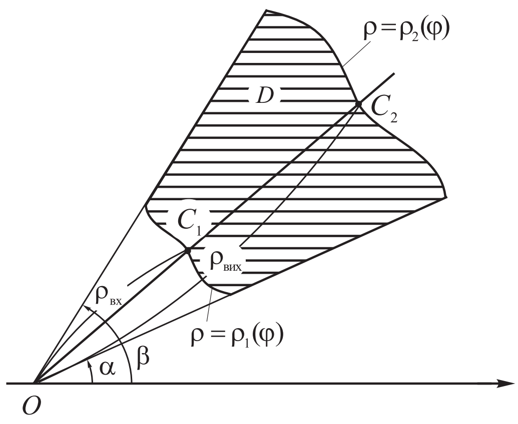


Рис. 1.10. Область інтегрування D у полярних координатах

Для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi$ застосовують теж саме правило зведення до повторного інтеграла, що і у випадку змінних x і y. Нехай область D обмежена двома променями, що виходять з полюса під кутами α і β, та двома кривими, рівняння яких у полярних координатах мають вигляд: $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$. Проведемо з полюса промінь під кутом φ ($\alpha < \varphi < \beta$). Цей промінь перетинає криві $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ відповідно в точках C_1 і C_2 (рис. 1.10). Точка C_1 є точкою входу, а точка C_2 – точкою виходу. Для цієї області інтегрування $D = \{\rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta\}$ подвійний інтеграл обчислюють за формулою:

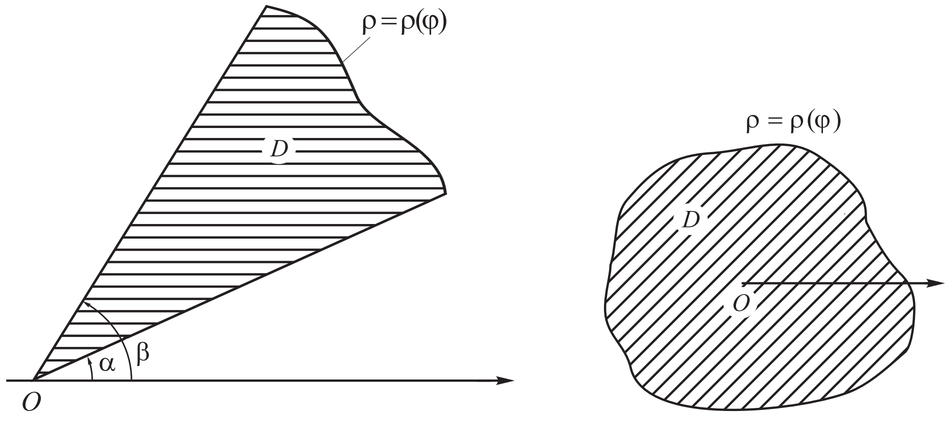
$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_{\text{вх}}=\rho_1(\varphi)}^{\rho_{\text{вих}}=\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.23)$$

Внутрішній інтеграл $\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$ береться (при постійному φ) в межах від полярного радіуса точки входу ($\rho_{\text{вх}} = \rho_1(\varphi)$) до полярного радіуса точки виходу ($\rho_{\text{вих}} = \rho_2(\varphi)$). Результат цього інтегрування буде деякою функцією від змінної φ, яку потрібно проінтегрувати в межах від α до β.

Якщо полюс належить межі області інтегрування D (як зображено на рис. 1.11 (а)), то для неї полярний радіус входу рівний нулю: $\rho_{\text{вх}} = 0$ і, відповідно,

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.24)$$

Якщо ж область D охоплює початок координат і обмежена кривою $\rho =$



(а)　　　　　　(б)

Рис. 1.11

$\rho(\varphi)$ (рис. 1.11 (б)), то маємо

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.25)$$

Зокрема, якщо межа області D – коло радіуса R з центром в початку координат ($\rho(\varphi) = R$), то

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (1.26)$$

Зауваження 1. Оскільки сума $x^2 + y^2$ у полярних координатах має простий вигляд: $x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$, то формулу (1.22) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння межі області D містить цю суму.

Приклад 1.7. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy$, *де область* D *є колом радіусом 2 з центром в початку координат.*

Розв'язок.

Перейдемо в полярну систему координат. Застосовуючи формулу (1.22), *одержимо*

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{4-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}\,\rho\, d\rho d\varphi$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho d\varphi.$$

Застосовуючи до цього інтеграла формулу (1.26), *знайдемо*

$$\iint\limits_D \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho\,d\rho.$$

Обчислення внутрішнього інтеграла дає:

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\,d(4-\rho^2) = -\left.\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3},$$

тому

$$\iint\limits_D \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{8}{3}\,d\varphi = \frac{16}{3}\pi.$$

Отже,

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{16}{3}\pi.$$

Приклад 1.8. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dxdy$, *де область* D *– частина кільця:* $x^2+y^2 \geqslant 1$, $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leqslant x\sqrt{3}$ *(рис. 1.12).*

Розв'язок.

Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат (див. (1.22), (1.23)*)*

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy = \iint\limits_D \operatorname{arctg}(\operatorname{tg})\,\varphi\,\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_D \varphi\rho\,d\rho d\varphi = \int \varphi\,d\varphi \int \rho\,d\rho.$$

Для встановлення меж інтегрування у повторному інтегралі запишемо рівняння меж області в полярній системі координат:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \rho^2=1,\ \rho=1;$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow \rho^2=9,\ \rho=3;$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi=\frac{\pi}{6};$$

$$y=x\sqrt{3} \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

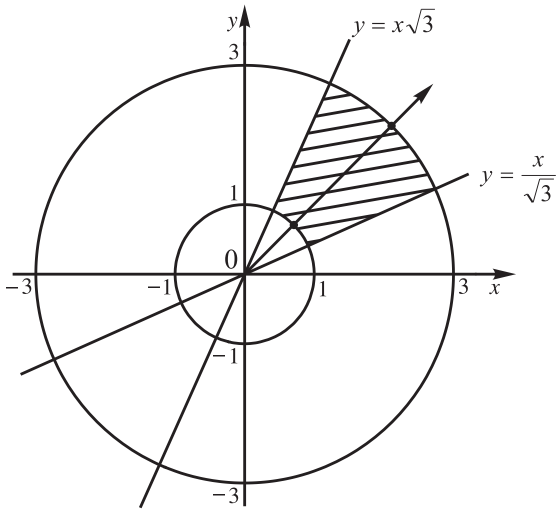


Рис. 1.12

Таким чином

$$\iint\limits_D \varphi\rho\, d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi \int\limits_1^3 \rho\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, \frac{\rho^2}{2}\bigg|_1^3 d\varphi = 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi =$$

$$=4\cdot\frac{\varphi^2}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Отже,

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dxdy = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.5 Застосування подвійного інтеграла до розв'язання задач геометрії і механіки

В таблиці 1.1 перераховано основні застосування подвійного інтеграла. Всі пояснення приведено у виносках до таблиці.

Табл. 1.1. Визначення деяких величин через подвійний інтеграл

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Площа плоскої фігури[1]	$S = \iint\limits_D dxdy$	$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$

продовження на наступній сторінці

[1] В площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D.

(продовження таблиці 1.1)

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Об'єм циліндричного тіла[2]	$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$	$S=\iint\limits_D f(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi$
Площа поверхні[3]	$Q=\iint\limits_D \sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy$	
Маса плоскої фігури [4]	$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy$	$m=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi$
Статичні моменти плоскої фігури, відносно осей координат	$M_x=\iint\limits_D \gamma(x,y)y\,dxdy$ $M_y=\iint\limits_D \gamma(x,y)x\,dxdy$	$M_x=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi$ $M_y=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi$
Моменти інерції плоскої фігури, відносно осей координат і початку координат	$I_x=\iint\limits_D \gamma(x,y)y^2\,dxdy$ $I_y=\iint\limits_D \gamma(x,y)x^2\,dxdy$ $I_0=\iint\limits_D \gamma(x,y)(x^2+y^2)\,dxdy$	$I_x=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho^3\sin^2\varphi d\rho d\varphi$ $I_y=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho^3\cos^2\varphi d\rho d\varphi$ $I_0=\iint\limits_D \gamma(\rho,\varphi)\,\rho^3 d\rho d\varphi$

продовження на наступній сторінці

[2]Циліндричне тіло знизу обмежене областю D площини Oxy, зверху – поверхнею $z=f(x,y)$, а його твірні паралельні осі Oz, функція $f(x,y)$ неперервна та невід'ємна в області D.

[3]Поверхня σ задана рівнянням $z=f(x,y)$ і проектується на площину Oxy в область D, а функції $f(x,y)$, $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ неперервні в цій області.

[4]На площині Oxy маємо матеріальну фігуру, яка має форму обмеженої замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma=\gamma(x,y)$.

(продовження таблиці 1.1)

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Координати центра ваги плоскої фігури	$x_c = \dfrac{M_y}{m}$ $y_c = \dfrac{M_x}{m}$	

Приклад 1.9. *Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і $x = 4$.*

Розв'язок.

Побудуємо фігуру, обмежену даними лініями, тобто область D (рис. 1.13). Її площу обчислимо за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Переходячи до повторного інтеграла й обчислюючи його, одержимо:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dy =$$

$$= \int\limits_0^4 y\Big|_{\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^4 \left(3\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) dx =$$

$$= 2\int\limits_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{4}{3} 4^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3}.$$

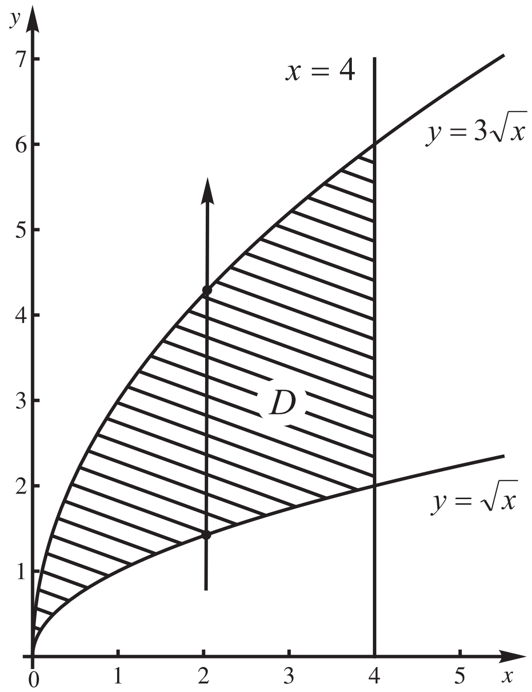


Рис. 1.13

Приклад 1.10. *Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 1.14).*

Розв'язок.

В даному випадку площу фігури обмеженої кардіоїдою зручно обчислювати у полярних координатах за формулою

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi.$$

Враховуючи симетрію кардіоїди, область інтегрування D буде мати вигляд: $D = \{0 \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. Переходячи до повторного інтеграла й обчислюючи його, одержимо:

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho =$$

$$=2\int\limits_0^{\pi} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi = a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$=a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$=a^2 \left.\left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}\, a^2.$$

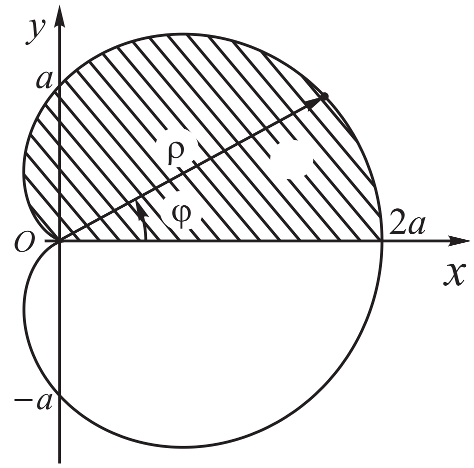


Рис. 1.14

Приклад 1.11. *Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (1.15).*

Розв'язок.

Оскільки полярний радіус ρ може набувати лише дійсних значень, то $\cos 2\varphi$ у рівнянні лемніскати не може бути від'ємним, тобто $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Це означає, що кут 2φ повинен міститися або в першій, або четвертій чверті. Оскільки крива симетрична відносно полюса (див. 1.15), то достатньо побудувати її лише в першій чверті, тоді кут 2φ задовольняє умові $0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тобто кут φ змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/4$.

Площу фігури обмеженої лемніскатою обчислюємо за формулою

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi.$$

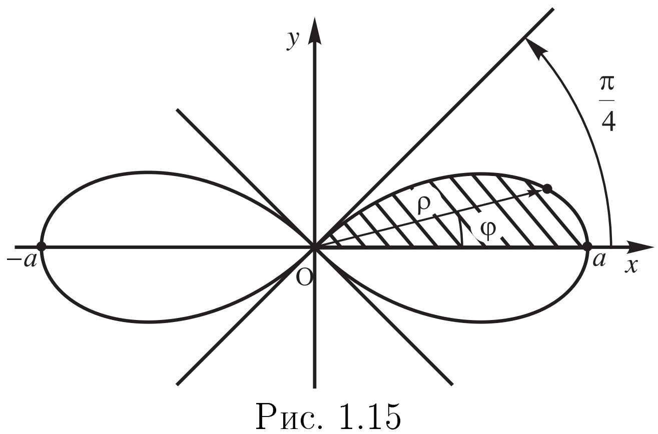


Рис. 1.15

Переходячи до повторного інтеграла і враховуючи симетрію фігури відносно осей координат, одержимо:

$$S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2(1-0) = a^2.$$

Приклад 1.12. *Знайти площу фігури обмеженої колом* $\rho = 4\sin\varphi$ *та лемніскатою Бернуллі* $\rho = 2\sqrt{2}\,\sqrt{\cos 2\varphi}$ *(див. рис. 1.16).*

Розв'язок.

З системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \rho = 4\sin\varphi, \\ \rho = 2\sqrt{2}\,\sqrt{\cos 2\varphi} \end{aligned}\right\}$$

знаходимо точки перетину кола та лемніскати: $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Враховуючи симетрію фігури (див. рис. 1.16), її площу обчислюємо за формулою

$$S = 2\left(\iint\limits_{D_1} \rho d\rho d\varphi + \iint\limits_{D_2} \rho d\rho d\varphi\right),$$

$D_1 = \left\{2\sqrt{2}\,\sqrt{\cos 2\varphi} \leqslant \rho \leqslant 4\sin\varphi,\ \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$, $D_2 = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant 4\sin\varphi, \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. *Переходячи до повторного інтеграла, одержимо:*

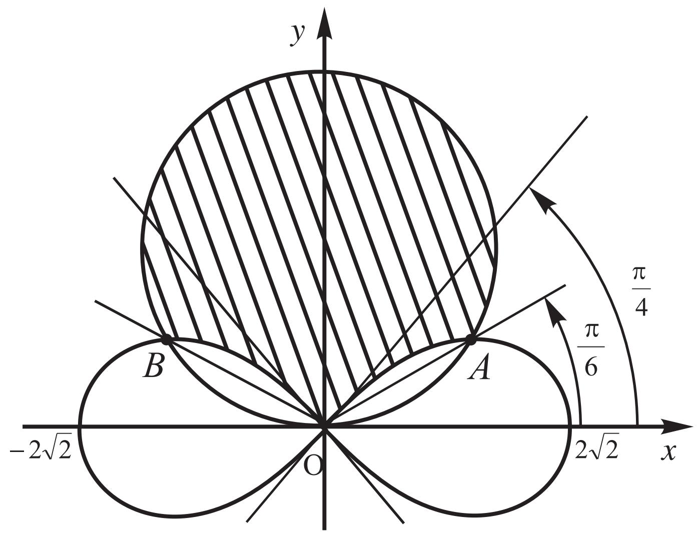


Рис. 1.16

$$S = 2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\sqrt{2}\,\sqrt{\cos 2\varphi}}^{4\sin\varphi} \rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\sin\varphi} \rho d\rho\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(16\sin^2\varphi - 8\cos 2\varphi\right) d\varphi +$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2\varphi d\varphi = 8\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos 2\varphi)\, d\varphi + 8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 8\left(\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi\right) = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} - 4.$$

При обчисленні інтегралів, що містять $\sin^2\varphi$ *застосовувалася формула пониження степення*

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}.$$

Приклад 1.13. *Знайти об'єм тіла, вирізаного із кулі радіуса R прямим круговим циліндром діаметра R, твірні якого проходять через центр кулі.*

Розв'язок.

Помістимо початок координат в центр кулі (див. рис. 1.17), спрямувавши вісь Oz вздовж твірної циліндра, а вісь Ox – вздовж діаметра основи циліндра. Внаслідок симетрії тіла відносно координатних площин Oxy і Oxz достатньо знайти об'єм частини тіла, що знаходиться в першому октанті, і одержаний результат почетверити (рис. 1.18 (а)). Відповідно,

$$V = 4 \iint\limits_{D} z\,dxdy,$$

де z – апліката точок сфери, а D – півколо $x^2 + y^2 = Rx$ в площині Oxy радіуса $\frac{R}{2}$ з центром в точці $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ (рис. 1.18 (б)).

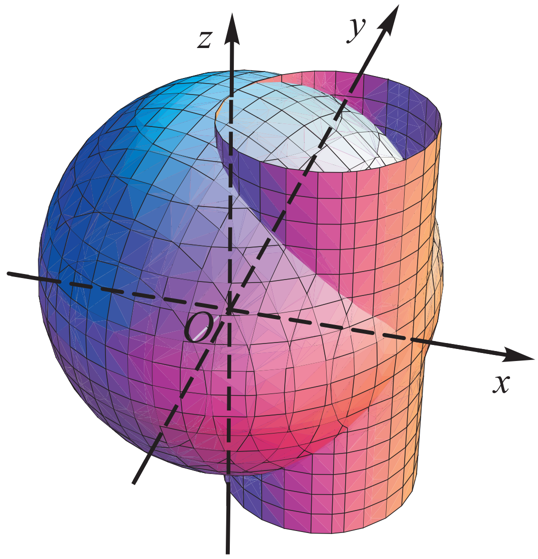
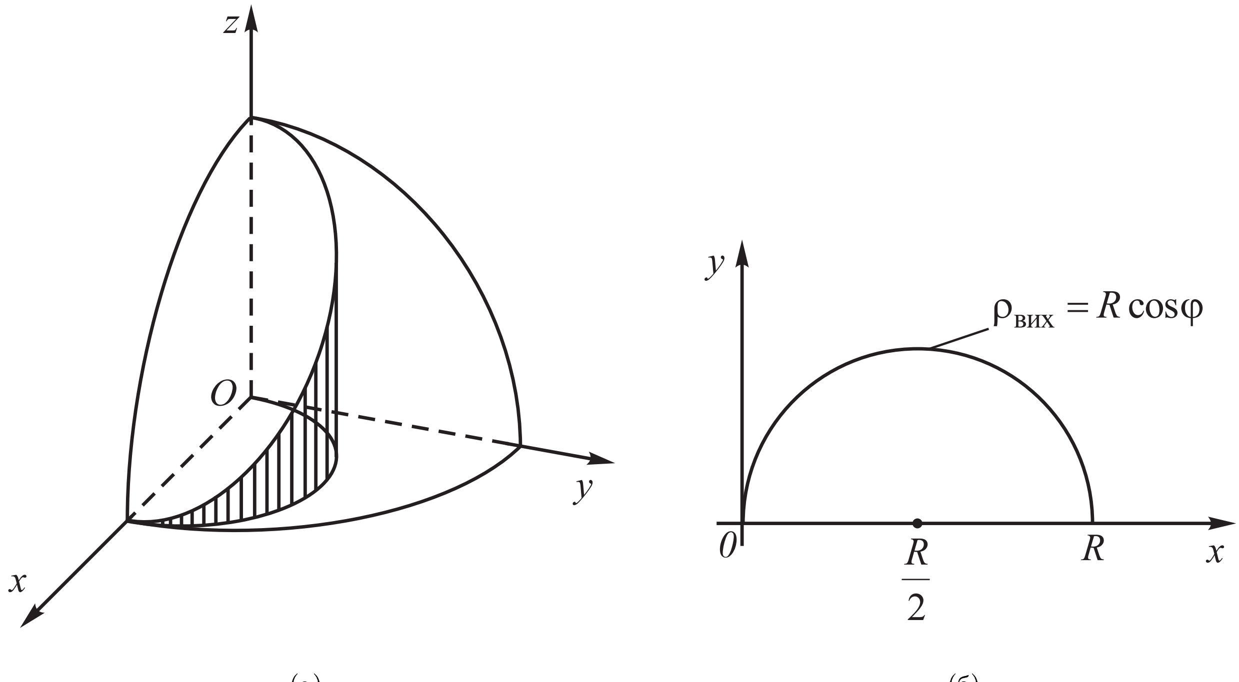


Рис. 1.17



(а) (б)

Рис. 1.18

Оскільки рівняння сфери радіуса R з центром у початку координат має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то в першому октанті $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і, *відповідно,*

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Переходячи до полярних координат, одержимо

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 4\iint\limits_D \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho\,d\rho d\varphi.$$

Враховуючи, що $\rho_{\text{вх}} = 0$, $\rho_{\text{вих}} = R\cos\varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ *(див. рис. 1.18 (б)), за допомогою формули* (1.24) *одержимо*

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho\,d\rho d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho\,d\rho.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\left(R^2 - \rho^2\right) = -\left.\frac{\left(R^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{R\cos\varphi} =$$

$$= -\frac{\left(R^2 - R^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}\left(1 - \sin^3\varphi\right),$$

то

$$4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3}\left(1 - \sin^3\varphi\right)d\varphi = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\,d\varphi\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = \cos\varphi, \\ dt = -\sin\varphi\,d\varphi, \end{array} \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\,d\varphi = \int\limits_0^1 \left(1 - t^2\right)\,dt = \frac{2}{3}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Отже, шуканий об'єм

$$V = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Приклад 1.14. *Обчислити площу частини параболоїда обертання* $z = x^2 + y^2$*, яка вирізана циліндром* $x^2 + y^2 = 4$ *(рис. 1.19).*

Розв'язок.

Застосуємо формулу

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\, dxdy.$$

Тут $f(x,y) = x^2 + y^2$; $f_x' = 2x$, $f_y' = 2y$, *тоді* $\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}$. *Отже,*

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dxdy,$$

де D *– коло радіуса 2 з центром в початку координат (див. рис. 1.19). Обчислення інтеграла проводимо у полярних координатах:*

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dxdy = \\ = \iint\limits_D \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho d\varphi = \\ = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho.$$

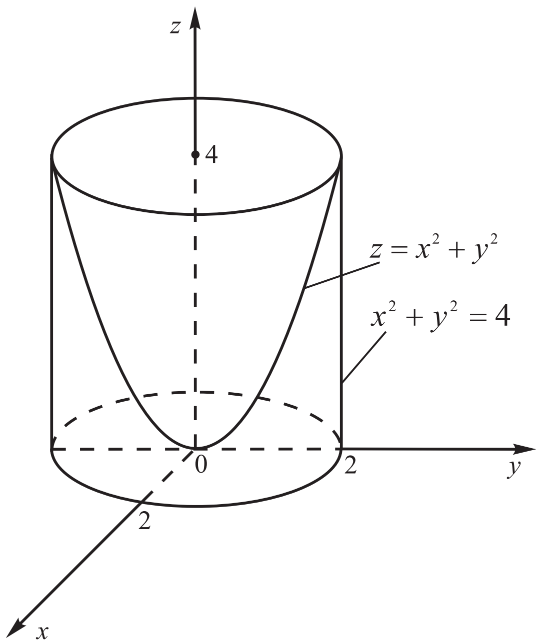


Рис. 1.19

Внутрішній інтеграл дає

$$\int\limits_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho d\rho = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\, d\left(1+4\rho^2\right) = \frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \\ = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Таким чином, шукана площа рівна

$$Q = \frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}\left(17\sqrt{17}-1\right)\, d\varphi = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Приклад 1.15. *Знайти координати центра ваги однорідної пластини, обмеженої параболою* $y = 4 - x^2$ *та віссю* Ox *(рис. 1.20)*

Розв'язок.

Координати центра ваги фігури знайдемо за формулами $x_c = \dfrac{M_y}{m}$, $y_c = \dfrac{M_x}{m}$. *Для цього обчислимо статичні моменти* M_x, M_y:

$$M_x = \iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right)\,dx = \frac{256}{15},$$

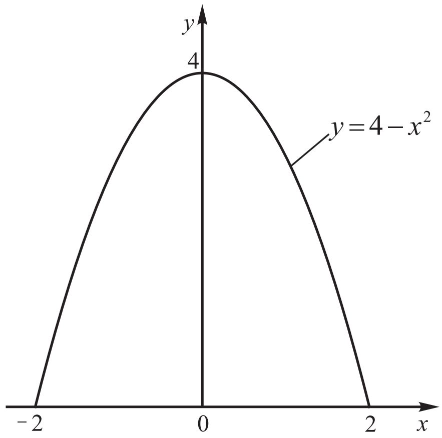


Рис. 1.20

$$M_y = \iint\limits_D x\,dxdy = \int\limits_{-2}^{2} x\,dx \int\limits_{0}^{4-x^2} dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) x\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)\,d\left(4 - x^2\right) = -\left.\frac{\left(4 - x^2\right)^2}{4}\right|_{-2}^{2} = 0,$$

і визначимо площу фігури S:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} dy = \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)\,dx = \frac{32}{3}.$$

Відповідно абсциса x_c *центра ваги*

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{0}{\frac{32}{3}} = 0$$

(цей результат можна було б одержати без обчислень, оскільки фігура симетрична відносно осі Oy*), а ордината* y_c *рівна*

$$y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}.$$

Отже, координати центра ваги такі: $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{8}{5}$.

Приклад 1.16. *Знайти моменти інерції I_x, I_y відносно координатних осей та момент інерції I_0 відносно початку координат однорідної пластини з прикладу 1.15, вважаючи, що густина $\gamma(x, y) = 1$.*

Розв'язок.

Момент інерції відносно осі Ox обчислюємо за формулою (див. табл. 1.1)

$$I_x = \iint\limits_D \gamma\, y^2\, dxdy = \iint\limits_D y^2\, dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} y^2\, dy = \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2)^3 dx =$$
$$= \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{2} \left(64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6\right)\, dx = \frac{4096}{105}.$$

Аналогічно знаходимо момент інерції відносно осі Oy

$$I_y = \iint\limits_D \gamma\, x^2\, dxdy = \iint\limits_D x^2\, dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} x^2\, dy = \int\limits_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)\, dx = \frac{128}{15}.$$

Момент інерції відносно початку координат можна розглядати як суму моментів I_x та I_y:

$$I_0 = \iint\limits_D \gamma(x^2 + y^2)\, dxdy = I_x + I_y.$$

Тоді

$$I_0 = \frac{4096}{105} + \frac{128}{15} = \frac{1664}{35} \approx 47,5.$$

2 ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1 Поняття і умови існування потрійного інтеграла. Його геометричний та механічний зміст

В основі визначення подвійного інтеграла лежало поняття площі плоскої фігури. Подібним чином при побудові загального означення потрійного інтеграла основну роль відіграє поняття об'єму тіла.

Нехай довільна функція $u = f(x, y, z)$ визначена і обмежена в замкненій обмеженій області $G = \mathbb{R}^3$. Розіб'ємо область G довільним чином сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і об'єми яких дорівнюють $\triangle V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ помножимо на об'єм $\triangle V_i$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \triangle V_i, \tag{2.1}$$

яка називається **інтегральною сумою для функції** $f(x, y, z)$ **по області** G.

Нехай $d(G_i)$ – діаметр G_i.

Означення 2.1. *Якщо інтегральна сума* (2.1) *при* $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(G_i) \to 0$ *має скінченну границю* I*, яка не залежить ні від способу розбиття області* G *на частини* G_i*, ні від вибору в них точок* P_i*, то ця границя називається* ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ ***по області*** G *і позначається одним із символів:*

$$I = \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV \quad \textit{або} \quad I = \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdyz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \triangle V_i, \tag{2.2}$$

де функція $f(x, y, z)$ називається **інтегровною в області** G; G – **область інтегрування**, x, y, z – **змінні інтегрування**, а dV (або $dxdydz$) – **елемент об'єму**.

Теорема 2.1 (достатня умова інтегровності функції). *Якщо функція* $f(x, y, z)$ *неперервна в замкненій обмеженій області* G*, то вона в цій області інтегровна.*

Геометричний зміст потрійного інтеграла. Якщо всюди в області G покласти $f(x, y, z) \equiv 1$, то потрійний інтеграл (2.2) рівний об'єму тіла G:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \tag{2.3}$$

Механічний зміст потрійного інтеграла. Коли підінтегральна функція $f(x, y, z)$ невід'ємна в області G, то її можна розглядати як об'ємну густину $\rho(x, y, z)$ у точці $(x, y, z) \in G$ деякого розподілу маси по тілу G, тоді маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dxdydz. \tag{2.4}$$

Зауважмо, що потрійний інтеграл (2.2) існує і у випадку $f(x, y, z) \leqslant 0$, якщо виконуються умови теореми 2.1.

2.2 Властивості потрійних інтегралів

1. Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_G C\, f(x,y,z)\, dV = C \iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV, \quad C = \text{const}. \tag{2.5}$$

2. Потрійний інтеграл від суми декількох функцій рівний сумі потрійних інтегралів від доданків, тобто:

$$\iiint\limits_G \left(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\right)\, dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV \pm \iiint\limits_G g(x,y,z)\, dV. \tag{2.6}$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x,y,z) \geqslant 0$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV \geqslant 0. \tag{2.7}$$

4. Якщо для інтегровних в G функцій виконується нерівність $f(x,y,z) \geqslant g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV \geqslant \iiint\limits_G g(x,y,z)\, dV. \tag{2.8}$$

5. Якщо $f(x,y,z)$ інтегровна в G, то інтегровною є і $|f(x,y,z)|$, причому

$$\left| \iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV \right| \leqslant \iiint\limits_G |f(x,y,z)|\, dV. \tag{2.9}$$

6. (Адитивність потрійного інтеграла.) Якщо область інтегрування G функції $f(x,y,z)$, розбити на n частин $G_1, G_2, \dots, G_n$, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\, dV + \cdots + \iiint\limits_{G_n} f(x,y,z)\, dV \tag{2.10}$$

7. (Оцінка потрійного інтеграла.) Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то

$$mV \leqslant \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV \leqslant M\,V, \tag{2.11}$$

де m і M – найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

8. (Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $P(x_0,y_0,z_0)$, що

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = f(P)\,V.$$

Величину

$$f(P) = \frac{1}{V}\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV \tag{2.12}$$

називають **середній значенням функції** $f(x,y,z)$ в області G.

2.3 Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Нехай замкнена область G обмежена знизу і зверху, відповідно, поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, де функції $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ визначені і неперервні в області D, яка є проекцією області G на площину Oxy, причому $z_1(x,y) < z_2(x,y)$, $(x,y) \in D$. Із боків область G обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Кожна пряма, паралельна осі Oz, перетинає границю області G не більше ніж у двох точках (рис. 2.1).

Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається **правильною в напрямку осі** Oz. Тобто, кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x,y,0) \in D$ паралельно осі Oz, перетинає межу області G тільки у двох точках M і N. Точку M назвемо **точкою входу в область** G, точку N – **точкою виходу з області** G, а їхні аплікати позначимо, відповідно, через $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих}}$. Тоді $z_{\text{вх}} = z_1(x,y)$ буде нижньою межею, а $z_{\text{вих}} = z_2(x,y)$ – верхньою межею інтегрування за змінною z, і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.13}$$

У внутрішньому інтегралі змінні x, y вважають сталими. Після його обчислення одержимо вираз, що залежить лише від x і y.

Якщо область D є правильною в напрямку осі Oy, тобто,

$$D = \{\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\},$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$, то

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.14}$$

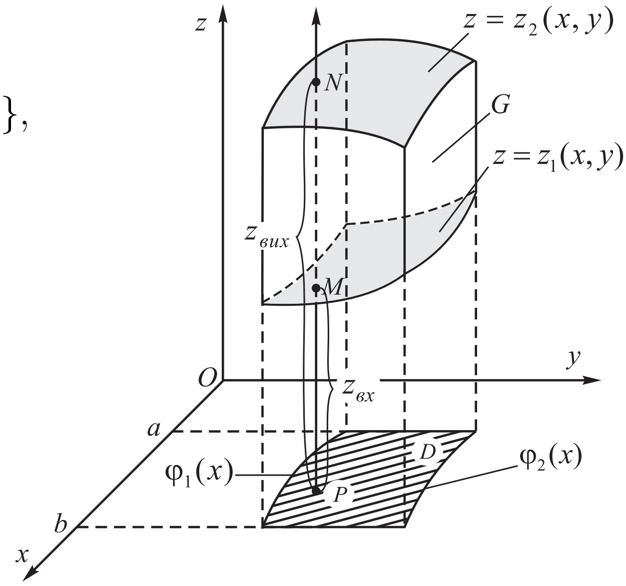


Рис. 2.1

Таким чином, із формул (2.13) і (2.14) одержимо

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.15}$$

Порядок інтегрування може бути й іншим. Якщо область D правильна у напрямку осі Ox, тобто

$$D = \{\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

де $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$ – неперервні функції на відрізку $[c, d]$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{2.16}$$

Зокрема, якщо областю інтегрування є паралелепіпед

$$G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ k \leqslant z \leqslant l\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)\,dz. \tag{2.17}$$

У цьому випадку інтегрування виконується в будь-якому порядку, оскільки область G правильна у напрямку всіх трьох координатних осей Ox, Oy, Oz.

Приклад 2.1. *Обчислити потрійний інтеграл* $\iiint\limits_G (x-y-z)\,dxdydz$ *по області* G*, обмеженій площинами* $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

Розв'язок.

Оскільки область інтегрування G *– паралелепіпед:* $G=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$*, то за формулою* (2.17) *маємо*

$$\iiint\limits_G (x-y-z)\,dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} (x-y-z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} \left((x-y)z - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dy =$$
$$=2\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} (x-y-1)\,dy = 2\int\limits_{-1}^{1} \left((x-1)y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$
$$=2\int\limits_{-1}^{1} \left(x-\frac{3}{2}\right) dx = -6.$$

Приклад 2.2. *Обчислити інтеграл*

$$I = \iiint\limits_G z\,dxdydz,$$

де область G *обмежена верхньою половиною еліпсоїда* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ *і площиною* Oxy.

Розв'язок.

Проекцією області інтегрування G *на координатну площину* Oxy *є еліпс* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. *Тому межами зміни* x *є числа* $-a$ *і* a*, при фіксованому ж* x *змінна* y *змінюється від* $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ *до* $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. *Оскільки* G *обмежена знизу координатною площиною* Oxy*, а зверху – поверхнею еліпсоїда, то при фіксованих* x *і* y *апліката* z *буде змінюватися в межах від 0 до* $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Застосовуючи формулу (2.14)*, одержимо*

$$I = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz = \frac{c^2}{2}\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

враховуючи парність підінтегральної функції

$$= c^2 \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2bc^2}{3a^3} \int\limits_{-a}^{a} = \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx$$

$$= \frac{4bc^2}{3a^3} \int\limits_{0}^{a} \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\, dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right| = \frac{4abc^2}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt =$$

$$= \frac{abc^2}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

Приклад 2.3. *Обчислити масу m тіла, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$, $x = 1$, $y = 1$, якщо його густина $\rho(x, y, z) = x + 2z$ (рис. 2.2).*

Розв'язок.

Проекцією тіла на координатну площину Oxy є фігура $OACB$, утворена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$. Зрозуміло, змінні x та y змінюються в межах від 0 до 1. При фіксованих x, y точка може рухатися по вертикалі від площини $z = 0$ до площини $x + y + z = 2$; таким чином апліката z буде змінюватися в межах від 0 до $2 - x - y$.

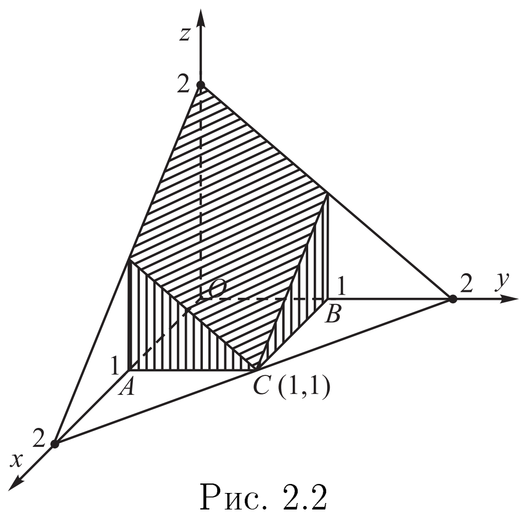


Рис. 2.2

Тоді згідно формули (2.4), маємо

$$m = \iiint\limits_{G} \rho(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2-x-y} (x + 2z)\, dz.$$

Послідовно обчислюючи інтеграли, одержимо

$$m = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} \left(xz + z^2\right)\Big|_{0}^{2-x-y} dy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} (y^2 + xy - 2x - 4y - 4) dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{y^3}{3} + \frac{xy^2}{2} - 2xy - 2y^2 + 4y\right)\Big|_{0}^{1} dx = \int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{3}\right) dx = \frac{19}{12}.$$

2.4 Заміна змінної в потрійному інтегралі

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz$, функкція $f(x, y, z)$ неперервна в просторовій області G. Нехай неперервно диференційовні функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ здійснюють взаємно однозначне відображення замкненої обмеженої області G простору (x, y, z) на область G^* простору (u, v, w). Тоді має місце **формула заміни змінних у потрійному інтегралі**:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |J|\; dudvdw, \tag{2.18}$$

де якобіан переходу в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.19}$$

На практиці найчастіше застосовують перехід від декартових координат до циліндричних або сферичних координат.

Циліндричні координати ρ, φ, z пов'язані з декартовими x, y, z співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

У цьому випадку якобіан переходу рівний

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho. \tag{2.20}$$

Тоді формула заміни змінних у потрійному інтегралі (2.23) при переході до циліндричних координат має вигляд:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho d\varphi dz. \tag{2.21}$$

Звернемо увагу на те, що циліндричну систему координат зручно використовувати, коли область інтегрування обмежена циліндричними, параболічними поверхнями прямолінійні твірні яких, наприклад, парлельні осі Oz та площинами перпендикулярними до площини Oxy.

При переході до сферичної системи координат

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

якобіан переходу рівний

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\theta. \tag{2.22}$$

Тому має місце формула:

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\times$$
$$\times \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta. \tag{2.23}$$

Переходити до сферичних координат зручно, коли областю інтегрування є куля (рівняння її межі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ у сферичних координатах має вигляд $\rho = R$) або її частина, а також якщо підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2 + z^2$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – Київ: Вища школа, 1993. – 648 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – Київ: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.

3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч. 1. – Київ: Техніка, 2007. – 600 с.

4. Гаврильченко Х.І., Полушкін С.П., Кропив'янський П.С. та ін. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – Київ: Техніка, 2004. – 279 с.

5. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник. – Київ: КНЕУ, 2001. – 546 с.

В.В. Рубіш

ПОДВІЙНІ ТА ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 2,38. Зам. № 74. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ «Говерла». м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Тел.: 3-32-48.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року*