УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).33-47

**Ю. С. Горбань[1], Ю. А. Андреєва[2], А. О. Белік[3]**

[1] Донецький національний університет ім. В. Стуса,
старший викладач кафедри прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
iu.gorban@donnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3709-4015

[2] Донецький національний університет ім. В. Стуса,
студент
andreieva_i@donnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8868-0498

[3] Донецький національний університет ім. В. Стуса,
студент
belik.a@donnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0079-175X

# ЄДИНІСТЬ ЕНТРОПІЙНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

В роботі розглянуто задачу Діріхле для модельного нелінійного еліптичного рівняння другого порядку з ізотропними та вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами, молодшим членом і $L^1$-правою частиною. Вироджуваність за незалежними змінними характеризується наявністю вагової функції в головній частині рівняння. Основним у даній роботі є результат про єдиність ентропійного розв'язку розглянутої задачі. Його встановлено за мінімальних умов на залучену вагову функцію. Це – ті припущення відносно її інтегровності, які потрібні для коректного введення відповідного енергетичного вагового ізотропного простору Соболєва.

**Ключові слова:** вироджувані еліптичні рівняння, $L^1$-права частина, задача Діріхле, ентропійний розв'язок, єдиність розв'язку.

**1. Вступ.** Дослідження, представлене у роботі, відноситься до одного з актуальних напрямів сучасної теорії нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Цей напрям включає в себе вивчення нелінійних рівнянь і варіаційних нерівностей з $L^1$-правими частинами і мірами в якості правих частин. Такого роду дослідження активно проводяться з кінця 80-х років минулого століття. У даний час в цілому побудовано теорію нелінійних ізотропних невироджених (за незалежними змінними) дивергентних еліптичних рівнянь другого порядку з $L^1$-правими частинами або правими частинами-мірами. В рамках цієї теорії введено поняття слабких, ентропійних та ренормалізованих розв'язків досліджуваних рівнянь, доведено існування та єдиність цих розв'язків і встановлено їх належність певним просторам Лебега та Соболєва. Суттєвий внесок у розвиток даної теорії належить Ф. Бенілану, Л. Боккардо, Т. Галлуе, Р. Гаріпі, Ф. Мюра, М. П'єру, Ж.Л. Вазкезу, Ж.-М. Ракотосону, а також А. Альвіно, В. Фероне, А. Меркальдо, Л. Орсіна, А. Порретта, С. Сегура де Леон, Г. Тромбетті, О.А. Ковалевському та іншим.

Основна складність у вивченні розв'язності еліптичних рівнянь з $L^1$-правими частинами полягає в тому, що така права частина не породжує лінійного неперервного функціоналу на відповідному енергетичному соболєвському просторі.

Внаслідок цього безпосереднє застосування відомої теорії монотонних операторів неможливе і, більше того, потрібне уточнення самого поняття розв'язку таких рівнянь. Природним аналогом поняття узагальненого розв'язку, придатного для випадку достатньо сумовної правої частини, є поняття слабкого розв'язку (розв'язку з $W^{1,1}$ у сенсі інтегральної тотожності для гладких функцій). Умови існування слабких роз'язків задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь з $L^1$ -правими частинами встановлені Л. Боккардо і Т. Галлуе (див., наприклад, [1], [2]).

Ефективний підхід до дослідження розв'язності задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку з $L^1$-правими частинами було запропоновано Ф. Беніланом, Л. Боккардо, Т. Галлуе, Р. Гаріпі, М. П'єром і Ж.Л. Вазкезом у роботі [3]. В рамках цього підходу введено поняття ентропійного розв'язку досліджуваної задачі і розглянуто більш широкі, ніж відповідні енергетичні соболєвські простори, класи функцій, яким такі розв'язки повинні належати. При цьому встановлено, що якщо коефіцієнти рівнянь задовольняють стандартним умовам зростання, коерцитивності і строгої монотонності, то ентропійний розв'язок існує та є єдиним для всього діапазону значень параметра, який характеризує зростання коефіцієнтів рівнянь відносно похідних невідомої функції. Вищезгадані і пов'язані з ними інші дослідження належать до $L^1$-теорії нелінійних рівнянь з ізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами. Що стосується нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку з $L^1$-правими частинами або правими частинами-мірами у випадку анізотропії або виродження (за незалежними змінними) їх коефіцієнтів, то відзначимо таке. Існування слабкого розв'язку задачі Діріхле для модельного еліптичного рівняння з анізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами і мірою в якості правої частини встановлено Л. Боккардо, Т. Галлуе та П. Марчелліні в роботі [4]. Існування слабких розв'язків для деякого класу рівнянь з анізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами і локально інтегровними даними доведено М. Бендамане та К.Х. Карлсеном у [5]. Розв'язність задачі Діріхле для еліптичних рівнянь з ізотропними і вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами та $L^1$-правими частинами або правими частинами-мірами вивчалася в роботах Л. Ахаруша, Е. Азрула і А. Бенкіране [6], Й. Атіка і Ж.-М. Ракотосона [7], А.К. Кавалейро [8], Г.Р. Чірмі [9], Ф.К. Лі [10].

Питання про існування і властивості розв'язків анізотропних вироджуваних (за незалежними змінними) рівнянь другого порядку без молодших членів з $L^1$-правими частинами розглянуто О.А. Ковалевським і Ю.С. Горбань у [11], [12], з молодшим членом - Ю.С. Горбань у [13], [14].

У даній роботі розглянуто задачу Діріхле для модельного нелінійного еліптичного рівняння другого порядку з ізотропними та вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами, молодшим членом і $L^1$-правою частиною. Вироджуваність за незалежними змінними характеризується наявністю вагової функції в головній частині рівняння. Основним результатом є теорема про єдиність ентропійного розв'язку розглянутої задачі. Його встановлено за мінімальних умов на залучену вагову функцію. Це – ті припущення відносно її інтегровності, які потрібні для коректного введення відповідного енергетичного вагового ізотропного простору Соболєва.

**2. Функційні простори та множини.** У цьому розділі розглянемо деякі функційні простори та множини, адаптовані до вироджуваних ізотропних рівнянь, які будуть використані в роботі у подальшому. Вони вводяться аналогічно до відповідних просторів та множин для вироджуваних анізотропних рівнянь (див. [15]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\Omega$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$. Нехай $p \in (1, n)$. Позначимо

$$\widehat{p} = \frac{n(p-1)}{(n-1)p}.$$

Нехай $\nu$ – невід'ємна функція на $\Omega$ така, що $\nu > 0$ м.с. на $\Omega$,

$$\nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad (1/\nu)^{1/(p-1)} \in L^1(\Omega). \tag{1}$$

Через $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ позначимо множину всіх функцій $u \in L^1(\Omega)$ таких, що для будь-якого $i \in \{1, \dots, n\}$ існує узагальнена похідна $D_i u$ із властивістю $\nu|D_i u|^p \in L^1(\Omega)$.

Нехай $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$ відображення $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $\mathbb{R}$ таке, що для довільної функції $u \in W^{1,p}(\nu, \Omega)$

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega \nu |D_i u|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

Відображення $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$ є нормою в $W^{1,p}(\nu, \Omega)$, і з огляду на друге включення (1) множина $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$. Крім того, з огляду на перше включення (1) маємо $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ позначимо замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторі $W^{1,p}(\nu, \Omega)$. Очевидно, що множина $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ є банаховим простором відносно норми, індукованої нормою $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$.

Покладемо

$$c_{p,\nu} = 1 + \|1/\nu\|_{L^{1/(p-1)}(\Omega)}.$$

**Твердження 1.** *Простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ має такі властивості:*

(i) $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ *і для довільної функції $u \in W^{1,p}(\nu, \Omega)$ маємо*

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqslant c_{p,\nu} \|u\|_{1,p,\nu};$$

(ii) *якщо $u_j \to u$ слабко $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, то $u_j \to u$ сильно в $L^1(\Omega)$;*

(iii) $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ *– рефлексивний простір.*

***Доведення.*** Нехай $u \in W^{1,p}(\nu, \Omega)$. Значить, $u \in L^1(\Omega)$. Зафіксуємо довільне $i \in \{1, \dots, n\}$. Використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$|D_i u| = (1/\nu)^{1/p} \nu^{1/p} |D_i u| \leqslant (1/\nu)^{1/(p-1)} + \nu |D_i u|^p \ \text{ м. с. на } \Omega.$$

Звідси, враховуючи друге включення (1) і сумовність функції $\nu|D_i u|^p$ на $\Omega$, виводимо, що $D_i u \in L^1(\Omega)$. Тепер можна зробити висновок, що $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Крім того, використовуючи нерівність Гельдера, встановлюємо

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (1/\nu)^{1/p}\,\nu^{1/p}\,|D_i u|\,dx \leqslant \int_\Omega |u|\,dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \left( \int_\Omega (1/\nu)^{1/(p-1)}\,dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_\Omega \nu\,|D_i u|\,dx \right)^{1/p} \leqslant c_{p,\nu} \|u\|_{1,p,\nu}.$$

Звідси випливає справедливість (i). З цього факту і компактності вкладення $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ випливає справедливість (ii). Доведення (iii) для вагового ізотропного простору $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ проводиться аналогічно доведенню твердження 2.2 з [15] для вагових анізотропних соболєвських просторів. Твердження доведено.

Далі, нехай для довільного $k > 0$ $T_k$ – функція на $\mathbb{R}$ така, що

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{якщо } |s| \leqslant k, \\ k\,\mathrm{sign}\, s, & \text{якщо } |s| > k. \end{cases}$$

Аналогічно відомим результатам для невагових просторів Соболєва (див., наприклад, [16, гл.2]) маємо: якщо $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ і $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ і для будь-якого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{м. с. на } \Omega. \tag{2}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ позначимо множину всіх функцій $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, що для будь-якого $k > 0$ маємо $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Ясно, що

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega). \tag{3}$$

Для довільних $u : \Omega \to \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$ покладемо

$$k(u,x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l\}.$$

**Означення 1.** *Нехай $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді $\delta_i u$ – функція на $\Omega$ така, що для будь-якого $x \in \Omega$*

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)\,(x).$$

**Означення 2.** *Якщо $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, то $\delta u$ – відображення $\Omega$ в $\mathbb{R}^n$ таке, що для будь-якого $x \in \Omega$ $\delta u(x)_i = \delta_i(x)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.*

**Твердження 2.** *Нехай $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Тоді для довільного $k > 0$ маємо $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{|u|<k}$ м. с. на $\Omega$, $i = 1,\ldots,n$.*

***Доведення.*** Доведення цього твердження проводиться аналогічно викладеному в [17] для невагового випадка.

З (2), (3) і твердження 2 випливає, що якщо $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, то $\delta_i u = D_i u$ м.с. на $\Omega$, $i = 1,\ldots,n$.

**Твердження 3.** *Нехай* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *і* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Тоді* $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *і для будь-якого* $k > 0$ *маємо*

$$D_i T_k(u-v) = \delta_i u - D_i v \quad \text{м.с. на } \{|u-v| < k\},\ i = 1,\dots,n.$$

***Доведення.*** Доведення цього твердження проводиться аналогічно викладеному в [15] для вагового анізотропного випадка.

**Твердження 4.** *Нехай* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *і* $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Тоді для будь-якого* $k > 0$ *маємо* $\nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w) \in L^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$.

***Доведення.*** Перш за все відмітимо, що існує множина $E \subset \Omega$ міри нуль така, що

$$\forall\, x \in \Omega\backslash E \qquad |w(x)| \leqslant \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Зафіксуємо $k > 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$. З означення зрізаючої функції випливає, що

$$\nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w) = 0 \quad \text{м.с. на } \{|u-w| \geqslant k\}. \tag{4}$$

Покладемо $k_1 = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$. Оскільки $\{|u-w| < k\}\backslash E \subset \{|u| < k_1\}$, використовуючи твердження 2, виводимо

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \quad \text{м.с. на } \{|u-w| < k\}.$$

З останньої рівності та твердження 3 випливає, що

$$\begin{aligned}\nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w) &= \nu|D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u)(D_i T_{k_1}(u) - D_i w) = \\ &= \nu|D_i T_{k_1}(u)|^p - \nu|D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i w \quad \text{м.с. на } \{|u-w| < k\},\end{aligned}$$

звідки

$$|\nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w)| \leqslant \nu|D_i T_{k_1}(u)|^p + \nu|D_i T_{k_1}(u)|^{p-1}|D_i w| \quad \text{м.с. на } \{|u-w| < k\}. \tag{5}$$

Застосуємо для оцінки другого доданку в правій частині (5) нерівність Юнга:

$$\begin{aligned}\nu|D_i T_{k_1}(u)|^{p-1}|D_i w| &= \nu^{1/p}\nu^{(p-1)/p}|D_i T_{k_1}(u)|^{p-1}|D_i w| \leqslant \\ &\leqslant \nu|D_i T_{k_1}(u)|^p + \nu|D_i w|^p \quad \text{м.с. на } \{|u-w| < k\}.\end{aligned} \tag{6}$$

З (5) і (6), враховуючи сумовність функцій $\nu|D_i T_{k_1}(u)|^p$ та $\nu|D_i w|^p$ на $\Omega$, виводимо, що функція $\nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w)$ є сумовною м.с. на $\{|u-w| < k\}$. Цей факт разом з (4) і означає потрібне. Твердження доведено.

**Твердження 5.** *Існує додатна стала* $c_0$, *яка залежить тільки від* $n, p$ *та* $\|1/\nu\|_{L^{1/(p-1)}(\Omega)}$, *така, що для довільної функції* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *маємо*

$$\left(\int_\Omega |u|^{n/(n-1)}dx\right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu|D_i u|^p dx\right)^{1/np}.$$

***Доведення.*** Це твердження є безпосереднім наслідком теореми вкладення для вагових анізотропних соболєвських просторів (див., наприклад, [15, твердження 2.9]).

**3. Єдиність ентропійного розв'язку задачі Діріхле.** В цьому розділі сформулюємо і доведемо основний результат даної роботи.

Нехай $g,\ f \in L^1(\Omega)$, $g \geqslant 0$ на $\Omega$. Розглянемо таку задачу Діріхле:

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i(\nu(x)|D_i u|^{p-2} D_i u) + g(x)e^u = f(x) \quad \text{в } \Omega, \tag{7}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{8}$$

**Означення 3.** *Ентропійним розв'язком задачі Діріхле (7), (8) називатимемо функцію $u \in \overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ таку, що:*

(i) $ge^u \in L^1(\Omega)$*;*

(ii) *для будь-яких* $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_k(u-w) \right\} dx + \int_\Omega g e^u T_k(u-w)\, dx \leqslant \int_\Omega f T_k(u-w)\, dx. \tag{9}$$

Відмітимо, що означення 3 коректне. Скінченність першого інтеграла у лівій частині (9) випливає з твердження 4, другого — з (i) та обмеженості $T_k$. Нарешті, скінченність інтеграла у правій частині (9) випливає зі включення $f \in L^1(\Omega)$ й обмеженості $T_k$.

Дамо спочатку два допоміжних результата, які будуть використовуватися у доведенні теореми про єдиність ентропійного розв'язку задачі Діріхле (7), (8).

**Лема 1.** *Нехай $u$ – ентропійний розв'язок задачі Діріхле (7), (8). Тоді існує невід'ємне число $M$ таке, що для будь-якого $k \geqslant 1$ справедлива нерівність*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant M k^{-\widehat{p}}. \tag{10}$$

***Доведення.*** Зафіксуємо довільну $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ і покладемо

$$M_* = 2\left\{ (4n)^{n-1} \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{n} \nu|D_i v|^p \right) dx + (1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}) \left( \int_\Omega g e^u\, dx + \|f\|_{L^1(\Omega)} \right) \right\},$$

$$M = \left(c_0 M_*^{1/p}\right)^{n/(n-1)}.$$

Нехай $k \geqslant 1$. Покладемо

$$k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|u-v|<k_1\}} \nu|\delta_i u|^p dx, \qquad J = \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|u-v|<k_1\}} \nu|\delta_i u|^{p-1}|D_i v|\, dx.$$

В силу (9) маємо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u D_i T_{k_1}(u-v) \right\} dx \leqslant \int_\Omega (f - g e^u) T_{k_1}(u-v)\, dx.$$

Звідси, враховуючи твердження 2 та 3, отримуємо

$$I \leqslant k_1\bigg(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega g e^u dx\bigg) + J.$$

В свою чергу, використовуючи нерівність Юнга, знаходимо, що

$$J \leqslant \frac{I}{2} + (4n)^{n-1} \int_\Omega \bigg(\sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p\bigg)\, dx.$$

З двох останніх оцінок виводимо нерівність

$$I \leqslant M_* k. \tag{11}$$

Далі, оскільки $|T_k(u)| = k$ на $\{|u| \geqslant k\}$, маємо

$$k^{n/(n-1)} \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_\Omega |T_k(u)|^{n/(n-1)}\, dx, \tag{12}$$

а так як $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, з (11) і тверджень 5 та 2 одержуємо

$$\bigg(\int_\Omega |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx\bigg)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^n \bigg(\int_\Omega \nu |D_i T_k(u)|^p dx\bigg)^{1/np} =$$

$$= c_0 \prod_{i=1}^n \bigg(\int_{\{|u|<k\}} \nu |\delta_i u|^p dx\bigg)^{1/np} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^n \bigg(\int_{\{|u-v|\leqslant k_1\}} \nu |\delta_i u|^p dx\bigg)^{1/np} \leqslant$$

$$\leqslant c_0 I^{1/p} \leq c_0 (M_* k)^{1/p}.$$

Звідси і з (12) виводимо нерівність (12). Лему доведено.

**Лема 2.** *Нехай $u$ – ентропійний розв'язок задачі Діріхле (7), (8), і нехай $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$, $h \geqslant 1$. Тоді*

$$\int_{\{h\leqslant|u-v|<h+k\}} \bigg\{\sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^p\bigg\}\, dx \leqslant 2k\bigg(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v|\geqslant h\}} g e^u\, dx\bigg) +$$

$$+ 2(4n)^{n-1} \int_{\{h\leqslant|u-v|<h+k\}} \bigg\{\sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p\bigg\} dx. \tag{13}$$

***Доведення.*** Покладемо

$$w = v + T_h(u-v), \quad k_1 = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

З (9) і твердження 2 випливає, що

$$\int_{\{|u-v|<k\}} \bigg\{\sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i T_{k_1}(u-w)\bigg\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant k\bigg(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v|\geqslant h\}} g e^u\, dx\bigg). \tag{14}$$

Покладемо

$$G_1 = \{h \leqslant |u-v| < h+k\}, \qquad G_2 = \{|u-v| < h\}.$$

Відмітимо, що

$$\{|u-v| < k\} = G_1 \cup G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = \varnothing. \tag{15}$$

Маємо

$$T_k(u-w) = T_{k_1}(u) - v - T_h(u-v) \quad \text{м.с. на} \;\; G_1, \quad T_k(u-w) = 0 \quad \text{на} \;\; G_2.$$

Отже, для довільного $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$D_i\, T_k(u-w) = D_i\, T_{k_1}(u) - D_i v \quad \text{м.с. на} \;\; G_1, \quad D_i\, T_k(u-w) = 0 \quad \text{м.с. на} \;\; G_2.$$

Звідси та з (14), (15) випливає, що

$$\int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx \leqslant \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i v \right\} dx +$$
$$+ k\left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geqslant h\}} g e^u \, dx \right). \tag{16}$$

Позначимо через $I$ перший інтеграл в правій частині нерівності (16). Тоді з (16) виводимо

$$\int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx \leqslant k\left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geqslant h\}} g e^u \, dx \right) + I. \tag{17}$$

Використовуючи нерівність Юнга, знаходимо, що

$$I \leqslant \frac{1}{2} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx + (4n)^{n-1} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right\} dx. \tag{18}$$

Відмітимо, що в силу твердження 2 для довільного $i \in \{1, \dots, n\}$ маємо $D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u$ м.с.на $G_1$. Враховуючи це, з (17) і (18) виводимо оцінку (13). Лему доведено.

Наступна теорема є основним результатом даної роботи.

**Теорема 1.** *Нехай $u_1$ та $u_2$ – ентропійні розв'язки задачі Діріхле (7), (8). Тоді $u_1 = u_2$ м.с. на $\Omega$.*

***Доведення.*** Через $c_i$, $i = 1, 2, \dots$, позначатимемо додатні сталі, залежні тільки від $n$.

Зафіксуємо довільну функцію $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ і покладемо

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p + |f| + g e^{u_j}, \; j = 1, 2.$$

З леми 2 випливає, що при $k \geqslant 1$, $h \geqslant k+1$ маємо

$$\int_{\{h-k \leqslant |u_j - v| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^p \right\} dx \leqslant c_1 k \int_{\{|u_j - v| \geqslant h-k\}} \Phi_j \, dx, \; j = 1, 2. \tag{19}$$

Зафіксуємо довільні $k \geqslant 1$, $h \geqslant k+1$. Покладемо

$$G = \{|u_1 - u_2| < k,\ |u_1 - v| < h,\ |u_2 - v| < h\},$$

$$G_1 = \{|u_1 - v| < h,\ |u_2 - v| < h\}, \quad G_2 = \{|u_1 - v| \geqslant h\} \cup \{|u_2 - v| \geqslant h\},$$
$$w = v + T_h(u_2 - v), \quad l = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

В силу означення 3 і твердження 2 маємо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu|\delta_i u|^{p-2}\delta_i u_1 D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx =$$
$$= \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu|D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{G_1} (f - ge^{u_1}) T_k(u_1 - u_2)\, dx + k\left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{G_2} ge^{u_1}\, dx \right). \quad (20)$$

Оцінимо зверху ліву частину нерівності (20). Для цього введемо множини

$$E' = \{|u_1 - w| < k,\ |u_2 - v| < h\}, \quad E'' = \{|u_1 - w| < k,\ |u_2 - v| \geqslant h\}.$$

Легко бачити, що

$$G \subset E'. \quad (21)$$

Крім того, маємо

$$E' \setminus G \subset \{h \leqslant |u_1 - v| < h + k\} \cap \{h - k \leqslant |u_2 - v| < h\}, \quad (22)$$

$$E'' \subset \{h - k \leqslant |u_1 - v| < h + k\}. \quad (23)$$

Дійсно, нехай $x \in E'$. Тоді $|u_1(x) - u_2(x)| < k$, $|u_2(x) - v(x)| < h$, $|u_1(x) - v(x)| \geqslant h$. Значить,

$$h \leqslant |u_1(x) - v(x)| \leqslant |u_1(x) - u_2(x)| - |u_2(x) - v(x)| < k + |u_2(x) - v(x)| < h + k.$$

Звідси випливає, що включення (20) справедливе.

Нехай тепер $x \in E''$. Отже,

$$|u_1(x) - w(x)| < k, \quad |u_2(x) - v(x)| \geqslant h. \quad (24)$$

В силу другої з цих нерівностей і означення функції $w$ робимо висновок, що $w(x) = v(x) + h \cdot sign(u_2(x) - v(x))$. Тоді, враховуючи першу з нерівностей (24), одержуємо

$$|u_1(x) - v(x)| \leqslant |u_1(x) - w(x)| + |w(x) - v(x)| < h + k,$$

$$h = |v(x) - w(x)| \leqslant |u_1(x) - v(x)| + |u_1(x) - w(x)| < |u_1(x) - v(x)| + k.$$

Значить, включення (23) справедливе.

Далі, оскільки

$$T_k(u_1 - w) = T_l(u_1) - T_l(u_2) \quad \text{м.с. на} \quad E',$$

для будь-якого $i \in \{1, \ldots, n\}$ маємо

$$D_i T_k(u_1 - w) = D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2) \quad \text{м.с. на} \quad E'. \tag{25}$$

Аналогічно,

$$T_k(u_1 - w) = T_l(u_1) - v - T_h(u_2 - v) \quad \text{м.с. на} \quad E'',$$

і, значить, для будь-якого $i \in \{1, \ldots, n\}$ маємо

$$D_i T_k(u_1 - w) = D_i T_l(u_1) - D_i v \quad \text{м.с. на} \quad E''. \tag{26}$$

Враховуючи (25) і (26), одержуємо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx =$$
$$= \int_{E'} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx +$$
$$+ \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i v] \right\} dx.$$

Звідси, використовуючи (21), виводимо, що

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_{G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx -$$
$$- \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-1} |D_i T_l(u_2)| \right\} dx -$$
$$- \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-1} |D_i v| \right\} dx. \tag{27}$$

Позначимо через $I'$ та $I''$ відповідно другий і третій інтеграли в правій частині нерівності (27). Використовуючи нерівність Юнга, отримуємо

$$I' = \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i\, T_l(u_1)|^p \right\} dx + \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i\, T_l(u_2)|^p \right\} dx, \tag{28}$$

$$I'' = \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i\, T_l(u_1)|^p \right\} dx + \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right\} dx. \tag{29}$$

Зауважимо, що в силу твердження 2, включень (22) і (23) та нерівності (19) маємо

$$\int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i\, T_l(u_1)|^p \right\} dx =$$
$$= \int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u_1|^p \right\} dx \leqslant c_1 k \int_{\{|u_1 - v| \geqslant h-k\}} \Phi_1\, dx, \tag{30}$$

$$\int_{E'\setminus G}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|D_i\,T_l(u_2)|^p\right\}dx=$$
$$=\int_{E'\setminus G}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|\delta_i u_2|^p\right\}dx\leqslant c_1k\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx.\quad(31)$$

З (28)–(31) і (22), (23) випливає, що

$$I'+I''\leqslant c_2k\left\{\int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}}\Phi_1\,dx+\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx\right\}.$$

Звідси і з (27) одержуємо

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|D_iT_l(u_1)|^{p-2}D_iT_l(u_1)D_iT_k(u_1-w)\right\}dx\geqslant$$
$$\geqslant\int_{G}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|D_iT_l(u_1)|^{p-2}D_iT_l(u_1)[D_iT_l(u_1)-D_iT_l(u_2)]\right\}dx-$$
$$-c_2k\left\{\int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}}\Phi_1\,dx+\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx\right\}.\quad(32)$$

Враховуючи, що в силу твердження 2

$$\nabla\,T_l(u_j)=\delta u_j\quad\text{м.с. на}\ \ G,\ \ j=1,2,$$

з (32) і (20) виводимо, що

$$\int_{G}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|\delta_iu_1|^{p-2}\delta_iu_1[\delta_iu_1-\delta_iu_2]\right\}dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{G_1}(f-ge^{u_1})T_k(u_1-u_2)\,dx+c_3k\left\{\int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}}\Phi_1\,dx+\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx\right\}.$$

Аналогічно цьому маємо

$$\int_{G}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu|\delta_iu_2|^{p-2}\delta_iu_2[\delta_iu_2-\delta_iu_1]\right\}dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{G_1}(f-ge^{u_2})T_k(u_2-u_1)\,dx+c_3k\left\{\int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}}\Phi_1\,dx+\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx\right\}.$$

Додаючи дві останні нерівності, заключаємо, що для будь-яких $k\geqslant1$, $h\geqslant k+1$ справедлива нерівність

$$\int_{\{|u_1-u_2|<k,|u_1-v|<h,|u_2-v|<h\}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\nu[|\delta_iu_1|^{p-2}\delta_iu_1-|\delta_iu_2|^{p-2}\delta_iu_2][\delta_iu_1-\delta_iu_2]\right\}dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\{|u_1-v|<h,|u_2-v|<h\}}g(e^{u_2}-e^{u_1})T_k(u_1-u_2)\,dx+$$
$$+c_3k\left\{\int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}}\Phi_1\,dx+\int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}}\Phi_2\,dx\right\}.\quad(33)$$

Очевидно, що

$$g(e^{u_2} - e^{u_1})T_k(u_1 - u_2) \leqslant 0 \quad \text{м.с. на } \Omega. \tag{34}$$

Зауважимо, що при $k \geqslant 1$ маємо meas $\{|u_j - v| \geqslant h - k\} \to 0$, $h \to +\infty$, $j = 1, 2$. Цей факт є наслідком леми 1. З нього, в свою чергу, випливає, що при $k \geqslant 1$

$$\int_{\{|u_j - v| \geqslant h-k\}} \Phi_j \, dx \to 0, \quad h \to +\infty, \; j = 1, 2. \tag{35}$$

Враховуючи (34), нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \nu[|\delta_i u_1|^{p-2}\delta_i u_1 - |\delta_i u_2|^{p-2}\delta_i u_2][\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \geqslant 0 \quad \text{м.с. на } \Omega,$$

і використовуючи лему Фату, з (33) і (35) виводимо, що

$$\delta u_1 = \delta u_2 \quad \text{м. с. на } \Omega. \tag{36}$$

Нехай знову $k \geqslant 1$, $h \geqslant k + 1$. Покладемо

$$z = T_h(u_1 - v) - T_h(u_2 - v).$$

Ясно, що $z \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Отже, $T_k(z) \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Тоді в силу твердження 5 і нерівності Юнга маємо

$$\left( \int_\Omega |T_k(z)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} \left( \int_\Omega \nu |D_i T_k(z)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{37}$$

Введемо множини

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{|z| < k, \;\; |u_1 - v| < h, \;\; |u_2 - v| < h\}, \\
H_2 &= \{|z| < k, \;\; |u_1 - v| < h, \;\; |u_2 - v| \geqslant h\}, \\
H_3 &= \{|z| < k, \;\; |u_1 - v| \geqslant h, \;\; |u_2 - v| < h\}, \\
H_4 &= \{|z| < k, \;\; |u_1 - v| \geqslant h, \;\; |u_2 - v| \geqslant h\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що

$$H_m \cap H_r = \varnothing, \; m \neq r, \; m, r = 1, \ldots, 4, \qquad \{|z| < k\} = \bigcup_{m=1}^{4} H_m. \tag{38}$$

Зафіксуємо довільне $i \in \{1, \ldots, n\}$. Враховуючи (2) і (38), одержимо

$$\int_\Omega \nu |D_i \, T_k(z)|^p \, dx = \sum_{m=1}^{4} \int_{H_m} \nu |D_i z|^p \, dx. \tag{39}$$

В силу твердження 3 і (36) маємо

$$D_i z = 0 \quad \text{м.с. на } H_1. \tag{40}$$

Стосовно множин $H_2$ і $H_3$ в першу чергу зауважимо, що

$$H_2 \subset \{h-k < |u_1 - v| < h\}, \quad H_3 \subset \{h-k < |u_2 - v| < h\}. \tag{41}$$

Крім того, в силу тверджень 2 і 3 маємо

$$D_i z = \delta_i u_1 - D_i v \ \text{ м.с. на } \ H_2, \tag{42}$$

$$D_i z = D_i v - \delta_i u_2 \ \text{ м.с. на } \ H_3. \tag{43}$$

Використовуючи (41)–(43) і (19), встановлюємо, що

$$\int_{H_2} \nu |D_i z|^p \, dx \leqslant 2^n (c_1+1) k \int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}} \Phi_1 \, dx, \tag{44}$$

$$\int_{H_3} \nu |D_i z|^p \, dx \leqslant 2^n (c_1+1) k \int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}} \Phi_2 \, dx. \tag{45}$$

Нарешті, в силу тверджень 2 і 3 маємо

$$D_i w = 0 \quad \text{м.с. на } \ H_4. \tag{46}$$

З (39), (40) і (44)–(46) випливає, що

$$\int_\Omega \nu |D_i T_k(z)|^p \, dx \leqslant 2^n (c_1+1) k \left\{ \int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}} \Phi_1 \, dx + \int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}} \Phi_2 \, dx \right\}.$$

Звідси і з (37) виводимо, що для будь-яких $k \geqslant 1$, $h \geqslant k+1$ справедлива нерівність

$$\left( \int_{\{|u_1-u_2|<k, |u_1-v|<h, |u_2-v|<h\}} |u_1-u_2|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leqslant$$

$$\leqslant c_0 c_4 k \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|u_1-v|\geqslant h-k\}} \Phi_1 \, dx + \int_{\{|u_2-v|\geqslant h-k\}} \Phi_2 \, dx \right\}^{1/p}.$$

Отриманий результат і твердження (35) дозволяють зробити висновок, що для будь-якого $k \geqslant 1$

$$\int_{\{|u_1-u_2|<k\}} |u_1-u_2|^{n/(n-1)} dx = 0.$$

Значить, $u_1 = u_2$ м.с. на $\Omega$. Тим самим теорему доведено.

### Список використаної літератури


1. Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis.* 1989. Vol. 87, No 1. P. 149–169.
2. Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures. *Communications in Partial Differential Equations.* 1992. Vol. 17, No 3-4. P. 641–655.
3. Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L. An $L^1$-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze. (4).* 1995. Vol. 22, No 2. P. 241–273.
4. Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P. Anisotropic equations in $L^1$. *Differential and Integral Equations.* 1996. Vol. 9, No 1. P. 209–212.

5. Bendahmane M., Karlsen K.H. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data. *Potential Analysis.* 2005. Vol. 22, No 3. P. 207–227.
6. Aharouch L., Azroul E., Benkirane A. Quasilinear degenerated equations with $L^1$ datum and without coercivity in perturbation terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 2006. No 19. P. 1–18. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2006.1.19.
7. Atik Y., Rakotoson J.-M. Local $T$-sets and degenerate variational problems. I. *Applied Mathematics Letters.* 1994. Vol. 7, No 4. P. 49–53.
8. Cavalheiro A.C. Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2008. Vol. 53, No 10. P. 945–956.
9. Cirmi G.R. On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data. *Ricerche di Matematica.* 1993. Vol. 42, No 2. P. 315–329.
10. Li F.Q. Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* 2007. Vol. 48, No 4. P. 647–658.
11. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with $L^1$-data. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2013. No 167. P. 1-17. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://edje.math.unt.edu.
12. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with $L^1$-data. *Proceedings of IAMM of NASU.* 2013. Vol. 26. P. 76–94.
13. Gorban Yu. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Open Mathematics.* 2017. Vol. 15. P. 768–786.
14. Gorban Yu. On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Matematychni Studii.* 2017. Vol. 47, No 1. P. 59–70.
15. Ковалевский А.А., Горбань Ю.С. Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с $L^1$-данными. Донецк : Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, 2007. 92 с. (Препринт. НАН Украины, Ин-т прикладной математики и механики; 2007.01).
16. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения: монография. Москва : Мир, 1983. 256 с.
17. Ковалевский А.А. О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с $L^1$-правыми частями *Український математичний вісник.* 2005. Т. 2, No 4. С. 507–545.

**Gorban Yu. S., Andreieva Yu. A., Belik A. O.** The uniqueness of the entropy solution of the Dirichlet problem for a model degenerate equation.

In the present paper, we deal with the Dirichlet problem for a model nonlinear second-order equation with isotropic and degenerate (with respect to independent variables) coefficients, lower term and $L^1$-right-hand side. The degeneracy with respect to independent variables is described by the presence of a weighted function in the equation's higher term. Our main result is the theorem on the uniqueness of entropy solution of the problem under consideration. It is proved under minimal conditions on the involved weighted function. Namely, we need these assumptions on its integrability for introduction of the corresponding weighted isotropic energy Sobolev space.

**Keywords:** degenerate elliptic equations, $L^1$-right-hand side, Dirichlet problem, entropy solution, uniqueness of the solution.

## References

1. Boccardo, L., & Gallouët, T. (1989). Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis.* Vol. 87, No 1. P. 149–169.
2. Boccardo, L., & Gallouët, T. (1992). Nonlinear elliptic equations with right hand side measures. *Communications in Partial Differential Equations.* Vol. 17, No 3-4. P. 641–655.
3. Bénilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, T., Gariepy, R., Pierre, M., & Vazquez, J.L. (1995). An $L^1$-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze. (4).* Vol. 22, No 2. P. 241–273.

4. Boccardo, L., Gallouët, T., & Marcellini, P. (1996). Anisotropic equations in $L^1$. *Differential and Integral Equations.* Vol. 9, No 1. P. 209–212.
5. Bendahmane, M., & Karlsen, K.H. (2005). Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data. *Potential Analysis.* Vol. 22, No 3. P. 207–227.
6. Aharouch, L., Azroul, E., & Benkirane, A. (2016). Quasilinear degenerated equations with $L^1$ datum and without coercivity in perturbation terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* No 19. P. 1–18. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2006.1.19.
7. Atik, Y., & Rakotoson, J.-M. (1994). Local $T$-sets and degenerate variational problems. I. *Applied Mathematics Letters.* Vol. 7, No 4. P. 49–53.
8. Cavalheiro, A.C. (2008). Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations.* Vol. 53, No 10. P. 945–956.
9. Cirmi, G.R. (1993). On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data. *Ricerche di Matematica.* Vol. 42, No 2. P. 315–329.
10. Li, F.Q. (2007). Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.* Vol. 48, No 4. P. 647–658.
11. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2013). Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with $L^1$-data. *Electronic Journal of Differential Equations.* No 167. P. 1-17. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://edje.math.unt.edu.
12. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2013). Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with $L^1$-data. *Proceedings of IAMM of NASU.* Vol. 26. P. 76–94.
13. Gorban, Yu. (2017). Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Open Mathematics.* Vol. 15. P. 768–786.
14. Gorban, Yu. (2017). On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Matematychni Studii.* Vol. 47, No 1. P. 59–70.
15. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2007). Degenerate anisotropic variational inequalities with $L^1$-data. Donetsk : Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, 92 p. (Preprint. NAS of Ukraine, Institute of Applied Mathematics and Mechanics; 2007.01). [in Russian]
16. Kinderlehrer, D., & Stampacchia, G. (1983). An introduction to variational inequalities and their applications: monography. Moscow: Mir, 256 p. [in Russian]
17. Kovalevsky, A.A. (2005). On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with $L^1$-right-hand sides. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* Vol. 2, No 4. P. 507–545. [in Russian]


Одержано 14.04.2021