УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).48-54

О. В. Зубарук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

ПРО АЛГЕБРУ АУСЛЕНДЕРА НАПІВГРУПИ, ПОРОДЖЕНОЇ ДВОМА АНУЛЬОВНИМИ 2-НІЛЬПОТЕНТНИМ І 2-ПОТЕНТНИМ ЕЛЕМЕНТАМИ

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура, а згодом, у 1955 р. (за допомогою комп'ютерної програми) Г. Е. Форсайт. В обох випадках опис отримано в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму. Існує 18 різних напівгруп третього порядку (напівгрупи S і T називаються антиізоморфними, якщо напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T^{op}, дуальній до напівгрупи T). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані в працях В. М. Бондаренка і Я. В. Заціхи. Зокрема, для комутативних напівгруп вони такі (в круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних; тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних e і 0, якщо вони є, не виписуються):

1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

Вони ж описали зображувальний тип напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). Автор, разом з В. М. Бондаренком, описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. У цій статті для єдиної такої (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) наднапівгрупи скінченного зображувального типу описана їхня матрична алгебра Ауслендера як одна із форм задання категорії зображень.

Ключові слова: поле, напівгрупа і наднапівгрупа, антиізоморфізм, визначальні співвідношення, матричні зображення, зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Згідно з [1, Теорема 1] всі напівгрупи третього порядку є ручними (означення ручних та диких матричних задач приведено в роботі Ю. А. Дрозда [2]). Серед них, якщо не розглядати ні циклічні напівгрупи, ні циклічні з приєднаним одиничним чи нульовим елементом, є лише три комутативних напівгрупи скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). Однією із таких напівгруп є напівгрупа, породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, матричні зображення якої вивчалися в роботі [1], а матричні зображення її стандартних (пов'язаних із визначальними співвідношеннями відносно мінімальної системи твірних) наднапівгруп – в роботі [3].

Ця робота присвячена опису алгебр Аусдендера для наднапівгруп скінченного зображувального типу.

2. Попередні відомості. Розглянемо напівгрупу S, породжену двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами, тобто напівгрупу з елементами $0, b, c$, (мінімальною) системою твірних b, c і визначальними співвідношеннями $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$, які в подальшому позначимо відповідно через (b), (c), (bc), (cb).

Введемо такі напівгрупи:

$S^{(b)} := S \setminus (b) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$S^{(c)} := S \setminus (c) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$S^{(bc)} := S \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $cb = 0$;

$S^{(cb)} := S \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$.

Покладемо

$S^{(x,y)} := S \setminus \{(x), (y)\}$ для $x, y \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$, $x \neq y$;

$S^{(x,y,z)} := S \setminus \{(x), (y), (z)\}$ для $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$.

Очевидно, що при перестановці x, y, z напівгрупи $S^{(x,y)}$ і $S^{(x,y,z)}$ не змінюються. Введені таким чином напівгрупи для напівгрупи S мають фактор-напівгрупу, ізоморфну S, тобто є наднапівгрупами напівгрупи S.

В роботі [3] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Для довільного поля K мають місце наступні твердження.*

1) $S^{(x)}$ *— напівгрупа скінченного зображувального типу для* $x \in \{(bc), (cb)\}$;
2) $S^{(x)}$ *— ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x \in \{(b), (c)\}$;
3) $S^{(x,y)}$ *— ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x, y \in \{(b), (c)\}$ *або* $x, y \in \{(bc), (cb)\}$;
4) $S^{(x,y)}$ *— дика напівгрупа для* $x \in \{(b), (c)\}$, $y \in \{(bc), (cb)\}$ *або* $x \in \{(bc), (cb)\}$, $y \in \{(b), (c)\}$;
5) $S^{(x,y,z)}$ *— дика напівгрупа для довільних* $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$.

Враховуючи, що $S^{(cb)^{op}} = S^{(bc)}$, де $S^{(cb)^{op}}$ — дуальна до $S^{(cb)}$ напівгрупа (з операцією множення $x \circ y = yx$), матричні зображення якої отримуються із матричних зображень $S^{(cb)}$ транспонуванням всіх матриць, по суті маємо лише одну наднапівгрупу скінченного зображувального типу – $S^{(cb)}$. В роботі [3] отримана канонічна форма її матричних зображень.

Теорема 2. *Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи* $N = S^{(cb)} := (0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$ *така:*

$$B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&E&0\\ 0&0&0&0&0&E&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&E&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&E&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&E&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&E&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Тут через B, C позначається відповідно матриця зображення, що відповідає твірному елементу b, c. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$).

Зауважимо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому елементу напівгрупи, завжди вважається нульовою.

3. Формулювання основного результату. Як і раніше, всі зображення розглядаються над полем K. Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (по одному представнику із кожного класу еквівалентності). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то і алгебра Ауслендера буде реалізовуватись в матричному вигляді і в цьому випадку її природно називати матричною алгеброю Ауслендера. Зауважимо, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників у класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри повної матричної алгебри відповідного порядку, а отже, і ізоморфними.

Нагадаємо, що алгебра ендоморфізмів матричного зображення T деякої напівгрупи S — це множина всіх матриць X таких, що $T(x)X = XT(x)$ для будь-якого $x \in T$. Зрозуміло, що коли напівгрупа задається твірними і визначальними співвідношеннями, то рівності $T(x)X = XT(x)$ достатньо розглядати лише для твірних елементів.

Теорема 3. *Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}(N)$ напівгрупи N над полем K складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K.

4. Доведення теореми 3. Розглянемо матричне зображення напівгрупи N, яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення переставно подібне прямій сумі зображень

1) $B_1 = (0)$, $C_1 = (1)$;

2) $B_2 = (0)$, $C_2 = (0)$;

3) $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

кожне з яких є, очевидно, нерозкладне.

Оскільки довільне зображення, що має канонічний вигляд, не містить інших прямих нерозкладних доданків, окрім 1)–5) (бо при наявності клітини E порядку $s > 1$ воно еквівалентне прямій сумі двох канонічних зображень меншої розмірності), то матрична алгебра Ауслендера задається рівностями $B_0X = XB_0$, $C_0X = XC_0$ як рівняннями відносно матриці $X = (x_{ij})$, $1 \le i, j \le 5$.

Легко обчислити, що рівність $C_0X = XC_0$ еквівалентна рівностям $x_{ij} = 0$ для $i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ і для $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9, j = 1, 2, 3$ (див., напр., [4, VIII, §2]).

Розглянемо тепер рівність $B_0X = XB_0$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0&0&0 \\ x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0&0&0 \\ x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}&x_{48}&x_{49} \\ 0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}&x_{58}&x_{59} \\ 0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}&x_{68}&x_{69} \\ 0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}&x_{78}&x_{79} \\ 0&0&0&x_{84}&x_{85}&x_{86}&x_{87}&x_{88}&x_{89} \\ 0&0&0&x_{94}&x_{95}&x_{96}&x_{97}&x_{98}&x_{99} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0&0&0 \\ x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0&0&0 \\ x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}&x_{48}&x_{49} \\ 0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}&x_{58}&x_{59} \\ 0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}&x_{68}&x_{69} \\ 0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}&x_{78}&x_{79} \\ 0&0&0&x_{84}&x_{85}&x_{86}&x_{87}&x_{88}&x_{89} \\ 0&0&0&x_{94}&x_{95}&x_{96}&x_{97}&x_{98}&x_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&x_{84}&x_{85}&x_{86}&x_{87}&x_{88}&x_{89} \\ 0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}&x_{68}&x_{69} \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}&x_{68}&x_{69} \\ 0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}&x_{78}&x_{79} \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&x_{12}&0&x_{11}&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{22}&0&x_{21}&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{32}&0&x_{31}&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{44}&x_{45}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{54}&x_{55}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{64}&x_{65}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{74}&x_{75}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{84}&x_{85}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&x_{94}&x_{95}&0&0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 доведена.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розглядаються матричні зображення наднапівгруп спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами. Описано явний вигляд алгебри Ауслендера для наднапівгруп скінченного зображувального типу цієї напівгрупи.

Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 1 (32). С. 36-49.
2. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. *Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР.* 1977. С. 104-114.
3. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами. *Вісник Київського національного університету. Сер. фіз.-мат. науки.* 2020, № 3. С. 110-114.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1966. 576 с.

Zubaruk O. V. On the Auslander algebra of a semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements.

Semigroups of the third order were first described in 1953 by T. Tamura, and later, in 1955 (with the help of a computer program) by G. E. Forsythe. In both cases, the description is obtained in terms of Kelly tables, up to isomorphism and antiisomorphism. There are 18 different semigroups of the third order (semigroups S and T are called anti-isomorphic if the semigroup S is isomorphic to the semigroup T^{op} dual to the semigroup T). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups are constructed in the works of V. M. Bondarenko and Ya. V. Zaciha. In particular, for commutative semigroups they are as follows (all elements of the semigroup are indicated in parentheses, and the minimal system of generators is indicated in angle brackets; trivial defining relations for unit and zero generators e and 0, if any, are not written):

1) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=0$, $bc=cb=0$;

2) $(0,c^2,c)=\langle c\rangle$: $c^3=0$;

3) $(0,b,c)=\langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=cb=0$;

4) $(0,b,e)=\langle b,e\rangle$: $b^2=0$;

5) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

They also described the representation type of third-order semigroups above a field and indicated the canonical form of matrix representations for semigroups of finite representation type (i.e., those that have, up to equivalence, a finite number of indecomposable representations). The author, together with V. M. Bondarenko, described the representation type of standard oversemigroups of the semigroup generated by two mutually annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. In this paper, for a single such (up to isomorphism and antiisomorphism) oversemigroup of finite representation type, their Auslander matrix algebra is described as one of the forms of specifying the category of representations.

Keywords: field, semigroup and oversemigroup, antiisomorphism, defining relations, matrix representations, representation type, canonical form, Auslander algebra.

References

1. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics, 1(32)*, 36-49 [in Ukrainian].
2. Drozd, Yu. (1977). O ruchnykh i dikikh matrychnykh zadachakh [About tame and wild matrix problems]. *Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukraine. SSR*, 104-114 [in Russian].
3. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzhenoyi vzayemno anul'ovnymy 2-potentnym i 2-nil'potentnym elementamy [On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, 3*, 110-114 [in Ukrainian].
4. Gantmakher, F. (1966). Teoriya matrits [Matrix theory]. *Moskow: Nauka* [in Russian].

Одержано 26.04.2021