УДК 519.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).76-84

Х. М. Присяжник

Національний університет "Львівська політехніка",
Асистент кафедри системи штучного інтелекту
yakymyshyn_hrystyna@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8446-1506

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З МІГРАЦІЄЮ

Окремим розділом випадкових процесів, що вивчає розмноження і перетворення певних частинок є теорія гіллястих процесів. Основним математичним припущенням, що виділяє гіллясті процеси серед інших випадкових процесів є перетворення частинок незалежно одне від одного. А самі закони розмноження і перетворення частинок піддаються певним закономірностям, у яких головну роль відіграє випадковість.

Гіллясті процеси часто використовуються як математичні моделі різних реальних процесів. Крім того, гіллясті процеси можуть описувати динаміку популяції частинок різної природи, зокрема, це можуть бути фотони, електрони, нейтрони, протони, атоми, молекули, клітини, мікроорганізми, рослини, тварини, особини, ціни, інформація тощо. Цей список можна продовжувати. Оскільки сторонні фактори часто існують, існує потреба вивчити різні модифікації цього процесу. Серед них є гіллясті процеси з імміграцією, еміграцією або поєднанням двох процесів, а саме процесів з міграцією у випадку дискретного або неперервного часу. Таким чином, гіллясті процеси мають досить широке застосування у різних науках.

У даній статті досліджується однорідний гіллястий процес з одним типом частинок, міграцією та неперервним часом $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. Припускається, що в початковий момент часу в системі знаходиться одна частинка. Процес задається перехідними ймовірностями, що визначаються інтенсивностями розмноження частинок, імміграції та еміграції частинок.

Основним результатом статті є граничні теореми для даної моделі процесу. Отримано граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу. Також отримано граничну теорему для критичного процесу.

Ключові слова: гіллястий процес, неперервний час, міграція, критичний процес, докритичний процес.

1. Вступ. Перші задачі з теорії гіллястих процесів з'явились у XIX ст. Проте інтенсивний розвиток цього напрямку теорії випадкових процесів розпочався у 40-х роках XX ст. Вперше міграційні процеси (поєднання еміграції та імміграції), розглянули С. В. Нагаєв і Л. В. Хан [1] у 1980 році. Вони побудували модель, у якій поряд з еволюцією частинок у системі в момент часу t $(t = 0, 1, ...)$ або з ймовірністю $P_k(t)$ $(k = 0, 1, ...)$ в популяцію іммігрує k частинок, або з ймовірністю $Q_r(t)(r = 1, ..., m)$ емігрує r із існуючих у момент часу t частинок, де m - довільне фіксоване натуральне число $(\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) + \sum_{r=1}^{m} Q_r(t) = 1)$.

Паралельно даний напрямок досліджували Н. Янев і К. Мітов [2]. Гіллястий процес з випадковою міграційною компонентою розглянуто як особливий випадок φ-контрольованих гіллястих процесів, де еміграція, імміграція та класична еволюція гіллястих процесів утворюють повну групу подій.

Тут слід відзначити, що у переважній більшості гіллясті процеси з міграцією розглядали для випадку дискретного часу. Хоча є і статті для гіллястих процесів з неперервним часом. Зокрема, у [3], [4], [5], [6].

У даній статті досліджується більш загальна модель однорідний гіллястий процес з одним типом частинок з неперервним часом та міграцією (імміграцією та еміграцією частинок) [7]. Імміграція, еміграція та еволюція відбуваються у випадкові моменти часу та визначаються інтинсивностями перехідних ймовірностей. У [7] знайдено вигляд диференціального рівняння для твірної функції та вигляд системи рівнянь Колмогорова для перехідних ймовірностей процесу. А у [8] знайдено вигляд математичного сподівання та другого моменту.

Робота складається з вступу та трьох розділів. У другому розділі наведено модель гіллястого процесу з міграцією у випадку неперервного часу та основні позначення. В третьому розділі доведено граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу. У четвертому розділу доведено граничну теорему для критичного гіллястого процесу.

2. Опис моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом. Розглянемо марківський гіллястий процес з одним типом частинок та міграцією $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ [7]. $\mu(t)$ позначає кількість частинок у момент часу $t \in [0,\infty)$.

Вважаємо, що у початковий момент часу в системі існує одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1.$$

Процес $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$ при $\Delta t \to 0$ задається такими перехідними ймовірностями

$$P\{\mu(t+\Delta t) = j | \mu(t) = i\} =$$

$$= \begin{cases} 1 + q_0\Delta t + o(\Delta t), & i = j = 0; \\ q_j\Delta t + o(\Delta t), & i = 0,\, j = 1, 2, ...; \\ (p_0 + \sum\limits_{l=1}^{m} r_l)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\, j = 0; \\ 1 + (q_0 + r_0 + p_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\, j = 1; \\ (p_j + q_{j-1})\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\, j = 2, ...; \\ \sum\limits_{l=i}^{m} r_l\Delta t + o(\Delta t) & 1 < i \le m,\, j = 0; \\ (ip_0 + r_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\, j = i - 1; \\ r_{i-j}\Delta t + o(\Delta t), & i = 3, ..., m,\, 1 < j < i - 1; \\ r_{i-j}\Delta t + o(\Delta t), & i = m+1, ...,\, i - m \le j < i - 1; \\ 1 + (q_0 + r_0 + ip_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\, i = j; \\ (ip_{j-i+1} + q_{j-i})\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, ...,\, i < j; \\ o(\Delta t), & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

де m – деяке фіксоване натуральне число, а p_k, q_k та r_n задовольняють умови

$$p_k \ge 0,\ k \ne 1,\ p_1 < 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0,$$

$$q_k \ge 0,\ k \ne 0,\ q_0 < 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0,$$

$$r_n \ge 0,\ n = \overline{1,m},\ r_0 < 0,\ \sum_{k=0}^{m} r_k = 0.$$

Зазначимо, що p_k $(k = 0, 1, ...)$ − інтенсивність розмноження частинок, q_k $(k = 0, 1, ...)$ − інтенсивність імміграції частинок, а r_n $(n = \overline{0, m})$ − інтенсивність імміграції частинок.

Введемо наступні позначення.

Твірну функцію процесу $\mu(t)$ будемо позначати

$$F(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\} s^n.$$

Також визначимо твірні функції для щільностей перехідних ймовірностей (інтенсивностей процесів еволюції, імміграції та еміграції)

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \ |s| \le 1, \ s \in \mathbb{C},$$

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n, \ |s| \le 1, \ s \in \mathbb{C},$$

$$r(s) = \sum_{n=0}^{m} r_n s^{-n}, \ 0 < |s| \le 1.$$

Наслідок 1 (див. [8]). *Математичне сподівання процесу $\mu(t)$ визначається рівністю*

$$A(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n - k) \int_0^t P_\mu(u, n) e^{-a_0 u} du\right) e^{a_0 t}. \quad (1)$$

Другий момент процесу $\mu(t)$ визначається співвідношенням

$$B(t) = \left(\frac{b_1 + b_2}{2a_0}(1 - e^{-2a_0 t}) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(u) e^{-2a_0 u} du - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} A^2_{n-k} \int_0^t P_\mu(t, n) e^{-2a_0 u} du\right) e^{2a_0 t}.$$

3. Гранична теорема для математичного сподівання гіллястого процесу з міграцією.

Нехай $a_0 = f'(1)$ $a_1 = g'(1) \neq 0$ $a_2 = r'(1) \neq 0$ $b_2 = r''(1) \neq 0$.

Теорема 1. *Нехай $a_0 < 0$ та a_1, a_2, b_2 -скінченні, тоді*

$$\lim_{t \to \infty} A(t) \le -\frac{2a_1 + 3a_2 + b_2}{2a_0}.$$

Доведення.

Розглянемо математичне сподівння процесу $\mu(t)$ (1)

$$A(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n - k) \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du\right) e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \Big(1 + \frac{a_1+a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du\Big) e^{a_0 t}.$$

Змінивши порядок сумування отримаємо

$$A(t) = -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \Big(1 + \frac{a_1+a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=n+1}^{m} r_k (n-k) \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du\Big) e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \Big(1 + \frac{a_1+a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^{m} (n-k) r_k\Big) e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \Big(1 + \frac{a_1+a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du \big(\sum_{k=n+1}^{m} n r_k - \sum_{k=n+1}^{m} k r_k\big)\Big) e^{a_0 t}.$$

Розглянемо границю при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \lim_{t\to\infty} \Big(1 + \frac{a_1+a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^{m} (n-k) r_k\Big) e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^{m} (n-k) r_k e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \sum_{n=0}^{m-1} \lim_{t\to\infty} \big(\int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du e^{a_0 t}\big) \sum_{k=n+1}^{m} (n-k) r_k.$$

Розглянемо більш детально

$$\lim_{t\to\infty} \big(\int_0^t P\{\mu(u)=n\} e^{-a_0 u} du e^{a_0 t}\big) \le \lim_{t\to\infty} \big(\int_0^t e^{-a_0 u} du e^{a_0 t}\big) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \big(\frac{e^{-a_0 t} - e^{-a_0 0}}{-a_0} e^{a_0 t}\big) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0}.$$

Враховуючи це, отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} A(t) \le -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}-1}{a_0} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=n+1}^{m} (n-k) r_k =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}-1}{a_0} \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}-1}{a_0} \sum_{k=1}^{m} \frac{-k-k^2}{2} r_k =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} + \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}-1}{a_0} \sum_{k=1}^{m} (k^2-k+2k) r_k =$$

$$= -\frac{a_1+a_2}{a_0} + \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} + \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}-1}{a_0} (2a_2+b_2) =$$

$$= \frac{2a_0+2a_1+3a_2+b_2}{2a_0} \lim_{t\to\infty} e^{a_0 t} - \frac{2a_1+3a_2+b_2}{2a_0}.$$

Звідси випливає твердження теореми.

4. Гранична теорема для критичного гіллястого процесу з міграцією.

Теорема 2. *Нехай* $a_0 = f'(1) = 0$, $b_0 = f''(1) > 0$ $a_1 = g'(1) > 0$ $a_2 = r'(1) > 0$ *та* b_0, a_1, a_2 *– скінченні, то при* $t \to \infty$

$$S_t(x) = P\left\{ \frac{2\mu(t)}{b_1 t} \le x \right\} \to S(x),$$

де

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2(a_1+a_2)}{b_1}\right)} \int\limits_0^x y^{\frac{2(a_1+a_2)}{b_1}-1} e^{-y} dy, & x \ge 0. \end{cases}$$

Доведення.

Знайдемо вигляд характеристичної функції процесу $F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})$ та знайдемо $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})$.

Покажемо, що

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t (g(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) + r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})))du = \frac{-2(a_1+a_2)}{b_1} ln(1-i\tau).$$

Аналогічно, як у [9] отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t g(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))du = \frac{-2a_1}{b_1} ln(1-i\tau).$$

Розглянемо

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))du$$

та виберемо довільне $0 < T < t$. Інтеграл представимо у вигляді

$$\int\limits_0^t r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))du = \int\limits_0^T r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))du - a_2 \int\limits_T^t \frac{1-e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}(1-e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} du -$$

$$-a_2 \int\limits_T^t \left(1 - \widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - \frac{1-e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}(1-e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} \right) du +$$

$$+\int\limits_T^t \left(r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right) du = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо.

При любому скінченному $T > 0$ і $t \to \infty$. Враховуючи, що $|r(\widehat{F}(u,s))| \leq a_2 e^{a_0 u}|s-1|$ отримаємо

$$|I_1| = \int\limits_0^T |r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))| du \leq \int\limits_0^T a_2 |e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}} - 1| du \leq \frac{2a_2|\tau|T}{b_1 t} \to 0.$$

Згідно з [9] при будь-якому скінченному $T > 0$ і $t \to \infty$ отримаємо, що $|I_3| \to 0$ та

$$I_2 = -\frac{2a_2}{b_1} \int\limits_T^t \frac{d(\frac{b_1}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})u)}{1 + \frac{b_1 u}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} du =$$

$$= -\frac{2a_2}{b_1} \left(\ln\left(1 + \frac{b_1 t}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})\right) - \ln\left(1 + \frac{b_1 T}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})\right) \right) =$$

$$= -\frac{2a_2}{b_1} \ln \frac{1 + \frac{b_1 t}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})}{1 + \frac{b_1 T}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} \to -\frac{2a_2}{b_1} \ln(1 - i\tau).$$

При $|s| \leq 1$ представимо функцію $r(s)$ у вигляді

$$r(s) = a_2(s-1) + \varepsilon(s)(s-1),$$

де $\varepsilon(s) \to 0$ при $s \to 1$. Звідси випливає, що

$$|I_4| = \int\limits_T^t \left| r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right| du = \int\limits_T^t \left| a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right| du \leq$$

$$\leq \left| \widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1 \right| \int\limits_T^t \varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du \leq$$

$$\leq \frac{2\tau}{b_1 t}(t - T) \sup_{T \leq u \leq 1, |s| \leq 1} \left| \varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) \right| \to 0$$

при $t \geq T \to \infty$.

Отже, ми отримали що потрібно було показати.

Розглянемо

$$\sum_{n=0}^{m} \int\limits_0^t P\{\mu(x) = n\} \sum_{k=n+1}^{m} r_k (1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s)) e^{\int\limits_0^{t-x} (g(\widehat{F}(u,s)) + r(\widehat{F}(u,s))) du} dx.$$

Відомо, що у випадку критичного процесу при $a_0 = f'(1) = 0$ при скінченному $b_0 = f''(1) > 0$ має місце асимптотична формула

$$1 - \widehat{F}(t, s) = \frac{1-s}{\frac{b_1 t}{2}(1-s)+1}(1 + \alpha(t, s)),$$

де $\alpha(t, s) \to 0$ при $t \to \infty$ рівномірно в $\mid s \mid \leq 1$.

Розглянемо

$$1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s) = 1 - \left(1 - \frac{1-s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)+1}(1 + \alpha(t-x, s))\right)^{n-k} =$$

$$= 1 - \left(\frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1+\alpha(t-x,s)) + 1 + \alpha(t-x,s) - 1 + s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)+1}(1+\alpha(t-x,s))\right)^{n-k} =$$

$$= 1 - \left(\frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1+\alpha(t-x,s)) + \alpha(t-x,s) + s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)+1}(1+\alpha(t-x,s))\right)^{n-k}$$

При $t \to \infty$ отримаємо, що $\frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1+\alpha(t-x,s))+\alpha(t-x,s)+s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)+1} \to 1$, а

$$1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s) \to 0.$$

Враховуючи це, ми отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_0^t P\{\mu(x) = n\} \sum_{k=n+1}^{m} r_k(1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s)) e^{\int\limits_0^{t-x}(g(\widehat{F}(u,s)) + r(\widehat{F}(u,s)))du} dx \leq$$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_0^t \sum_{k=n+1}^{m} r_k(1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s)) e^{\int\limits_0^{t-x}(g(\widehat{F}(u,s)) + r(\widehat{F}(u,s)))du} dx = 0.$$

Зазначимо, що при $t \to \infty$ твірна функція

$$\widehat{F}(t, s) = 1 - \frac{1-s}{\frac{b_1 t}{2}(1-s)+1}(1 + \alpha(t, s)) \to 1.$$

Таким чином, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) = \frac{-2(a_1 + a_2)}{b_1} ln(1 - i\tau).$$

5. Висновки. У даній статті продовжено дослідження однорідного гіллястого процесу з одним типом частинок з неперервним часом та міграцією (імміграцією та еміграцією частинок) [7]. Доведено граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу та граничну теорему для критичного гіллястого процесу.

Список використаної літератури

1. Нагаев С. В., Хан Л. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией. *Теория вероятностей и ее применения.* 1980, Вип. XXV, С. 523–534.

2. Yanev N., Mitov K. Controlled branching processes: the case of random migration. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences.* 1980, Vol. 33, P. 473–475.
3. Алимов Д., Решетняк В. Н. Ветвящийся процесс с иммиграцией и ограниченой эмиграцией. *Прикладные задачи теории вероятностей. Сб. научн. труд. Ин-т математики АН УССР.* 1982, С. 4–14.
4. Srivastava O. P., Gupta S. C. On a countinuous-time branching process with migration. *Statistica.* 1989, Vol. XLIX, No. 4, P. 547–552.
5. Chen A. Y., Renshaw E. Markov branching processes regulated by emigration and large immigration. *Stochastic Processes and their Applications.* 1995, Vol. 57, P. 339–359.
6. Rahimov I., Al-Sabah W. S. Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration. *Arab J. Math. Sci.* 2000, Vol. 6, No. 2, P. 81–97.
7. Якимишин Х. Рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією. *Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат.* 2017, Вип. 84. С. 119–125.
8. Базилевич І. Б., Якимишин Х. М. Диференціальні рівняння для моментів та твірної функції кількості перетворень гіллястого процесу з неперервним часом та міграцією. *Буковинський математичний журнал.* 2019. Вип. 7, № 1. С. 3–13. DOI:https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.003.
9. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. Москва: Наука, 1971. 436 с.

Prysyazhnyk K. M. Boundary theorems of branching process with migration.

A separate section of random processes studies laws of reproduction and transformation of particles and it is the theory of branching processes. The basic mathematical assumption distinguishes branching processes among other random processes is the transformation of particles independently from one another. The laws of reproduction and transformation of particles are subject to regularities, in which randomness plays a major role.

Branched processes are often used as mathematical models of different real processes, in particular, physical, chemical, biological, genetic, demographic, environmental, economic, technical and others. In addition, branching processes can describe the population dynamics of particles of different nature, in particular, they can be photons, electrons, neutrons, protons, atoms, molecules, cells, microorganisms, plants, animals, individuals, prices, information, etc. This list can be continued. Thus, branching processes are quite widely used in various sciences. Since third party factors often exist, there is a need to study different modifications of this process. Among them are branching processes with immigration, emigration, or a combination of two processes, namely processes with migration for the case of discrete or continuous time.

This article investigates a homogeneous branching process with one particle type, migration, and continuous time $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. It is assume that there is one particle in the system at the beginning. The process is defined by transient probabilities, determined by the intensities of particle reproduction, immigration, and emigration

The main result of the article is the boundary theorems for this process model. The boundary theorem for mathematical expectation in the case of a subcritical process is obtained. A boundary theorem for the critical branching process with migration and continuous-time is also obtained.

Keywords: branching process, migration, continuous time, critical process, subcritical process.

References

1. Nagaev, S. V., & Khan L. V. (1980). Limit theorems for Galton-Watson branching processes with migration. *Theory Probab. Appl., 25*, 523-534 [in Russian].
2. Yanev, N., & Mitov, K. (1980). Controlled branching processes: the case of random migration. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 33*, 473-475.
3. Alimov, D., & Reshetnyak, V. N. (1982). Branching process with immigration and limited emigration. *Applied problems of probability theory. collection of scientific papers, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 4-14 [in Russian].

4. Srivastava, O. P., & Gupta, S. C. (1989). On a countinuous-time branching process with migration. *Statistica, XLIX, 4*, 547-552.
5. Chen, A. Y., & Renshaw, E. (1995). Markov branching processes regulated by emigration and large immigration.*Stochastic Processes and their Applications, 57*, 339-359.
6. Rahimov, I., & Al-Sabah, W. S. (2000). Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration.*Arab J. Math. Sci., 6(2)*, 81-97.
7. Yakymyshyn, Kh. (2017). Equation for generation function for branching processes with migration. *Visnyk of the Lviv University, Ser. of Mechanics and Mathematics, 84*, 119-125 [in Ukrainian].
8. Bazylevych, I., & Yakymyshyn, K. (2019). Differential equations for moments and the generating function of number of transformations for branching process with continuous time and migration. *Bukovinian Mathematical Journal, 7(1)*, 3-13. https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.003 [in Ukrainian].
9. Sevastyanov, B. A. (1971). Branching processes. *Moscow: Izdatelstvo Nauka* [in Russian].

Одержано 30.04.2021