

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).105-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).105-113)**С. Ю. Бабич¹, Ю. П. Глухов², В. Ф. Лазар³**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
професор, доктор технічних наук
babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 1. ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ РЕЛЕЯ ВЗДОВЖ КРИВОЛІНІЙНИХ ГРАНИЦЬ (ЦИЛІНДР, СФЕРА) ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ТІЛ

Присвячується 55 річчю математичного факультету УжНУ

Дана стаття присвячена дослідженню розповсюдження поверхневих хвиль Релея вздовж криволінійних границь попередньо напружених тіл. Розглядаються два типи циліндрів, а саме: суцільний нескінченно довгий циліндр кругового поперечного перерізу радіуса R і такий же циліндр з порожниною. Дослідження проведені у випадку двох видів навантаження, а саме: для осьового стиску і все сторонньої рівномірної початкової деформації тіл. Причому у випадку циліндрів поверхнева хвиля розповсюджується вздовж циліндричної поверхні у напрямі кругової координати θ .

Отримані дисперсійні рівняння, які дають можливість знайти фазові швидкості поверхневих хвиль Релея. При великих значеннях хвильового числа p , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола асимптотичного характеру.

Чисельні результати проведені, коли циліндр завантажений у напрямі осі Ox_3 . На основі одержаних чисельних розрахунків одержані кількісні і якісні результати впливу початкових напружень на фазову швидкість поверхневих хвиль Релея. Зокрема, при конкретній частоті швидкість поверхневої хвилі Релея лінійно залежить від початкових напружень в рамках прийнятої точності обчислень.

Одержані результати можуть бути використані при розробці фізичних основ ультразвукових не руйнуючих методів визначення напружень стиску у при поверхневих шарах тіла.

Ключові слова: контактні напруження, комплексні потенціали, фазові швидкості, жорсткі штампи, рухомі навантаження, хвилі Релея, напружено-деформований стан.

1. Вступ. Даний цикл робіт «Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями» складається з трьох окремих статей, а саме: 1) Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл; 2) Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з

початковими напруженнями ; 3) Динамічні задачі у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень.

Велику увагу в роботі приділено дослідженню закономірностей розповсюдження пружних поверхневих хвиль Релея вздовж плоских і криволінійних границь тіл з початковими (залишковими) напруженнями. Останні дослідження тісно пов'язані з контактними задачами (для встановлення явищ "резонансного характеру"). Крім того, такі дослідження мають і самостійне значення. Зокрема, для розробки не руйнуючих методів визначення початкових напружень у при поверхневих шарах попередньо напружених тіл. Причому результати другої статті одержані на основі комплексних потенціалів, введених академіком НАН України Гузем О. М. і одним з авторів даної роботи. Одержані якісні і кількісні ефекти впливу початкових (залишкових) напружень на характер хвильових процесів і на основні характеристики контактної взаємодії. Для даної роботи характерним і загальним є те, що: по-перше, всі основні розглянуті тіла - пружні; по друге, усі основи (тіла) – попередньо напружені.

Актуальність таких досліджень не повинна викликати сумнівів, оскільки початкові напруження практично присутні у всіх елементах сучасних конструкцій. Як відомо, природа виникнення початкових напружень має довільну структуру. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкційних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на міцнісні характеристики матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Особливо значно впливають залишкові напруження на міцнісні характеристики матеріалів наряду з низькою температурою, агресивністю середовищ (в металургійній, хімічній і в нафтопереробній промисловості) і різноманітними концентраторами. Вони значно понижують міцність матеріалів, їх стійкість, впливають на перехід металу в хрупкий стан. Разом з вивченням негативного впливу залишкових напружень в останні роки розробляються методи, які дозволяють використовувати початкові напруження для підвищення довговічності і надійності металоконструкцій і деталей машин.

Необхідно зазначити, що результати даних досліджень на протязі багатьох років проводились в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка Гудзь А. Н. і частково на кафедрі машинобудування, природничих наук та інформаційних технологій Мукачівського державного університету і належить авторам даної роботи. Також необхідно зазначити, що за результатами даного циклу робіт одним із авторів отримано Державну премію України в галузі науки і техніки (2016р.), а також премію ім. Динника О. М. НАН України (2019р.)

У даній статті у достатньо загальній формі досліджені закономірності розповсюдження поверхневих гармонічних пружних хвиль Релея вздовж криволінійних границь (круговий циліндр, циліндрична порожнина у нескінченному тілі і сфера) з початковими напруженнями. Основні результати досліджень наведені в працях [1-4].

2. Постановка задачі і основні співвідношення. Під поверхневими гармонічними хвилями у пружних тілах з початковими напруженнями будемо розуміти гармонічні хвилі, які задовольняють наступним двом умовам: по перше, хвилі розповсюджуються вздовж вільної або невольної поверхні і її амплітудні

величини затухають при віддаленні від вільної поверхні (ця умова аналогічна умовам лінійної класичної теорії пружності), по друге, у випадку відсутності початкових напружень, розглядувані поверхневі хвилі переходять у поверхневі хвилі класичної лінійної (без початкових напружень) теорії пружності.

Дослідження розповсюдження пружних хвиль у попередньо напружених тілах дають можливість розв'язати дві задачі. Перша задача полягає у визначенні пружних модулів третього порядку, які використовуються у фізиці твердого тіла, а друга – дослідити розподіл напружень. Розроблені неруйнуючі методи визначення початкових напружень на основі закономірностей розповсюдження пружних хвиль у нескінченних тілах не дають можливостей визначення початкового напруженого стану у приповерхневих шарах. У зв'язку з цим виникає теоретична і практична зацікавленість дослідження поширення поверхневих хвиль Релея для попередньо напружених тіл з криволінійними границями. При проведенні числових розрахунків використовувались експериментальні дані, одержані в Інституті електрозварювання НАН України [6]. Необхідно зазначити, що у випадку тільки попереднього осевого стиску суцільного циліндра дисперсійне рівняння може бути одержане на основі аналогії, яка існує між лінійними і лінеаризованими задачами теорії пружності. У роботі встановлені необхідні і достатні умови існування такої аналогії. У загальному випадку (для довільних початкових станів) не існує аналогії між лінійними і лінеаризованими задачами теорії пружності. Для частинних випадків однорідного початкового стану такі аналогії існують. Встановлені аналогії дають можливість використати відомі розв'язки лінійних задач, зробивши відповідні заміни.

Як уже зазначалось вище для кругового суцільного циліндру така аналогія існує у випадку осевого стиску. У загальному випадку (для довільних навантажень P_m), наприклад, для “мертвих” навантажень ($P_m = 0$) всесторонньої рівномірної початкової деформації лінеаризовані задачі не зводяться до лінійних задач, коли постійні Ляме залежать від початкових деформацій, оскільки в граничних умовах в напруженнях з'являється додатковий член з множником σ_0^* . Причому рівняння руху зводяться до рівнянь Ляме. Для конкретного випадку, коли поверхневе навантаження діє в напрямку нормалі до граничної поверхні і не змінює напрямку (завжди направлене по нормалі) і величину при деформації, тобто маємо випадок “слідкувального” навантаження, то граничні умови лінеаризованої задачі зводяться до лінійних граничних умов. У роботі розглянемо нескінченний циліндр кругового поперечного перерізу при такому, у загальному випадку, початковому напружено-деформованому осесиметричному стані:

$$(\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = 0, \sigma_{33}^{*0} = -p_3^* = const), \lambda_1 \equiv \lambda_2; \lambda_3 \neq 0. \quad (1)$$

Для осесиметричного навантаження буде виникати осесиметричний початковий напружено-деформований стан (1) тільки у тому випадку, коли тіло є ізотропним або трансверсально - ізотропним, причому у останньому випадку вісь ізотропії повинна співпадати з віссю Ox_3 ; надалі будемо приймати дані умови відносно властивостей матеріалу циліндра.

Розглядається циліндр кругового поперечного перерізу радіуса R у недеформованому стані. Дослідимо задачу про розповсюдження поверхневих хвиль Релея на циліндричній поверхні, тобто побудуємо точні розв'язки лінеаризованих рівнянь теорії пружності [4], які задовольняють умовам відсутності збурень

поверхневих хвиль на циліндричній поверхні. Нехай вздовж циліндричної поверхні у напрямі кругової координати θ поширюється поверхнева хвиля. Крім цього, припустимо, що залежність розв'язку від координати θ дається множителем $e^{+ip\theta}$, де p – безрозмірне кутове хвильове число. Будемо розглядувати тільки такі поверхневі хвилі, які при прямуванні радіуса кривизни циліндричної поверхні R до нескінченості і скінченному відношенні P/R , переходять у релеєві хвилі, які розповсюджуються вздовж плоскої границі пружного півпростору.

Як звичайно хвильове поле вважається залежним від часу за законом $e^{-i\omega t}$, тобто розглядаємо гармонічне коливання. Розглядаючи розв'язки лінеаризованих рівнянь руху [1] у рамках теорії скінчених початкових деформацій у нескінченному інтервалі $-\infty < \theta < \infty$, вважаємо, що для поверхневої хвилі, яка розповсюджується в напрямі кругової координати θ , p може приймати і цілі, і дробові значення.

Дослідження розповсюдження поверхневих хвиль проведемо для нескінченно довгого суцільного циліндра і циліндричної порожнини у нескінченно пружному середовищі, які виготовлені із стисливого матеріалу. При зроблених вище припущеннях у задачі для суцільного циліндра приймаємо, щоб розв'язок був обмеженим для $r = 0$, а у випадку циліндричної порожнини – задовольняв принципу затухання у всій області $r \gg R$. Така постановка задачі відповідає послідовним розповсюдженням поверхневої хвилі вздовж циліндра.

3. Метод розв'язку. Для суцільного циліндра кругового поперечного перерізу розв'язки хвильових рівнянь

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{\rho}{a_{11}\lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_1 = 0 \\ \left(\Delta - \frac{\rho}{\mu_{12}\lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{\Psi} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

можна побудувати у циліндричній круговій, еліптичній і параболічній системі координат і, відповідно, одержати частинні (дисперсійні) рівняння. Причому, у випадку еліптичної і параболічної системах координат одержання дисперсійних рівнянь пов'язано з великими труднощами, оскільки при одержанні таких рівнянь прийдеться мати справу з визначниками нескінчених порядків.

Таким чином, розв'язки хвильових рівнянь (2), які при $r = 0$, будуть обмежені, згідно [1] можна зобразити у формі

$$\Phi_1 = Ae^{ip\theta} I_p(\xi_1 r); \bar{\Psi} = Be^{ip\theta} I_p(\xi_2 r). \quad (3)$$

Тут введені наступні позначення: $p = 2\pi R/\Lambda = kR$ – безрозмірне кутове хвильове число; $J_p(\xi_i r)$; ($i = 1, 2$) функції Бесселя першого роду; A і B – довільні постійні. Величини Λ і k є, відповідно довжина хвилі і хвильове число.

Розв'язки (3) повинні задовольняти граничним умовам, які для кругового циліндра у випадку, коли на поверхні циліндра відсутні збурення $p_r^* = p_s^* = 0$ мають вигляд [3]

$$\begin{cases} [\lambda_1^2 (u_{11} + \sigma_{11}^{*0} \lambda_1^{-2}) u_{r,r} + \lambda_1^2 u_{12} (\frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} u_r)] |_{r=R} = 0 \\ \lambda_1^2 \mu_{12} [(1 + \sigma_{11}^{*0} \lambda_1^{-2} \mu_{12}^{-1}) u_{\theta,r} + \frac{1}{r} u_{r,\theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}] |_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо випадок, коли початковий напружений стан циліндра визначається умовами (1), тобто циліндр завантажений в напрямку осі OX_3 , задовольняють граничні умови (4) з врахуванням (1) після звичайної процедури одержимо

дисперсійне рівняння у такому вигляді:

$$a_2 \left[\frac{2}{y} \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) + a_3 x \right] \frac{I_{p+1}(v)}{I_p(v)} + 2a_4 \left[\frac{1}{y} \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) - \frac{x}{B_1 \lambda_1^2} \right] \frac{I_{p+1}(w)}{I_p(w)} - 2a_2 a_4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \frac{I_{p+1}(v)}{I_p(v)} \frac{I_{p+1}(w)}{I_p(w)} - \frac{x}{B_1} \left[\frac{1}{y} (a_3 B_1 - 2da_1) \cdot x \left(1 - \frac{x}{y} \right) - da_1 a_3 x \right] = 0 \quad (5)$$

Тут $x = k_t R$, $a_1 = \frac{\mu}{a_{11} \lambda_1^2}$, $a_2 = \sqrt{a_1}$, $a_3 = \frac{\mu}{\mu_{11} \lambda_1^2}$, $a_4 = \sqrt{a_3}$, $b_1 = \frac{a_{12} - a_{11}}{\mu}$, $d = \frac{a_{11}}{\mu}$, $v = a_2 x$, $w = a_4 x$, $c = \frac{\omega}{k}$ – фазова швидкість поверхневої хвилі, c_t – швидкість хвилі зсуву у не навантаженому циліндрі, $y = \frac{c}{c_t}$, $p = \frac{x}{y}$.

Як частинний випадок із виразу (5) маємо дисперсійне рівняння для швидкості хвилі Релея у півпросторі з початковими напруженнями, коли $p \rightarrow \infty$. Отже, дисперсійне рівняння для півпростору з початковими напруженнями має такий вигляд:

$$\eta_R^6 - 8 \frac{\mu_{12}}{\mu} \lambda_1^2 \eta_R^4 + 8 \frac{\mu_{12}^2}{\mu^2} \lambda_1^4 \left(3 - 2 \frac{\mu_{12}}{a_{11}} \right) \eta_R^2 - 16 \frac{\mu_{12}^3}{\mu^3} \lambda_1^6 \left(1 - \frac{\mu_{12}}{a_{11}} \right) = 0, \quad (6)$$

де $\eta_R = \frac{c_R}{c_t}$, c_R – швидкість хвилі Релея в напруженому тілі з плоскою границею. Величини a_{12} , μ_{12} визначаються із виразів (4).

Таким чином, досліджуючи вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль у циліндрі необхідно безпосередньо зв'язати чисельно частотне (дисперсійне) рівняння (5). При великих значеннях хвильового числа p , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола, для фазової швидкості одержані результати асимптотичного характеру. Аналогічно суцільному циліндру у роботі розглянуто циліндричну порожнину кругового поперечного перерізу в нескінченному пружному просторі. Чисельні результати проведені, коли циліндр навантажений у напрямі осі OX_3 . У рамках потенціалу Мурнагана на основі чисельних розрахунків досліджено вплив початкових напружень на фазові швидкості поверхневих хвиль, які розповсюджуються вздовж циліндричної поверхні. Аналогічно циліндру у даній статті в рамках теорії великих початкових деформацій досліджена задача розповсюдження поверхневих хвиль Релея на сфері при всесторонній рівномірній початковій деформації. Дослідження проведені у випадку двох типів навантаження: «слідкувального» і «мертвого». Задача розв'язана методом шарових векторів причому для «слідкувального» навантаження дисперсійне рівняння на основі аналогії, яка існує між лінійними і лінеаризованими задачами. Оскільки сферична поверхня обмежена, то як і у випадку відсутності початкових напружень вважаємо [7], що в полюсах сфери $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ (r, θ, φ – сферичні координати) розміщені «джерело» і «стік» хвиль, які відповідають особливим точкам розв'язків рівнянь. Така постановка задачі дає можливість вважати «джерело» і «стік» хвиль еквівалентними один одному. При зроблених допущеннях хвилі розповсюджуються від полюсів з однаковими амплітудами в « $+\theta$ » і « $-\theta$ » напрямках. У результаті накладання розповсюджуваних таким чином хвиль, дістаємо стоячі хвилі, регулярні у всіх точках сфери. Зауважимо, що у випадку півпростору «джерело» і «стік» хвиль знаходились на нескінченності. У роботі доведено, що для великих значень l , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола, фазова швидкість поверхневих хвиль Релея на сфері незначно

відрізняється від швидкості хвиль Релея у півпросторі. У цьому випадку має місце вираз $c = c_R(1 + \delta)$. Тут δ мала величина, яка залежить від пружних властивостей середовища, початкових напружень, R і l , причому $\delta \rightarrow 0$, коли $e \rightarrow \infty$; c_R – швидкість хвилі Релея у завантаженому тілі з плоскою границею; c – фазова швидкість поверхневої хвилі на сфері. Аналогічно циліндру [8] дисперсійні рівняння відповідно для: «слідкувального» і «мертвого» навантажень одержані у випадку потенціалу довільної форми. У роботі доведено, що тільки врахування залежності пружного потенціалу від усіх трьох інваріантів тензору деформацій Гріна дозволяє пояснити експериментально встановлені закономірності розповсюдження пружних хвиль у ізотропному тілі з початковими напруженнями. Вплив початкових напружень на фазові швидкості поверхневих хвиль досліджений у рамках потенціалу Мурнагана, залежно від трьох алгебраїчних інваріантів A_1, A_2, A_3 тензору деформацій Гріна. Розглянуто випадок досить жорстких матеріалів, коли у формулах для визначення a_0, b_0, λ_1^2 можна обмежитись лінійними наближеннями σ_0^*/μ . Числові значення постійних третього порядку a, b, c і параметрів λ, μ відповідають сталі марки 09Г2С [6]. В роботі [2] побудовані графіки залежності c_0/c_t від безрозмірної частоти $k_t R$ причому c_0 – фазова швидкість поверхневої хвилі Релея у ненавантаженої сфері, а c_e – швидкість хвилі зсуву.

Необхідно зазначити, що вперше розповсюдження поверхневих хвиль Релея для півпростору з початковими напруженнями (плоский випадок) було розглянуто в роботі [9]. В [10] цим же автором досліджено вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль у нескінченно довгому циліндрі із нестисливого матеріалу. Грунтовний огляд результатів для пружних хвиль (в тому числі для тіл з початковими напруженнями приведений у монографії [11]). І зовсім недавно (2019р.) опублікована стаття [12], в якій також досліджені деякі питання розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями (циліндр, сфера). Грунтовний огляд результатів для пружних хвиль (у тому числі і поверхневих) для тіл з початковими напруженнями наведений у монографії [12]. І на кінець відмітимо, що деякі результати, які стосуються розповсюдження поверхневих хвиль Релея для попередньо напружених тіл були одержані зарубіжними вченими [13-15]. Так, в [13] досліджено розповсюдження релеєвських хвиль в півпросторі з однорідними початковими напруженнями. В роботі [14] досліджується розповсюдження термопружних релеєвських хвиль, а в [15] – розповсюдження поверхневих хвиль Релея в матеріалі з пружними потенціалами Муні.

Слід зауважити, що усі наведені в даній роботі результати одержані у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для довільної структури пружного потенціалу. Такий підхід на наш погляд має деякі переваги у порівнянні з дослідженнями для конкретних видів пружного потенціалу [13-15]. Таким чином, у даній праці дослідження багато чисельних динамічних задач проведені в єдиній загальній формі для стисливих і нестисливих попередньо напружених тіл для довільної структури пружного потенціалу. І тільки на завершальній стадії досліджень для одержання числових результатів використовувались конкретні пружні потенціали. Необхідно зазначити, що у випадку відсутності початкових напружень аналогічні дослідження для циліндра і циліндричної порожнини у нескінченному тілі вперше було вивчено у роботах Вікторова І.О. Ним же були

розроблені фізичні основи застосування ультразвукових хвиль Релея і Лемба в техніці. Задача Релея для поверхневих хвиль у випадку сфери для тіл без початкових напружень також вперше досліджені Петрашеним Г.І. І на кінець, зазначимо, що одержані в даній роботі результати для тіл без початкових напружень повністю співпадають із вказаними вище роботами.

На основі чисельних розв'язків дисперсійних рівнянь в широкому діапазоні зміни частот для конкретних матеріалів можна зробити наступні висновки кількісного і якісного характеру.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень.

- 1) Початкові напруження значно впливають на фазові швидкості розповсюдження поверхневих хвиль Релея, причому цей вплив більш суттєвий для нестисливих тіл у порівнянні з стисливими тілами.
- 2) Початкові напруження більше впливають на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея у тому випадку, коли напрям поширення хвилі і напрям прикладених сил співпадають.
- 3) Для сфери початкові напруження більш суттєво впливають на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея, ніж на циліндрах одного і того ж радіусів.
- 4) При конкретній частоті швидкість поверхневої хвилі Релея лінійно залежить від початкових напружень в рамках прийнятих точностей обчислень.
- 5) Початкові напруження більше впливають на фазову швидкість поверхневих хвиль Релея для “слідкувального” навантаження ніж у випадку “мертвого” навантаження.
- 6) Вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея на циліндричній поверхні більший, ніж у відповідному випадку плоскої границі.
- 7) Коли радіус кривизни циліндричної поверхні прямує до нескінченності, відношення фазових швидкостей поверхневої і релеєвської хвилі дорівнює одиниці.
- 8) Із усіх мод поверхневих хвиль перша мода прямує до релеєвської (плоский випадок) хвилі значно швидше інших.

Одержані результати можуть бути використані для визначення впливу початкових напружень на швидкості розповсюдження поверхневих хвиль у попередньо напружених тілах, а також при розробці фізичних основ ультразвукових не руйнуючих методів визначення напруженого стану у при поверхневих шарах тіла.

Список використаної літератури

1. Бабич С. Ю. О распространении поверхностных волн в предварительно напряженном цилиндре. *Прикладная механика*. 1976. 12, №6. С. 123-126.
2. Бабич С. Ю. К вопросу распространения поверхностных волн в предварительно напряженной сфере. *Прикладная механика*. 1978. 14, №9. С. 125-128.
3. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. *Прикладная механика*. 1979. 15, №4. С. 3-23.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг, “*Press-line*”. 2007. 795 с.
5. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Вісесиметричні хвилі у високо еластичному композиційному матеріалі з початковими напруженнями. Довгохвильове наближення. *Прикладна механіка*. 2021. т.57,№2. с.3-12.

6. Гузь А. Н., Махор Ф. Г., Гуц О. Н. Введение в акустоупругость. Киев, Наук. Думка, 1977. 151с.
7. Петрашень Г. И. Задача Релея для поверхностных волн в случае сферы. ДАН СССР. 1946. т.52, №3, с.763-766.
8. Викторов Н. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. М, 1966. 166с.
9. Махорт Ф. Г. К теории распространения поверхностных волн в упругом теле с начальными напряжениями. *Прикладная математика*. 1971. т.7, №3. с.34-40.
10. Махорт Ф. Г. О влиянии начальных напряжений на скорости распространения поверхностных волн в бесконечно длинном цилиндре из несжимаемого материала. ДАН УРСР, 1974. сер. А, №4. с. 328-330(укр.).
11. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: "А.С. У". 2004.-672с.
12. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Корнієнко В. Ф. До задачі розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями. *Доповіді НАН України*. 2019. №10. с 21-28.
13. Хейц М., Ривлин Р. Распространение волн в изотропном, находящемся в состоянии чистой однородной деформации. *Сб. перев, "Механика"*. 1962. №3. с. 109-117.
14. Flavin J. N. Thermo-elastic Rayleigh waves in a prestressed medium. *Prac. Cambridge Philos.* 1962. vol 58, №3. p.532-538.
15. Flavin J. N. Surface waves in pre-stressed Maoneg Material, *Quart. J. Mech. and Appl.math.* 1963. vol. 16, №4. p. 441-449.

Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F. Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part1. Surface Rayleigh waves along curvilinear boundaries (cylinder, sphere) of prestressed bodies.

The article is devoted to the study of the propagation of Rayleigh surface waves along the curvilinear boundaries of prestressed bodies. Two types of cylinders are under consideration: a continuous infinitely long cylinder of circular cross section of radius R and the same cylinder with a cavity. Studies have been conducted in the case of two types of loading: for axial compression and all-sided uniform initial deformation of bodies. Moreover, in the case of cylinders, the surface wave propagates along the cylindrical surface in the direction of the circular coordinate θ .

The obtained dispersion equations make it possible to find the phase velocities of Rayleigh surface waves at large values of the wave number p , which corresponds to short waves in comparison with the length of the circle of asymptotic nature.

Numerical results have been obtained when the cylinder loaded in the OX_3 axial direction. On the basis of the numerical calculations, the quantitative and qualitative results of the initial stresses influence on the phase velocity of the Rayleigh surface waves have been obtained. In particular, the speed of the Rayleigh surface wave, at a specific frequency, linearly depends on the initial stresses within the accepted accuracy of calculations.

The obtained results can be used in the development of physical bases of ultrasonic non-destructive methods for compressive stresses determination in the near-surface layers of the body.

Keywords: contact stresses, complex potentials, phase velocities, rigid stamps, movable loads, Rayleigh waves, stress-strain state.

References

1. Babich, S. Yu. (1976). O rasprostraneniі poverkhnostnykh voln v predvaritel'no napryazhenom cilindre. *Prikladnaya mekhanika*, 12, 6, 123-126.
2. Babich, S. Yu. (1978). K voprosu rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v predvaritel'no napryazhennoj sfere. *Prikladnaya mekhanika*, 14, 9, 125-128.
3. Babich, S. Yu., Guz', A. N., & Zhuk, A. P. (1979). Uprugie volny v telakh s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikladnaya mekhanika*, 15, 4, 3-23.

4. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). Statika i dinamika uprugikh osnovanij s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami. Kremenchug, "Press-line".
5. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Gluxov, Yu. P. (2021). Visimetrichni xvili u visoko elastichnomu kompozicziynomu materiali z pochatkovimi napruzheniyami. Dovgoxvil'ove nabli-zheniya. *Prikladna mexanika*, 57, №2, 3-12.
6. Guz', A. N., Makhor, F. G., & Gushch, O. N. (1977). Vvedenie v akoustouprugost'. Kiev: Nauk. Dumka.
7. Petrashen', G. I. (1946). Zadacha Releya dlya poverkhnostnykh voln v sluchae sfery, *DAN SSSR*, 52, 3, 763-766.
8. Viktorov, N. A. (1966). Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lehmba v tekhnike. Moscow.
9. Makhort, F. G. (1971). K teorii rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v uprugom tele s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikladnaya matematika*, 7, 3, 34-40.
10. Makhort, F. G. (1974). O vliyanii nachal'nykh napryazhenij na skorosti rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v beskonechno dlennom cilindre iz neszhimaemogo materiala. *DAN URSS*, ser. A, 4, 328-330 [ukrainian].
11. Guz', A. N. (2004). Uprugie volny v telakh s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami. Kiev: "A.C. Y".
12. Babich, S. Yu., Gluxov, Yu. P., & Kornienko, V. F. (2019). Do zadachi rozpovsyudzhennya poverknevix xvil' Releya v poperedn'о napruzhenix tilax z krivoliniynimi graniczyami. *Dopovidi NAN Ukraïni*, 10, 21-28.
13. Khejс, M., & Rivlin, R. (1962). Rasprostranenie voln v izotropnom , nakhodyashchemsya v sostoyanii chistoj odnorodnoj deformacii. *Sb. perev, "Mekhanika"*, 3, 109-117.
14. Flavin, J. N. (1962). Thermo-elastic Rayleigh waves in a prestressed medium. *Prac. Cambridse Philas*, vol 58, 3, 532-538.
15. Flavin, J. N. (1963). Surface waves in pre-stressed Maoneg Material, *Quart. J. Mech. and Appl.math.*, vol. 16, 4, 441-449.

Одержано 02.04.2021