Рего В. Л., Варга Я. В.

Навчальний посібник

із курсу «*Диференціальні рівняння*»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Частина І

Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рего В.Л., Варга Я. В.

Навчальний посібник
із курсу «*Диференціальні рівняння*»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Частина І

Ужгород – 2021

УДК 517.9(075.8)

ББК 22.161.6

Д-50

Навчальний посібник є довідниковим посібником з основ теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянуто основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх інтегрування, кожен із яких детально ілюструється прикладами. Посібник містить також завдання для індивідуальної роботи студентів.

Рецензенти:

Ронто М.Й. – доктор фізико-математичних наук, професор Мішкольцського університету;

Бортош М.Ю. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УЖНУ».

Рекомендовано до друку вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 30 вересня 2021 року, протокол №9.

Рекомендовано до друку Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 28 вересня 2021 року, протокол №5.

§ 1 Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі

1.1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання. Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки та техніки, а також деякі процеси, що виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни та часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та їх похідні. Такі рівняння називають диференціальними, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – інтегруванням диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження деякого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Диференціальні моделі називають ще динамічними математичними моделями описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей (швидкості, прискорення та ін.).

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, із їх використанням можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову і дослідження математичних моделей, але й створення обчислювальних алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на ЕОМ.

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Розглянемо прикладну задачу, яка призводить до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 1.1. *Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає* 7%.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ – кількість публікацій у момент часу t, y_0 – початкова кількість публікацій, тобто $y(0) = y_0$. Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$y'(t) = ky(t), \tag{1.1}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань. Диференціальне рівняння (1.1) разом з умовою $y(0) = y_0$ є математичною моделлю зростання інформаційних потоків. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $y'(t) = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - k\,dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\ln y - kt) = 0 \Rightarrow \ln y - kt = C_1 \Rightarrow y = e^{C_1 + kt},$$

де C_1 – довільна стала. Якщо перепозначити e^{C_1} через C, то $y(t) = Ce^{kt}$. Оскільки $y(0) = y_0$, то $C = y_0$, тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою

$$y'(t) = y_0 e^{kt}. \tag{1.2}$$

Знайдемо тепер час T, за який потік наукової інформації у порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі відносна швидкість $y' \,/\, y$ зростання інформаційних потоків складає 7%, а тому k = 0,07. Оскільки $y(T) = 2y_0$, то

$$y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0{,}07} \approx 10 \text{ років.}$$

1.2. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C :

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.3}$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.3), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього продиференціюємо за змінною x обидві частини рівності (1.3), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{1.4}$$

Якщо співвідношення (1.4) не містить C, то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.3) (наприклад, якщо $y = x + C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.4) залежатиме від параметра C. Тоді, виключаючи цей параметр із системи, складеної з рівнянь (1.3), (1.4), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.5}$$

Рівняння (1.5) називають диференціальним рівнянням сім'ї кривих (1.3). Воно виражає спільну властивість кривих (1.3), незалежно від сталої C.

Приклад 1.1. *Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.*

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати за допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C – довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C. Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

Відповідь. $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, залежну від n довільних сталих, можна за певних умов одержати диференціальне рівняння, для якого згадані криві будуть інтегральними. Для цього потрібно продиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих внаслідок диференціювання n рівнянь сталі C_1, C_2, ..., C_n. У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 1.2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих

$$(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1.$$

Розв'язання. Двічі продиференціюємо за змінною x задане рівняння, отримаємо

$$2(x - C_1) + 2C_2 yy' = 0,\ 1 + C_2\left(y'^2 + yy''\right) = 0.$$

Виключаючи з трьох рівностей сталі C_1, C_2, після нескладних перетворень одержуємо диференціальне рівняння другого порядку $y^3 y'' + \left(y'^2 + yy''\right)^2 = 0$.

Відповідь. $y^3 y'' + \left(y'^2 + yy''\right)^2 = 0$.

§ 2 Диференціальні рівняння першого порядку, розв’язані відносно похідної

2.1. Основні поняття та означення. ***Звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку*** називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', \dots y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної та похідними $y', \dots, y^{(n)}$.

Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через s, f, F тощо.

Якщо диференціальне рівняння (2.1) можна розв'язати відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то його записують у вигляді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots y^{(n-1)}\right)$$

і називають ***звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку у нормальній формі***, або явним диференціальним рівнянням (рівнянням, розв'язаним відносно старшої похідної).

Рівняння (2.1) називається ***лінійним***, якщо функція F є лінійною відносно $y, y', \dots y^{(n)}$, ***квазілінійним*** якщо старша похідна $y^{(n)}$ входить лінійно, і **нелінійним** якщо функція F є нелінійною відносно $y^{(n)}$.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння. У рівнянні n-го порядку (2.1) вважається, що похідна n-го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов’язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + {y'}^3, \quad y' + |y'| = 0, \quad y'' + y = \cos x,$$

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння – другий порядок, четверте рівняння – четвертий порядок, п’яте – десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають ***рівнянням з частинними похідними.***

Наведемо приклади таких рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}=x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}= f(x,y,z).$$

Розв'язком диференціального рівняння на деякому інтервалі (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, називають функцію $y=y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння. Це означає, що для всіх $x \in (a,b)$ справджується тотожність

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $y=\cos 2x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y''+4y=0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y=\sin 2x$, $y=3\cos 2x$, $y=\cos 2x-\sin 2x$, і взагалі всі функції вигляду $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Пізніше буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння -го порядку в загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих.

Із геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою.*** Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих.*** Наприклад, розв'язки рівняння $y''=2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване у скінченому вигляді. Розглядатимемо переважно такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченому вигляді, і для подання їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їх властивостей.

2.2. Задача Коші. Існування та єдиність розв'язку. Розглянемо задачу Коші для явного рівняння першого порядку

$$y' = f(x,y) \tag{2.2}$$

із початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.3}$$

Для неї справедлива наступна

Теорема 2.1 (***про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної***). Нехай права частина рівняння (2.2) $f(x,y)$

а) неперервна по обох аргументах у прямокутнику

$$\mathrm{D} = \{(x,y) \mid |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\},$$

де a, b – додатні сталі; тоді $f(x,y)$ є також обмеженою в D, тобто існує така додатна стала M, що для $\forall (x,y) \in \mathrm{D}$ $|f(x,y)| \le M$;

б) справджує умову Ліпшиця за змінною y в області D, тобто існує така стала $L > 0$ (***стала Ліпшиця***), що для довільних $(x,y_1),(x,y_2) \in \mathrm{D}$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \tag{2.4}$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (2.2), визначений і неперервний на інтервалі $|x - x_0| \le h$, де $h = \min\{a, b/M\}$, який при $x = x_0$ набуває значення y_0.

Доведення. Зведемо рівняння (2.2) до еквівалентного інтегрального вигляду. Інтегруючи за змінною x у межах $[x_0, x]$, одержимо:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt. \tag{2.5}$$

Будемо розв'язувати інтегральне рівняння (2.5) методом послідовних наближень Пікара. Візьмемо за нульове наближення y_0, а наступні ітерації (послідовні наближення) шукатимемо за формулою

$$y_i = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{i-1})dt, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{2.6}$$

Зауважимо, що при $|x - x_0| \le h$ буде $|x - x_0| \le a$, оскільки $h \le a$. Оцінимо послідовні наближення (2.6):

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b, \text{ оскільки } h \le b/M,$$

$$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1)dt\right| \le M|x - x_0| \le b$$

тощо. Звідси випливає, що $|y_i - y_0| \le b$ для всіх $i = \overline{1,\infty}$, тобто послідовні наближення (2.5) не виходять за межі області D.

Покажемо, що існує границя послідовності ітерацій (2.6) $Y = \lim\limits_{i \to \infty} y_i$. Для цього розглянемо ряд

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_i - y_{i-1}) + \ldots, \tag{2.7}$$

i-ва сума якого S_i рівна y_i, і покажемо, що він збігається до деякої неперервної функції $Y(x)$. Оцінка членів ряду (2.7) дає:

$$|y_1 - y_0| \le M|x - x_0|;$$

$$|y_2 - y_1| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_1) - f(t, y_0)|dt\right| \overset{(2.4)}{\le} L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0|dt\right| \le$$

$$\le LM\left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|dt\right| = \frac{LM}{2}|x - x_0|^2$$

тощо. Отже, для всіх $i = \overline{1,\infty}$ справджується оцінка:

$$|y_i - y_{i-1}| \le \frac{ML^{i-1}}{i!}|x - x_0|^i.$$

Тоді при $|x - x_0| \le h$ ряд (2.7) мажорується числовим рядом

$$y_0 + Mh + M\frac{Lh^2}{2} + \ldots + M\frac{L^{i-1}h^i}{i!} + \ldots \qquad (2.8)$$

Позначимо через u_i i-й член ряду (2.8). Згідно з ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{i\to\infty}\frac{u_{i+1}}{u_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{i!ML^ih^{i+1}}{(i+1)!ML^{i-1}h^i} = \lim_{i\to\infty}\frac{Lh}{i+1} = 0 < 1,$$

тобто ряд (2.8) збігається, а тому на підставі критерію Веєрштрасса ряд (2.7) збігається рівномірно для всіх x із інтервалу $|x - x_0| \le h$. Оскільки кожен член ряду (2.7) є неперервною функцією змінної x, то границя послідовності $Y(x) = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$ існує і є неперервною функцією.

Переходячи в (2.6) до границі при $i \to \infty$, маємо:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt,$$

тобто гранична функція $Y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (2.5), еквівалентного задачі Коші (2.2), (2.3). Отже, $Y(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.2), який справджує початкову умову (2.3). Покажемо, що знайдений розв'язок є єдиним.

Припустимо, що крім $Y(x)$ існує інший розв'язок $Z(x)$ задачі Коші для рівняння (2.2) із початковою умовою (2.3). Нехай $Y(x) \ne Z(x)$ поблизу точки x_0 правіше від неї. Візьмемо деяке $\varepsilon > 0$; тоді згідно з припущенням $Y(x) \ne Z(x)$ для точок $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$, а тому додатна функція $|Y(x) - Z(x)|$ досягає в деякій точці $\xi \ne x_0$ (оскільки $Y(x_0) = Z(x_0) = y_0$) цього інтервалу свого найбільшого значення $\theta > 0$. Згідно з (2.5)

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt, \quad Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Z(t))dt,$$

звідки з урахуванням умови Ліпшиця (2.4)

$$|Y(\xi)-Z(\xi)|=\theta \le \int_{x_0}^{\xi} |f(t,Y(t))-f(t,Z(t))|\,dt \le$$

$$\le L\int_{x_0}^{\xi} |Y(t)-Z(t)|\,dt < L\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \theta dt = L\theta\varepsilon.$$

Оскільки $\theta \ne 0$, то остання нерівність дає $L\varepsilon > 1$, що суперечить довільності ε (адже можна вибрати, наприклад, $\varepsilon = 1/L$). Отже, задача Коші (2.2), (2.3) за виконання умов теореми має єдиний розв'язок, визначений і неперервний на інтервалі $|x-x_0| \le h$. ■

Наприкінці зауважимо, що доведена теорема в різних джерелах нерідко згадується під різними власними назвами – зокрема «теорема Коші», «теорема Пеано», «теорема Коші-Пеано», «теорема Коші-Ліпшиця», «теорема Пікара», «теорема Пікара-Ліндельофа» тощо – на честь видатних математиків XIX-XX сторіч: французів Оґюстена-Луї Коші (1789-1857) та Шарля Еміля Пікара (1856-1941), німця Рудольфа Отто Сиґізмунда Ліпшиця (1832-1903), італійця Джузеппе Пеано (1858-1932), а також Ернста Леонарда Ліндельофа (1870-1946) з Фінляндії.

Приклад 2.1. Побудувати послідовні наближення до розв'язку задачі Коші:

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0. \tag{2.9}$$

Розв'язання. Порівнюючи (2.9) із (2.2), (2.3), маємо: $f(x,y) = x - y^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Візьмемо за нульове наближення $y_0 = 0$, а наступні ітерації (послідовні наближення) шукатимемо за формулою (2.6), яка для задачі (2.9) запишеться у вигляді

$$y_i = \int_0^x (t - y_{i-1}^2)\,dt, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{2.10}$$

При $i = 1$ формула (2.10) дає

$$y_1 = \int_0^x (t - y_0^2)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Послідовно підставляючи в (2.10) наступні значення i, отримаємо відповідні наближення:

$$y_2 = \int_0^x (t - y_1^2)dt = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3 = \int_0^x (t - y_2^2)dt = \int_0^x \left(t - \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{20} - \frac{t^{10}}{400} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$$

тощо.

2.3. Класифікація розв'язків. На прикладах, які розглядалися раніше, ми переконалися, що рівняння (2.2) може мати безліч розв'язків.

Сім'ю розв'язків диференціального рівняння (2.2), залежну від однієї довільної сталої C:

$$y = \varphi(x, C) \tag{2.11}$$

називають ***загальним розв'язком*** цього рівняння. Формула (2.11) дозволяє розв'язати задачу Коші для рівняння (2.2). Для цього потрібно визначити $C = C_0$ з рівності $y_0 = \varphi(x_0\,, C)$ і підставити знайдене значення у (2.11). Тоді $y = \varphi(x, C_0)$ буде розв'язком задачі Коші. Однак при цьому не гарантується ні розв'язність рівняння $y_0 = \varphi(x_0\,, C)$ відносно C, ні єдиність знайденого розв'язку задачі Коші.

У зв'язку з цим зручним є таке означення загального розв'язку рівняння (2.2). Нехай G – деяка область площини Oxy , через кожну точку якої проходить єдина інтегральна крива рівняння (2.2) (наприклад, можемо вважати, що в околі кожної точки області G справджуються умови теореми Пікара). Тоді функцію (2.11), яка визначена в деякій області змінних x і C та має в цій області неперервну частинну похідну за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** рівняння (2.2) в області G, якщо:

1) співвідношення (2.11) можна розв'язати в G відносно довільної сталої C:

$$C = \psi(x, y)\ ; \tag{2.12}$$

2) функція (2.11) є розв'язком рівняння (2.2) для всіх значень сталої C з формули (2.12), коли точка (x, y) пробігає область G.

Знаючи загальний розв’язок в області G, з нього легко отримати розв’язок задачі Коші з довільними початковими даними $(x_0, y_0) \in \mathrm{G}$ за рахунок вибору відповідного значення довільної сталої C. Для цього потрібно замінити у формулі (2.12) змінні x і y числами x_0, y_0 відповідно, розв’язати одержане рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно C і підставити знайдене значення $C = C_0$ у формулу загального розв’язку (2.11). Отримана функція $y = \varphi(x, C_0)$ буде шуканим розв’язком, бо вона є розв’язком рівняння (2.2) і $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Якщо у формулі (2.11) замість довільної сталої C взяти початкове значення y_0 шуканої функції при деякому фіксованому значенні x_0 незалежної змінної:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0),$$

то такий запис загального розв’язку називають ***загальним розв’язком у формі Коші***.

Загальний розв’язок рівняння (2.2) записаний у неявному вигляді (вигляді, не розв’язному відносно шуканої функції y):

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.13}$$

називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння. При цьому вважають, що рівність (2.13) визначає загальний розв’язок $y = \varphi(x, C)$ рівняння (2.2) в області G.

Часто загальний інтеграл одержують у вигляді, розв’язаному відносно довільної сталої C, тобто $\Psi(x, y) = C$. Ліву частину цієї рівності називають ***інтегралом*** рівняння (2.2).

Аналогічно визначають сім’ю інтегральних кривих (розв’язків) рівняння (2.11), залежну від довільної сталої C, у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C) \end{cases}$$

як ***загальний розв’язок у параметричній формі.***

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2.2) називають ***частинним***, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші. Розв'язок, який міститься у формулі (2.11) загального розв'язку, тобто одержується з нього при конкретному значенні довільної сталої C (включаючи $\pm\infty$), є, очевидно, частинним розв'язком.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***. Його не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) при жодному конкретному значенні сталої C (включаючи $\pm\infty$). Із геометричної точки зору особливому розв'язку відповідає інтегральна крива, яка не міститься в сім'ї інтегральних кривих, що складають загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

З теореми Пікара та зауваження до неї випливає, що особливі розв'язки рівняння (2.2) потрібно шукати серед тих кривих, уздовж яких похідна $f_y'(x, y)$ необмежена. Такі криві називають підозрілими на особливий розв'язок. Ця крива буде особливим розв'язком, якщо вона є інтегральною кривою і в кожній її точці порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші.

2.4. Розв'язування диференціальних рівнянь методом ізоклін. Якщо рівняння (2.2) не інтегрується у квадратурах або його розв'язок має дуже складну будову і, отже, ним важко користуватись, наприклад, для аналізу поведінки інтегральних кривих, то можна скористатися геометричною інтерпретацією самого рівняння.

Диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ та кутовим коефіцієнтом $\frac{dy}{dx}$ дотичної до інтегральної кривої у цій точці (рис. 2.1):

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Якщо функція $f(x, y)$ визначена у деякій області G, то кожній точці $M(x,y) \in G$ відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Вказуючи цей напрям вектором (для визначеності вважатимемо його одиничним) з початком у точці M, отримаємо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (2.2) (рис. 2.2).

Як уже зазначалося, розв'язком рівняння (2.2) є крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Отже, інтегральна крива, що проходить через точку $M(x, y) \in G$, відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку, тим, що напрям дотичної у даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямом поля, яке задає дане диференціальне рівняння. Тому геометрично інтегрування диференціального рівняння полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямом поля.

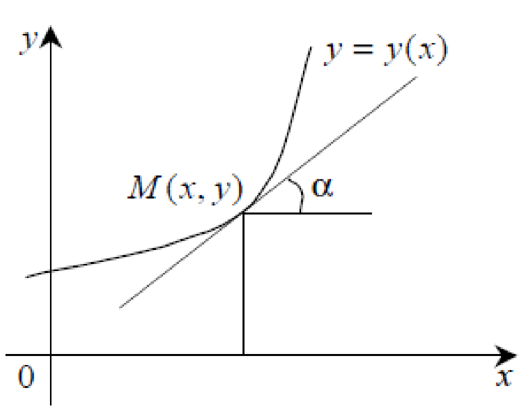

Рис. 2.1

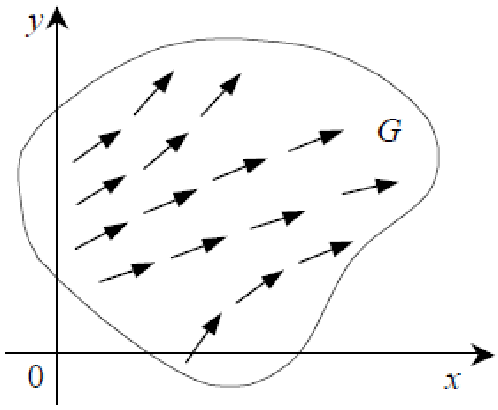

Рис. 2.2

Для побудови поля напрямів зручно розглядати геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих зберігають сталий напрям. Такі геометричні місця точок називають ***ізоклінами***.

Рівняння ізокліни для рівняння (2.2) має вигляд

$$f(x, y) = k \,, \qquad (2.14)$$

де k – довільна стала.

Змінюючи в (2.14) значення k, одержимо множину ізоклін на площині Oxy. За допомогою ізоклін і відомих сталих кутів $(k = tg\,\alpha)$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна відтворити якісну картину поля інтегральних кривих досліджуваного рівняння. Такий метод дослідження диференціальних рівнянь називається ***методом ізоклін***.

Приклад 2.2. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння (ДР)

$$\frac{dy}{dx} = x + y. \qquad (2.15)$$

Розв'язання. Як відомо, рівняння ізокліни, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих явного ДР першого порядку $y' = f(x, y)$ нахилені до осі абсцис під однаковим кутом α (інакше кажучи, кут α визначає ***напрям поля*** в точках відповідної ізокліни) має вигляд $f(x, y) = \operatorname{tg}\alpha$, тобто для ДР (2.15) будемо мати

$$x + y = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad y = -x + \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2.16)$$

Отже, ізоклінами для ДР (2.15) будуть прямі, що утворюють кут 135° із додатним напрямом осі абсцис. Задаючи в (2.16) різні значення кута α, дістанемо рівняння відповідних ізоклін, у точках яких напрям поля визначається заданим кутом. Як правило, для отримання схематичної фазової картини достатньо задати кілька «зручних» значень кута, наприклад:

а) $\alpha = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad y = -x$;

б) $\alpha = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$;

в) $\alpha = -45^\circ \quad \Rightarrow \quad y = -1 - x$

тощо. Зауважимо, що права частина ДР (2.15) визначена для всіх $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, тому ізокліни, що відповідала б куту $\alpha = 90^\circ$, не існує (іншими словами, в жодній точці фазової площини дотичні до інтегральних кривих не є перпендикулярними до осі абсцис).

Напрям поля в точках фазової площини прийнято позначати стрілками. За застосування методу ізоклін ці стрілки слід зображати так, щоб у кожній точці ізокліни, рівняння якої задається рівністю (2.16), напрям стрілки утворював кут α із додатним напрямом осі абсцис.

Таким чином, у точках ізокліни $y = -x$ стрілки будуть співнапрямленими з віссю абсцис, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = 0^\circ$.

Стрілки в точках ізокліни $y = 1 - x$ будуть співнапрямленими з додатним напрямом бісектриси I та III координатних чвертей, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = 45^{\circ}$.

Стрілки в точках ізокліни $y = -1 - x$ будуть співнапрямленими з додатним напрямом бісектриси II та IV координатних чвертей, оскільки ця ізокліна відповідає куту $\alpha = -45^{\circ}$.

Тепер підсумуємо вищенаведене дослідження схематичним малюнком фазової картини для ДР (2.15), зобразивши інтегральні криві на підставі побудованих ізоклін і отриманого поля напрямів (рис. 2.3):

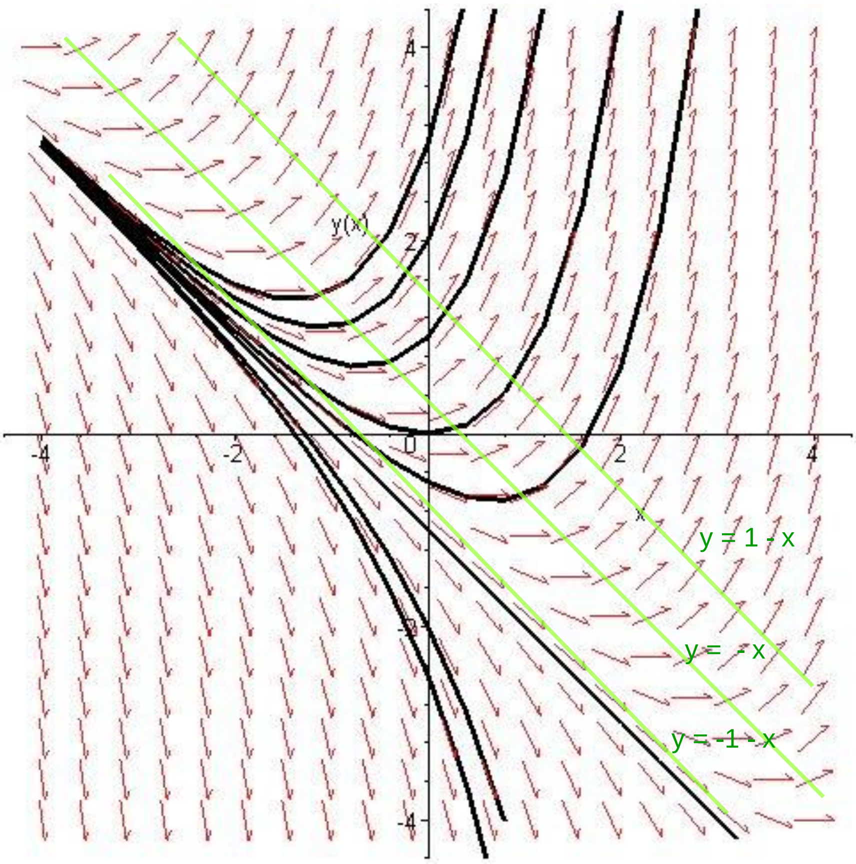

Рис. 2.3. Поле напрямів та інтегральні криві диференціального рівняння (2.15)

Приклад 2.3. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)\,. \qquad (2.17)$$

Розв'язання. Аналогічно до Прикладу 2.2 отримуємо рівняння ізоклін

$$\sin(x - y) = \operatorname{tg}\alpha\,. \qquad (2.18)$$

Отже, ізоклінами для ДР (2.17) будуть сукупності прямих, що утворюють кут 45° із додатним напрямом осі абсцис. Задаючи в (2.18) різні значення кута α, дістанемо рівняння відповідних ізоклін, наприклад:

а) $\alpha = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x - \pi k, \quad k \in \mathrm{Z}\,;$

б) $\alpha = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x - \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}\,;$

в) $\alpha = -45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin(x - y) = -1 \quad \Rightarrow \quad y = x + \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$

тощо. Зауважимо, що права частина ДР (2.17) визначена для всіх $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, тому, як і в Прикладі 2.3, ізокліни, що відповідала б куту $\alpha = 90^\circ$, не існує.

Тепер підсумуємо вищенаведене дослідження схематичним малюнком фазової картини для ДР (2.17), зобразивши інтегральні криві на підставі побудованих ізоклін і отриманого поля напрямів (рис. 2.4):

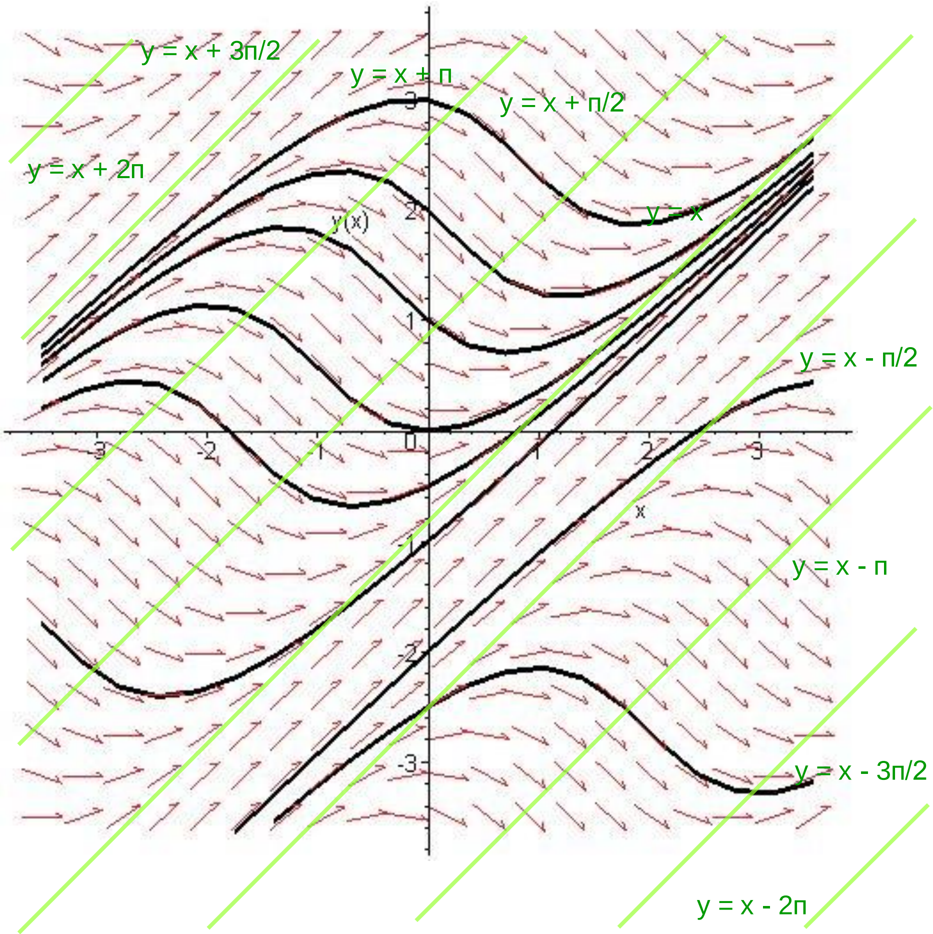

Рис. 2.4. Поле напрямів та інтегральні криві диференціального рівняння (2.17)

§ 3 Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

3.1. Рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальне рівняння

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0, \tag{3.1}$$

де $M_1(x)$, $M_2(x)$ та $N_1(y)$, $N_2(y)$ – неперервні функції своїх аргументів, називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними*.**

Відокремимо змінні в рівнянні (3.1): поділимо обидві його частини на добуток функцій $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, що $M_2(x) \neq 0$ та $N_1(y) \neq 0$. Матимемо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Інтегруючи останню рівність, отримуємо загальний інтеграл рівняння (3.1):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

де C – довільна стала.

Якщо a – корінь рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (3.1). Аналогічно, якщо b – корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ – розв'язок рівняння (3.1).

Приклад 3.1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2ydy.$$

Розв'язання. Відокремимо в рівнянні змінні, що містяться при dx, dy та перенесемо їх по різні сторони знаку рівності

$$(x^2y + y)dy = \sqrt{4 + y^2}dx.$$

Із перших дужок виносимо спільний для двох доданків множник y:

$$y(x^2 + 1)dy = \sqrt{4 + y^2}dx.$$

Далі перегруповуємо множники так, щоб при dy отримати функцію лише від y, а при dx – функцію аргументу x. У результаті дістанемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}dy = \frac{dy}{x^2+1}\cdot$$

Після інтегрування

$$\int \frac{y}{\sqrt{4+y^2}}dy = \int \frac{dx}{x^2+1},$$

$$\frac{1}{2}\int (4+y^2)^{-\frac{1}{2}}d(4+y^2) = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

отримаємо

$$\sqrt{4+y^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Спробуємо записати розв'язок диференціального рівняння у вигляді залежності $y(x)$. Для цього підносимо обидві частини до квадрату:

$$4+y^2 = (\operatorname{arctg} x + C)^2\ ,$$

та перенісши сталу в праву сторону, обчислюємо корінь квадратний

$$y = \pm\sqrt{(\operatorname{arctg} x + C)^2 - 4}.$$

Відповідь. $y = \pm\sqrt{(\operatorname{arctg} x + C)^2 - 4}.$

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y), \qquad (3.2)$$

де $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – неперервні функції.

Відокремимо змінні в рівнянні (3.2): поділимо обидві його частини на функцію $f_2(y)$, вважаючи, що $f_2(y) \neq 0$, і помножимо на dx, враховуючи, що $dy = y'\,dx$. Матимемо

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)\,dx.$$

Інтегруючи останню рівність, отримуємо загальний інтеграл рівняння (3.2):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Якщо $f_2(a) = 0$, то $y = a$ є також розв'язком рівняння (3.2).

До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де a, b, c – довільні сталі. Дійсно, виконавши заміну $z = ax + by + c$, для знаходження функції z отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = a + bf(z).$$

Приклад 3.2. Зінтегрувати рівняння

$$y' = (4x + y + 5)^2.$$

Розв'язання. Нехай $z = 4x + y + 5$, тоді $y' = z' - 4$, і вихідне рівняння перепишеться у вигляді

$$z' - 4 = z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 4.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = dx, \int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int dx,$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int dx,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2} = x + C, \qquad \operatorname{arctg}\frac{z}{2} = 2(x + C),$$

$$\frac{z}{2} = \operatorname{tg}\left(2x + \tilde{C}\right), \text{де } \tilde{C} = 2C, z = 2\operatorname{tg}(2x + \tilde{C}),$$

повернемось до виконаної заміни

$$4x + y + 5 = 2\operatorname{tg}\left(2x + \tilde{C}\right).$$

Отже, загальним розв'язком є

$$y = 2\operatorname{tg}\left(2x + \tilde{C}\right) - 4x - 5.$$

Оскільки $z^2 + 4 \neq 0$ на множині дійсних чисел, то інших розв'язків немає.

Відповідь. $y = 2\operatorname{tg}\left(2x + \tilde{C}\right) - 4x - 5.$

3.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною функцією виміру m,*** якщо $\forall\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною функцією***, якщо вона є однорідною функцією виміру нуль, тобто $\forall\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \tag{3.3}$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{3.4}$$

називається ***однорідним рівнянням***, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Оскільки права частина рівняння (3.4) – однорідна функція, то підставивши в рівність (3.3) $\lambda = \frac{1}{x}$, матимемо $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Таким чином, однорідне рівняння (3.4) можна записати у вигляді

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{3.5}$$

Виконаємо заміну шуканої функції $y = zx$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y' = z'x + z$ і рівняння (3.5) набуде вигляду

$$z'x + z = f(1, z). \tag{3.6}$$

Отже, для знаходження функції z одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні в рівнянні (3.6)

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

та проінтегрувавши отриману рівність, одержимо

$$\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \ln|x| + C.$$

Якщо ввести позначення $F(z) = \int \frac{dz}{f(1,z) - z}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (3.4) можемо записати у вигляді

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (3.4) можуть бути також функції $y = ax$ $(x \neq 0)$, де a – корінь рівняння $f(1, z) - z = 0$, та $x = 0$ $(y \neq 0)$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть виявитися особливими.

Диференціальне рівняння в симетричній формі

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

є однорідним, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$ – однорідні функції однакового виміру.

Приклад 3.3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + \text{y}.$$

Розв'язання. Ділимо праву частину рівняння на змінну, яка стоїть множником біля похідної. В результаті прийдемо до однорідного диференціального рівняння 0-го виміру

$$y' = 2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} := f(x,y).$$

Перевіряємо на однорідність праву частину даного рівняння:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\sqrt{1+\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)^2} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = 2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} = f(x,y).$$

У підсумку бачимо, що рівність (3.3) виконується, а отже, дане рівняння є однорідним.

Далі перейдемо до нової змінної$y = x\,z(x);\ z = \frac{y}{x}$. При цьому не забуваємо виразити похідну y' через похідну нової шуканої функції $z(x)$:

$$x\frac{dz}{dx} + z = 2\sqrt{1+\left(\frac{zx}{x}\right)^2} + \frac{zx}{x},$$

$$x\frac{dz}{dx} + z = 2\sqrt{1+z^2} + z\,.$$

Рівняння набуде вигляду

$$x\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{1+z^2}.$$

Переходимо до диференціального рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = 2\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = 2\int \frac{dx}{x} .$$

Для зручності подальших перетворень константу відразу вносимо під логарифм:

$$\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| = 2\ln|x| + \ln C.$$

За властивостями логарифмів отримане рівняння еквівалентне наступному:

$$z+\sqrt{z^2+1} = x^2 C.$$

На цьому рівняння ще не розв'язане, адже необхідно повернутися до виконаної заміни змінних

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = x^2 C,$$

$$y+\sqrt{y^2+x^2} = x^3 C.$$

Це і є шуканий загальний розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь. $y+\sqrt{y^2+x^2} = x^3 C.$

3.3. Рівняння, звідні до однорідних.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{3.7}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – деякі сталі.

Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то диференціальне рівняння (3.7) є однорідним рівнянням.

а) Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то диференціальне рівняння (3.7) можна звести до однорідного рівняння за допомогою заміни

$$x = u + x_0,\ y = v(u) + y_0,\ y' = v', \tag{3.8}$$

де (x_0, y_0) є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то лінійна неоднорідна система (3.9) має єдиний розв'язок. Підставимо (3.8) в (3.7), і таким чином одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{a_1u + b_Iv + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2u + b_2v + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right),$$

або, враховуючи (3.9),

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \tag{3.10}$$

Очевидно, що диференціальне рівняння (3.10) є однорідним і розв'язується заміною змінних $v(u) = z(u)u$.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння

$$(2y - 1)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді (3.7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2y}{2x + y + 1},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0.$$

Згідно з (3.8) робимо заміну, попередньо розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1 - 2y = 0, \\ 2x + y + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{3}{4}, \\ y_0 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - \dfrac{3}{4}, \\ y = v + \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$y' = \frac{dv}{du},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - 2\left(v + \frac{1}{2}\right)}{2\left(u - \frac{3}{4}\right)v + \frac{1}{2} + 1},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - 2v - 1}{2u - \frac{3}{2} + v + \frac{1}{2} + 1},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-2v}{2u + v},$$

і таким чином ми одержали однорідне диференціальне рівняння.

Заміна $v = z(u) \cdot u$, $v' = z'u + z$:

$$z'u + z = \frac{-2zu}{2 \cdot u + z \cdot u},$$

$$z'u + z = \frac{-2z}{2 + z}, \qquad z'u = \frac{-2z}{2 + z} - z,$$

$$z'u = \frac{-2z - 2z - z^2}{2 + z},$$

$$u \cdot \frac{dz'}{du} = \frac{-z^2 - 4z}{z + 2}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо

$$\int \frac{z + 2}{-z^2 - 4z} dz = \int \frac{du}{u};$$

$$-\int \frac{z + 2}{z^2 + 4z} dz = \frac{du}{u};$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(z^2 + 4z)}{z^2 + 4z} = \ln|u| - \ln|C|,$$

$$-\frac{1}{2}\ln|z^2 + 4z| = \ln|u| - \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln|z^2+4z| = -\ln|u| + \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln|z^2+4z| + \ln|u| = \ln|C|,$$

$$u \cdot \sqrt{z^2+4z} = C.$$

Повертаємося до початкових змінних;

$$u = x + \frac{3}{4}, v = y - \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{v}{u} = \frac{y - \frac{1}{2}}{x + \frac{3}{4}},$$

тобто, загальний розв'язок запишеться у вигляді:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2} + \frac{4\left(y - \frac{1}{2}\right)}{x + \frac{3}{4}}} = C\ .$$

Відповідь. $\left(x + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{4\left(y-\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{3}{4}}} = C.$

б) Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тобто $a_1b_2 = a_2b_1$, то $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому диференціальне рівняння (3.7) можна записати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f_1(a_2x + b_2y).$$

Таким чином, одержали диференціальне рівняння, яке за допомогою заміни $z = a_2x + b_2y$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = a_2 + b_2f_1(z).$$

Зауважимо, що для зведення рівняння (3.7) до рівняння з відокремлюваними змінними можна застосовувати також заміни $z = a_1x + b_1y$, $z = a_1x + b_1y + c_1$ або $z = a_2x + b_2y + c_2$.

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння

$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді (3.7):

$$y' = \frac{-x + y + 1}{y - x + 2},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

Використавши заміну $z = y - x + 2$, одержимо:

$$y = z + x - 2 \Rightarrow y' = z' + 1,$$

$$z' + 1 = \frac{-x + z + x - 2 + 1}{z + x - 2 - x + 2},$$

$$z' + 1 = \frac{z - 1}{z},$$

$$z' = \frac{z - 1}{z} - 1, \qquad z' = \frac{z - 1 - z}{z},$$

$$\mathrm{z}' = -\frac{1}{\mathrm{z}}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} \Rightarrow \int z dz = -\int dx,$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C,$$

$$z^2 = 2(C - x),$$

$$(y - x - 2)^2 = 2(C - x).$$

Відповідь. $(y - x - 2)^2 = 2(C - x)$.

3.4. Квазіоднорідні рівняння першого порядку. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{3.11}$$

називається ***квазіоднорідним рівнянням*** з показником квазіоднорідності σ, якщо $\forall\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = \lambda^{\sigma-1} f(x, y), \tag{3.12}$$

тобто рівняння (3.11) інваріантне (не змінює свого вигляду) відносно заміни

$$x \to \lambda x,\ y \to \lambda^\sigma y.$$

За допомогою заміни шуканої функції $y = zx^\sigma$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, квазіоднорідне рівняння (3.11) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, після заміни шуканої функції, замість (3.11) отримаємо рівняння

$$x^\sigma z' + \sigma x^{\sigma-1} z = f(x, x^\sigma, z).$$

Згідно з рівністю (3.12)

$$f(x, x^\sigma z) = f(x \cdot 1, x^\sigma z) = x^{\sigma-1} f(1, z).$$

Таким чином, для знаходження функції z одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = \frac{f(1,z) - \sigma z}{x}. \tag{3.13}$$

Розв'язавши рівняння (3.13) та виконавши обернену заміну, знайдемо загальний розв'язок квазіоднорідного рівняння (3.11). При цьому слід пам'ятати про можливість втрати сталих розв'язків, які визначаються коренями рівняння $f(1, z) - \sigma z = 0$, при відокремленні змінних у рівнянні (3.13).

Приклад 3.6. Розв'язати рівняння

$$2x^2 y' = y^3 + xy.$$

Розв'язання. $y' = \frac{y^3 + xy}{2x^2} := f(x, y)$;

$$\frac{\lambda^3 y^3 + \lambda x \lambda y}{2\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda^2(\lambda y^3 + xy)}{\lambda^2 \cdot 2x^2} = \frac{\lambda y^3 + xy}{2x^2},$$

$$f(\lambda x, \lambda y) \neq f(x, y).$$

Перевіряємо рівність (3.12):

$$f(\lambda x, \lambda^s y) = \frac{\lambda^{3s} y^3 + \lambda x \lambda^s y}{2\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda^{3s} y^s + \lambda^{s+1} xy}{\lambda^2 \cdot 2x^2} = \lambda^{3s-2} \frac{y^3}{2x^2} + \lambda^{s+1-2} \frac{xy}{2x^2},$$

$$3s - 2 = s - 1,$$

$$2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}.$$

Заміна $y(x) = x^{\frac{1}{2}} z(x)$:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z + z' x^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z + z' x^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} z(x)\right)^3 + x\, x^{\frac{1}{2}}\, z}{2x^2},$$

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} z + z' x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}(z^3 + z)}{2x^2},$$

$$z' x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(z^3 + z) x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} z,$$

$$z' x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} z - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} z,$$

$$z' x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^3 x^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dz}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^3 x^{-\frac{1}{2}} \quad | \cdot 2 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} z^3}$$

$$2 \int \frac{dz}{z^3} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int z^{-3} dz = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$2 \frac{z^{-3+1}}{-3+1} = \ln|x| + C,$$

$$-\frac{1}{z^2}=\ln|x|+C\,,z(x)=\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}=yx^{-\frac{1}{2}},$$

$$-\frac{1}{y^2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\ln|x|+C,$$

$$-\frac{1}{y^2x^{-1}}=\ln|x|+C,$$

$$-\frac{x}{y^2}=\ln|x|+C\,,y^2=-\frac{x}{\ln|x|+C},$$

$x=0$ – не є розв'язком,

Відповідь. $\begin{cases} y^2=-\frac{x}{\ln|x|}+C, \\ y=0. \end{cases}$

Приклад 3.7. Знайти криву, яка має наступну властивість: різниця між тангенсами кутів нахилу до осі абсцис дотичної до кривої в будь-якій її точці та радіус-вектора точки дотику рівна 1.

Розв'язання. Складемо диференціальну модель сформульованої геометричної задачі, тобто виведемо диференціальне рівняння кривих, які мають згадану в умові задачі властивість. Для цього побудуємо схематичний графік шуканої кривої $y=y(x)$, позначивши через $M(x,y)$ біжучу точку на цій кривій (рис. 3.1). Зробимо допоміжні побудови: проведемо дотичну AM до схематичного графіка в точці M, а також радіус-вектор OM точки дотику та ординату MB, перпендикулярну до осі абсцис. Тоді з використанням позначень на рис. 3.1 умову задачі можна записати у вигляді математичної рівності

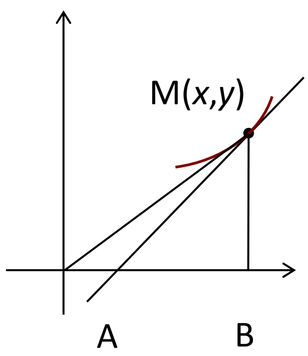

Рис.3.1

$$\operatorname{tg}\angle MAB-\operatorname{tg}\angle MOB=1. \tag{3.14}$$

Щоб записати відповідне диференціальне рівняння, потрібно виразити всі величини, що фігурують у рівності (3.14), через x, y та y'.

Оскільки згідно з нашими позначеннями $OB = x$, $MB = y$, то із прямокутного ΔMOB визначаємо

$$\operatorname{tg}\angle MOB = \frac{MB}{OB} = \frac{y}{x}.$$

Тангенс кута нахилу дотичної визначається на підставі геометричного змісту похідної:

$$\operatorname{tg}\angle MAB = y'.$$

Підставивши знайдені значення тангенсів у (3.14), одержимо диференціальне рівняння шуканої сім'ї кривих

$$y' - \frac{y}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1. \tag{3.15}$$

Зауважимо, що ДР (3.15) є нелінійним однорідним, оскільки для його правої частини $f(x, y) = \frac{y}{x} + 1$ виконується умова однорідності:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \frac{\lambda y}{\lambda x} + 1 = \frac{y}{x} + 1 = f(x, y), \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Для інтегрування однорідного ДР (3.15) введемо підстановку $y = xz$, де $z = z(x)$ нова невідома функція. Тоді з (3.15) одержимо

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + 1,$$

або після спрощення

$$x\frac{dz}{dx} = 1. \tag{3.16}$$

ДР (3.16) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$dz = \frac{dx}{x}.$$

Із останньої рівності після інтегрування лівої та правої частин отримуємо

$$z = \ln|x| + C, \qquad (3.17)$$

де C – довільна стала. Виконавши в (3.17) зворотну заміну змінних $z = \frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл ДР (3.15)

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C,$$

із якого можна виразити загальний розв’язок у явному вигляді

$$y = x(C + \ln|x|). \qquad (3.18)$$

Із переходу від (3.16) до (3.17) випливає необхідність додаткової перевірки функції $x = 0$, яка очевидно не є розв’язком ДР (3.15). Отже, у процесі інтегрування ми не допустили втрати розв’язків, і рівність (3.18) включає всю множину розв’язків ДР (3.15), тобто задає сім’ю кривих, які мають вказану в умові задачі властивість.

Відповідь. Сім’я шуканих кривих задається рівнянням $y = x(C + \ln|x|)$, де C – дові льна стала.

Завдання для індивідуальної роботи №1

Постановка завдань:

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння.

2. Розв’язати рівняння (за наявності початкової умови – задачу Коші для заданого рівняння) шляхом відокремлення змінних або попереднього зведення заданого рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

3. Знайти розв’язок однорідного диференціального рівняння.

4. Розв’язати рівняння, попередньо звівши його до однорідного.

5. Розв’язати задачу шляхом інтегрування відповідної диференціальної моделі.

Варіант 1

1. $y' = \mathrm{tg}(y - x^3)$. **2.** $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

3. $y' = \dfrac{xy + y^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$. **4.** $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

Варіант 2

1. $y' = y + \mathrm{e}^{x-1}$. **2.** $xydx + (x+1)dy = 0$. **3.** $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$.

4. $8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$.

5. Визначити криві, у яких піддотична є середнім арифметичним координат точки дотику.

Варіант 3

1. $y' = y - x^2 - 2x - 1$. **2.** $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$. **3.** $\left(x - y - \sqrt{xy}\right)dx + \sqrt{xy}dy = 0$.

4. $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких піднормаль дорівнює різниці між радіус-вектором та абсцисою точки дотику.

Варіант 4

1. $y' = \cos(y - x^2 + 1)$. **2.** $z' = 10^{x+z}$.

3. $\left(xy\,e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx - x^2\,e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$. **4.** $(x+y)dx + (x+y-1)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю Oy, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобічним.

Варіант 5

1. $xy' + y = 0$. **2.** $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(-1) = 0$.

3. $\left(x\operatorname{ctg}\frac{y}{x} - y\right)dx + xdy = 0$. **4.** $(x+2y+1)dx + (2x+4y+3)dy = 0$.

5. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

Варіант 6

1. $y' = 2x$. **2.** $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 8$.

3. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx - xdy = 0$. **4.** $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю абсцис, дотичною та нормаллю.

Варіант 7

1. $xy' = 2y$. **2.** $xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$. **3.** $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.

4. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

5. Знайти криві, у яких нормаль збігається з радіус-вектором точки дотику.

Варіант 8

1. $y' = 2x(1 - y)$. **2.** $2x^2 yy' + y^2 = 2$.

3. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$. **4.** $(y - 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює довжині радіус-вектора точки дотику.

Варіант 9

1. $(x - y)y' = x + y$. **2.** $y' - xy^2 = 2xy$.

3. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$. **4.** $(2y + 3)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Варіант 10

1. $y' = y - x^2$. **2.** $\mathrm{e}^{-s}\left(1 + \dfrac{ds}{dt}\right) = 1$.

3. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$. **4.** $(y + 2)dx + (y - 2x - 2)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю Ox, дотичною та нормаллю.

Варіант 11

1. $2(y + y') = x + 3$. **2.** $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

3. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = xdy$. **4.** $(2y-1)dx+(2x+y+1)dy=0$.

5. Визначити криві, усі дотичні до яких проходять через початок координат.

Варіант 12

1. $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2} - 1$. **2.** $y'\sin x - y\cos x = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $(3x-2y)dx+(y-2x)dy=0$. **4.** $(3x+2y-1)dx+(x+1)dy=0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю абсцис, дотичною та нормаллю.

Варіант 13

1. $(y^2+1)y' = y - x$. **2.** $\mathrm{e}^x \sin^3 y + (1+\mathrm{e}^{2x})\cos y \cdot y' = 0$.

3. $(2y-2x)dx+(y-3x)dy=0$. **4.** $(2-x-y)dx+(2x-1)dy=0$.

5. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю *Oy*, дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобічним.

Варіант 14

1. $yy' + x = 0$. **2.** $x\sin y = y'(1+x^2)\cos y$, $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. $(5x+3y)dx+(x+y)dy=0$. **4.** $(x-2y+4)dx+(3x-2)dy=0$.

5. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

Варіант 15

1. $xy' = 2y$. **2.** $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.

3. $(13x+y)dx+(y-5x)dy=0$. **4.** $(2x+y-2)dx+(2-2x)dy=0$.

5. Довести, що крива, усі нормалі до якої проходять через одну й ту ж фіксовану точку, є колом.

Варіант 16

1. $xy' + y = 0$. **2.** $x^2 y' - \cos 2y = 1$.

3. $(3x + 2y)dx + xdy = 0$. **4.** $(2x + y + 1)dx = (4x - y)dy$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

Варіант 17

1. $y' + y = (x - y')^3$. **2.** $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$.

3. $(x - 2y)dx + ydy = 0$. **4.** $(3x + y - 1)dy = (2x + 2y - 1)dx$.

5. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, є величина стала, рівна a^2.

Варіант 18

1. $y' = x - e^y$. **2.** $x^2 y' \cos y + 1 = 0$.

3. $y(y - 3x)dx + x(2x + y)dy = 0$. **4.** $(5x + 2y)dx + (2x + y + 1)dy = 0$.

5. Знайти криві, для яких тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій їх точці в n разів більший за тангенс кута нахилу прямої, що проходить через цю точку і початок координат.

Варіант 19

1. $y(y' + x) = 1$. **2.** $(1 + x^2)y' - \dfrac{1}{2}\cos^2 2y = 0$.

3. $(3x^2 - 6xy + y^2)dx + 2x^2 dy = 0$. **4.** $(2x - 3y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

5. Знайти криву, яка проходить через точку (2,3) і має властивість: відрізок її довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику навпіл.

Варіант 20

1. $y' = \dfrac{y-3x}{x+3y}$. **2.** $y' = 2x(\pi + y)$.

3. $(x^2 - 2xy + 4y^2)dx + 2x^2dy = 0$. **4.** $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

5. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (1,1) і має властивість: тангенс кута нахилу будь-якої дотичної до неї прямо пропорційний квадрату ординати точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 21

1. $y' = \dfrac{y}{x+y}$. **2.** $x^2y' + \sin 2y = 1$.

3. $(y^2 + 4xy - 4x^2)dx - 4x^2dy = 0$. **4.** $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

5. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (0,–2) і має властивість: тангенс кута нахилу дотичної до неї в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 22

1. $x^2 + y^2y' = 1$. **2.** $y' = \cos(y - x)$.

3. $\left(y + y\ln\dfrac{y}{x}\right)dx + xdy = 0$. **4.** $10x^3y' = y(2x^2 - y^{10})$.

5. Знайти криву, яка проходить через точку (0,1) і має властивість: кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної до неї дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Варіант 23

1. $(x^2 + y^2)y' = 4x$. **2.** $(x+y)^2y' = a^2$, $a = const$.

3. $\left(xy + x^2\sin\dfrac{y}{x}\right)dy - \left(x^2 + xy\sin\dfrac{y}{x} + y^2\right)dx = 0$. **4.** $2x^2y' = y^3 + xy$.

5. Довести, що крива, для якої тангенс кута нахилу будь-якої дотичної до осі абсцис прямо пропорційний абсцисі точки дотику, є параболою.

Варіант 24

1. $2xy' + y^2 = 1$. **2.** $(x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1$.

3. $\left(x + y + y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx - \left(x\cos\dfrac{y}{x} + x\right)dy = 0$. **4.** $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

5. Знайти криві, для яких відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною та нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, має сталу довжину $2a$.

Варіант 25

1. $x^2y' = y(x+y)$. **2.** $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

3. $\left(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\right)dx - x\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\,dy = 0$. **4.** $3x^5ydx + (y^4 - x^6)dy = 0$.

5. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

§ 4 Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них

4.1. Лінійні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування.

Означення 4.1. ***Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*** називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані неперервні в області визначення рівняння функції. Якщо в (4.1) $q(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним***, у протилежному випадку – ***лінійним неоднорідним***.

Лінійне диференціальне рівняння (4.1) не має особливих розв'язків, а його загальний розв'язок можна шукати двома способами.

1. *Метод варіації сталої* (*метод Лаґранжа*). Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного до (1.1) однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

звідки

$$y_{\text{з.о.}} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}, \; C = const. \tag{4.2}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) будемо шукати у вигляді (4.2) із застосуванням ***методу варіації сталої***, тобто вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x:

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{4.3}$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (4.3) в (4.1):

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

звідки

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \;\Rightarrow\; C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (4.3) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо формулу для загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) першого порядку (4.1)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx \right). \tag{4.4}$$

2. *Метод підстановки (метод Д'Аламбера)*. Будемо шукати розв'язок ЛНДР (4.1) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{4.5}$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.1).

Після підстановки (4.5) в (4.1) маємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

або

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x). \tag{4.6}$$

Будемо вимагати, щоб у рівності (4.6) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок аналогічного до розглянутого вище лінійного однорідного ДР

$$v' + p(x)v = 0,$$

наприклад, $v = e^{-\int p(x)dx}$. Тоді з (4.6) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

звідки $u=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx+C$, де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (4.5), для загального розв'язку ЛНДР першого порядку (4.1) одержимо вже виведену методом Лаґранжа формулу (4.4).

Приклад 4.1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку

$$y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x. \tag{4.7}$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок ДР (4.7) із застосуванням методу варіації сталої (Лаґранжа). Згідно з алгоритмом цього методу спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (4.7) однорідного рівняння $y'-y\operatorname{ctg}x=0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dx}-y\operatorname{ctg}x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=\operatorname{ctg}x dx,$$

звідки

$$y_{\text{з.о.}}=C\mathrm{e}^{\int\operatorname{ctg}x dx}=C\sin x,\ C=const. \tag{4.8}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.7) будемо шукати у вигляді (4.8), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x:

$$y=C(x)\sin x. \tag{4.9}$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (4.9) в (4.7):

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x-C(x)\sin x\cdot\operatorname{ctg}x=\sin x,$$

звідки

$$C'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad C(x)=x+C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (4.9) і перепозначивши задля зручності $C_1=C$, одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) першого порядку (4.7)

$$y=(x+C)\sin x. \tag{4.10}$$

Як відомо, лінійне ДР, записане у вигляді (4.7), не має особливих розв'язків. Отже, сім'я кривих, задана формулою (4.10), включає всі розв'язки рівняння (4.7).

Відповідь. $y=(x+C)\sin x$.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку

$$y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ y(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^4. \tag{4.11}$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок ЛНДР (4.11) методом підстановки (Д'Аламбера) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y=u(x)\cdot v(x). \tag{4.12}$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.11).

Після підстановки (4.12) у рівняння з (4.11) маємо:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x\ln x}=x\ln x$$

або

$$u'v+u\left[v'-\frac{v}{x\ln x}\right]=x\ln x. \tag{4.13}$$

Будемо вимагати, щоб у (4.13) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x\ln x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x\ln x},$$

наприклад, $v=\mathrm{e}^{\int\frac{dx}{x\ln x}}=\ln x$. Тоді з (4.13) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'\ln x = x\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x,$$

звідки $u = 0{,}5x^2 + C$, де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (1.6), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.11)

$$y = (0{,}5x^2 + C)\cdot \ln x. \tag{4.14}$$

Виділимо з (4.14) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^4$. Із (4.14) при значеннях $x = \mathrm{e}^2$, $y = \mathrm{e}^4$ маємо:

$$\mathrm{e}^4 = (0{,}5\cdot \mathrm{e}^4 + C)\cdot \ln \mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (4.11) отримаємо, підставивши значення $C = 0$ у формулу (4.14). Отже, $y = \dfrac{x^2 \ln x}{2}$.

Відповідь. $y = \dfrac{x^2 \ln x}{2}$.

4.2. Рівняння Бернуллі.

Означення 4.2. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{4.15}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані неперервні функції, $\alpha \in R \setminus \{0;1\}$, називається ***рівнянням Бернуллі***.

Легко бачити, що у випадку $\alpha = 0$ ДР (4.15) є лінійним неоднорідним, а при $\alpha = 1$ – лінійним однорідним.

Подібно до ЛНДР (4.7), рівняння Бернуллі інтегрується двома шляхами.

1. ***Метод зведення до лінійного рівняння.*** Поділимо ліву і праву частини рівності (4.15) на y^{α}, вважаючи $y \neq 0$:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \qquad (4.16)$$

Введемо підстановку

$$z(x) = y^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)^{-1}z'.$$

Тоді з (4.16) одержимо рівняння

$$(1-\alpha)^{-1}z' + p(x)z = q(x),$$

або після домноження на $1-\alpha \neq 0$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \qquad (4.17)$$

Рівняння (4.17) є ЛНДР відносно невідомої функції $z(x)$. Його загальний розв'язок можна записати з застосуванням формули (4.10):

$$z = \mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int p(x)dx} \cdot \left(C + \int (1-\alpha)q(x)\mathrm{e}^{(1-\alpha)\int p(x)dx}\,dx \right). \qquad (4.18)$$

Підклавши в (4.18) значення $z = y^{1-\alpha}$, дістанемо загальний інтеграл рівняння Бернуллі (4.15)

$$y^{1-\alpha} = \mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int p(x)dx} \cdot \left(C + \int (1-\alpha)q(x)\mathrm{e}^{(1-\alpha)\int p(x)dx}\,dx \right). \qquad (4.19)$$

Зауважимо, що у випадку $\alpha > 0$ рівняння Бернуллі (4.15) має також особливий розв'язок $y = 0$.

2. *Метод підстановки* (*метод Д'Аламбера*). Аналогічно до випадку лінійного ДР шукаємо розв'язок рівняння Бернуллі (4.15) у вигляді добутку (4.11) двох функцій незалежної змінної *x*. Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ в (4.11) можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.15).

Після підстановки (4.11) у (4.15) маємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)\cdot(uv)^{\alpha}$$

або

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x) \cdot (uv)^{\alpha}. \qquad (4.20)$$

Будемо вимагати, щоб у рівності (4.20) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$v' + p(x)v = 0,$$

наприклад, $v = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$. Тоді з (4.20) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x) \cdot u^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = q(x) \cdot u^{\alpha}\, \mathrm{e}^{(1-\alpha)\int p(x)dx},$$

звідки після відокремлення змінних і наступного інтегрування маємо:

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = q(x)\mathrm{e}^{(1-\alpha)\int p(x)dx}\,dx \quad \Rightarrow \quad u^{1-\alpha} = (1-\alpha)\int q(x)\mathrm{e}^{(1-\alpha)\int p(x)dx}\,dx + C,$$

де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у формулу (4.11), яку задля спрощення запису можна розглядати у вигляді $y^{1-\alpha} = u^{1-\alpha} \cdot v^{1-\alpha}$, одержимо побудований вище методом зведення до лінійного рівняння загальний інтеграл (4.19) рівняння Бернуллі (4.15).

Приклад 4.3. Зінтегрувати рівняння Бернуллі:

$$x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0. \qquad (4.21)$$

Розв'язання. Подамо ДР (4.21) у стандартному вигляді рівняння Бернуллі при $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{y}}{x^2}. \qquad (4.22)$$

Для інтегрування ДР (4.22) застосуємо метод зведення до лінійного рівняння. Поділимо ліву і праву частини рівності (4.22) на $\sqrt{y}$, вважаючи $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x} = -\frac{1}{x^2}. \tag{4.23}$$

Введемо підстановку

$$z(x) = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'.$$

Тоді з (4.23) одержимо рівняння

$$2z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

або

$$z' + \frac{z}{2x} = -\frac{1}{2x^2}. \tag{4.24}$$

Рівняння (4.24) є ЛНДР відносно невідомої функції $z(x)$. Знайдемо його розв'язок із застосуванням методу варіації сталої (Лаґранжа) аналогічно до Прикладу 4.1. Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (4.24) однорідного рівняння $z' + \frac{z}{2x} = 0$. Це рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{2x},$$

звідки

$$z_{\text{з.о.}} = C\mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{2x}} = \frac{C}{\sqrt{x}}, \; C = const. \tag{4.25}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.24) будемо шукати у вигляді (4.25), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x:

$$z = \frac{C(x)}{\sqrt{x}}. \tag{4.26}$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (4.26) у (4.24):

$$\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{C(x)}{2\sqrt{x^3}} + \frac{C(x)}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^2},$$

звідки

$$C'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (4.26) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.24)

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + C\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}. \tag{4.27}$$

Враховуючи підстановку $z = \sqrt{y}$, із (4.27) дістанемо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (4.22)

$$\sqrt{y} = \frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Зауважимо: оскільки в (4.22) $\alpha = \frac{1}{2} > 0$, то рівняння Бернуллі має також розв'язок $y = 0$.

Відповідь. $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2$, $y = 0$.

Приклад 4.4. Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}, \quad y(1) = 2. \tag{4.28}$$

Розв'язання. Подамо ДР (4.28) у стандартному вигляді рівняння Бернуллі при $\alpha = -3$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{xy^3}. \tag{4.29}$$

Будемо шукати розв’язок ДР (4.29) методом підстановки (Д’Аламбера) у вигляді добутку (4.5) двох функцій незалежної змінної x. Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.29).

Після підстановки (4.5) у рівняння (4.29) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\ln x}{x(uv)^3}$$

або

$$u'v + u\left[v' + \frac{v}{x}\right] = \frac{\ln x}{x(uv)^3}. \tag{4.30}$$

Будемо вимагати, щоб у (4.30) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв’язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

наприклад, $v = \mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1}$. Тоді з (4.30) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$x^{-1}\frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x \cdot (ux^{-1})^3} \quad \Rightarrow \quad u^3 du = x^3 \ln x dx,$$

звідки після інтегрування маємо

$$\frac{u^4}{4} = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{C}{4} \quad \Rightarrow \quad u = \pm x \cdot \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{C}{x^4}},$$

де C – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (4.6), одержимо загальний розв’язок рівняння Бернуллі (4.29)

$$y = \pm x \cdot \sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{C}{x^4}} \cdot x^{-1} = \pm\sqrt[4]{\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{C}{x^4}}. \tag{4.31}$$

Виділимо з (4.31) частинний розв'язок, який справджує задану початкову умову $y(1)=2$. Із (4.31) при значеннях $x=1$, $y=2$ і за знаку «+» перед коренем (оскільки початкове значення змінної y є додатним) маємо:

$$2=\sqrt[4]{C-\frac{1}{4}} \Rightarrow C=\frac{65}{4}$$

Шуканий розв'язок задачі Коші (4.28) отримаємо, підставивши знайдене значення сталої C у формулу (4.31) за знаку «+» перед коренем.

Відповідь. $y=\sqrt[4]{\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+\frac{65}{4x^4}}$.

4.3. Рівняння Ріккаті.

Означення 4.3. Рівняння вигляду

$$y'+p(x)y+q(x)y^2=r(x), \tag{4.32}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – задані неперервні функції, називається ***рівнянням Ріккаті***.

Легко бачити, що у випадку $q(x)\equiv 0$ ДР (4.32) є лінійним неоднорідним, а у випадку $r(x)\equiv 0$ – рівнянням Бернуллі при $\alpha=2$. Надалі будемо вважати, що в (4.32) $r(x)q(x)\neq 0$.

Загалом рівняння Ріккаті вигляду (4.32) не інтегрується в квадратурах. Однак якщо відомий деякий частинний розв'язок цього рівняння, то рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі, і таким чином може бути розв'язане в квадратурах.

Справді, нехай $y_1(x)$ – деякий частинний розв'язок ДР (4.32). Введемо підстановку

$$y=y_1(x)+z(x), \tag{4.33}$$

де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді з (4.32) маємо:

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = r(x),$$

або після перегрупування доданків

$$z' + \{p(x) + 2q(x)y_1\}z + q(x)z^2 + [y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 - r(x)] = 0. \qquad (4.34)$$

Оскільки $y_1(x)$ є розв'язком ДР (4.32), то вираз у квадратних дужках у лівій частині рівності (4.34) очевидно обертається в нуль, тобто для нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$

$$z' + \{p(x) + 2q(x)y_1\}z = -q(x)z^2.$$

Зінтегрувавши останнє рівняння одним із наведених вище методів, і підставивши знайдений розв'язок $z(x)$ у (4.33), одержимо загальний розв'язок рівняння Ріккаті (4.32).

Підібрати частинний розв'язок рівняння Ріккаті загалом досить складно. Однак іноді його вдається визначити, виходячи з вигляду вільного члена рівняння $r(x)$. Наприклад, для рівняння $y' + y^2 = x^2 - 2x$ у лівій частині будуть члени, подібні до доданків правої частини, якщо покласти $y = ax + b$. Підставляючи в рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах, знаходимо a і b (якщо тільки частинний розв'язок такого вигляду існує, що буває зовсім не завжди). Інший приклад: для рівняння $y' + 2y^2 = 6x^{-2}$ такі ж міркування спонукають нас шукати частинний розв'язок у вигляді $y = ax^{-1}$. Підставивши $y = ax^{-1}$ у рівняння, знаходимо значення сталої a.

Приклад 4.5. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}. \qquad (4.35)$$

Розв'язання. ДР (4.35) є рівнянням Ріккаті, яке можна звести до рівняння Бер-нуллі, а далі й до лінійного ДР, якщо відомий деякий його частинний розв'язок $y_1(x)$. Бачимо, що в лівій частині рівності (4.35) отримуються доданки, подібні до вільного члена у правій частині, якщо покласти

$$y_1(x) = \frac{a}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = \frac{a \sin x}{\cos^2 x},$$

де a – стала, значення якої визначаємо безпосередньою підстановкою в (4.35):

$$\frac{a \sin x}{\cos^2 x} + \frac{a^2}{\cos^2 x} \cdot \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad a + a^2 = 2.$$

Остання рівність виконується при $a = 1$ або $a = -2$. Отже, за частинний розв'язок рівняння Ріккаті (4.35) можна взяти функцію

$$y_1(x) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (4.36)$$

Введемо підстановку

$$y = y_1(x) + z(x) = \frac{1}{\cos x} + z(x), \qquad (4.37)$$

де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді з (4.35) маємо:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} + z' + \left(\frac{1}{\cos x} + z \right)^2 \cdot \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x},$$

звідки після спрощення для нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$

$$z' + \frac{2 \sin x}{\cos x} z = -z^2 \sin x. \qquad (4.38)$$

Зауважимо, що виведене ДР (4.38) має тривіальний розв'язок $z = 0$, однак для рівняння Ріккаті (4.35) він не дає нового розв'язку, оскільки згідно з (4.37) у цьому випадку отримуємо вже відомий частинний розв'язок (4.36).

Оскільки в завданні вимагається попередньо звести ДР (4.35) до лінійного, то для інтегрування рівняння Бернуллі (4.4) скористаємося методом зведення до лінійного рівняння, проілюстрованим у Прикладі 4.3.

Поділимо ліву і праву частини рівності (4.38) на z^2, вважаючи $z \neq 0$:

$$z^{-2}z' + \frac{2\sin x}{\cos x}z^{-1} = -\sin x. \tag{4.39}$$

Введемо підстановку

$$\omega(x) = z^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega' = -z^{-2}z' \quad \Rightarrow \quad z^{-2}z' = -\omega'.$$

Тоді з (4.39) одержимо рівняння

$$-\omega' + \frac{2\sin x}{\cos x}\omega = -\sin x,$$

або

$$\omega' - \frac{2\sin x}{\cos x}\omega = \sin x. \tag{4.40}$$

Рівняння (4.40) є ЛНДР відносно невідомої функції $\omega(x)$. Знайдемо його розв'язок із застосуванням методу варіації сталої (Лаґранжа), проілюстрованому в Прикладах 4.1 та 4.3. Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного до (4.40) однорідного рівняння:

$$\frac{d\omega}{dx} - \frac{2\sin x}{\cos x}\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\sin x dx}{\cos x},$$

звідки

$$\omega_{\text{з.о.}} = C\mathrm{e}^{2\int \mathrm{tg} x dx} = C\cos^{-2}x,\ C = const. \tag{4.41}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.40) будемо шукати у вигляді (4.41), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної x:

$$\omega = C(x)\cos^{-2}x\,. \tag{4.42}$$

Функцію $C(x)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (4.42) у (4.40):

$$C'(x)\cos^{-2}x + 2C(x)\cos^{-3}x\sin x - 2\sin x\cos^{-1}x \cdot C(x)\cos^{-2}x = \sin x,$$

звідки

$$C'(x) = \sin x\cos^2 x \;\Rightarrow\; C(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(x)$ у (4.42), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.40)

$$\omega = \left(-\frac{\cos^3 x}{3} + C_1\right) \cdot \cos^{-2}x = \frac{C - \cos^3 x}{3\cos^2 x}\,. \qquad (4.43)$$

де $C = 3C_1$. Оскільки $\omega = z^{-1}$, то з (4.43) одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (4.38)

$$z = \omega^{-1} = \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x},$$

а тоді згідно з (4.37) загальний розв'язок рівняння Ріккаті (4.35) запишеться у вигляді

$$y = \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{C + 2\cos^3 x}{\cos x(C - \cos^3 x)}\,. \qquad (4.44)$$

Зауважимо, що при значенні $C = 0$ із (4.44) отримуємо частинний розв'язок рівняння (4.35) $y_2(x) = -\dfrac{2}{\cos x}$ у випадку $a = -2$. Однак частинний розв'язок (4.36) не одержується з (4.44) при жодному значенні сталої C, тому в остаточній відповіді його слід додати окремо.

Відповідь. $y = \dfrac{C + 2\cos^3 x}{\cos x(C - \cos^3 x)}$, $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Приклад 4.6. Зінтегрувати рівняння, попередньо звівши його до лінійного ДР першого порядку, і знайти його інтегральну криву, що проходить через точку $M(1,1)$:

$$xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0.$$

Розв'язання. Задане ДР (4.11) є рівнянням Ріккаті

$$y' - (2x + x^{-1})y - y^2 = x^2, \tag{4.45}$$

яке можна звести до рівняння Бернуллі, а далі й до лінійного ДР, якщо відомий деякий його частинний розв'язок $y_1(x)$. Бачимо, що в лівій частині рівності (4.45) отримуються доданки, подібні до вільного члена (тобто многочлени степеня не вищого за другий), якщо покласти

$$y_1(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = a,$$

де a, b – сталі, значення яких визначаємо безпосередньою підстановкою в (4.45):

$$a - (2x + x^{-1})(ax + b) - (ax + b)^2 = x^2,$$

або після спрощення

$$(a+1)^2 x^2 + 2b(a+1)x + b^2 + bx^{-1} = 0.$$

Остання рівність виконується при $a = -1$, $b = 0$. Отже, за частинний розв'язок рівняння Ріккаті (4.45) можна взяти функцію

$$y_1(x) = -x. \tag{4.46}$$

Введемо підстановку

$$y = y_1(x) + z(x) = -x + z(x), \tag{4.47}$$

де $z(x)$ – нова невідома функція. Тоді з (4.45) маємо:

$$z' - 1 - \left(2x + \frac{1}{x}\right)(z - x) - (z - x)^2 = x^2,$$

звідки після спрощення для нової невідомої функції $z(x)$ отримуємо рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$

$$z' - \frac{z}{x} = z^2. \qquad (4.48)$$

Зауважимо, що виведене ДР має тривіальний розв’язок $z = 0$, однак для рівняння Ріккаті (4.45) він не дає нового розв’язку, оскільки згідно з (4.47) у цьому випадку отримуємо вже відомий частинний розв’язок (4.46).

Оскільки в завданні вимагається попередньо звести ДР (4.45) до лінійного, то для інтегрування рівняння Бернуллі (4.48) скористаємося методом, проілюстрованим у Прикладі 4.3.

Поділимо ліву і праву частини рівності (4.48) на z^2, вважаючи $z \neq 0$:

$$z^{-2}z' - (xz)^{-1} = 1. \qquad (4.49)$$

Введемо підстановку

$$\omega(x) = z^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega' = -z^{-2}z' \quad \Rightarrow \quad z^{-2}z' = -\omega'.$$

Тоді з (4.49) одержимо рівняння

$$-\omega' - x^{-1}\omega = 1,$$

або

$$\omega' + \frac{\omega}{x} = -1. \qquad (4.50)$$

Рівняння (4.50) є ЛНДР відносно невідомої функції $\omega(x)$. Будемо шукати його розв’язок методом підстановки (Д’Аламбера) у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$\omega = u(x) \cdot v(x). \qquad (4.51)$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (4.50).

Після підстановки (4.51) у рівняння (4.50) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -1$$

або

$$u'v + u\left[v' + \frac{v}{x}\right] = -1. \tag{4.52}$$

Будемо вимагати, щоб у (4.52) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

наприклад, $v = \mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1}$. Тоді з (4.52) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'x^{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -x,$$

звідки $u = -0{,}5x^2 + C_1$, де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у (4.51), одержимо загальний розв'язок ЛНДР першого порядку (4.50)

$$\omega = x^{-1}(C_1 - 0{,}5x^2) = \frac{C - x^2}{2x}, \tag{4.53}$$

де $C = 2C_1$. Оскільки $\omega = z^{-1}$, то з (4.53) одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (4.48)

$$z = \omega^{-1} = \frac{2x}{C - x^2},$$

а тоді згідно з (4.47) загальний розв'язок рівняння Ріккаті (4.45) запишеться у вигляді

$$y = \frac{2x}{C - x^2} - x = \frac{(2 - C)x + x^3}{C - x^2}. \qquad (4.54)$$

Зауважимо, що частинний розв'язок (4.46) не одержується з (4.54) при жодному значенні сталої C, тому в остаточній відповіді його слід додати окремо.

Виділимо з сім'ї кривих (4.54), (4.46) ту інтегральну криву, яка проходить через точку $M(1{,}1)$, тобто справджує початкову умову $y(1) = 1$. При значеннях $x = 1$, $y = 1$ (4.46) дає хибну рівність $1 = -1$, отже, частинний розв'язок (4.46) не є шуканою інтегральною кривою. Підставивши ті ж значення в (4.54), маємо:

$$1 = \frac{2 - C + 1}{C - 1} \Rightarrow C = 2.$$

Рівняння шуканої інтегральної кривої (розв'язку задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C = 2$ у формулу (4.54). Отже, $y = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$.

Відповідь. $y = \dfrac{(2 - C)x + x^3}{C - x^2}$, $y = -x$; через точку $M(1{,}1)$ проходить інтегральна крива, що задається рівнянням $y = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$.

4.4. Деякі інші типи рівнянь першого порядку, що зводяться до лінійних.

1) Деякі рівняння стають лінійними, якщо в них поміняти місцями шукану функцію та незалежну змінну. Наприклад, ДР $y = (2x + y^3)y'$, у якому y є функцією від x, не є лінійним. Запишемо його в диференціалах: $ydx - (2x + y^3)dy = 0$. Оскільки в це рівняння x і dx входять лінійно, то рівняння буде лінійним, якщо x вважати шуканою функцією, а y – незалежною змінною. Це рівняння може бути записане у вигляді

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$$

і розв’язується аналогічно до ДР (4.1).

Загалом до такого типу належать ДР, які подаються у вигляді лінійного неоднорідного рівняння

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y), \tag{4.55}$$

або рівняння Бернуллі

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^{\alpha}, \quad \alpha \in R \setminus \{0;1\} \tag{4.56}$$

відносно невідомої функції $x(y)$. ДР (4.55) і (4.56) інтегруються аналогічно до рівнянь (4.1) і (4.15) відповідно, якщо вважати x шуканою функцією, а y – незалежною змінною.

2) Рівняння вигляду

$$f'(y) \cdot y' + p(x)f(y) = q(x), \quad y = y(x), \tag{4.57}$$

де f – деяка функція залежної змінної y, зводиться до лінійного очевидною підстановкою

$$z(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad z' = f'(y) \cdot y',$$

після якої для нової невідомої функції $z(x)$ одержимо ЛНДР вигляду (1.1)

$$z' + p(x)z = q(x).$$

Частинним випадком ДР типу (4.57) є рівняння Бернуллі (4.15): його можна розглядати як лінійне відносно функції $f(y) = y^{1-\alpha}$.

До рівнянь типу (4.57) належить також ДР вигляду

$$y' + p(x) = q(x)\mathrm{e}^{\alpha y}, \quad \alpha = const \neq 0,$$

яке зводиться до лінійного шляхом домноження на величину $f(y) = -\alpha e^{-\alpha y}$ і введення підстановки $z(x) = e^{-\alpha y}$, $z' = -\alpha e^{-\alpha y} \cdot y'$. Маємо:

$$-\alpha e^{-\alpha y} y' - \alpha p(x) e^{-\alpha y} = -\alpha q(x) \quad \Rightarrow \quad z' - \alpha p(x) z = -\alpha q(x).$$

Останнє рівняння є ЛНДР відносно нової невідомої функції $z(x)$.

3) Рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + R(x, y)(xdy - ydx) = 0, \tag{4.58}$$

де *M*, *N* і *R* однорідні функції, причому *M* і *N* – однакового виміру *p*, *R* – іншого виміру *k*, називається ***рівнянням Міндінґа-Дарбу***. Покажемо, що заміною

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx \tag{4.59}$$

рівняння Міндінґа-Дарбу зводиться до рівняння Бернуллі з шуканою функцією $x(z)$.

Підставимо (4.59) у (4.58):

$$M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdx) + R(x, xz)(x[xdz + zdx] - xzdx) = 0,$$

або після спрощення і врахування вимірності однорідних функцій *M*, *N* і *R*

$$x^p M(1, z)dx + x^p N(1, z)(xdz + zdx) + x^k R(1, z) \cdot x^2 dz = 0,$$

звідки

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{N(1, z) \cdot x + R(1, z) \cdot x^{2+k-p}}{M(1, z) + zN(1, z)}. \tag{4.60}$$

Якщо $k = p - 1$, то ДР (4.60) є лінійним однорідним і інтегрується шляхом відокремлення змінних. Якщо $k = p - 2$, то ДР (4.60) є лінійним неоднорідним і інтегрується описаними вище методами Лаґранжа або Д'Аламбера. В інших випадках ДР (4.60) є рівнянням Бернуллі, і інтегрується шляхом зведення до лінійного рівняння або методом підстановки $x(z) = u(z) \cdot v(z)$

§ 5 Рівняння в повних диференціалах та звідні до них

5.1. Рівняння в повних диференціалах. Умова Ейлера.

Означення 5.1. Диференціальне рівняння (ДР) вигляду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.1}$$

де M і N – задані неперервні функції своїх аргументів, називається ***рівнянням у повних диференціалах*** (РПД), якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $f(x,y)$. У такому випадку ДР (5.1) подається у вигляді

$$df(x,y) = 0,$$

а отже, його загальний інтеграл визначається рівністю

$$f(x,y) = C. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1 (*умова Ейлера*). Для того, щоб ДР (5.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і досить виконання ***умови Ейлера***

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.3}$$

***Доведення*.** Нехай ДР (5.1) є рівнянням у повних диференціалах. Тоді воно подається у вигляді

$$df(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{5.4}$$

Порівнюючи (5.4) із (5.1), отримуємо рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \tag{5.5}$$

Система (5.5) має розв’язок за виконання умови

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

оскільки для неперервної функції шлях обчислення мішаної похідної не змінює результату. Підставивши в останню рівність значення частинних похідних із (5.5), одержимо умову Ейлера (5.3).

Нехай тепер виконується умова Ейлера (5.3). Покажемо, що тоді (5.1) є РПД, тобто існує така функція $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.1). Припустимо, що така функція існує, тоді вона є розв'язком системи (5.5). Побудуємо цей розв'язок.

Із першого рівняння системи (5.5) маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} M'_y(t, y)dt + \varphi'(y),$$

де x_0 – довільна стала з області визначеності підінтегральної функції, а $\varphi(y)$ – довільна функція змінної y.

Застосувавши в останній рівності умову Ейлера (5.3), одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} N'_x(t, y)dt + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

Тоді на підставі другого з рівнянь системи (5.5)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \Rightarrow \quad N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = N(x_0, y),$$

звідки

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, y_0 – деяке значення з області визначеності підінтегральної функції. Отже, шукана функція $f(x, y)$ існує і дається формулою

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt + C_1,$$

а це означає, що ДР (5.1) є рівнянням у повних диференціалах. ■

Зауважимо, що доведення теореми дає одночасно спосіб побудови загального інтеграла (5.2) РПД (5.1). Підставивши знайдену функцію $f(x,y)$ в (5.2) і поклавши для визначеності $C_1 = 0$ – це не змінює загальності результату, оскільки рівність (5.1) уже містить довільну сталу, – отримаємо загальний інтеграл РПД (5.1) у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt = C.$$

Зауваження. Іноді ДР, що не є рівняннями в повних диференціалах, вдається зінтегрувати, виділивши повні диференціали з частини доданків. Це зокрема стосується ДР, які містять вирази

$$xdy + ydx = d(xy),\; xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = -y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$$

тощо. Розв’язування таких рівнянь часто можна значно спростити шляхом введення відповідних підстановок.

Приклад 5.1. Перевірити, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, і знайти його розв’язок:

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0. \qquad (5.6)$$

Розв’язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1), маємо:

$$M(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y\sin 2x;$$

$$N(x,y) = -2y\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4y\cos x \sin x = 2y\sin 2x.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.6) є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.6). Вона визначається з системи рівнянь (5.5), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1+y^2\sin 2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\cos^2 x. \tag{5.7}$$

Інтегруючи перше з рівнянь системи (5.7) за змінною x, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1+y^2\sin 2x \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x-\frac{y^2\cos 2x}{2}+\varphi(y), \tag{5.8}$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y, яку визначаємо підстановкою (5.8) у друге рівняння системи (5.7). Таким чином, з урахуванням тригонометричної тотожності $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv -y\cos 2x+\varphi'(y)=-2y\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=-y.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння. Інтегруванням і наступною підстановкою знайденої функції $\varphi(y)$ в (5.8) визначаємо

$$\varphi(y)=-\frac{y^2}{2} \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=x-y^2\cos^2 x.$$

Тоді згідно з (5.2) загальний інтеграл РПД (5.6) запишеться у вигляді

$$x^2-y^2\cos^2 x=C.$$

Відповідь. $x^2-y^2\cos^2 x=C.$

Приклад 5.2. Перевірити, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, і знайти його розв'язок, що проходить через точку $M(0,1)$:

$$\left(2xy\,e^{x^2}+\ln y\right)dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy=0. \qquad (5.9)$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1), маємо:

$$M(x,y)=2xy\,e^{x^2}+\ln y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=2x\,e^{x^2}+\frac{1}{y};$$

$$N(x,y)=e^{x^2}+\frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x\,e^{x^2}+\frac{1}{y}.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.9) є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.9). Вона визначається з системи рівнянь (5.4), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\,e^{x^2}+\ln y,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2}+\frac{x}{y}. \qquad (5.10)$$

Інтегруючи друге з рівнянь системи (5.10) за змінною y з урахуванням визначеності ДР (5.9) при $y>0$, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2}+\frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=y\,e^{x^2}+x\ln y+\varphi(x), \qquad (5.11)$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (5.11) у перше рівняння системи (5.10). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 2xy\,e^{x^2}+\ln y+\varphi'(x)=2xy\,e^{x^2}+\ln y \quad\Rightarrow\quad \varphi'(x)=0.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x)=0$. Підстановкою в (5.11) визначаємо

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2} + x\ln y.$$

Тоді згідно з (5.2) загальний інтеграл РПД (5.6) запишеться у вигляді

$$y\mathrm{e}^{x^2} + x\ln y = C. \tag{5.12}$$

Виділимо з сім'ї кривих (5.12) ту інтегральну криву, яка проходить через точку $M(0,1)$, тобто справджує початкову умову $y(0)=1$. При значеннях $x=0$, $y=1$ із (5.12) маємо:

$$1\cdot \mathrm{e}^0 + 0\cdot \ln 1 = C \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Рівняння шуканої інтегральної кривої (розв'язку задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C=1$ у рівність (5.12). Отже, $y\mathrm{e}^{x^2} + x\ln y = 1$.

Відповідь. $y\mathrm{e}^{x^2} + x\ln y = 1$.

Приклад 5.3. Розв'язати рівняння шляхом виділення повних диференціалів:

$$y(x+y^2)dx + x^2(y-1)dy = 0. \tag{5.13}$$

Розв'язання. Зауважимо, що (5.13) не є рівнянням у повних диференціалах, оскільки для нього не виконується умова Ейлера: $\dfrac{\partial}{\partial y}[y(x+y^2)] \neq \dfrac{\partial}{\partial x}[x^2(y-1)]$.

Подамо (5.13) у вигляді

$$y^3dx + x^2ydy + x(ydx - xdy) = 0. \tag{5.14}$$

Це рівняння Міндінґа-Дарбу, яке загалом зводиться до рівняння Бернуллі підстановкою $y = xz$. Однак специфічний вигляд рівнянь такого типу дуже часто допускає інтегрування простішими методами, зокрема шляхом виділення повних диференціалів зі згрупованих певним чином доданків.

Застосуємо цей метод до рівняння (5.14). Щоб отримати повні диференціали з першої та другої пар доданків, поділимо рівність (5.14) на x^2y^3, вважаючи

$xy \neq 0$ [принагідно зауважимо, що функції $x = 0$ та $y = 0$ є розв'язками ДР (5.13), тому їх слід враховувати в остаточній відповіді]. Маємо:

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} + \frac{ydx - xdy}{xy^3} = 0.$$

Останню рівність можна подати з виділеними повними диференціалами:

$$-d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{xy} d\left(\frac{x}{y}\right) = 0. \qquad (5.15)$$

Введемо подвійну підстановку

$$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}, \quad v = \frac{x}{y}. \qquad (5.16)$$

Звідси

$$x = \frac{v+1}{u}, \quad y = \frac{v+1}{uv},$$

а отже, рівність (5.15) через нові змінні u, v запишеться у вигляді

$$-du + \frac{u^2 v}{(v+1)^2} dv = 0. \qquad (5.17)$$

Рівняння (5.17) інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$du = \frac{u^2 v}{(v+1)^2} dv \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = \frac{vdv}{(v+1)^2},$$

звідки

$$C - \frac{1}{u} = \ln|v+1| + \frac{1}{v+1}, \qquad (5.18)$$

де C – довільна стала. Зауважимо, що на цьому кроці інтегрування слід врахувати ще один втрачений розв'язок ДР (5.13)

$$v + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x.$$

Загальний інтеграл рівняння (5.13) одержуємо після підстановки в (5.18) значень змінних *u*, *v* із (5.16):

$$C-\frac{xy}{x+y}=\ln|xy^{-1}+1|+\frac{1}{xy^{-1}+1},$$

або після спрощення

$$\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C. \qquad (5.19)$$

Порівнюючи три втрачені в процесі інтегрування розв'язки з (5.19), робимо висновок, що $y=0$ та $y=-x$ не одержуються з загального інтеграла, зате при $x=0$ ліва частина рівності (5.19) дає сталу величину, а отже, цей розв'язок входить у сім'ю інтегральних кривих, тому в остаточній відповіді його не потрібно вказувати окремо.

Відповідь. $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C$, $y=0$, $y=-x$.

5.2. Інтегрувальний множник. Теореми про існування інтегрувального множника. Припустимо, що ДР (5.1) не є РПД, тобто для нього не виконується умова Ейлера (5.3).

Означення 5.2. ***Інтегрувальним множником*** для ДР (5.1) називається така функція $\mu(x,y)$, після домноження на яку ліва частина ДР (5.1) стає повним диференціалом, тобто для рівняння

$$(\mu M)dx+(\mu N)dy=0$$

виконується умова Ейлера:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

З останньої рівності маємо:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y},$$

або

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.20}$$

Таким чином, будь-який розв'язок $\mu(x,y)$ диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП) (5.20) є інтегрувальним множником для ДР (5.1).

Практичний інтерес становлять випадки, коли інтегрувальний множник є функцією одного аргумента: $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$ або $\mu=\mu(\omega)$, де $\omega=\omega(x,y)$.

Теорема 5.2 (*існування інтегрувального множника* $\mu(x)$). Для того, щоб для ДР (5.1) існував інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi_1(x) \tag{5.21}$$

***Доведення*.** Нехай для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$. Тоді ця функція є розв'язком ДРЧП (5.21), яке у випадку $\mu=\mu(x)$ можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(x)}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної x, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної x, тобто має виконуватися умова (5.21), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від іншої змінної y як від параметра, що суперечить припущенню.

Нехай тепер виконується умова (5.21). Тоді для інтегрувального множника $\mu(x)$ із (5.20) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(x)}{\mu}=\varphi_1(x).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi_1(x)dx}. \tag{5.22}$$

Отже, для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu(x)$, який можна знайти за формулою (5.22). ■

Теорема 5.3 (***існування інтегрувального множника*** $\mu(y)$). Для того, щоб для ДР (5.1) існував інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi_2(x) \tag{5.23}$$

Доведення. Нехай для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$. Тоді ця функція є розв'язком ДРЧП (5.20), яке у випадку $\mu=\mu(y)$ можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(y)}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної *y*, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної *y*, тобто має виконуватися умова (5.23), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від іншої змінної *x* як від параметра, що суперечить припущенню.

Нехай тепер виконується умова (5.23). Тоді для інтегрувального множника $\mu(y)$ із (5.20) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(y)}{\mu}=\varphi_2(y).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(y) = e^{\int \varphi_2(y)dy}. \tag{5.24}$$

Отже, для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu(y)$, який можна знайти за формулою (5.24). ■

Теорема 5.4 (*існування інтегрувального множника* $\mu(\omega)$). Для того, щоб для ДР (5.1) існував інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \varphi_3(x) \tag{5.25}$$

Доведення. Нехай для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$ деяка відома функція двох змінних. Тоді $\mu = \mu(\omega)$ є розв'язком ДРЧП (5.20), яке у цьому випадку можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної ω, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної ω, тобто має виконуватися умова (5.25), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від інших змінних x, y як від параметрів, що суперечить припущенню.

Нехай тепер виконується умова (5.25). Тоді для інтегрувального множника $\mu(\omega)$ із (5.20) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu} = \varphi_3(\omega).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(\omega) = e^{\int \varphi_3(\omega)d\omega}. \tag{5.26}$$

Отже, для ДР (5.1) існує інтегрувальний множник $\mu(\omega)$, де $\omega = \omega(x, y)$, який можна знайти за формулою (5.26). ■

Зрозуміло, що випадок $\mu = \mu(\omega)$ є значно складнішим для реалізації, ніж два попередні, адже тут для відшукання інтегрувального множника спершу необхідно підібрати аргумент $\omega = \omega(x, y)$, для якого справджується критерій (5.25). Найоптимальнішим є варіант, коли підбором функції $\omega(x, y)$ ліву частину рівності (5.25) вдається перетворити на сталу величину, адже тоді критерій виконується автоматично. Інакше пробують задовольнити критерій (5.25), підставляючи замість $\omega(x, y)$ простіші аргументи, наприклад: $x \pm y$, $x^2 \pm y^2$, xy, xy^{-1} або $x^{-1}y$. Якщо домогтися виконання умови Теореми 5.4 таким чином не вдалося, то доцільніше шукати інші шляхи інтегрування ДР (5.1).

Зауважимо, що інтегрувальні множники можна підібрати і для деяких вивчених раніше інтегровних типів ДР першого порядку. Зокрема, для лінійного ДР

$$y' + p(x)y = q(x)$$

існує інтегрувальний множник

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx},$$

який можна отримати з застосуванням Теореми 5.2.

Для ДР з відокремлюваними змінними

$$f_1(x) f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

існує очевидний інтегрувальний множник

$$\mu(x, y) = \frac{1}{f_2(y)g_1(x)},$$

звідки випливає: відокремлення змінних зводиться до домноження на деякий інтегрувальний множник. Цю властивість можна використати для знаходження інтегрувальних множників інших інтегровних типів ДР першого порядку, що зводяться до ДР з відокремлюваними змінними. Зокрема, для нелінійного однорідного рівняння вигляду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

де M і N – однорідні функції однакового виміру, інтегрувальний множник виражається формулою

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}.$$

Приклад 5.3. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах та зінтегрувати його:

$$(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0. \tag{5.27}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1), маємо:

$$M(x,y)=x\sin y+y\cos y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=(x+1)\cos y-y\sin y;$$

$$N(x,y)=x\cos y-y\sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos y.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.27) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\dfrac{(x+1)\cos y-y\sin y-\cos y}{x\cos y-y\sin y}=1=\varphi_1(x)$. Нам поталанило: виконується перший же критерій, тому існує $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi_1(x)dx}=\mathrm{e}^{\int dx}=\mathrm{e}^{x}$.

Домноживши рівність (5.27) на знайдений інтегрувальний множник, маємо:

$$e^{x}(x\cos y - y\sin y)dy + e^{x}(x\sin y + y\cos y)dx = 0. \qquad (5.28)$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (5.28) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (5.1):

$$M(x,y) = e^{x}(x\sin y + y\cos y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{x}[(x+1)\cos y - y\sin y];$$

$$N(x,y) = e^{x}(x\cos y - y\sin y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{x}[(x+1)\cos y - y\sin y].$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.28) справді є РПД. Для побудови його загального розв’язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.28). Вона визначається з системи рівнянь (5.4), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x}(x\sin y + y\cos y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x}(x\cos y - y\sin y). \qquad (5.29)$$

Інтегруючи перше з рівнянь системи (5.29) за змінною x, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x}(x\sin y + y\cos y) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = e^{x}[(x-1)\sin y + y\cos y] + \varphi(y), \qquad (5.30)$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y, яку визначаємо підстановкою (5.30) у друге рівняння системи (5.29). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv e^{x}(x\cos y - y\sin y) + \varphi'(y) = e^{x}(x\cos y - y\sin y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв’язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(y) = 0$. Підстановкою в (5.30) визначаємо

$$f(x,y) = e^{x}[(x-1)\sin y + y\cos y].$$

Тоді згідно з (15.2) загальний інтеграл РПД запишеться у вигляді

$$e^{x}[(x-1)\sin y+y\cos y]=C \quad\Rightarrow\quad (x-1)\sin y+y\cos y=C\,e^{-x}.$$

Відповідь. $(x-1)\sin y+y\cos y=C\,e^{-x}$.

Приклад 5.4. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і визначити його розв'язок, який справджує початкову умову $y(1)=1$:

$$(2xy+y^{2})dx+(2x^{2}+3xy)dy=0. \qquad (5.31)$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1), маємо:

$$M(x,y)=2xy+y^{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=2x+2y;$$

$$N(x,y)=2x^{2}+3xy \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+3y.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.31) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\dfrac{2x+2y-(4x+3y)}{2x^{2}+3xy}=-\dfrac{2x+y}{x(2x+3y)}\neq\varphi_1(x)$. На жаль, перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\dfrac{2x+2y-(4x+3y)}{-(2xy+y^{2})}=\dfrac{2x+y}{y(2x+y)}=\dfrac{1}{y}=\varphi_2(y)$. Цей критерій виконується, отже, існує $\mu(y)=e^{\int\varphi_2(y)dy}=e^{\int\frac{dy}{y}}=y$.

Домноживши рівність (5.31) на знайдений інтегрувальний множник, маємо:

$$(2xy^2 + y^3)dx + (2x^2 y + 3xy^2)dy = 0. \qquad (5.32)$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (5.32) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (5.1):

$$M(x, y) = 2xy^2 + y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 3y^2;$$

$$N(x, y) = 2x^2 y + 3xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy + 3y^2.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, отже, (5.32) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.32). Вона визначається з системи рівнянь (5.4), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + 3xy^2. \qquad (5.33)$$

Інтегруючи друге з рівнянь системи (5.33) за змінною y, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + 3xy^2 \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = x^2 y^2 + xy^3 + \varphi(x), \qquad (5.34)$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (5.34) у перше рівняння системи (5.33). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2xy^2 + y^3 + \varphi'(x) = 2xy^2 + y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x) = 0$. Підстановкою в (5.34) визначаємо

$$f(x, y) = x^2 y^2 + xy^3.$$

Тоді згідно з (5.2) загальний інтеграл РПД (5.32) запишеться у вигляді

$$x^2y^2 + xy^3 = C. \tag{5.35}$$

Виділимо з (5.35) частинний інтеграл, який справджує початкову умову $y(1) = 1$. При значеннях $x = 1$, $y = 1$ із (5.35) маємо:

$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Шуканий частинний інтеграл (розв'язок задачі Коші) отримаємо, підставивши значення $C = 2$ у рівність (5.35). Отже, $x^2y^2 + xy^3 = 2$.

Відповідь. $x^2y^2 + xy^3 = 2$

Приклад 5.5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і зінтегрувати його:

$$(y - xy^2)dx + xdy = 0. \tag{5.36}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1), маємо:

$$M(x,y) = y - xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy;$$

$$N(x,y) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.36) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \dfrac{1 - 2xy - 1}{x} = -\dfrac{2xy}{x} = -2y \neq \varphi_1(x)$. Перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\dfrac{1-2xy-1}{-(y-xy^2)}=\dfrac{2xy}{y(1-xy)}=\dfrac{2x}{1-xy}\neq\varphi_2(y)$. Цей критерій також не виконується, отже, залишається надія на останній.

в) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\dfrac{-2xy}{x\frac{\partial\omega}{\partial x}-(y-xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial y}}$; тут необхідно підібрати функцію $\omega=\omega(x,y)$ таким чином, щоб дріб у правій частині рівності давав функцію виключно цього аргумента $\varphi_3(\omega)$. Перепробовуючи простіші вирази для аргумента, переконуємося, що критерій виконується для випадку $\omega=xy$, адже для цієї функції

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{-2xy}{xy-(y-xy^2)\cdot x}=-\frac{2xy}{x^2y^2}=-\frac{2}{xy}=-\frac{2}{\omega}=\varphi_3(\omega)$$

а тому існує $\mu(\omega)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2d\omega}{\omega}}=\omega^{-2}=\dfrac{1}{(xy)^2}$.

Домноживши рівність (5.36) на знайдений інтегрувальний множник (втрачені на цьому кроці розв’язки $x=0$ та $y=0$ вихідного ДР (5.36) слід врахувати в остаточній відповіді), одержимо:

$$\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{dy}{xy^2}=0. \tag{5.37}$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (5.37) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (5.1):

$$M(x,y)=\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{(xy)^2};$$

$$N(x,y)=\frac{1}{xy^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{(xy)^2}.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.37) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.37). Вона визначається з системи рівнянь (5.4), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}. \qquad (5.38)$$

Інтегруючи друге (простіше на вигляд) з рівнянь системи (5.38) за змінною y, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = -\frac{1}{xy} + \varphi(x), \qquad (5.39)$$

де $\varphi(x)$ – невідома функція змінної x, яку визначаємо підстановкою (5.39) у перше рівняння системи (5.38). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{1}{x^2 y} + \varphi'(x) = \frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.39) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(x) = -\ln|x|$. Підстановкою в (5.39) визначаємо

$$f(x, y) = -\frac{1}{xy} - \ln|x|.$$

Тоді згідно з (5.2) загальний інтеграл РПД (5.37) запишеться як

$$-\frac{1}{xy} - \ln|x| = C_1,$$

або в еквівалентному вигляді

$$\frac{1}{xy} + \ln|x| = C, \qquad (5.40)$$

де $C=-C_1$.

Щоб записати всі розв'язки вихідного ДР (5.36), до загального інтеграла (5.40) слід додати окремо два втрачені при домноженні на інтегрувальний множник розв'язки, які очевидно не отримуються з рівності (5.40).

Відповідь. $\ln|x|+\dfrac{1}{xy}=C$, $x=0$, $y=0$.

Приклад 5.6. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане ДР до рівняння в повних диференціалах, і зінтегрувати його:

$$x(y^2+3\ln x)dy=ydx. \tag{5.41}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є задане ДР рівнянням у повних диференціалах, тобто чи виконується умова Ейлера (5.3). Порівнюючи з (5.1) після перенесення всіх доданків у ліву частину рівності (5.41), маємо:

$$M(x,y)=-y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-1;$$

$$N(x,y)=x(y^2+3\ln x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=y^2+3(\ln x+1).$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.41) не є РПД. Спробуємо звести його до такого шляхом відшукання інтегрувального множника із застосуванням наведених вище критеріїв:

а) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\dfrac{-1-y^2-3(\ln x+1)}{y^2+3(\ln x+1)}=-\dfrac{y^2+3\ln x+4}{y^2+3\ln x+3}\neq\varphi_1(x)$. Перший критерій не виконується, тому переходимо до перевірки наступних.

б) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\dfrac{-1-y^2-3(\ln x+1)}{y}=-\dfrac{y^2+3\ln x+4}{y}\neq\varphi_2(y)$. Цей критерій також не виконується, отже, залишається надія на останній.

в) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=-\dfrac{y^2+3\ln x+4}{x(y^2+3\ln x)\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}}$; тут необхідно підібрати функцію $\omega=\omega(x,y)$ таким чином, щоб дріб у правій частині рівності давав функцію виключно цього аргумента $\varphi_3(\omega)$. У даному випадку перепробовувати різні аргументи немає потреби, оскільки є простіший вихід: дріб перетворюється на сталу величину, якщо покласти

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{4}{y}\quad\Rightarrow\quad \omega=\ln x+4\ln|y|,$$

адже тоді

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=-\frac{y^2+3\ln x+4}{x(y^2+3\ln x)\cdot x^{-1}+y\cdot 4y^{-1}}=-1=\varphi_3(\omega),$$

а тому існує $\mu(\omega)=\mathrm{e}^{-\int d\omega}=\mathrm{e}^{-\omega}=\dfrac{1}{xy^4}$.

Домноживши рівність (5.41) на знайдений інтегрувальний множник [зауважимо, що значення $x=0$ не входить в область визначеності рівняння, а втрачений на цьому кроці розв'язок $y=0$ вихідного ДР (5.41) слід врахувати в остаточній відповіді], одержимо:

$$\left(\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4}\right)dy-\frac{dx}{xy^3}=0. \tag{5.42}$$

Згідно з означенням інтегрувального множника ДР (5.42) має бути рівнянням у повних диференціалах. Перевіримо виконання умови Ейлера, порівнюючи з (5.1):

$$M(x,y)=-\frac{1}{xy^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{3}{xy^4};$$

$$N(x,y)=\frac{1}{y^2}+\frac{3\ln x}{y^4}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{3}{xy^4}.$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, а отже, (5.42) справді є РПД. Для побудови його загального розв'язку вигляду (5.2) потрібно знайти функцію $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (5.42). Вона визначається з системи рівнянь (5.4), яка у нашому випадку має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{xy^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{3\ln x}{y^4}. \tag{5.43}$$

Інтегруючи перше (простіше на вигляд) з рівнянь системи (5.43) за змінною x, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{xy^3} \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = -\frac{\ln x}{y^3} + \varphi(y), \tag{5.44}$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y, яку визначаємо підстановкою (5.44) у друге рівняння системи (5.43). Таким чином одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{3\ln x}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{3\ln x}{y^4} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Оскільки загальний інтеграл (5.2) уже містить довільну сталу, то нам досить знайти частинний розв'язок отриманого рівняння, наприклад, $\varphi(y) = -y^{-1}$. Підстановкою в (5.44) визначаємо

$$f(x, y) = -\frac{\ln x}{y^3} - \frac{1}{y}.$$

Тоді згідно з (5.2) загальний інтеграл РПД (5.42) запишеться як

$$-\frac{\ln x}{y^3} - \frac{1}{y} = C_1,$$

або в еквівалентному вигляді ($y \neq 0$)

$$y^2 + \ln x = Cy^3, \tag{5.45}$$

де $C = -C_1$.

Щоб записати всі розв'язки вихідного ДР (2.10), до загального інтеграла (5.45) слід додати окремо втрачений при домноженні на інтегрувальний множник розв'язок $y = 0$, який очевидно не отримується з рівності (5.45).

Відповідь. $y^2 + \ln x = Cy^3$, $y = 0$.

Завдання для індивідуальної роботи №2

Постановка завдань:

1. Розв’язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку (за наявності початкової умови – задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку).

2. Зінтегрувати рівняння Бернуллі (за наявності початкової умови – задачу Коші для рівняння Бернуллі).

3. Знайти розв’язок рівняння (за наявності початкової умови – задачу Коші для заданого рівняння), звівши його до лінійного диференціального рівняння.

4. Перевірити, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах, та знайти його розв’язок (за наявності початкової умови – знайти інтегральну криву, що проходить через задану точку).

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести задане рівняння до рівняння в повних диференціалах та зінтегрувати його.

Варіант 1

1. $xy' - (x-1)y = 3x$, $y(-2) = 1$. **2.** $y' + 2y = y^2 e^x$.

3. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$. **4.** $(2y + \cos x + 1)dx + (2x + \sin y - 1)dy = 0$.

5. $(3x^2 y - x + 1)dx + dy = 0$.

Варіант 2

1. $xy' - 2y = x^4$. **2.** $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

3. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$, $y(1) = -2$. **4.** $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

5. $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.

Варіант 3

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. **2.** $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

3. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$. **4.** $x(2 - 9xy^2)dx + y(4y^2 - 6x^3)dy = 0$.

5. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$.

Варіант 4

1. $(xy+\mathrm{e}^x)dx-xdy=0$. **2.** $xydy=(y^2+x)dx$.

3. $y'+2y\mathrm{e}^x-y^2=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x$, $y(\mathrm{e})=0$. **4.** $\mathrm{e}^{-y}dx-(2y+x\mathrm{e}^{-y})dy=0$.

5. $(2x^2y-3y^3)dx+(7-6xy^2)dy=0$.

Варіант 5

1. $x^2y'+xy+1=0$. **2.** $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$, $y(1)=1$.

3. $5y^3y'+2y^4=\dfrac{4x}{y}+2y^{-1}$. **4.** $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$.

5. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos ydy=0$.

Варіант 6

1. $y=x(y'-x\cos x)$. **2.** $xy'+2y+x^5y^3\mathrm{e}^x=0$.

3. $y'-10(x+1)^3\cdot\sqrt[10]{y^9}=\dfrac{20y}{x+1}$. **4.** $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$, $M(0{,}1)$.

5. $(2y+xy^3)dx+(1+x^2y^2)dy=0$.

Варіант 7

1. $2x(x^2+y)dx=dy$, $y(2)=\sqrt{3}$. **2.** $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.

3. $y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{y^3}{\cos^3x}+2y'$. **4.** $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$.

5. $(1+x^2y)dx+(x^3+x^2y^2)dy=0$.

Варіант 8

1. $(xy'-1)\ln x=2y$. **2.** $x^3y'\sin y=xy'-2y$.

3. $xy^2dx+dy+\dfrac{3y}{x}dx=0$. **4.** $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2xdy=0$, $M(-\pi,\pi)$.

5. $y^2(x-3y)dx+x^2(x+y)dy=0$.

Варіант 9

1. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$. **2.** $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$, $y(2) = 1$.

3. $y \operatorname{tg} x - 2y' = y^3 \cos^2 x$. **4.** $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$.

5. $\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{x^2}\right)dy = 0$.

Варіант 10

1. $(x + y^2)dy = ydx$. **2.** $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$.

3. $1 = 4x\sqrt{y}\left(1 - \sqrt{y}y'\right)$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. **4.** $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$.

5. $\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)dy = \dfrac{y}{x^3}dx$.

Варіант 11

1. $(2e^y - x)y' = 1$. **2.** $(x+1)(yy' - 1) = y^2$. **3.** $5x^4 + (y + 4 - x^5)y' = 0$.

4. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$, $M(3e, 4e)$.

5. $(2xy + y^2)dx + (2x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0$.

Варіант 12

1. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. **2.** $y' - y \operatorname{tg} x + y^2(1 + x^2)\operatorname{tg} x + 2xy^2 = 0$.

3. $\left(3y\cos x - \dfrac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\sin 2x\right)dx + dy = 0$.

4. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$.

5. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

Варіант 13

1. $(2x+1)y' = 4x + 2y$. **2.** $3y^2 y' - y^3 = 2e^{2x} - 1$, $y(-1) = 3$.

3. $yx^2(y^3-1)+3y'=0$. **4.** $\left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$.

5. $y(1-y\sin x)\cos^2 y dx-(y^2+x\cos^2 y)dy=0$.

Варіант 14

1. $(2x+y)dy=ydx+4\ln ydy$. **2.** $(1-x^2)y'=xy(1-6y)$.

3. $2y'+3e^x y+3e^x y^{\frac{1}{3}}=0$. **4.** $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx=\left(\dfrac{\sin^2 x}{y^2}-y\right)dy$, $M\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

5. $dx+(x+y^2e^{-y})dy=0$.

Варіант 15

1. $[x+2+(x-1)y]dx-xdy=0$. **2.** $y'x=2\sqrt{y}\left(\ln x-\sqrt{y}\right)$, $y(2)=1$.

3. $dx=\left[8xy+4(y+1)x^{\frac{3}{4}}e^{y^2}\right]dy$.

4. $\left(\sqrt{x^2+1}+x^2-\ln x\right)dy+\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx=0$.

5. $\left(5x^2+\dfrac{2\sin y}{x}+\dfrac{2}{x}\right)dx+\cos ydy=0$.

Варіант 16

1. $(1-2xy)y'=y(y-1)$, $y(-1)=4$. **2.** $2dy=[y-y^{-1}(\cos x+\sin x)]dx$.

3. $y'=\dfrac{1}{x-y^2}$. **4.** $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

5. $\dfrac{2}{x^3}dx+\left(\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{12}{y}+\dfrac{4}{yx^2}\right)dy=0$.

Варіант 17

1. $[(x-2)y-x-1]dx+(1-x)dy=0$. **2.** $xy'=x(2x-2x^3)\sqrt{y}-2y$, $y(-1)=2$.

3. $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$. **4.** $\dfrac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\left[\dfrac{x}{\cos^2(xy)}+\sin y\right]dy=0$.

5. $2\cos 2x dx+\left(y^3-\frac{2\sin 2x}{y}\right)dy=0$.

Варіант 18

1. $(2y-\cos x)dx+(x-1)dy=0$. **2.** $y'\cos x-6y^{\frac{5}{6}}+6y\sin x=0$.

3. $(1-x^2)y'-2xy^2=xy$. **4.** $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $M(1{,}1)$.

5. $(2-e^y\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)dx+\left(e^y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)dy=0$.

Варіант 19

1. $(y-1)dx+(2x-\ln y)dy=0$. **2.** $2x\left[\sqrt{x}(1-y)-1\right]dy=dx.$

3. $dy+(xy-xy^3)dx=0$, $y\left(\frac{1}{4}\right)=0$. **4.** $y(x^2+y^2+4)dy+x(x^2+y^2-4)dx=0$.

5. $\ln x dx+(e^{-3y}+2x\ln x-2x)dy=0$.

Варіант 20

1. $(y-1)dx+(2x-\sin 3y)dy=0$, $y(\pi)=\frac{1}{2}$. **2.** $2xy\ln x dy=(y^2+3\ln x-1)dx$.

3. $(x-2y^3)y'=y$. **4.** $(x\ln y-x^2+\cos y)dy+(x^3+y\ln y-y-2xy)dx=0$.

5. $\left(\frac{1}{x^2+1}+x+\frac{2x}{x^2+1}\cos y\right)dx-\sin y dy=0$.

Варіант 21

1. $[(2x-1)y-\cos 2x]dx+(x-1)dy=0$. **2.** $5x^4+(y+4-x^5)y'=0$.

3. $y-y'=y^2+xy'$. **4.** $\left(x-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx=\left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}-y\right)dy$, $M(0,-1)$.

5. $(3x^2-3\sin 3x)dx+(1+x^3\operatorname{ctg}y+\cos 3x\operatorname{ctg}y)dy=0$.

Варіант 22

1. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$, $y(3)=\frac{1}{2}$. **2.** $\left(3y\cos x-\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\sin 2x\right)dx+dy=0$.

3. $x^3 y' \sin y = xy' - 2y$. **4.** $\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{2y+x}{x^2+y^2}dy = 0$.

5. $(x - 2\operatorname{ctg} y - 2y)dx - \operatorname{ctg}^2 y dy = 0$.

Варіант 23

1. $ydx - (2x - \mathrm{e}^y)dy = 0$. **2.** $yx^2(y^3 - 1) + 3y' = 0$.

3. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$, $y(2) = \mathrm{e}$. **4.** $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$.

5. $(\mathrm{e}^x + 1)dx + \left(y^2 + \dfrac{\mathrm{e}^x + x}{y \ln y}\right)dy = 0$.

Варіант 24

1. $xy' + (2x+1)y - \sin 2x = 0$. **2.** $2y' + 3\mathrm{e}^x y + 3\mathrm{e}^x y^{\frac{1}{3}} = 0$, $y(1) = 2\mathrm{e}$.

3. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln ydy$.

4. $[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y\cos(x + y^2) + 3x]dy = 0$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. $(x^2 y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0$.

Варіант 25

1. $(3x - 1 + xy)dx - (x+1)dy = 0$. **2.** $dx = \left[8xy + 4(y+1)x^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{y^2}\right]dy$.

3. $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy = 0$. **4.** $(x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x)dy + (\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x)dx = 0$, $M(1, \mathrm{e})$.

5. $(2x^2 y - x)y' - x^2 y^3 + 2xy^2 + y = 0$.

§ 6 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно похідної

6.1. Інтегровні типи неявних рівнянь першого порядку. Рівняння Лаґранжа та Клеро. **Неявними рівняннями першого порядку** називаються рівняння, не розв’язані відносно похідної. Такі рівняння мають загальний вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.1}$$

Наведемо деякі типи рівнянь вигляду (6.1), які інтегруються в квадратурах.

1. ***Диференціальне рівняння першого порядку степеня* n:**

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(x, y)\cdot (y')^k = 0. \tag{6.2}$$

Таке рівняння має *m* дійсних розв’язків вигляду

$$y' = f_k(x, y), \quad k = \overline{1,m} \quad (m \le n). \tag{6.3}$$

Зінтегрувавши кожне з *m* рівнянь (6.3), одержимо загальний інтеграл ДР (6.2) у вигляді сукупності загальних інтегралів дочірніх ДР (6.3). Рівняння (6.2) допускає рівно *m* інтегральних кривих, що проходять через фіксовану точку (x_0, y_0).

2. ***Диференціальне рівняння вигляду***

$$f(y') = 0. \tag{6.4}$$

Припустимо, що рівняння (1.4) має дійсні корені $y' = K_i = const$, $i = \overline{1,m}$. Тоді $y = K_i x + C$, звідки $K_i = x^{-1}(y - C)$. Підклавши ці значення у рівність (6.4) замість y', одержимо загальний інтеграл ДР (6.4) у вигляді

$$f\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

3. ***Диференціальне рівняння, розв’язане відносно шуканої функції***

$$y = f(x, y'), \tag{6.5}$$

інтегрується шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx\,. \tag{6.6}$$

Тоді з (6.5) $y = f(x, p)$ і $dy = f'_x dx + f'_p dp$. Із останньої рівності з урахуванням (6.6) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx = f'_x dx + f'_p dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{f'_p}{p - f'_x}\,. \tag{6.7}$$

Нехай $x = \varphi(p, C)$ – загальний розв'язок ДР (6.7). Тоді рівності

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f[\varphi(p, C), p] \tag{6.8}$$

визначатимуть загальний інтеграл ДР (6.5) у параметричній формі. Загальний інтеграл у звичайному вигляді можна отримати, виключивши з рівностей (6.8) параметр p.

4. ***Диференціальне рівняння, розв'язане відносно незалежної змінної***

$$x = f(y, y')\,, \tag{6.9}$$

інтегрується аналогічно до (6.5) шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{p}\,. \tag{6.10}$$

Тоді з (6.9) $x = f(y, p)$ і $dx = f'_y dy + f'_p dp$. З останньої рівності, враховуючи (6.10), одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $y(p)$:

$$\frac{dy}{p} = f'_y dy + f'_p dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dp} = \frac{f'_p}{p^{-1} - f'_y}\,. \tag{6.11}$$

Нехай $y = \varphi(p, C)$ – загальний розв'язок ДР (6.11). Тоді рівності

$$y = \varphi(p, C), \quad x = f[\varphi(p, C), p] \tag{6.12}$$

визначатимуть загальний інтеграл ДР (6.9) у параметричній формі. Загальний інтеграл у звичайному вигляді можна отримати, виключивши з рівностей (6.12) параметр p.

5. ***Метод подвійної параметризації.*** У ДР вигляду (6.5), (6.9), а також у їх спрощених варіантах

$$y = f(y'), \quad x = f(y') \tag{6.13}$$

іноді зручно параметризувати по два (у випадку (6.13) – обидва) аргументи: $y=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$ або $x=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$. Відповідно будемо мати: $dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$ або ж $dy = y'dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$, і третій аргумент знаходиться простим інтегруванням, після чого загальний інтеграл записуємо в параметричному або – після виключення параметра t – у звичайному вигляді.

6. ***Рівняння Лаґранжа*** є частинним випадком ДР (6.5) вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{6.14}$$

де φ, ψ – довільні функції аргументу y'.

Зінтегруємо ДР (16.14) описаним вище методом введення параметра:

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad y = x\varphi(p)+\psi(p) \quad \Rightarrow \quad dy \equiv pdx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p)+\psi'(p)]dp\,.$$

Із останньої рівності одержуємо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$ вигляду

$$x'(p) - \frac{x\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)},$$

загальний розв’язок якого дається формулою

$$x(p) = \mathrm{e}^{\int \frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}}\left(C + \int \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}}dp \right) = \chi(p, C)\,.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння Лаґранжа (6.14) у параметричній формі дається рівностями

$$x=\chi(p,C),\quad y=\varphi(p)\chi(p,C)+\psi(p).$$

Зауважимо: якщо рівняння $p-\varphi(p)=0$ має дійсні корені $p_i=const$, то до загального інтеграла ДР Лаґранжа слід додати особливі розв'язки вигляду

$$y_i=x\varphi(p_i)+\psi(p_i).$$

7. ***Рівняння Клеро*** є простішим варіантом ДР (6.14) вигляду

$$y=xy'+\psi(y'),\tag{6.15}$$

де ψ – довільна функція аргументу y'.

Зінтегруємо ДР (6.15) описаним вище методом введення параметра:

$$y'=p\quad\Rightarrow\quad y=xp+\psi(p)\quad\Rightarrow\quad dy\equiv pdx=pdx+[x+\psi'(p)]dp.$$

Із останньої рівності одержуємо ДР вигляду

$$dp\cdot[x+\psi'(p)]=0,\tag{6.16}$$

яке розпадається на два рівняння: $dp=0$ і $x+\psi'(p)=0$.

Якщо $dp=0$, то $p=C$ і з (6.15) отримаємо загальний розв'язок рівняння Клеро

$$y=Cx+\psi(C).$$

Якщо $x+\psi'(p)=0$, тобто $x=-\psi'(p)$, тоді з урахуванням (6.15) отримаємо рівності

$$x=-\psi'(p),\quad y=\psi(p)-p\psi'(p),$$

які визначають особливий розв'язок рівняння Клеро в параметричній формі. Отже, для рівняння Клеро як загальний, так і особливий розв'язки одержуються на підставі рівності (6.16) ***без інтегрування***.

Зауважимо, що для ДР (6.15) незастосовні формули, виведені для більш загального ДР Лаґранжа (6.14), оскільки у випадку рівняння Клеро $p-\varphi(p)=p-p=0$.

6.2. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо задачу Коші для ДР першого порядку (6.1), не розв'язаного відносно похідної, із початковою умовою

$$y(x_0)=y_0. \tag{6.17}$$

Має силу наступна

Теорема 6.1 (***про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, не розв'язаного відносно похідної***). Нехай ліва частина рівняння (6.1) $F(x,y,y')$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку в деякому h-околі точки $M_0(x_0,y_0,y_0')$ де y_0' розв'язок рівняння $F(x_0,y_0,y')=0$, і справджує умови: $F(M_0)=0$, $\partial F(M_0)/\partial y'\neq 0$. Тоді для всіх $x\in[x_0-h,x_0+h]$ диференціальне рівняння (6.1) має єдиний розв'язок $y(x)$, що справджує початкову умову (6.17).

***Доведення*.** Якщо $\partial F/\partial y'\neq 0$ у точці M_0, то згідно з теоремою про існування неявної функції ДР (6.1) визначає y' як однозначну функцію

$$y'=F_1(x,y) \tag{6.18}$$

у деякому h-околі точки M_0. Функція $F_1(x,y)$ неперервна по обох аргументах і матиме неперервні частинні похідні першого порядку, тобто в розглядуваній області – h-околі точки M_0 – вона справджує умови теореми Коші-Пеано. Якщо $y=y(x)$ розв'язок ДР (6.1), то з ДР (6.18) маємо: $y'(x_0)=F_1[x_0,y(x_0)]\equiv y_0'$. Тому ДР (6.18), а отже, і ДР (6.1), визначає в h-околі точки M_0 єдину функцію $y(x)$, яка справджує початкову умову (6.17): це випливає безпосередньо з теореми Коші-Пеано. ■

Означення 6.1. Розв'язок ДР (6.1), у кожній точці якого порушується умова єдиності (тобто не виконуються умови Теореми 6.1), називається ***особливим***.

Припустимо, що ліва частина ДР (6.1) $F(x,y,y')$ є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку за всіма аргументами. Тоді особливі розв'язки ДР (6.1) знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ F'_p(x,y,p)=0, \end{cases} \tag{6.19}$$

де $p=y'$ – параметр. Виключивши параметр p із (6.19), отримаємо деяку функцію $\varphi(x,y)=0$, яка називається рівнянням ***p-дискримінантної кривої***. Для кожної вітки p-дискримінантної кривої слід перевірити, чи є ця вітка розв'язком ДР (6.1), а якщо є, то чи буде цей розв'язок особливим, тобто чи дотикаються до нього в кожній точці інші розв'язки (що означає порушення умови єдиності). Для перевірки порушення умов єдиності користуються умовами дотику кривих $y=y_1(x)$ та $y=y_2(x)$ у точці з абсцисою x_0, які мають вигляд

$$y_1(x_0)=y_2(x_0), \quad y'_1(x_0)=y'_2(x_0).$$

На практиці для дослідження ДР (6.1) на особливі розв'язки застосовується наступна

Теорема 6.2 (*критерій існування особливих розв'язків рівняння першого порядку*). Нехай ліва частина рівняння (6.1) $F(x,y,y')$ неперервна разом із частинними похідними першого порядку в деякій замкненій області $D\subset R^3$. Тоді для того, щоб p-дискримінантна крива (pДК) була особливим розв'язком ДР (6.1), необхідно й достатньо одночасне виконання умов

$$F(x,y,p)=0, \tag{6.20}$$

$$F'_p(x,y,p)=0, \tag{6.21}$$

$$F'_x(x,y,p)+pF'_y(x,y,p)=0, \tag{6.22}$$

де p – параметр.

Доведення. Нехай pДК – особливий розв'язок ДР (6.1). Тоді вона: ***а)*** справджує ДР (6.1) (тобто виконується умова (6.20)), і ***б)*** порушує умову єдиності в кожній своїй точці (тобто виконується умова (6.21)). Диференціюючи (6.20) за змінною x із урахуванням (6.21), одержимо умову (6.22); при цьому всюди вважаємо $y' = p$.

Нехай тепер виконуються умови (6.20)-(6.22), а $y = \varphi(x)$ – pДК, одержана шляхом виключення параметра p з системи (6.19) (тобто з рівностей (6.20), (6.21)). Тоді, підклавши $y = \varphi(x)$ і $y' = \varphi'(x)$, із (6.22) з урахуванням (6.21) дістанемо: $\dfrac{dF(x,\varphi(x),\varphi'(x))}{dx} = 0$, тобто $F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = C = const$. Із (6.20) $C = 0$, звідки випливає, що pДК є розв'язком ДР (6.1). ■

Зауважимо, що особливі розв'язки можна шукати також за допомогою відомого загального інтеграла. Якщо відомий загальний інтеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ ДР (6.1), то він визначає деяку однопараметричну сім'ю кривих, а ***обвідна*** $\varphi(x, y) = 0$ цієї сім'ї (тобто крива, в кожній точці якої має місце дотик із однією з кривих сім'ї), за умови її існування, є особливим розв'язком ДР (6.1). Якщо функція Φ має неперервні частинні похідні першого порядку, то для знаходження обвідної треба виключити параметр C із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

і перевірити, чи буде отримана ***С-дискримінантна крива*** обвідною, тобто чи дотикаються до неї в кожній точці криві сім'ї. Цю перевірку можна здійснити із застосуванням наведених вище умов дотику кривих.

Найпростіші інтегровні типи неявних рівнянь першого порядку

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2. \tag{6.23}$$

Розв'язання. Виразимо з рівності (6.23) y' із застосуванням відомої формули для коренів квадратного рівняння:

$$y' = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 + 4x^2(x^2 + 3y^2)}}{2x^2},$$

або після спрощення

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,. \tag{6.24}$$

Це нелінійне однорідне ДР, яке можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $y = xu(x)$, де $u(x)$ нова невідома функція. Тоді з (6.24) одержимо

$$xu' + u = \frac{xu}{x} \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{xu}{x}\right)^2},$$

тобто

$$xu' = \pm\sqrt{1 + 4u^2}\,.$$

Відокремлюємо змінні:

$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1 + 4u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1 + 4u^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{4}}} = \pm\frac{2dx}{x}.$$

Після інтегрування отримаємо рівності

$$\operatorname{Arsh} 2u = 2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad \operatorname{Arsh} 2u = -2\ln|x| + \ln|C_2|,$$

де C_1, C_2 – ненульові сталі. Виразимо з цих рівностей аргумент ареа-синуса:

$$\operatorname{Arsh} 2u = \ln|C_1x^2| \quad \Rightarrow \quad 2u = \operatorname{sh}\ln|C_1x^2| = \frac{C_1^2x^4 - 1}{2C_1x^2}; \tag{6.25}$$

$$\operatorname{Arsh} 2u = \ln|C_2x^{-2}| \quad \Rightarrow \quad 2u = \operatorname{sh}\ln|C_2x^{-2}| = \frac{C_2^2 - x^4}{2C_2x^2}. \tag{6.26}$$

Зауважимо, що для ненульових значень C_1, C_2 рівності (6.25) та (6.26) є еквівалентними, оскільки

$$\frac{C_2^2 - x^4}{2C_2 x^2} = \frac{C_2^{-2} x^4 - 1}{-C_2^{-1} \cdot 2x^2},$$

тобто (6.25) отримується з (6.26) при $C_1 = -C_2^{-1}$. Тому для знаходження загального розв'язку рівняння (6.23) достатньо розглядати рівність (6.25), яку запишемо у вигляді

$$2u = \frac{C^2 x^4 - 1}{2Cx^2}. \tag{6.27}$$

Виконавши обернену підстановку $u = x^{-1} y$, із (6.27) маємо:

$$2\frac{y}{x} = \frac{C^2 x^4 - 1}{2Cx^2} \quad \Rightarrow \quad 4Cxy = C^2 x^4 - 1,$$

звідки отримуємо загальний розв'язок ДР (6.23)

$$y = \frac{C^2 x^4 - 1}{4Cx}.$$

Для дослідження рівняння (6.23) на особливі розв'язки скористаємося критерієм, викладеним у Теоремі 6.2. Ввівши позначення $y' = p$, подамо рівняння (6.23) у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv x^2 p^2 - 2xyp - x^2 - 3y^2 = 0.$$

Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv x^2 p^2 - 2xyp - x^2 - 3y^2 = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv 2px^2 - 2xy = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv 2xp^2 - 2yp - 2x - p(2xp + 6y) = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} x^2(p^2-1)-2xyp-3y^2=0, \\ x(px-y)=0, \\ x+4py=0. \end{cases} \tag{6.28}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.28) мають виконуватися одночасно. У нашому випадку з третього рівняння системи одержуємо $p=-0.25xy^{-1}$, а з другого $p=yx^{-1}$ (тут принагідно зауважимо, що значення $x=0$ не входить в область визначеності рівняння). Вимога одночасного виконання дає необхідну умову

$$-\frac{x}{4y}=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad 4y^2=-x^2.$$

Із останньої рівності очевидно випливає, що система (6.28) є несумісною, а отже, ДР (6.23) не має особливих розв'язків.

Відповідь. Загальний розв'язок: $y=\dfrac{C^2x^4-1}{4Cx}$. Особливих розв'язків рівняння не має.

Приклад 6.2. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$y=(xy'+2y)^2. \tag{6.29}$$

Розв'язання. Із рівності (6.29) очевидно випливає, що рівняння має зміст тільки для значень $y\ge 0$, а тому його можна подати у вигляді

$$xy'+2y=\pm\sqrt{y}$$

або

$$y'+\frac{2y}{x}=\pm\frac{\sqrt{y}}{x} \tag{6.30}$$

(значення $x=0$ не входить в область визначеності рівняння).

Одержане ДР (6.30) є рівнянням Бернуллі при $\alpha = \frac{1}{2}$. Зінтегруємо його методом підстановки, шукаючи розв'язок у вигляді добутку двох функцій незалежної змінної x

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{6.31}$$

Одну з двох функцій $u(x)$, $v(x)$ можна вибрати довільним чином, а друга визначиться на підставі рівняння (6.30).

Після підстановки (6.31) у (6.30) маємо:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \pm \frac{\sqrt{uv}}{x}$$

або

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \pm \frac{\sqrt{uv}}{x}. \tag{6.32}$$

Будемо вимагати, щоб в (6.32) коефіцієнт при $u(x)$ перетворився на нуль, тоді за функцію $v(x)$ можна взяти будь-який розв'язок лінійного однорідного ДР

$$v' + \frac{2v}{x} = 0.$$

наприклад, $v = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x} dx} = x^{-2}$. Тоді з (6.32) для визначення функції $u(x)$ дістанемо рівняння

$$u'x^{-2} = \pm x^{-2}\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{u},$$

звідки після відокремлення змінних і наступного інтегрування маємо:

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{u} = \pm x + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{(C_1 \pm x)^2}{4} = \frac{(x + C)^2}{4},$$

де $C = \pm C_1$ – довільна стала. Підставивши знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у формулу (6.31), одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (6.30)

$$y=\frac{(x+C)^2}{4x^2}.$$

Для дослідження рівняння (6.29) на особливі розв'язки подамо його у вигляді

$$F(x,y,p)\equiv y-(xp+2y)^2=0,$$

де $y'=p$. Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p)\equiv y-(xp+2y)^2=0, \\ F'_p(x,y,p)\equiv -2x(xp+2y)=0, \\ F'_x(x,y,p)+pF'_y(x,y,p)\equiv -2p(xp+2y)+p[1-4(xp+2y)]=0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y=(xp+2y)^2, \\ x(xp+2y)=0, \\ p[1-6(xp+2y)]=0. \end{cases} \tag{6.33}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.33) мають виконуватися одночасно. У нашому випадку з другого рівняння системи, враховуючи, що $x\neq 0$, одержуємо $p=-2yx^{-1}$, тоді з третього $p=0$. Вимога одночасного виконання дає необхідну умову

$$-\frac{2y}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad y=0.$$

Отримана функція очевидно справджує перше рівняння системи (6.33), а отже, згідно з критерієм є особливим розв'язком ДР (6.29).

Відповідь. $y=\dfrac{(x+C)^2}{4x^2}$ – загальний розв'язок; $y=0$ – особливий розв'язок.

Метод введення параметра

Приклад 6.3. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$3y'^3 - xy' + 1 = 0. \qquad (6.34)$$

Розв'язання. Виразимо з рівності (6.34) незалежну змінну x:

$$xy' = 3y'^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3y'^2 + y'^{-1}. \qquad (6.35)$$

Це неявне рівняння типу $x = f(y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{p}. \qquad (6.36)$$

Тоді з (6.35)

$$x = 3p^2 + p^{-1} \quad \Rightarrow \quad dx = (6p - p^{-2})dp. \qquad (6.37)$$

Із (6.37) з урахуванням (6.36) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $y(p)$:

$$\frac{dy}{p} = (6p - p^{-2})dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dp} = 6p^2 - p^{-1}.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$dy = (6p^2 - p^{-1})dp \quad \Rightarrow \quad y = 2p^3 - \ln|p| + C, \qquad (6.38)$$

де C – довільна стала. Із (6.37) та (6.38) одержуємо загальний розв'язок ДР (6.34) у параметричній формі

$$x = 3p^2 + p^{-1}, \quad y = 2p^3 - \ln|p| + C.$$

Для дослідження рівняння (6.34) на особливі розв'язки подамо його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv 3p^3 - xp + 1 = 0,$$

де $y' = p$. Тоді для визначення особливих розв'язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,p) \equiv 3p^3 - xp + 1 = 0, \\ F'_p(x,y,p) \equiv 9p^2 - x = 0, \\ F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv -p + p \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} xp = 3p^3 + 1, \\ x = 9p^2, \\ p = 0. \end{cases} \qquad (6.39)$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.39) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p = 0$, тоді з другого $x = 0$; підстановка цих значень у перше рівняння дає хибну рівність $0 = 1$. Звідси очевидно випливає, що система (6.39) є несумісною, а отже, ДР (6.34) не має особливих розв'язків.

Зауваження. Із застосуванням критерію легко показати, що ДР типу $x = f(y')$ не мають особливих розв'язків узагалі, адже в цьому випадку $F(x,y,p) \equiv x - f(p)$, а для цієї функції система для дослідження на особливі розв'язки завжди несумісна, оскільки її третє рівняння дає хибну рівність

$$F'_x(x,y,p) + pF'_y(x,y,p) \equiv 1 + p \cdot 0 = 0.$$

Відповідь. Загальний розв'язок у параметричному вигляді: $x = 3p^2 + p^{-1}$, $y = 2p^3 - \ln|p| + C$. Особливих розв'язків рівняння не має.

Приклад 6.4. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$y(1 + y'^2) = 2r\,,\ r = const\,. \qquad (6.40)$$

Розв'язання. Для інтегрування рівняння (6.40) скористаємося методом подвійної параметризації на підставі тригонометричної тотожності

$$a\sin^2 t(1 + \operatorname{ctg}^2 t) = a\,.$$

Введемо параметр t згідно з формулами: $y = 2r\sin^2 t$, $y' = \operatorname{ctg} t$, тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2r\sin 2t dt}{\operatorname{ctg} t} = 4r\sin^2 t dt \quad \Rightarrow \quad x = r(2t - \sin 2t) + C .$$

Отже, загальний розв’язок ДР (6.40) у параметричному вигляді

$$x = r(2t - \sin 2t) + C, \quad y = 2r\sin^2 t = r(1 - \cos 2t) .$$

Поклавши в останніх рівностях $2t = \theta$, одержимо простіші формули

$$x = r(\theta - \sin\theta) + C, \quad y = r(1 - \cos\theta) . \qquad (6.41)$$

Якщо з рівностей (6.41) виключити параметр θ – наприклад, визначивши його з другої рівності й підставивши в першу, – то отримаємо загальний інтеграл ДР (6.40) у звичайній формі

$$x = r\arccos\frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2} + C .$$

Для дослідження рівняння (6.40) на особливі розв’язки подамо його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv y(1 + p^2) - 2r = 0 ,$$

де $y' = p$. Тоді для визначення особливих розв’язків одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y(1 + p^2) - 2r = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv 2py = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv 0 + p\cdot(1 + p^2) = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y(1 + p^2) = 2r, \\ py = 0, \\ p(1 + p^2) = 0. \end{cases} \qquad (6.42)$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.42) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p=0$, тоді друге рівняння справджується автоматично, а з першого дістанемо $y=2r$. Ця функція очевидно є розв'язком ДР (6.40), і згідно з критерієм цей розв'язок є особливим.

Відповідь. Загальний інтеграл: $x=r\arccos\frac{r-y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}+C$; особливий розв'язок: $y=2r$.

Приклад 6.5. Розв'язати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

$$y'^2-yy'+e^x=0. \tag{6.43}$$

Розв'язання. Виразимо з рівності (6.43) незалежну змінну *y*:

$$yy'=y'^2+e^x \quad\Rightarrow\quad y=y'+e^x\cdot y'^{-1}. \tag{6.44}$$

Це неявне рівняння типу $y=f(x,y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y'=p \quad\Rightarrow\quad dy=pdx. \tag{6.45}$$

Тоді з (6.44)

$$y=p+e^x\cdot p^{-1} \quad\Rightarrow\quad dy=e^x\cdot p^{-1}dx+(1-e^x\cdot p^{-2})dp. \tag{6.46}$$

Із (6.46) з урахуванням (6.45) одержимо явне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx=e^x\cdot p^{-1}dx+(1-e^x\cdot p^{-2})dp \quad\Rightarrow\quad p\left(1-\frac{e^x}{p^2}\right)dx=\left(1-\frac{e^x}{p^2}\right)dp. \tag{6.47}$$

1. Якщо $e^x\neq p^2$, то після скорочення і відокремлення змінних із (6.47) маємо:

$$pdx=dp \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dp}{p} \quad\Rightarrow\quad x=\ln|p|+\ln|C|=\ln|Cp|,$$

звідки $e^x = Cp$, а тоді з (6.46) $y = p + Cp \cdot p^{-1} = p + C$. Отже, загальний розв'язок ДР (6.43) у параметричній формі

$$x = \ln|Cp|, \quad y = p + C, \quad C \neq 0.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр p, одержимо загальний розв'язок ДР (6.43) у звичайній формі

$$y = \frac{e^x}{C} + C.$$

2. Розглянемо випадок, коли у (6.47) $e^x = p^2$, тобто $p = \pm e^{0,5x}$. Підставивши це значення в (6.46), одержимо функції

$$y = \pm 2e^{0,5x}. \tag{6.48}$$

Ці функції є розв'язками ДР (6.43), у чому можна переконатися безпосередньою підстановкою. Покажемо, що ці розв'язки є особливими. Для цього проведемо дослідження рівняння (6.43) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv p^2 - yp + e^x = 0,$$

де $y' = p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv p^2 - yp + e^x = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv 2p - y = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv e^x - p^2 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} p^2 - yp + e^x = 0, \\ y = 2p, \\ e^x = p^2. \end{cases} \tag{6.49}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.49) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p = \pm e^{0,5x}$, тоді з другого $y = \pm 2e^{0,5x}$, і за цих значень перше рівняння перетворюється на тотожність. Отже, функції (6.48) є особливими розв'язками ДР (6.43).

Відповідь. Загальний розв'язок: $y = \dfrac{e^x}{C} + C$, $C \neq 0$; особливі розв'язки: $y = \pm 2e^{0,5x}$

Рівняння Лаґранжа та Клеро

Приклад 6.6. Розв'язати рівняння Лаґранжа:

$$y = 2xy' - 5y'^2. \tag{6.50}$$

Розв'язання. Рівняння Лаґранжа є частинним випадком неявного рівняння типу $y = f(x, y')$. Розв'яжемо його шляхом введення параметра

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx. \tag{6.51}$$

Тоді з (6.50)

$$y = 2xp - 5p^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2p\,dx + (2x - 10p)dp. \tag{6.52}$$

Із (6.52) з урахуванням (6.51) одержимо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx = 2pdx + (2x - 10p)dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 10. \tag{6.53}$$

1. Розв'яжемо рівняння (6.53) методом Лаґранжа, вважаючи $p \neq 0$. Для цього спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного до (6.53) однорідного рівняння, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p},$$

звідки

$$x_{\text{з.о.}} = Cp^{-2}, \quad C = const. \qquad (6.54)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.53) будемо шукати у вигляді (6.54), вважаючи сталу *C* функцією незалежної змінної *p*:

$$x = C(p) \cdot p^{-2}. \qquad (6.55)$$

Функцію $C(p)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (6.55) у (6.53):

$$C'(p) \cdot p^{-2} - 2C(p) \cdot p^{-3} + 2C(p) p^{-3} = 10,$$

звідки

$$C'(p) = 10p^2 \quad \Rightarrow \quad C(p) = \frac{10p^3}{3} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(p)$ у (6.55) і перепозначивши задля зручності $C_1 = C$, одержимо шуканий загальний розв'язок ЛНДР (6.53)

$$x = \left(\frac{10p^3}{3} + C \right) \cdot p^{-2} = \frac{10p}{3} + \frac{C}{p^2},$$

а тоді з (6.52) $y = 2xp - 5p^2 = \dfrac{2C}{p} + \dfrac{5p^2}{3}$. Отже, загальний розв'язок ДР (6.50) у параметричній формі

$$x = \frac{10p}{3} + \frac{C}{p^2}, \quad y = \frac{2C}{p} + \frac{5p^2}{3}.$$

2. Розглянемо окремо випадок, коли $p = 0$. За цього значення параметра із (6.52) одержимо функцію $y = 0$, яка очевидно є розв'язком ДР (6.50). Щоб переконатися, чи буде цей розв'язок особливим, проведемо дослідження рівняння (6.50) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv y - 2xp + 5p^2 = 0,$$

де $y' = p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - 2xp + 5p^2 = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv -2x + 10p = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv -2p + p \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y = 2xp - 5p^2, \\ x = 5p, \\ p = 0. \end{cases} \tag{6.56}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.56) мають виконуватися одночасно. Із третього рівняння $p = 0$, тоді з другого $x = 0$, і за цих значень перше рівняння перетворюється в тотожність при $y = 0$. Отже, функція $y = 0$ є особливим розв'язком ДР (6.50).

Відповідь. Загальний розв'язок у параметричній формі: $x = \dfrac{10p}{3} + \dfrac{C}{p^2}$, $y = \dfrac{2C}{p} + \dfrac{5p^2}{3}$; особливий розв'язок: $y = 0$.

Приклад 6.7. Розв'язати рівняння Лаґранжа:

$$y = xy'^2 + y'^3. \tag{6.57}$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (6.51). Тоді з (6.57)

$$y = xp^2 + p^3 \quad \Rightarrow \quad dy = p^2\,dx + (2px + 3p^2)dp\,. \tag{6.58}$$

Із (6.58) з урахуванням (6.51) одержимо лінійне неоднорідне ДР першого порядку відносно невідомої функції $x(p)$:

$$pdx = p^2dx + (2px + 3p^2)dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = -\frac{3p}{p-1}. \tag{6.59}$$

1. Розв'яжемо рівняння (6.59) методом Лаґранжа, вважаючи коефіцієнт при dx, на який виконувалося ділення, $p - p^2 \neq 0$. Для цього спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного до (6.59) однорідного рівняння, яке інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p-1},$$

звідки

$$x_{ç.î.} = C(p-1)^{-2}, \quad C = const. \tag{6.60}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.59) будемо шукати у вигляді (6.60), вважаючи сталу C функцією незалежної змінної p:

$$x = C(p) \cdot (p-1)^{-2}. \tag{6.61}$$

Функцію $C(p)$ знайдемо безпосередньою підстановкою (6.61) у (6.59):

$$C'(p) \cdot (p-1)^{-2} - 2C(p) \cdot (p-1)^{-3} + 2C(p)(p-1)^{-3} = -3p(p-1)^{-1},$$

звідки

$$C'(p) = -3p(p-1) \quad \Rightarrow \quad C(p) = \frac{3p^2}{2} - p^3 + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Підставивши знайдений вираз для $C(p)$ у (6.61), одержимо шуканий загальний розв'язок ЛНДР (6.59)

$$x = \left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + C_1 \right) \cdot (p-1)^{-2} = \frac{3p^2 - 2p^3 + 2C_1}{2(p-1)^2},$$

а тоді з (6.58) $y = xp^2 + p^3 = \dfrac{2p^3 - p^4 + 2C_1 p^2}{2(p-1)^2}$. Отже, загальний розв'язок ДР (6.57) у параметричній формі

$$x = \frac{3p^2 - 2p^3 + C}{2(p-1)^2}, \quad y = \frac{2p^3 - p^4 + Cp^2}{2(p-1)^2},$$

де $C = 2C_1$.

2. Розглянемо окремо випадок, коли $p - p^2 = 0$, тобто $p = 0$ або $p = 1$. За цих значень параметра із (6.58) одержимо відповідно функції $y = 0$ та $y = x + 1$, які очевидно є розв'язками ДР (6.57). Щоб переконатися, чи будуть ці розв'язки особливими, проведемо дослідження рівняння (6.57) на особливі розв'язки, подавши його у вигляді

$$F(x, y, p) \equiv y - xp^2 - p^3 = 0,$$

де $y' = p$. Для визначення особливих розв'язків аналогічно до попередніх прикладів одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) \equiv y - xp^2 - p^3 = 0, \\ F'_p(x, y, p) \equiv -2xp - 3p^2 = 0, \\ F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) \equiv -p^2 + p \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} y = xp^2 + p^3, \\ xp = -1{,}5p^2, \\ p(p - 1) = 0. \end{cases} \tag{6.62}$$

Згідно з критерієм для існування особливих розв'язків усі три рівності з (6.62) мають виконуватися одночасно. Якщо в третьому рівнянні $p = 0$, тоді друге виконується автоматично, а перше перетворюється в тотожність при $y = 0$ – а отже, остання функція є особливим розв'язком ДР (6.57). Якщо ж у третьому рівнянні $p = 1$, то з другого маємо $x = -\frac{3}{2}$; тоді з першого виходить $y = -\frac{1}{2}$, однак ця функція не є розв'язком ДР (6.57). Таким чином, при $p = 1$ система (6.62) несумісна, тож пряма $y = x + 1$ є не особливим розв'язком, але асимптотою.

Відповідь. Розв'язки: $x=\dfrac{3p^2-2p^3+C}{2(p-1)^2}$, $y=\dfrac{2p^3-p^4+Cp^2}{2(p-1)^2}$, $y=x+1$; особливий розв'язок: $y=0$.

Приклад 6.8. Розв'язати рівняння Клеро:

$$y=xy'+2y'^2. \tag{6.63}$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (6.51). Тоді з (6.63)

$$y=xp+2p^2 \quad\Rightarrow\quad dy=p\,dx+(x+4p)dp. \tag{6.64}$$

Із (6.64) з урахуванням (6.51) одержимо:

$$pdx=pdx+(x+4p)dp \quad\Rightarrow\quad (x+4p)dp=0. \tag{6.65}$$

Згідно з властивостями рівняння Клеро рівність (6.65) розпадається на два рівняння, одне з яких визначає загальний, а друге – особливий розв'язки цього типу неявних ДР першого порядку, тож у цьому випадку ніяких додаткових досліджень проводити не потрібно.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок із рівності $dp=0$ з урахуванням (6.64):

$$dp=0 \quad\Rightarrow\quad p=C \quad\Rightarrow\quad y=Cx+2C^2.$$

Особливий розв'язок знаходиться з рівності $x+4p=0$ так само з урахуванням (6.64):

$$x+4p=0 \quad\Rightarrow\quad p=-\frac{x}{4} \quad\Rightarrow\quad y=-x\cdot\frac{x}{4}+2\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2=-\frac{x^2}{8}.$$

Зауважимо, що отримана парабола є обвідною сім'ї прямих, визначених формулою загального розв'язку.

Відповідь. Загальний розв'язок: $y=Cx+2C^2$; особливий розв'язок: $y=-\dfrac{x^2}{8}$.

Приклад 6.9. Розв'язати рівняння Клеро:

$$y - xy' = \sqrt{1 + y'^2}\,. \qquad (6.66)$$

Розв'язання. Введемо параметр за формулами (6.51). Тоді з (6.66)

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2} \quad \Rightarrow \quad dy = p\,dx + \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp\,. \qquad (6.67)$$

Із (6.67) з урахуванням (6.51) одержимо:

$$p dx = p dx + \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp = 0\,. \qquad (6.68)$$

Аналогічно до Прикладу 6.8 знайдемо спочатку загальний розв'язок із рівності $dp = 0$ з урахуванням (6.67):

$$dp = 0 \quad \Rightarrow \quad p = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx + \sqrt{1 + C^2}\,.$$

Далі знаходимо особливий розв'язок:

$$x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \Rightarrow \quad y = -p \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}\,.$$

Отже, особливий розв'язок у параметричній формі

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}\,.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр *p*, дістанемо особливий інтеграл рівняння Клеро (6.66) у звичайному вигляді:

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Відповідь. Загальний розв'язок: $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; особливий інтеграл: $x^2 + y^2 = 1$.

Завдання для індивідуальної роботи №3

Постановка завдань:

1 - 5. Зінтегрувати диференціальне рівняння та дослідити на особливі розв'язки.

Варіант 1

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$. **2.** $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$. **3.** $y'^2 - y^2 = 0$.

4. $xy'^2 = y$. **5.** $y = xy' - y'^2$.

Варіант 2

1. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. **2.** $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$. **3.** $y'^2 - 4y^3 = 0$.

4. $yy'^3 + x = 1$. **5.** $y = 2xy' - 4y'^3$.

Варіант 3

1. $y'^2 + x = 2y$. **2.** $x = y'^3 + y'$. **3.** $8y'^3 = 27y$.

4. $y = x + y' - \ln y'$. **5.** $y'^3 = 3(xy' - y)$.

Варіант 4

1. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$. **2.** $x(y'^2 - 1) = 2y'$. **3.** $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.

4. $y = 2xy' + \ln y'$. **5.** $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

Варіант 5

1. $y'^2 - 2yy' = y^2(\mathrm{e}^x - 1)$. **2.** $y'^2 + x^2 = a^2$, $a = const$. **3.** $y^2(y'^2 + 1) = 1$.

4. $y'^3 + y^2 = xyy'$. **5.** $y = xy' - (2 + y')^2$.

Варіант 6

1. $y'^4 + y^2 = y^4$. **2.** $xy' \ln y' = 1$. **3.** $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.

4. $y = 2xy' + y^2 y'^3$. **5.** $y = xy'^2 - 2y'^3$.

Варіант 7

1. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$. **2.** $\sqrt{1 + x} \cdot \cos y' = 2$. **3.** $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$.

4. $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$. **5.** $xy' - y = \ln y'$.

Варіант 8

1. $y(y-2xy')^2 = 2y'$. **2.** $2y' = x + \ln y'$. **3.** $y'^4 = 2yy' + y^2$.

4. $y'^3 - 4xy' + 8y^2 = 0$. **5.** $2y'^2(y - xy') = 1$.

Варіант 9

1. $xy'(xy' + y) = 2y^2$. **2.** $\dfrac{x^2}{y'^2} = \mathrm{e}^{2y'}$. **3.** $y'^2 - 4y = 0$.

4. $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$. **5.** $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

Варіант 10

1. $xy'^2 = y(2y' - 1)$. **2.** $xy'^3 + y' = 0$. **3.** $y = (y' - 1)\mathrm{e}^{y'}$.

4. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$. **5.** $y + xy' - y'^2 = 0$.

Варіант 11

1. $y'^3 + (x+2)\mathrm{e}^y = 0$. **2.** $\ln y' + \sin y' - x = 0$. **3.** $y'^2 = 4|y|$.

4. $2xy' - y = y'\ln(yy')$. **5.** $xy' + \sqrt{1 - y'^2} - y = 0$.

Варіант 12

1. $(xy' + 3y)^2 = 7x$. **2.** $x\cos y' + \sin 2y' = 1$. **3.** $y = y'^2 + 2y'^3$.

4. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$. **5.** $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

Варіант 13

1. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$. **2.** $(x+1)(y'^2 - 1) = y$. **3.** $y'^4 - y'^2 = y^2$.

4. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$. **5.** $3x(1 - y') + (2y' - 1)^{\frac{3}{2}} = 3y$.

Варіант 14

1. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$. **2.** $x(y'^2 - 1) = 2y'$. **3.** $y = \ln y' + y'^2$.

4. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$. **5.** $x(1 - y') + y'^2 = y' + y$.

Варіант 15

1. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$. **2.** $y'^2=\dfrac{1}{4|x|}$. **3.** $y'^2-y'^3=y^2$.

4. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$. **5.** $xy'(y'+2)=y$.

Варіант 16

1. $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^2(x^2-4)$. **2.** $y'^2=(4x+y'-3)^2$.

3. $y^2(1+y'^2)=a^2$, $a=const$. **4.** $y'=e^{\frac{xy'}{y}}$. **5.** $2xy'-y=\ln y'$.

Варіант 17

1. $y(y-2xy')^2=2y'$. **2.** $y'=\sqrt[3]{2x-y'}+2$. **3.** $y=y'\sqrt{1+y'^2}$.

4. $x=\dfrac{y}{y'}\ln y-\dfrac{y'^2}{y^2}$. **5.** $y=x(1+y')+y'^2$.

Варіант 18

1. $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^4-4x$. **2.** $xy'=e^{-\frac{1}{y'^2}}+2y'$. **3.** $3y'^4=y'+y$.

4. $x^2y'^2=xyy'+1$. **5.** $y+a\sqrt{1+y'^2}=xy'$, $a=const$.

Варіант 19

1. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$. **2.** $xy'^2=y'^3-y'$. **3.** $y'=\sqrt{2y-y'}+2$.

4. $y=xy'-x^2y'^3$. **5.** $y+y'=x+y'^2$.

Варіант 20

1. $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'$. **2.** $2xy'-y'=\sin y'$. **3.** $(1+2y')^2=4yy'$.

4. $y=\dfrac{xy'}{2}+\dfrac{y'^2}{x^2}$. **5.** $x(y'-y'^2)+e^{-\frac{1}{y'}}=y$.

Варіант 21

1. $y'^2-2xy'=8x^2$. **2.** $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y'}+\sqrt[3]{y'}$. **3.** $yy'+\operatorname{ctg} y'=\cos y'$.

4. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$. **5.** $3(y + xy') = y'^{\frac{3}{2}}$.

Варіант 22

1. $y'^3 + (x+2)e^y = 0$. **2.** $2y' = x + \ln y'$. **3.** $y = \dfrac{y}{y'} + e^{y'}$.

4. $(x+1)(y'^2 - 1) = y$. **5.** $y + xy' - y' - y'^3 = 0$.

Варіант 23

1. $(xy' + 3y)^2 = 7x$. **2.** $x = \sin 2y' \cos y'$. **3.** $y = y'^2 + \dfrac{1}{y'} \ln y' - 1$.

4. $2xy' - y = \sin y'$. **5.** $x(y' - 1) + e^{y'} = y' + y$.

Варіант 24

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$. **2.** $y'^3 - \dfrac{1}{4x} y' = 0$. **3.** $y'^2 - 4y = 0$.

4. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$. **5.** $(2y' - 1)^{\frac{3}{2}} + 3x(3y' - 1) = 3y$.

Варіант 25

1. $xy'^2 = y(2y' - 1)$. **2.** $y'(x - \ln y') = 1$. **3.** $\ln y' + \sin y' - y = 0$.

4. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2$. **5.** $y'^2 - x(1 - y') - y' = 0$.

Список рекомендованої літератури

1. *Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В.* Звичайні диференціальні рівняння. Навчально-методичний посібник для студентів математичних та фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів, частина 1, Івано-Франківськ, “ЛІК”, 2005. 120 с.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. М.: «Наука», 1970. 576 с.
3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
4. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.
5. *Филипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальним уравнениям, 2000. 174 с.
6. *Rontó Miklós, Raisz Péterné.* Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. Miskolci egyetemi kiadó, 2004. 324.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Навчальний посібник

із курсу «*Диференціальні рівняння*»

Д-50 Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування: навчальний посібник / В. Л. Рего, Я. В. Варга – Ужгород: «УжНУ», 2021. – 124 с.

Відповідальний за випуск: в.о. завідувача кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, канд. фіз.-мат. наук, доц. Рейтій О. К.

Автори: ст. викл. Рего В. Л.
канд. фіз.-мат. наук Варга Я. В.

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук, проф. Ронто М. Й.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Бортош М. Ю.