УДК УДК 517.9

І. Ю. Король, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЮЮЧИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

The method of uncertain factors of creation of the main algorithms of multistep methods of the solution of a Cauchy problem for the ordinary differential equations is considered.

Запропоновано узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо, при побудові багатокрокових методів для розв'язанні задачі (1) використовують або еквівалентне інтегральне співвідношення

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, y(t))dt,$$

і заміну підінтегральної функції інтерполяційним многочленом Лагранжа, Ньютона, Ерміта [1-3], або різницеву формулу вигляду

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(t_{n+i}, y_{n+i}), \qquad \alpha_k \neq 0,$$

з використанням формули Тейлора для подання $y(t_{n+i})$ і $f(t_{n+i}, y_{n+i}) = y'_{n+i}$ [1,2]. Однак, при практичній реалізації, це досить трудомісткі процеси.

Для узагальнення підходу й уникнення вказаних трудноців формули багатокрокових методів будемо шукати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i y_{n-1} + hb_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h\sum_{i=0}^{k} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}).$$

або

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i y_{n-1} + hb_{-1} y'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{k} b_i y'_{n-i}, \tag{2}$$

де $y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, $y'_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ – значення похідної шуканої функції, a_i, b_{-1}, b_i, $(i = 0, 1, \ldots, k)$ – деякі невідомі коефіцієнти, які знаходиться з певних умов.

Нашою метою є вибір такого підходу до побудови формул типу (2), який дає можливість досить просто отримати широкий набір алгоритмів як явного, так і неявного типу. Зокрема, якщо покласти $b_{-1} = 0$, то одержуємо методи явного типу, а при $b_{-1} \neq 0$ – неявного.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k,$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ – константи, то за допомогою формули (2) цей розв'язок можна знайти точно. Розглянемо деякі конкретні випадки.

1. Метод Адамса-Башфорта. Метод Адамса-Башфорта є явним багатокроковим методом, який одержується з формули (2) за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots, \alpha_k = 0, b_{-1} = 0$. Тоді формула (2) набуває вигляду

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + h \sum_{i=0}^{k-1} b_i y'_{n-i}. \tag{3}$$

Невідомі коефіцієнти $a_0, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ будемо шукати з умови, що формула (3) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{h^0}(t_{n+1} - t)^0, \quad y'(t) = 0, \quad m = 0; \\ y(t) &= \tfrac{1}{h^m}(t_{n+1} - t)^m, \quad y'(t) = -\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1} - t)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4}$$

Використовуючи поліноми (4) побудуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів наступним чином: обчислимо значення функції $y(t)$ при t_{n+1} і t_n та її похідної $y'(t)$ при t_{n-i}, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ і підставимо їх у формулу (3), в результаті чого одержимо систему:

$$\begin{aligned} m = 0 &: \quad 1 = a_0; \\ m = 1 &: \quad 0 = a_0 - b_0 - b_1 - \ldots - b_{k-1}; \\ m = 2 &: 0 = a_0 - 2b_0 \cdot 1 - 2b_1 \cdot 2 - \ldots - 2b_{k-1} \cdot k; \\ m = 3 &: 0 = a_0 - 3b_0 \cdot 1^2 - 3b_1 \cdot 2^2 - \ldots - 3b_{k-1} \cdot k^2; \\ &\ldots \\ m = k &: 0 = a_0 - kb_0 \cdot 1^{k-1} - kb_1 \cdot 2^{k-1} - \ldots - kb_{k-1} \cdot k^{k-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо врахувати, що $a_0 = 1$ і кожне з рівнянь, починаючи з другого розділити відповідно на $2, 3, \ldots, k$, то одержану систему можна записати у вигляді

$$B \cdot b = d \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots & k^2 \\ & & & & \\ 1 & 2^{k-1} & 3^{k-1} & \ldots & k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Оскільки визначником даної системи є визначник Ван-дер-Монда, то система має єдиний розв'язок.

Зауваження 1. *Для кожного з методів ми будемо наводити формули лише для кількох значень k. Формули для інших k легко одержати за допомогою наведених програм.*

Зауваження 2. *Оцінки похибок наведених формул можна знайти в цитованій літературі.*

На лістингу 1 наведено програму, реалізовану засобами пакету Mathcad, за допомогою якої: формується матриця B та права частина d системи, розв'язується система та формується вектор c коефіцієнтів формул Адамса-Башфорта для $k=1,2,3$. Самі формули Адамса-Башфорта набираються у ручному режимі.

Лістинг 1. Метод Адамса-Башфорта

```
AD_BASH(k) := | a_0 ← 1
              | for i ∈ 0..k − 1
              |   | for j ∈ 0..k − 1
              |   |   B_{i,j} ← (j + 1)^i
              |   | d_i ← 1/(i + 1)
              | b ← B^(−1)·d
              | for i ∈ k − 1..0
              |   c_{i+1} ← b_i
              | c_0 ← a_0
              | (B d c)
```

$(B\ d\ c) := AD\_BASH(1)$

$B=(1)\quad d=(1)\quad c^T=(1\ \ 1)$

$y_{n+1}=y_n+h\cdot f_n$

$(B\ d\ c) := AD\_BASH(2)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad c^T=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\frac{3}{2}f_n-\frac{1}{2}f_{n-1}\right)$$

$(B\ d\ c) := AD\_BASH(3)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad c^T=\begin{pmatrix}1&\frac{23}{12}&-\frac{4}{3}&\frac{5}{12}\end{pmatrix}\quad y_{n+1}=y_n+h\cdot\left(\frac{23}{12}f_n-\frac{4}{3}f_{n-1}+\frac{5}{12}f_{n-2}\right)$$

Рис. 1. Метод Адамса-Мултона

2. Метод Адамса-Мултона. Метод Адамса-Мултона є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (2) при умові, що $a_1=a_2=\ldots=a_k=0$. Тоді формула (2) набуде вигляду

$$y_{n+1}=a_0y_n+hb_{-1}y'_{n+1}+h\sum_{i=0}^{k-2}b_iy'_{n-i} \tag{7}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_0,b_{-1},b_0,\ldots,b_{k-2}$ використаємо поліноми (4):

$$\begin{aligned}
&m=0: \quad 1=a_0, \text{ звідки } a_0=1;\\
&m=1: \ 0=1-b_{-1}\cdot 1-b_0\cdot 1-b_1\cdot 1-\ldots-b_{k-2}\cdot 1;\\
&m=2: 0=1-2b_{-1}\cdot 0-2b_0\cdot 1-2b_1\cdot 2-\ldots-2b_{k-2}\cdot k;\\
&m=3: 0=1-3b_{-1}\cdot 0^2-3b_0\cdot 1^2-3b_1\cdot 2^2-\ldots-3b_{k-2}\cdot k^2;\\
&\ldots\\
&m=k: 0=1-kb_{-1}\cdot 0^{k-1}-kb_0\cdot 1^{k-1}-kb_1\cdot 2^{k-1}-\ldots-kb_{k-2}\cdot k^{k-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Якщо кожне з рівнянь, починаючи з першого розділити відповідно на -1, $-2,-3,\ldots,-k$, то одержану систему можна записати у матричному вигляді

$$B\cdot b=d \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&1&1&\ldots&1\\0&1&2&\ldots&k\\0&1&2^2&\ldots&k^2\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&1&2^{k-1}&\ldots&k^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{-1}\\b_0\\b_1\\ \ldots\\b_{k-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \ldots\\ \frac{1}{k}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Оскільки визначник даної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок. На лістингу 2 наведено формули Адамса-Мултона для $k = 1, 2, 3$.

Лістинг 2 Метод АДАМСА-МУЛТОНА ORIGIN:= −1

```
AD_MULT(k) := | a_0 ← 1
              | for i ∈ −1..k − 2
              |   | d_i ← 1/(i + 2)
              |   | for j ∈ −1..k − 2
              |   |   B_{i,j} ← (j + 1)^(i+1)
              | b ← B^(−1)·d
              | for i ∈ k − 2..−1
              |   c_{i+1} ← b_i
              | c_{−1} ← a_0
              | (B d c)
```

$k := 1 \quad (B\ d\ c) := AD\_MULT(k)$

$B = (1) \quad d = (1) \quad c^T = (1\ \ 1)$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f_{n+1}$

$k := 2 \quad (B\ d\ c) := AD\_MULT(k)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right)$

$k := 3 \quad (B\ d\ c) := AD\_MULT(k)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{2}{3} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right)$

Рис. 2. Метод Адамса-Мултона

Зауваження 3. *При побудові наступних методів ми не будемо записувати систему рівнянь типу (6), оскільки алгоритми їх побудови та їх вигляд для розглядуваних k наведено на відповідному лістингу.*

Якщо рівняння (1) не є "жорстким", то, як правило, поєднуючи явний і неявний багатокрокові методи отримують так званий *метод прогнозу і корекції*. Одним із найбільш відомих методів прогнозу і корекції є об'єднання методів Адамса-Башфорта і Адамса-Мултона четвертого порядку точності ($k = 4$):

$$y_{n+1}^{(pred)} = y_n + h\left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3}\right),$$

$$y_{n+1}^{(cor)} = y_n + h\left(\frac{3}{8} f_n^{pred} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2}\right).$$

Для того, щоб почати обчислення, необхідно заздалегідь знайти три перші значення y_1 y_2, y_3 (y_0 – задане з початкової умови), за допомогою яких обчислюються значення f_1 f_2, f_3. Їх, зазвичай, обчислюють методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

3. Неявний метод Гіра Метод Гіра (метод диференціювання назад) є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (2) при умові, що $b_0 = b_1 = \ldots = b_k = 0$. Тоді формула (2) набуде вигляду

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_{k-1} y_{n-(k-1)} + h b_{-1} y'_{n+1} \tag{10}$$

На лістингу 3 наведено формули Гіра для $k = 1, 2, 3$.

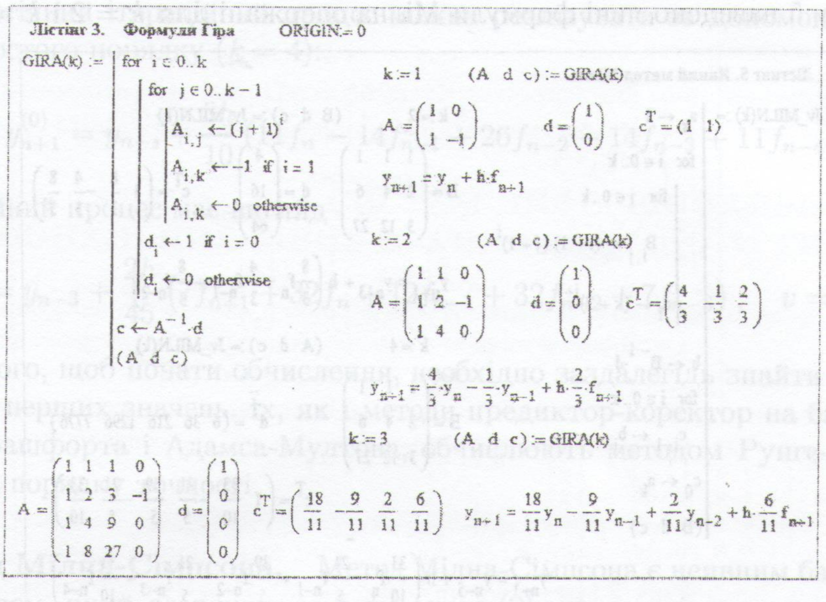

Рис. 3. Неявний метод Гіра

4. Явний метод Нюстрема. Метод Нюстрема є явним багатокроковим методом, який одержується з формули (2) при умові, що $a_0 = 0, a_1 \neq 0, \ldots, a_k = 0, b_{-1} = 0$. Тоді формула (2) набуде вигляду

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{k} b_i y'_{n-i}. \tag{11}$$

На лістингу 4 наведено формули Ністрема для $k = 1, 2, 3$.

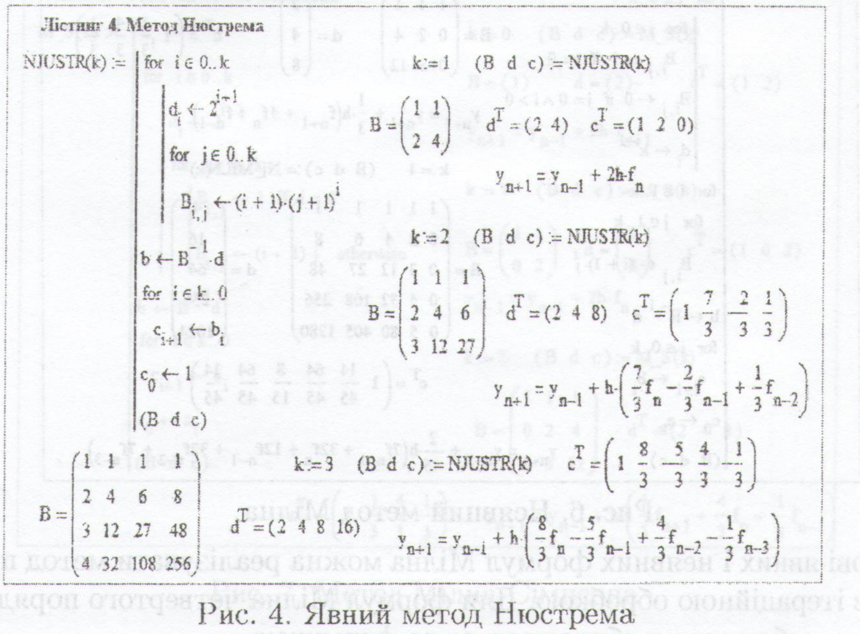

Рис. 4. Явний метод Нюстрема

5. Явний метод Мілна. Формули явного методу Мілна можна побудувати використавши співвідношення (5) при $a_0 = 0, a_1 = 0, \ldots, a_{k-1} = 0, a_k \neq 0, b_{-1} = 0$. Тоді формула (2) набуде вигляду

$$y_{n+1} = a_k y_{n-k} + h \sum_{i=0}^{k} b_i y'_{n-i}.$$

На лістингу 5 наведено явні формули Мілна одержані для $k = 2$ і $k = 4$.

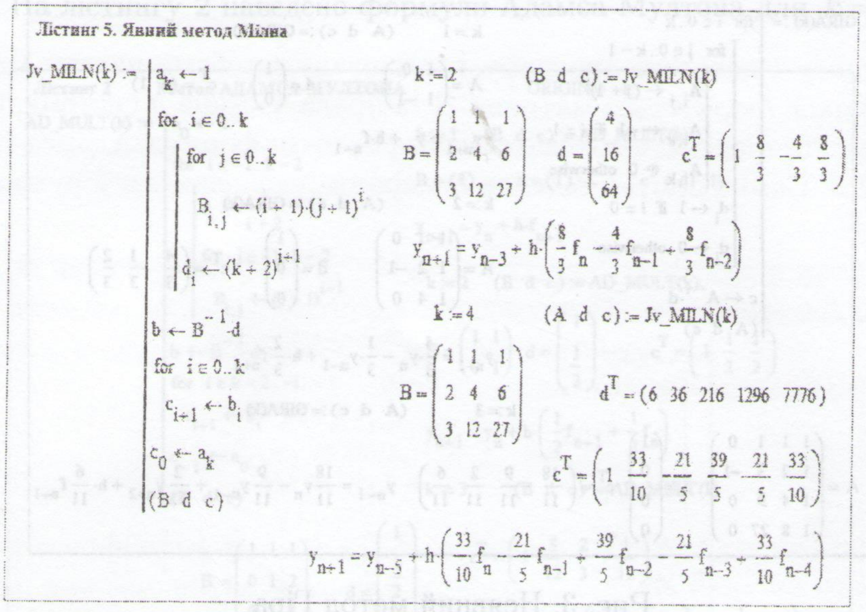

Рис. 5. Явний метод Мілна

6. Неявний метод Мілна. Формули неявного методу Мілна можна побудувати використавши поліноми (5) при $a_0 = 0, a_1 = 0, \ldots, a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$. На лістингу 6 наведено неявні формули Мілна, одержані для $k = 2$ і $k = 4$.

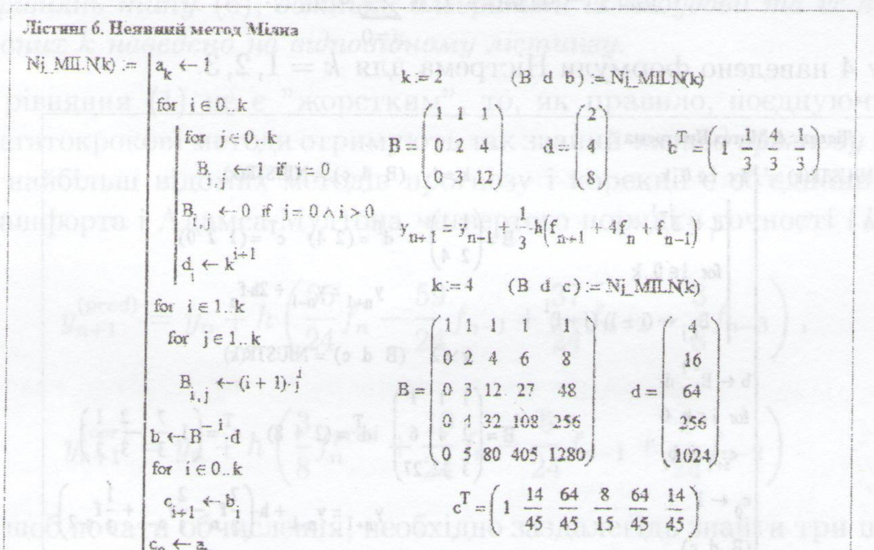

Рис. 6. Неявний метод Мілна

На основі явних і неявних формул Мілна можна реалізувати метод прогнозу і корекції з ітераційною обробкою. Для формул Мілна четвертого порядку ($k = 2$) початкове наближення обчислюється за формулою

$$y^{(0)}_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\right),$$

а ітераційний процес має вигляд

$$y^{(v+1)}_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f^{v}_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right), \quad v = 0, 1, \ldots .$$

Аналогічний ітераційний процес можна реалізувати за допомогою формул Мілна шостого порядку ($k = 4$):

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-s} + \frac{3h}{10}\left(11f_n - 14f_{n-1} + 26f_{n-2} - 14f_{n-3} + 11f_{n-4}\right),$$

а ітераційний процес має вигляд

$$y_{n+1}^{(v+1)} = y_{n-3} + \frac{2h}{45}\left(7f_{n+1}^v + 32f_n + 12f_{n-1} + 32f_{n-2} + 7f_{n-3}\right), \quad v = 0, 1, \ldots.$$

Для того, щоб почати обчислення, необхідно заздалегідь знайти відповідну кількість перших значень. Їх, як і методи предиктор-коректор на базі формул Адамса-Башфорта і Адамса-Мултона, обчислюють методом Рунге-Кутта відповідного порядку точності.

7. Метод Мілна-Сімпсона. Метод Мілна-Сімпсона є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (2) при умові, що $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_k = 0$. Тоді формула (2) набуде вигляду

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + hb_{-1}y_{n+1}' + h\sum_{i=0}^{k} b_i y_{n-i}.$$

На лістингу 7 наведено формули Мілна-Сімпсона для $k = 1, 2, 3$, одержані за допомогою пакету Mathcad.

Лістинг 7. Метод Мілна-Сімпсона

```
M_S(k) := | a_1 ← 1
          | for i ∈ 0..k
          |   | d_i ← 2^(i+1)
          |   | for j ∈ 0..k
          |   |   | B_{i,j} ← 1 if i = 0
          |   |   | B_{i,j} ← (i + 1)·j^i otherwise
          | b ← B^(-1)·d
          | for i ∈ k..0
          |   c_{i+1} ← b_i
          | c_0 ← a_1
          | (B d c)
```

$k := 0 \quad (B\ d\ c) := M\_S(k)$

$B = (1) \quad d = (2) \quad c^T = (1\ \ 2)$

$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h \cdot f_{n+1}$

$k := 1 \quad (B\ d\ c) := M\_S(k)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c^T = (1\ \ 0\ \ 2)$

$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h \cdot f_n$

$k := 2 \quad (B\ d\ c) := M\_S(k)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad d^T = (2\ \ 4\ \ 8)$

$c^T = \left(1\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{4}{3}\ \ \frac{1}{3}\right) \quad y_{n+1} = y_{n-1} + h \cdot \left(\frac{1}{3} f_{n+1} + \frac{4}{3} f_n + \frac{1}{3} f_{n-1}\right)$

Рис. 7. Метод Мілна-Сімпсона

8. Інтерполяційний метод Ерміта. Інтерполяційний метод Ерміта будується за формулою

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y_{n-i} + hb_{-1}y_n'.$$

На лістингу 8 наведено формули інтерполяційного методу Ерміта для $k = 2, 3, 4$.

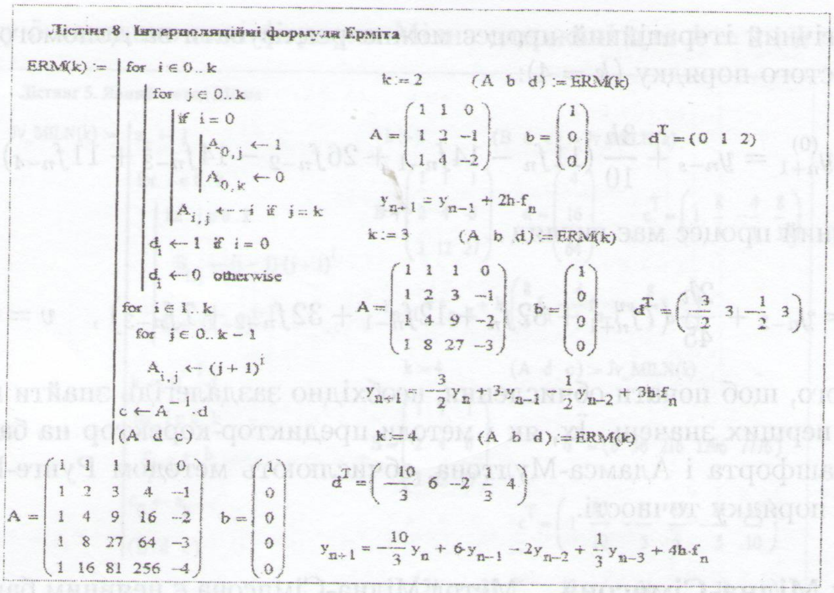

Рис. 8. Інтерполяційний метод Ерміта

9. Екстраполяційний метод Ерміта. Екстраполяційний метод Ерміта будується за формулою

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i y_{n-i}.$$

На лістингу 9 наведено екстраполяційні формули Ерміта для $k = 1, 2, 3$.

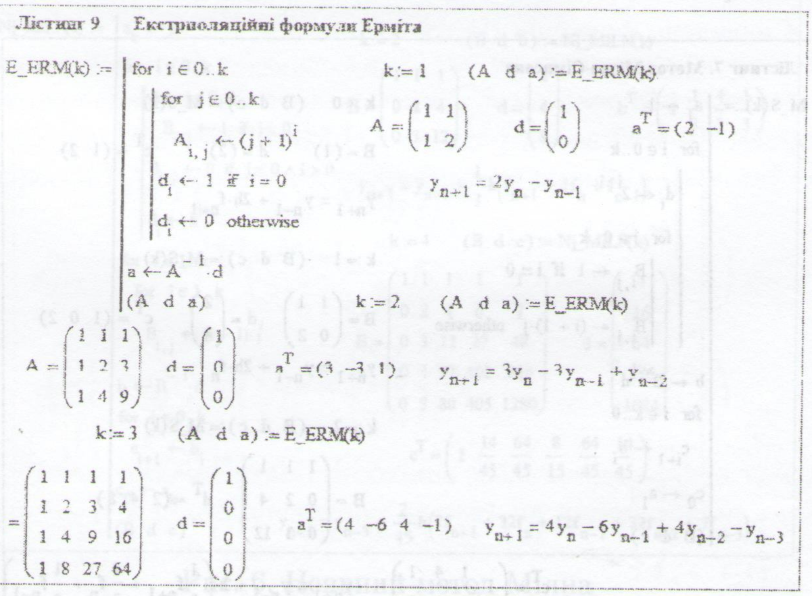

Рис. 9. Екстраполяційний метод Ерміта

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.

Одержано 18.04.2012