УДК УДК 517.9

О.М. Грушовський, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ

We obtain a criterion for existence of periodical solutions of a degenerate system of ordinary differential equations with impulse effect of general form in case when singular system of differential equations can be reduced to central canonical form.

Одержано критерій існування періодичних розв'язків вироджених диференціальних систем з імпульсною дією загального вигляду у припущенні, що вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми.

1. Постановка задачі. Розглянемо питання існування періодичних розв'язків T-періодичної виродженої системи з імпульсною дією

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \tag{2}$$

де $rank B(t) = n - r = const\ \forall t \in \mathbb{R}$, $r > 0$; вектор-функція $f(t)$ і $(n \times n)$-матриці $A(t)$, $B(t)$ є періодичними по t зі спільним періодом T і достатньо гладкими: $f(t) \in C^k_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $A(t), B(t) \in C^k_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, k – деяке натуральне число; сталі прямокутні $(m_i \times n)$-вимірні дійсні матриці N_i, M_i, сталі вектори $\alpha_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $1 \leq m_i \leq n$ і моменти $t = \tau_i$ імпульсного збурення такі, що існує натуральне число p таке, що $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$M_{i+p} = M_i, \quad N_{i+p} = N_i, \quad \alpha_{i+p} = \alpha_i,$$

$$\tau_0 < 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p < T \leq \tau_{p+1} < \ldots, \qquad \tau_{i+p} = \tau_i + T.$$

Під T-періодичним розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $\mathbb{R}\setminus\{\tau_i\}$ T-періодичну з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$ функцію $x(t) \in C^1_{loc,T}(\mathbb{R}\setminus\{\tau_i\}, \mathbb{R}^n)$:

$$x(t) = x_i(t) \text{ при } t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad x_{i+p}(t+T) = x_i(t), \tag{3}$$

яка задовольняє систему (1) та імпульсні умови (2).

Будемо вважати функції $x_j(t)$ визначеними і неперервними на відповідних замкнених інтервалах $x_j(t) \in C[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j \in \mathbb{R}$, $x_j(\tau_j) = x_j(\tau_j + 0) = \lim_{t\to\tau_j+0} x_j(t)$, і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t\to\tau_i-0} x_{i-1}(t).$$

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1 ([7]). *Нехай виконуються умови:*
1) $rank B(t) = n - r = const\ \forall t \in \mathbb{R}$;

2) матриця $B(t)$ *має при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *повний жорданів набір векторів* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$ *відносно оператора* $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, *який складається з* r *жорданових ланцюжків завдовжки* $s_i, i = \overline{1,r}$;

3) $A(t), B(t) \in C^{q-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *де* $q = \max s_i$.

Тоді існують неособливі при всіх $t \in \mathbb{R}$ $(n\times n)$-*матриці* $P(t), Q(t) \in C^{q-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *такі, що в результаті множення рівняння* (1) *зліва на* $P(t)$ *і заміни*

$$x = Q(t)u$$

вироджена система (1) *зводиться до системи в центральній канонічній формі*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{du}{dt} \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_s \end{bmatrix} u + g(t),$$

де

$$g(t) = P(t)f(t), \quad g(t) = col(\widetilde{g}(t), \widehat{g}(t)), \quad \widetilde{g} \in \mathbb{R}^{n-s}, \widehat{g} \in \mathbb{R}^s,$$

$s = s_1 + \ldots + s_r$, $I = diag\{I_1, \ldots, I_r\}$, I_j *– нільпотентні блоки Жордана порядку* s_j $(j = \overline{1,r})$, $M(t) \in C^{q-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

2. Побудова розв'язків. Припустимо, що виконуються умови теореми 1, тобто за допомогою невиродженого лінійного перетворення система (1) може бути приведена до центральної канонічної форми.

Позначимо через $\Omega_x(t)$ фундаментальну $((n-s)\times(n-s))$- вимірну матрицю однорідної невиродженої диференціальної системи

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = M(t)\widetilde{u}, \quad \widetilde{u} \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{4}$$

а через $X_{n-s}(t)$ – фундаментальну $(n\times(n-s))$-вимірну матрицю, стовпці якої є розв'язками однорідної виродженої системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{5}$$

$\Omega_x(t,\sigma) = \Omega_x(t)\Omega_x^{-1}(\sigma)$, $\Omega_x(\sigma,\sigma) = \mathbb{E}_{n-s}$, $\sigma \leq t$, c_i – $(n-s)$-вимірні вектор-стовпчики довільних сталих,

$$X_{n-s}(t,\sigma) = Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t,\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \; X_{n-s}(t,\sigma) = Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t,\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \; \widehat{r}(t) = Q(t)\begin{bmatrix} 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{s-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\widehat{g}(t) \end{bmatrix}.$$

Тоді розв'язок сингулярної системи (1) на інтервалі $t \in [0, \tau_1]$ має вигляд [7,9]:

$$x(t, c_0) = x_0(t, c_0) = X_{n-s}(t)c_0 + \int\limits_0^t X_{n-s}(t,\sigma)\widetilde{g}(\sigma)d\sigma - \widehat{r}(t). \tag{6}$$

Після дії імпульсного збурення в точці $t=\tau_1$ продовжимо розв'язок $x(t) = x_0(t,c_0)$ вигляду (6) з інтервалу $t\in[\tau_0,\tau_1]$ на $(n-s)$-параметричний розв'язок $x_1(t)$:

$$x_1(t) = x_1(t,c_1) = X_{n-s}(t)c_1 + \int_{\tau_1}^{t} X_{n-s}(t,\sigma)\widetilde{g}(\sigma)d\sigma - \widehat{r}(t),\ c_1\in\mathbb{R}^{n-s}; \tag{7}$$

який визначений на інтервалі $[\tau_1,\tau_2]$. Зв'язок між ними визначається умовою (2) при $i=1$. Беручи до уваги неперервність функції $x_1(t)=x_1(t,c_1)$ в точці $t=\tau_1$, можемо записати умову (2) в цій точці наступним чином:

$$M_1x_1(\tau_i) + N_1x_0(\tau_i) = \alpha_1. \tag{8}$$

Підставляючи (6), (7) в (8), одержимо лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$\widetilde{M}_1c_1 + \widetilde{N}_1c_0 = \alpha_1 + (M_1+N_1)\widehat{r}(\tau_1) - N_1h_1,$$

де через $\widetilde{M}_i$, $\widetilde{N}_i$ для кожного $i\in\mathbb{Z}$ будемо позначати $(m_i\times(n-s))$-вимірні матриці, а через h_i — n-вимірні вектори:

$$\widetilde{M}_1 = M_1X_{n-s}(\tau_i,0),\quad \widetilde{N}_1 = N_1X_{n-s}(\tau_1,0),\quad h_1 = \int_0^{\tau_1} X_{n-s}(\tau_i,\sigma)\widetilde{g}(\sigma)d\sigma,$$

$$\widetilde{M}_i = M_iX_{n-s}(\tau_i,\tau_{i-1}),\quad \widetilde{N}_i = N_iX_{n-s}(\tau_i,\tau_{i-1}),\quad h_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_{n-s}(\tau_i,\sigma)\widetilde{g}(\sigma)d\sigma.$$

Оскільки на кожному з інтервалів $t\in(\tau_i,\tau_{i+1}]$ розв'язок визначається за формулою

$$x(t) = x_i(t,c_i) = X_{n-s}(t)c_i + \int_{\tau_i}^{t} X_{n-s}(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma - \widehat{r}(t), \tag{9}$$

$c_i\in\mathbb{R}^n$, то аналогічним чином одержимо, що в кожній точці імпульсу $t=\tau_i$ відповідні $(n-s)$-вимірні вектори довільних сталих c_{i-1}, c_i повинні задовольняти рівняння

$$\widetilde{M}_ic_i + \widetilde{N}_ic_{i-1} = \alpha_i + (M_i+N_i)\widehat{r}(\tau_i) - N_ih_i. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язки $x_0(t)$, $x_p(t)$ у періодичну крайову умову

$$x(0) = x(T),$$

одержимо:

$$X_{n-s}(0)c_0 - X_{n-s}(T)c_p = \int_{\tau_{p-1}}^{T} X_{n-s}(T,\sigma)\widetilde{g}(\sigma)d\sigma - \widehat{r}(T). \tag{11}$$

причому стовпці матриці P_{D_u} утворюють повний базис ядра $Ker(D)$. Через $P_{D_v^\top}$ будемо позначати $(v \times m)$-вимірну матрицю, $v = m - r$, рядками якої є лінійно незалежні рядки матриці $P_{D^\top}$, яка, в свою чергу, є ортопроектором з простору R^m на нуль простір $Ker(D^\top)$ матриці $D^\top$:

$$P_{D^\top} : R^m \to Ker(D^\top), \qquad Ker(D^\top) = P_{D^\top} R^m,$$

причому рядки матриці $P_{D_v^\top}$ утворюють повний базис ядра матриці $D^\top$.

Таким чином, можемо сформулювати основний результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Вироджена система (1) з імпульсною дією (2), має T-періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова (13). При цьому вони утворюють u-параметричну сім'ю:*

$$x(t) = x(t,\xi) = \begin{cases} x_0(t, c_0^*(\xi)), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ x_i(t, c_i^*(\xi)), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases} \tag{14}$$

де $i = \overline{1,p}$, $c_j^*(\xi) \in \mathbb{R}^{n-s}$, $\xi \in \mathbb{R}^u$, $j = \overline{0,p}$,

$$x_j(t,\xi) = X_{n-s}(t) c_j^*(\xi) + \int_{\tau_j}^{t} X_{n-s}(t,\sigma) \widetilde{g}(\sigma) d\sigma - \widehat{r}(t). \tag{15}$$

Зауваження 1. *У некритичному випадку [8] – коли $P_{D^\top} = 0$, тобто відповідна однорідна імпульсна система має тільки тривіальний T-періодичний розв'язок, тоді при довільних значеннях $f(t)$, α_j, $j = \overline{0,p}$ система (1), (2) має u-параметричну сім'ю лінійно незалежних T-періодичних розв'язків вигляду (14), (15).*

Приклад 1. *Знайти розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

з імпульсним збуренням вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(\pi + 0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(\pi - 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

та періодичною умовою

$$x(0) = x(2\pi). \tag{18}$$

Помноживши систему (16) зліва на матрицю

$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 2 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

і виконавши заміну $x(t) = Qy(t)$, де матриця Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

зводимо систему (16) до центральної канонічної форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{11}{2}\sin(t) \\ 2\sin(t) \\ \frac{1}{6}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Згідно (6), (6), *на інтервалах* $t \in [0, \pi]$ *і* $t \in [\pi, 2\pi]$ *розв'язок має вигляд відповідно*

$$x(t) = x_0(t, c_0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{-t} \\ -e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} c_0 + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{-t} \\ -e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{\sigma} & e^{\sigma} & \frac{1}{3}e^{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{2}\sin\sigma \\ 2\sin\sigma \\ \frac{1}{6}\sin\sigma \end{pmatrix} d\sigma - \begin{pmatrix} 4\sin(t) \\ -\frac{11}{6}\sin(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$x(t) = x_1(t, c_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{-t} \\ -e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} c_1 + \int\limits_{\pi}^t \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{-t} \\ -e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{\sigma} & e^{\sigma} & \frac{1}{3}e^{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{2}\sin\sigma \\ 2\sin\sigma \\ \frac{1}{6}\sin\sigma \end{pmatrix} d\sigma - \begin{pmatrix} 4\sin(t) \\ -\frac{11}{6}\sin(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

При цьому система (12) *має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 5 & -5e^{-2*\pi} \\ -3 & 3e^{-2*\pi} \\ 1 & -e^{-2*\pi} \\ 5e^{-\pi} & 5e^{-\pi} \\ -3e^{-\pi} & -3e^{-\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{6}(1+e^{\pi})\,e^{-\pi} \\ \frac{5}{2}(1+e^{\pi})\,e^{-\pi} \\ \frac{-5}{6}(1+e^{\pi})\,e^{-\pi} \\ 15 - \frac{25}{6}(1+e^{\pi})\,e^{-\pi} \\ -9 + \frac{5}{2}(1+e^{\pi})\,e^{-\pi} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тут $rank D = 2$,

$$D^{+} = \frac{1}{(1+e^{2\pi})} \begin{pmatrix} \frac{3e^{2\pi}}{7} & \frac{-9e^{2\pi}}{35} & \frac{3e^{2\pi}}{35} & \frac{15e^{pi}}{34} & \frac{-9e^{\pi}}{34} \\ \frac{-3e^{2\pi}}{7} & \frac{9e^{2\pi}}{35} & \frac{-3e^{2\pi}}{35} & \frac{15e^{3\pi}}{34} & \frac{-9e^{3\pi}}{34} \end{pmatrix}, \quad P_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{D^{\top}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 14 & 21 & -7 & 0 & 0 \\ 21 & 34 & -3 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{306}{25} & \frac{102}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{102}{5} & 34 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що умова (13) *виконується, тобто система* (19) *є сумісною. Розв'язуючи її і підставляючи одержане значення* c_1, c_2 *в* (14), (15) *одержимо розв'язок крайової задачі* (16)-(18):

$$x(t) = x_0(t) = \frac{-1}{18(1+e^{2\pi})}\begin{pmatrix} -40e^{\pi-t} + (25\cos(t) - 7\sin(t))(1+e^{2\pi}) \\ 24e^{\pi-t} - 15\,(\cos(t) - sin(t))\,(1+e^{2\pi}) \\ -8e^{\pi-t} + 5\,(\cos(t) - \sin(t))\,(1+e^{2\pi}) \end{pmatrix}$$

при $t \in [-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]$, *і*

$$x(t) = x_1(t) = \frac{-1}{18(1+e^{2\pi})}\begin{pmatrix} -40e^{3\pi-t} + (25\cos(t) - 7\sin(t))\,(1+e^{2\pi}) \\ -24e^{3\pi-t} + 15\,(\cos(t) - sin(t))\,(1+e^{2\pi}) \\ -8e^{3\pi-t} + 5\,(\cos(t) - \sin(t))\,(1+e^{2\pi}) \end{pmatrix}$$

при $t \in [\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi(k+1)]$.

1. *Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.С.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью.– К.:ІМ НАН України, 2007.–428 с.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.
3. *Каранджулов Л.И.* Структура общего решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с помощью полуобратных матриц// Укр. мат. журн.–1993.– **45**, № 5.– С. 616–625.
4. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием //Укр. мат. журн.–1996. **48**, № 5.– С. 588–594.
5. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями// Нелінійні коливання. – 2007. – 10, №1. – С. 51–65.
6. *Бойчук О.А., Шегда Л.М.* Вироджені крайові задачі// Нелінійні коливання. – 2007.– 10, №3. – С. 303–312.
7. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа., 2000. – 294 с.
8. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.– К.:ІМ НАН України, 1995.–318 с.
9. *Король І.І.* Дослідження існування і побудова розв'язків крайович задач: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 "Диференціальні рівняння". - К., 2011. - 36 с.

Одержано 24.03.2013