УДК 517.9

С. І. Балога, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this article some classes of differential equations defined in direct product of m-measurable torus and n-measurable Euclidean space for which the conditions of existence of invariant toroidal manifolds are satisfied are invertigated.

В даній статті досліджено класи диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для яких виконуються умови існування інваріантних тороїдальних многовидів.

Системи диференціальних рівнянь, що є розширенням динамічної системи на торі, описують процеси, що носять коливний характер. В останні роки теорія розширень динамічних рівнянь на торі інтенсивно розвивається. Важливим є встановлення умов існування інваріантних многовидів таких систем. Дана робота присвячена дослідженню умов існування інваріантних многовидів лінійної збуреної та слабконелінійної систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку тора та евклідового простору, та виокремлено деякі класи задач, для яких умови існування мають місце.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j = 1, 2, ..., m$. $A(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — неперервні матрична та векторна 2π-періодичні по φ_j функції відповідно.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$— матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Покладемо

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & t \geq \tau, \\ \Omega^t_\tau(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - E), & t < \tau, \end{cases}$$

де $C(\varphi), \varphi \in T^m$ неперервна матриця, і назвемо функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{3}$$

якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(0,\tau,\varphi) \| d\tau$ рівномірно обмежений по φ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(0,\tau,\varphi) \| d\tau \leq k < \infty,$$

для всіх $\varphi \in T^m$. Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E.$$

Нехай Ω_φ — ω-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Як відомо, наприклад із [1], Ω_φ не пуста множина для всіх $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору T^m, $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$.

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя

$$\lim_{t \to \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A. \tag{4}$$

Це означає, що матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. В статті [2] доведено існування інваріантної тороїдальної множини $x = u(\varphi)$ системи (1) в просторі $E^n \times T^m$ для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ функції $f(\varphi)$, якщо лінійна система (2) є гіперболічною і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A відмінні від нуля.

Розглянемо тепер збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \ \dot{x} = (A(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{5}$$

Справедлива

Теорема 1. *Якщо лінійна система (2) є гіперболічною і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A відмінні від нуля $Re(\lambda_j(A)) \neq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, причому $Re(\lambda_j(A)) < 0$ при $j = 1, 2, ..., k$, $Re(\lambda_j(A)) > 0$ при $j = k+1, ..., n$. Тоді існує таке $b > 0$, що для будь-якої неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ матриці $B(\varphi)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi)\| \leq b \tag{6}$$

система (5) має інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Доведення теореми полягає в тому, щоб показати, що функція Гріна-Самойленка $G(t,\tau,\varphi,A+B)$ системи рівнянь

$$\dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi)x \tag{7}$$

при досить великих t допускає оцінку типу $exp(-a(t-\tau))$, а сам многовид є

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi,A+B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{8}$$

Позначимо через $G(t,\tau,\varphi)$ функцію Гріна-Самойленка системи (3), яка, як відомо з [2], задовольняє оцінку

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \leq K e^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{9}$$

при додатних K і γ та при будь-якому $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$.

Для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi, A+B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{10}$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра

$$\dot{x} = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x + f(\varphi_t(\varphi)),$$

якщо тільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi, A+B)\| \, d\tau < \infty. \tag{11}$$

Переконаємося, що в умовах теореми дійсно нерівність (11) справедлива. Згідно методу варіації довільних сталих функцію Гріна-Самойленка $G(t, \tau, \varphi, A+B)$ будемо шукати у вигляді $G(t, \tau, \varphi, A+B) = G(t, \tau, \varphi)C(t)$. Підставивши останню рівність в рівняння

$$\dot{x} = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x$$

одержимо:

$$G(t, \tau, \varphi)\frac{dC}{dt} + \frac{dG(t, \tau, \varphi)}{dt}C(t) = A(\varphi_t(\varphi))G(t, \tau, \varphi)C(t) + B(\varphi_t(\varphi))G(t, \tau, \varphi, A+B),$$

$$\frac{dC}{dt} = (G(t, \tau, \varphi))^{-1}B(\varphi_t(\varphi))G(t, \tau, \varphi, A+B).$$

Звідси

$$C(t) = C(\tau) + \int_{\tau}^{t} (G(s, \tau, \varphi))^{-1}B(\varphi_s(\varphi))G(s, \tau, \varphi, A+B)ds,$$

$$G(t, \tau, \varphi, A+B) = G(t, \tau, \varphi)C(\tau) + G(t, \tau, \varphi)\int_{\tau}^{t} (G(s, \tau, \varphi))^{-1}B(\varphi_s(\varphi))G(s, \tau, \varphi, A+B)ds.$$

Оскільки при деяких додатних K, γ функція $G(t, \tau, \varphi)$ задовольняє нерівність (9) для всіх $t, \tau \in R$ і при достатньо великому T і досить малому b

$$\|B(\varphi_t(\varphi))\| \leq b,$$

то

$$\|G(t, \tau, \varphi, A+B)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}\|C(\tau)\| + \int_{\tau}^{t} Ke^{-\gamma|t-s|}\|B(\varphi_s(\varphi))\| \, \|G(s, \tau, \varphi, A+B)\| \, ds.$$

Домноживши на $e^{\gamma|t-\tau|}$ останню нерівність і прийнявши $\|C(\tau)\| = 1$ маємо

$$e^{\gamma|t-\tau|}\|G(t, \tau, \varphi, A+B)\| \leq K + \int_{\tau}^{t} Ke^{\gamma|s-\tau|}\|B(\varphi_s(\varphi))\| \, \|G(s, \tau, \varphi, A+B)\| \, ds,$$

$$e^{\gamma|t-\tau|}\|G(t,\tau,\varphi,A+B)\|\leq$$

$$\leq K+\int_{\tau}^{T}Ke^{\gamma|s-\tau|}\|B(\varphi_s(\varphi))\|\|G(s,\tau,\varphi,A+B)\|ds+\int_{\tau}^{t}Kbe^{\gamma|s-\tau|}\|G(s,\tau,\varphi,A+B)\|ds.$$

Згідно леми Гронуолла-Беллмана

$$\|G(t,\tau,\varphi,A+B)\|\leq K_1e^{-(\gamma-Kb)|t-\tau|},\ t,\tau\in R, \tag{12}$$

де $K_1=K+\int_{\tau}^{T}Ke^{\gamma|s-\tau|}\|B(\varphi_s(\varphi))\|\|G(s,\tau,\varphi,A+B)\|ds$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(0,\tau,\varphi,A+B)\|d\tau\leq\frac{2K}{\gamma-Kb}<\infty.$$

Інваріантну тороїдальну множину шукатимемо у вигляді $x=u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ — 2π-періодична по $\varphi_j,\ j=1,2,...,m$ функція. Запишемо (10) у вигляді

$$x^*(t)=u(\varphi_t(\varphi))=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,\tau,\varphi,A+B)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$$

і одержимо шукану інваріантну множину (8), що й завершує доведення теореми.

Розглянемо тепер слабконелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot\varphi=a(\varphi),\ \dot x=F(\varphi,x)+A(\varphi)x \tag{13}$$

в якій, як і в (1), $\varphi\in T^m,\ a(\varphi)\in C_{Lip}(T^m),\ F(\varphi,x)\in C^{(0,2)}_{\varphi,x}(\varphi\in T^m,x\in R^n)$, $\|x\|\leq h$. Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot\varphi=a(\varphi),\ \dot x=A(\varphi)x+B(\varphi,x)x+f(\varphi), \tag{14}$$

де $f(\varphi)=F(\varphi,0),\ B(\varphi,x)=\int_0^1\frac{\partial F(\varphi,\tau x)}{\partial(\tau x)}d\tau$. Наведемо достатні умови існування інваріантного многовиду системи (13).

Теорема 2. *Нехай лінійна система (2) є гіперболічною, для всіх $\varphi\in T^m$ існує границя (4) і $Re\lambda_j(A)\neq0,\ (j=1,2,...,n),\ Re\lambda_j(A)<0$, при $j=1,2,...,k$ і $Re\lambda_j(A)>0$, при $j=k+1,...,n$. Тоді існують такі сталі $b_0>0,\ m>0$ і достатньо мала стала Ліпшиця L, що для будь-якої неперервної по φ і x в області $\varphi\in T^m,\ \|x\|\leq h$, 2π-періодичної по $\varphi_j,\ j=1,2,...,m$ матриці $F(\varphi,x)$ такої, що*

$$\max_{\varphi\in T^m}\|F(\varphi,0))\|=m,$$

$$\max_{\varphi\in T^m,\|x\|\leq h}\|B(\varphi,x))\|=b_0$$

і

$$\left\|B(\varphi,x')-B(\varphi,x'')\right\|\leq L\left\|x'-x''\right\|,$$

де $B(\varphi,x)=\int_0^1\frac{\partial F(\varphi,\ \tau x)}{\partial(\tau x)}d\tau$, система (13) має інваріантний тороїдальний многовид.

Доведення. Покажемо, що при певних умовах, накладених на систему (13), вона має інваріантний тороїдальний многовид.

Цей многовид шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності $M_k : x = u^{(k)}(\varphi),\ \varphi \in T^m,\ k = 1, 2, ...,\ u^{(0)}(\varphi) = 0$, кожна з яких є інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{15}$$

тобто многовид

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, A + B_{k-1}) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{16}$$

Як відомо з [2], функція Гріна-Самойленка системи рівнянь (2) допускає оцінку (9), а тому легко встановити (як і при доведенні теореми 1), що функція Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{x} = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x$$

допускає оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi, A + B_0)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1|t-\tau|},\ t, \tau \in R,\ \varphi \in T^m, \tag{17}$$

де $\gamma_1 = \gamma_0 - K_0 b_0,\ \gamma_0 > K_0 b_0$,

$$K_1 = K_0 + \int_{\tau}^{T} K_0 e^{\gamma_0|s-\tau|} \|B(\varphi_s(\varphi), 0)\| \|G(s, \tau, \varphi, A + B_0)\| ds,$$

якщо тільки

$$\max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi, 0)\| \leq b_0,$$

де b_0 — достатньо мале. Тоді на основі теореми 1 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x = u^{(1)}(\varphi)$ системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (A(\varphi) + B(\varphi, 0))x + f(\varphi)$$

існує і має вигляд

$$x = u^{(1)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, A + B_0) f(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (A(\varphi) + B(\varphi, u^{(1)}(\varphi)))x + f(\varphi),$$

а саме

$$x = u^{(2)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, A + B_1) f(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

Якщо таким чином ми побудували многовиди $M_1, M_2, ..., M_{k-1}$, то за многовид M_k беремо інваріантний тороїдальний многовид (16) системи рівнянь (15).

Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид системи (13). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, ...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(\varphi) \rightrightarrows u(\varphi),\ \varphi \in T^m$$

і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид вихідної системи (13). Нехай

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\| = m,$$

$$\max_{\varphi\in\ T^m,\ \|x\|\leq h} \|B(\varphi, x))\| = b_0.$$

Із (16) маємо

$$\|u^{(1)}(\varphi)\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, s, \varphi, A + B_0)\| \, \|f(\varphi_s(\varphi))\| \, ds$$

або, враховуючи оцінку (17),

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|u^{(1)}(\varphi))\| \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\|.$$

Вважаємо, що $\gamma_1 h > K_1 m$, тому

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|u^{(1)}(\varphi)\| < h. \tag{18}$$

Нехай для $u^{(j)}(\varphi)$, $j = 1, 2, ..., k-1$ нерівність (18) виконується. Тоді для $j = k$ маємо:

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|u^{(k)}(\varphi))\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, s, \varphi, A + B_{k-1})\| \, \|f(\varphi_s(\varphi))\| \, ds \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\|.$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1 h > K_1 m$, то для кожного $k = 1, 2, ...$ функцію $u^{(k)}(\varphi)$ можна побудувати, а, отже, можна побудувати і множину M_k, що є інваріантною тороїдальною множиною системи (15).

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Для будь-якого $\varphi \in T^m$ $u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ є обмеженим на всій осі розв'язком рівняння (15), тобто задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))) u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))$ рівність

$$\frac{d}{dt} u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому різниця $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))-u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt}(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))-u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)))=(A(\varphi_t(\varphi))+B(\varphi_t(\varphi),u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))))(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))-$$

$$-u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)))+(B(\varphi_t(\varphi),u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)))-B(\varphi_t(\varphi),u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)).$$

Тому $u^{(k+1)}(\varphi)-u^{(k)}(\varphi)$ визначає інваріантну тороїдальну множину системи рівнянь

$$\dot\varphi=a(\varphi),\ \dot x=(A(\varphi)+B(\varphi,u^{(k)}(\varphi)))x+(B(\varphi,u^{(k)}(\varphi))-B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi),$$

а отже, задовольняє нерівність

$$\max_{\varphi\in T^m}\left\|u^{(k+1)}(\varphi)-u^{(k)}(\varphi)\right\|\le\frac{2K_1}{\gamma_1}\max_{\varphi\in T^m}\left\|B(\varphi,u^{(k)}(\varphi))-B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi))\right\|\left\|u^{(k)}(\varphi)\right\|\le$$

$$\le\frac{2K_1}{\gamma_1}\frac{2K_1}{\gamma_1}\max_{\varphi\in T^m}\|f(\varphi)\|\,L\cdot\left\|u^{(k)}(\varphi)-u^{(k-1)}(\varphi)\right\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$L\frac{2K_1}{\gamma_1}h<1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$.

Покладемо

$$\lim_{k\to\infty}u^{(k)}(\varphi)=u(\varphi).$$

Переконаємося, що многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Перейшовши до границі, коли $k\to\infty$ в рівності (16), бачимо, що функція $u(\varphi)$ допускає представлення (10) в якому $G(t,\tau,\varphi,A+B)$ — функція Гріна системи

$$\dot\varphi=a(\varphi),\ \dot x=[A(\varphi)+B(\varphi,u(\varphi))]x.$$

Отже, $u(\varphi_t(\varphi))$ для будь-якого $\varphi\in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot u(\varphi_t(\varphi))=[A(\varphi_t(\varphi))+B(\varphi_t(\varphi),u(\varphi_t(\varphi)))]u(\varphi_t(\varphi))+f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом системи (15). Теорему доведено.

Зауважимо, якщо ж дійсні частини всіх власних значень граничної матриці A від'ємні, то, як відомо із [3], інваріантні многовиди систем (2) і (13) є асимптотично стійкими.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Балога С.І.* Про існування інваріантної множини одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика та інформатика. - 2011.- №2 . - С.4 - 12.
3. *Перестюк М.О., Балога С.І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. // Нелінійні коливання. - Т. 11, №4. - 2008. - С.520 - 529.

Одержано ..2012