УДК УДК 517.9

І. Ю. Король, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

The method of uncertain factors of creation of the main algorithms of multi step methods of the solution of a Cauchy problem for the ordinary differential equations is considered.

Запропоновано узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

1. Опис загального підходу. Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо [Кр], лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=-s}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j = \overline{0,p}$, b_i, $i = \overline{-1,q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $b_{-1} = 0$, то метод (2) називається явним, а при $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

У окремих випадках для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполяційним многочленом Лагранжа, Ньютона. Однак, для одержання широкого спектру формул лінійних багатокрокових методів такий підхід є досить трудомісткий, або і зовсім непридатний.У зв'язку із цим формули лінійних багатокрокових методів будемо шукати у вигляді

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{3}$$

або

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, \tag{4}$$

де $y'_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, $y'_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ – значення похідної шуканої функції, а невідомі коефіцієнти a_j і b_jзнаходяться як розв'язки відповідних систем алгебраїчних рівнянь.

Нашою метою є вибір такого підходу до побудови систем лінійних неоднорідних рівнянь на основі формули (3), який дає можливість достатньо просто отримати широкий набір алгоритмів як явного, так і неявного типів. Зокрема, якщо покласти $b_{-1} = 0$, то одержуємо методи явного типу, а при $b_{-1} = 1$ – неявного.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k,$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – константи, то за допомогою формули (4) цей розв'язок можна знайти точно.

Невідомі коефіцієнти $a_{j1}, a_{j1+1}, \ldots, a_{j2},\ b_1, b_0, b_1, \ldots, b_q$ будемо шукати з умови [1], що формула (4) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$\begin{gathered} y(t) = \tfrac{1}{h^0}(t_{n+1} - t)^0, \quad y'(t) = 0, \quad m = 0; \\ y(t) = \tfrac{1}{h^m}(t_{n+1} - t)^m, \quad y'(t) = -\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1} - t)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, k. \end{gathered} \tag{5}$$

Для побудови таких систем формулу (4) запишемо у вигляді лінійної неоднорідної системи

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i} = y_{n+1}, \tag{6}$$

Систему (6) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx = d, \tag{7}$$

де матриця C формується приєднуванням зліва направо матриці A, стовпця b_{-1} і матриці B. Кількість стовпців у матрицях A і B та наявність стовпця b_{-1} залежить від порядку точності того чи іншого числового методу. При цьому матриця C є квадратною.

Відмітимо, що формула (6) має чотири складові: перший доданок – сума, коефіцієнтам a_j якої будуть відповідати стовпці матриці A (один стовпець при $j1 = j2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b_{-1}, якому буде відповідати стовпець b загальної матриці C системи; третя складова – сума, коефіцієнтам b_j якої у побудованій алгебраїчній системі будуть відповідати стовпці матриці B, і четверта складова – права частина, якій буде відповідати стовпець d.

Використовуючи поліноми (5) побудуємо складові системи (6) для знаходження невідомих коефіцієнтів наступним чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$\text{при } m=0: \ y_0(t_{n-j}) = \tfrac{1}{h^0}(t_{n+1} - (t_n - jh))^0 = 1;$$

$$\text{при } m=1,\ldots,k: \ y_m(t_{n-j}) = \tfrac{1}{h^m}(t_{n+1} - (t_n - jh))^m = \tfrac{1}{h^m}(h + jh)^m = (j+1)^m.$$

Аналогічно обчислюється матриця B, яка відповідає коефіцієнтам b_j – значенням поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$\begin{aligned}
&\text{при } m=0: \; y_0'(t_{n-i})=0;\\
&\text{при } m=1,\dots,k: \; y_m'(t_{n-i})=-\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-ih))^{m-1}=\\
&\qquad\qquad =-\tfrac{m}{h^m}(h+ih)^{m-1}=-\tfrac{m}{h^m}(i+1)^{m-1}.
\end{aligned}$$

При цьому приймемо, що похідна і права частина приймають такі значення:

$$y_{n+1}'=y_m'(t_{n+1})=\begin{cases}-1 & \text{при } m=1,\\ 0 & \text{при } m\neq 1,\end{cases} \qquad y_{n+1}=y_m(t_{n+1})=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ 0 & \text{при } m\neq 0.\end{cases}$$

На лістингу 1 наведено програму, яка формує матрицю C і стовпець d. На початку програми визначається число k – порядок точності різницевої формули (4) числового методу. Воно залежить від кількості стовпців матриць A і B та наявності чи відсутності стовпця b_{-1}; у циклі 1 за формулою (**??**) формуються стовпці матриці A; у циклі 2 за формулою (**??**) обчислюється стовпець b_{-1}; у циклі 3 – обчислюються стовпці матриці B. У частині 4 в залежності від значення параметра s формується матриця C. При $s = 0$ і $s = 3$ одержуємо матрицю C, яка відповідає одному з явних методів, а при $s = 1$ і $s = 2$ – неявним методам. Після цього обчислюється вектор d і знаходиться розв'язок системи (6).

Саме елементи вектора x і є коефіцієнтами розрахункових формул того чи іншого різницевого методу. Проілюструємо як за допомогою цієї програми одержуються різні загальновідомі методи.

2. Метод Адамса-Башфорта. Метод Адамса-Башфорта є явним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1 = j2 = 0$, $b_{-1} = 0$:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + h\sum_{i=0}^{q} b_i y_{n-i}'.$$

На лістингу 2 детально проілюстровано процес формування та вигляд матриць A, B, C та вектора d для всіх значень k, вектори x, які є розв'язками системи (7) та розрахункові формули методу Адамса-Башфорта, які будуються на основі одержаних векторів x. Зауважимо, що $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y(t_{n-i}))$. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 1 \quad x^T = (1\ 1) \quad y_{n+1} = y_n + h\cdot f_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$$

$$k = 2 \quad x^T = (1\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}) \quad y_{n+1} = y_n + h\cdot\left(\tfrac{3}{2}f_n - \tfrac{1}{2}f_{n-1}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$

$k = 3 \quad x^T = (1\ \frac{23}{12}\ -\frac{4}{3}\ \frac{5}{12}) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{23}{12} \cdot f_n - \frac{4}{3} \cdot f_{n-1} + \frac{5}{12} \cdot f_{n-2}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & -3 & -12 & -27 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$

$k = 4\ x^T = (1\ \frac{55}{24}\ -\frac{59}{24}\ \frac{37}{24}\ -\frac{3}{8})\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{55}{24} \cdot f_n - \frac{59}{24} \cdot f_{n-1} + \frac{37}{24} \cdot f_{n-2} - \frac{3}{8} \cdot f_{n-3}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ -3 & -12 & -27 & -48 \\ -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 0 \quad q := 5 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$

$k = 5\ x^T = (1\ \frac{1901}{720}\ -\frac{1901}{720}\ \frac{109}{30}\ -\frac{637251}{360720})$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{1901}{720} \cdot f_n - \frac{1901}{720} \cdot f_{n-1} + \frac{109}{30} \cdot f_{n-2} - \frac{637}{360} \cdot f_{n-3} + \frac{251}{720} \cdot f_{n-4}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Метод Адамса-Мултона. Метод Адамса-Мултона є неявним багатокроковим методом, який одержується з формули (4) при різних значеннях q, за умови, що $j1 = j2 = 0$, $b_{-1} = -1$:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + h b_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

На лістингу 3, аналогично, як і в попередньому випадку, наведено вигляд матриць A, B, C, стовпця b та правої частини d для $k = 5$, вектори x, які є розв'язками відповідих сисьем при $k = \overline{1,5}$ та формули методу, які будуються на основі одержаних векторів x. Локальні похибки одержаних формул можна знайти в [2].

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 2 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$
$k = 1\ x^T = (1\ 1) y_{n+1} = y_n + h \cdot f_{n+1}$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 1 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$
$k = 2\ x^T = (1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2})\ \ y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot f_n\right)$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 2 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$
$k = 3\ x^T = (1\ \frac{5}{12}\ \frac{2}{3}\ -\frac{1}{12})\ \ y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot f_{n+1} + \frac{2}{3} \cdot f_n - \frac{1}{12} \cdot f_{n-1}\right)$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 3 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$
$k = 4\ x^T = (1\ \frac{3}{8}\ \frac{19}{24}\ -\frac{5}{24}\ \frac{1}{24})\ \ y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot f_{n+1} + \frac{19}{24} \cdot f_n - \frac{5}{24} \cdot f_{n-1} + \frac{1}{24} \cdot f_{n-2}\right)$

$j1 := 0 \quad j2 := 0 \quad s = 1 \quad q := 4 \quad (A\ b\ B\ C\ k\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q)$
$k = 5\ x^T = (1\ \frac{251}{720}\ \frac{323}{360}\ -\frac{11}{30}\ \frac{53}{360}\ -\frac{19}{720})$
$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(\frac{251}{720} \cdot f_{n+1} + \frac{323}{360} \cdot f_n - \frac{11}{30} \cdot f_{n-1} + \frac{53}{360} \cdot f_{n-2} - \frac{19}{720} \cdot f_{n-3}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ -3 & -12 & -27 & -48 \\ -4 & -32 & -108 & -256 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & 0 & -3 & -12 & -27 & -48 \\ 1 & 0 & -4 & -32 & -108 & -256 \\ 1 & 0 & -5 & -80 & -405 & -1280 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Неявний метод Гіра. Формули неявного методу Гіра є найбільш використовуваними для інтегрування жорстких диференціальних рівнянь [2]. Формули Гіра одержуються з формули (4) за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$, $b_{-1} = 1$ і $q = 0$, а саме

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} y'_{n+1} + hb_0 y'_n.$$

На лістингу 4 наведено результати роботи програми.

5. Явний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) за умови, що $j1 = j2 = q$:

$$y_{n+1} = a_{j1} y_{n-j1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

На лістингу 5 наведено результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$.

6. Неявний метод Мілна. Відповідні формули одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = s = 1$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + hb_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, .$$

Результати роботи програми для $k = 3$ і $k = 5$ наведено на лістингу 6.

7. Метод Ністрема. Формули методу Ністрема одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = j2 = 1$ s $s = 0$:

$$y_{n+1} = a_1 y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}.$$

Результати роботи програми для різних порядків точності наведено на лістингу 7.

8. Інтерполяційний метод Ерміта. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 0$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_0 y'_n.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{2,5}$ наведено на лістингу 8.

8. Екстраполяційний метод Ерміта. На відміну від усіх попередніх випадків, для даного методу матриця C складається тільки з матриці A. Формули цього методу одержуються з (4) при різних значеннях q за умови, що $j1 = 0$, $j2 \in \mathbb{N}$ і $s = 3$:

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j}.$$

Результати роботи програми для $k = \overline{1,4}$ наведено на лістингу 9.

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.