где $c \equiv c(\mu, \varepsilon, p, d)$.

Данная теорема гарантирует повышение показателя суммируемости функции f, удовлетворяющей условию (3). Однако, в отличие от (2), неравенство (5) справедливо не на каждом кубе $Q \subset Q_0$, а только лишь на всем кубе Q_0, и это по существу. Нетрудно показать, что из условия (3) не следует (2).

При $d \geq 2$ условие типа Буземана - Феллера (4) выполняется для меры $d\mu$, удовлетворяющей условию удвоения, а в одномерном случае – для любой абсолютно непрерывной меры $d\mu$. Для $d \geq 2$ можно указать достаточно широкий класс мер, не удовлетворяющих условию удвоения, для которых справедливо условие (4). Мы строим пример абсолютно непрерывной меры, для которой условие (4) не имеет места.

1. А. А. Кореновский. О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций// Матем. сб. - 1990, Т. 181, № 12. - 1721-1727.

2. A. A. Korenovskyy, A. K. Lerner, A. M. Stokolos. Note on the Gurov - Reshetnyak condition// Math. Research Letters. - 2002, V. 9, № 5-6. - 579-583.

3. M. Milman. A note on interpolation and higher integrability// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. - 1998, V. 23, № 1. 169-180.

4. A. A. Korenovskyy, A. K. Lerner, A. M. Stokolos. A note on the maximal Gurov - Reshetnyak condition (submitted).

Дослідження і побудова розв'язків крайових задач у критичному випадку

І.І.Король, М.О.Перестюк

Ужгородський національний університет, Ужгород,

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

e-mail: korol_ihor@ukr.net

Розглядаються нові чисельно-аналітичні алгоритми дослідження і побудови розв'язків крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad \ell x = \alpha, \tag{1}$$

де $A(t) : [a,b] \to R^{n\times n}$ – матриця з дійсними неперервними коефіцієнтами, $f : [a,b] \times D \to R^n$ – неперервна і Ліпшицева функція ($D \subset R^n$ – замкнена обмежена область), $\ell : C([a,b], R^n) \to R^n$ – лінійний вектор-функціонал, $\alpha \in R^n$ – сталий вектор.

При цьому досліджується критичний випадок — коли відповідна лінійна однорідна крайова задача має k лінійно незалежних розв'язків, $1 \leq k \leq n$. Розроблено і обґрунтовано нові чисельно-аналітичні алгоритми для дослідження існування і наближеної побудови розв'язків крайової задачі (1).

Загальна ідея запропонованих алгоритмів подібна до чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А. М. Самойленка. Для знаходження розв'язку крайової задачі (1) – будується рекурентна k- параметрична послідовність функцій, всі члени якої задовольняють крайові умови. Встановлено оцінки рівномірної збіжності таких послідовностей до деякої граничної функції, а також зв'язок граничної функції з розв'язком задачі (1). На підставі аналізу властивостей послідовних наближень одержано конструктивні достатні умови існування розв'язків.

Крім того, досліджено питання існування розв'язків квазілінійної крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) + \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad \ell x = \alpha + \varepsilon J(x, \varepsilon), \tag{2}$$

де ε – малий додатній параметр. При цьому також розглядається критичний випадок – коли породжуюча для (2) (яка одержується з (2) при $\varepsilon = 0$) лінійна неоднорідна крайова задача має нетривіальні розв'язки.

Неравенства для производных дифференцируемых функций

В.А.Кофанов

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск

e-mail: abby@email.dp.ua

Пусть G — вещественная ось $\mathbf{R}$ или единичная окружность $\mathbf{T}$, $L^r_{p,s}(G)$, $r \in \mathbf{N}, p, s \geq 1$, – класс функций $x \in L_p(G)$, таких что $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Через $c_{r,k}(G; q, p, s, \alpha)$ обозначим точную константу в неравенстве типа Колмогорова

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq C\|x\|^{\alpha}_{L_p(G)}\|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{L_s(G)}, \quad x \in L^r_{p,s}(G), \tag{1}$$

где $q, p, s \geq 1$; $k, r \in \mathbf{N}, k < r$; $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $\varphi_r(t)$ – r-й 2π- периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$.

Теорема 1. *Пусть $G = \mathbf{T}$, $s = \infty$, $\alpha = (r-k+1/q)/(r+1/p)$. Если экстремальной функцией в (1) при $q = rp/(r-k)$ является сплайн φ_r, то этот сплайн является экстремалью в неравенстве (1) и для всех $q > rp/(r-k)$, т.е.*

$$c_{r,k}(\mathbf{T}; q, p, s, \alpha) = \|\varphi_{r-k}\|_{L_q(\mathbf{T})} \cdot \|\varphi_r\|^{-\alpha}_{L_p(\mathbf{T})},$$

и тогда

$$c_{r,k}(\mathbf{R}; q, p, s, \alpha) \leq \|\varphi_{r-k}\|_{L_q(\mathbf{R})} \cdot \|\varphi_r\|^{-\alpha}_{L_p(\mathbf{R})}.$$

С помощью этой теоремы получены новые неравенства типа Колмогорова как для периодических функций, так и для функций заданных на всей оси. Методом, использованным при доказательстве теоремы 1, получены также точные неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов и сплайнов. Ниже приведена формулировка одного из них. Положим $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(\mathbf{T})}$.

Теорема 2. *Пусть $k, n \in \mathbf{N}$. Для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n*

$$\|T_n^{(k)}\|_q \leq n^{k+1/p-1/q}\frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}\|T_n\|_p, \quad q > p > 0. \tag{2}$$

Неравенство (2) неулучшаемо на пространстве всех тригонометрических полиномов.

Доказательство теоремы 1 получено совместно с В. Миропольским.