УДК 517.97
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21

С. М. Бак

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського,
професор кафедри математики та інформатики,
доктор фізико-математичних наук
sergiy.bak@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1508-2144

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Дана стаття присвячена вивченню дискретних рівнянь типу Клейна-Ґордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Ці рівняння представляють собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи є нескінченновимірними гамільтоновими системами. Розглядаються рівняння типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями непарного степеня. При підстановці анзаца у вигляді стоячої хвилі одержується система алгебраїчних рівнянь для амплітуди стоячої хвилі. Далі розглядається система з більш загальним оператором L лінійної взаємодії осциляторів, який є обмеженим і самоспряженим у гільбертовому просторі дійсних двохсторонніх послідовностей l^2. Розглядається задача про існування періодичних і локалізованих (збігаються до нуля на нескінченності) розв'язків для таких систем. Основними умовами існування цих розв'язків є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та належність частоти стоячої хвилі спектральному проміжку оператора L. Якщо правий кінець спектрального проміжка скінченний, то система має нетривіальні розв'язки. У цій статті показано, що періодичні і локалізовані розв'язки цієї системи можна побудувати як критичні точки відповідних функціоналів J_k та J. Існування періодичних розв'язків встановлено за допомогою теореми про зачеплення. Зокрема, показано, що функціонал J_k задовольняє так звану умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки. Останні і є періодичними розв'язками системи. У випадку локалізованих розв'язків використати теорему про зачеплення не можна, оскільки для функціоналу J не виконується умова Пале-Смейла. Тому у цьому випадку використано метод періодичних апроксимацій, тобто критичні точки функціоналу J будуються за допомогою граничного переходу при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k. В силу відомих властивостей дискретного оператора Лапласа одержано наслідок, в якому встановлено умови існування локалізованих розв'язків для вихідної системи.

Ключові слова: дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона, стоячі хвилі, степеневі нелінійності, критичні точки, теорема про зачеплення, періодичні апроксимації.

1. Вступ. Дискретні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем, зокрема, належать системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона та ін. Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці (див. [1–4]).

Важливими класами розв'язків таких систем є біжучі і стоячі хвилі. Детальні результати про існування біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама можна знайти в монографії О. Панкова [5]. Умови існування різних типів біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона досліджено в працях [6–10]. Зокрема, для одержання основних результатів в статтях [6–9] було використано метод критичних точок, тоді як в [10] — методи теорії біфуркацій. У статті [3] за допомогою чисельного аналізу досліджено існування та неіснування біжучих кінків в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона. В працях [11–13] за допомогою варіаційних технік вивчалося питання існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Шредінгера. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона вивчалися в працях [14] та [15]. В цих статтях досліджено питання стійкості стоячих хвиль в таких рівняннях.

У цій статті за допомогою методу критичних точок і методу періодичних апроксимацій встановлено існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Ґордона зі степеневими нелінійностями.

2. Постановка задачі та основні припущення. У цій статті вивчаються дискретні рівняння типу Клейна–Ґордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n = q_n(t)$ — узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Будемо розглядати систему (1) зі степеневими нелінійностями вигляду

$$f(r) = d_n|r|^{2p}r, \ \ \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{N}.$$

Стоячою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ називається *амплітудою* стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — *частотою*.

Підставляючи стоячу хвилю (2) в систему (1) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2)u_n = d_n|u_n|^{2p}u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n|u_n|^{2p}u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [17]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними проміжками*. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова N-періодичності

(*i*) *існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти a_n, b_n і d_n є N-періодичними, тобто $a_{n+N} = a_n$, $b_{n+N} = b_n$ і $d_{n+N} = d_n$.*

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де k — фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n\to\pm\infty} u_n = 0 \tag{6}$$

відповідно.

3. Варіаційне формулювання задачі. З системою (4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2}, \tag{7}$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком

$$(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нагадаємо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (6).

Іноді ми будемо розглядати простори l^p $(p \geq 1)$ з нормою

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нагадаємо, що через l^∞ позначається простір всіх обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$$

і при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}.$$

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN-періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$(u,v)_k = \sum_{n\in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : \, -\left[\frac{kN}{2}\right] \leq n \leq kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2}\right]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega^2 u, u)_k - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in Q_k} d_n u_n^{2p+2}, \tag{8}$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі l_k^2.

Лема 1. *За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу C^1, а їхні похідні визначаються формулами*

$$\langle J'(u), h\rangle = (Lu - \omega^2 u, h) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} h_n,$$

$$\langle J_k'(u), h\rangle = (L_k u - \omega^2 u, h)_k - \sum_{n\in Q_k} d_n u_n^{2p+1} h_n,$$

де $u, h \in l^2$ та $u, h \in l_k^2$ відповідно.

Крім того, критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (4) відповідно з просторів l^2 та l_k^2.

Доведення. Розглянемо функціонал J. Легко бачити, що $J \in C^1$. Знайдемо його похідну. Нехай $u, h \in l^2$ та $|\lambda| \le 1$. Тоді

$$J(u+\lambda h) = \frac{1}{2}\big(L(u+\lambda h) - \omega^2(u+\lambda h), u+\lambda h\big) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(u_n+\lambda h_n)^{2p+2} = \frac{1}{2}\big((Lu-\omega^2 u) + \lambda(Lh - \omega^2 h), u+\lambda h\big) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(u_n+\lambda h_n)^{2p+2} = \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) + \frac{\lambda}{2}(Lu-\omega^2 u, h) +$$

$$+\frac{\lambda}{2}(Lh - \omega^2 h, u) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh - \omega^2 h, h) - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(u_n+\lambda h_n)^{2p+2} =$$

$$= \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) + \lambda(Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh - \omega^2 h, h) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(u_n+\lambda h_n)^{2p+2}.$$

Оскільки

$$J(u+\lambda h) - J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) + \lambda(Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh - \omega^2 h, h) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(u_n+\lambda h_n)^{2p+2} - \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) + \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} =$$

$$= \lambda(Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh - \omega^2 h, h) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\left((2p+2)u_n^{2p+1}\lambda h_n + \frac{(2p+2)(2p+1)}{2!}u_n^{2p}(\lambda h_n)^2 + \ldots + (\lambda h_n)^{2p+2}\right),$$

то

$$\langle J'(u), h\rangle = \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda h) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\Bigg[(Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda}{2}(Lh - \omega^2 h, h) -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\left((2p+2)u_n^{2p+1}h_n + \frac{(2p+2)(2p+1)}{2!}u_n^{2p}\lambda(h_n)^2 + \ldots + (\lambda)^{2p+1}(h_n)^{2p+2}\right) =$$

$$= (Lu - \omega^2 u, h) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} h_n.$$

Легко бачити, що критичні точки $u \in l^2$ функціоналу J є розв'язками системи (4).

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

Таким чином, система (4) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

4. Попередні леми. Зі спектральної теорії диференціальних операторів (див. [17]) маємо, що $\sigma(L_k) \subset \sigma(L)$ і, отже, $\|L_k\| \leq \|L\|$.

Нехай E^+ — підпростір l^2, утворений додатною частиною спектра оператора $L - \omega^2$ (додатний спектральний підпростір оператора $L - \omega^2$ в l^2), E^- — підпростір l^2, утворений від'ємною частиною спектра (від'ємний спектральний підпростір оператора $L - \omega^2$ в l^2). Аналогічно введемо додатний та від'ємний спектральні підпростори $E_k^+ \subset E_k$ і $E_k^- \subset E_k$ для оператора $L_k - \omega^2$. Легко перевірити, що відповідні підпростори попарно ортогональні, причому $l^2 = E^+ \oplus E^-$ та $l_k^2 = E_k^+ \oplus E_k^-$. Тоді будь-яку функцію $u \in l^2$ ($u \in l_k^2$) можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ ($u^+ \in E_k^+$), $u^- \in E^-$ ($u^- \in E_k^-$). Причому $u^\pm = P^\pm u$ ($u^\pm = P_k^\pm u$), де $P^\pm$ і $P_k^\pm$ — відповідні ортогональні проектори.

Позначимо через $\delta := \min\{|a - \omega^2|, |b - \omega^2|\}$ — відстань від ω^2 до спектра $\sigma(L)$, де (a, b) — довільний фіксований спектральний проміжок оператора L. Тоді

$$\pm(Lu - \omega^2 u, u) \geq \delta\|u\|^2, \ u \in E^\pm, \tag{9}$$

$$\pm(L_k u - \omega^2 u, u)_k \geq \delta\|u\|_k^2, \ u \in E_k^\pm. \tag{10}$$

Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 2. *Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0$ єдина критична точка функціоналів J та J_k відповідно у просторах l^2 та l_k^2.*

Доведення. Нехай $u \in l^2$ критична точка функціоналу J. Тоді

$$0 = \langle J'(u), u\rangle = (Lu - \omega u, u) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} \leq (Lu - \omega^2 u, u).$$

Оскільки $b = +\infty$, то $E^+ = \{0\}$ і згідно (9)

$$0 \leq (Lu - \omega^2 u, u) \leq -\delta\|u\|^2.$$

А це означає, що $u = 0$.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

Далі знадобиться така лема.

Лема 3. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^{\frac{2p+2}{2p+1}} \leq \gamma J(u),$$

$$\|u\|_k^{\frac{2p+2}{2p+1}} \leq \gamma J_k(u),$$

де $\gamma = ((4\delta^{-1} l)^{\frac{2p+2}{2p+1}} (pl_0)^{-1}$, $l = \sup\{d_n\}$ *і* $l_0 = \inf\{d_n\}$.

Доведення. Нехай $u \in l^2$ критична точка функціоналу J, а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді

$$b = J(u) - \frac{1}{2}\langle J'(u), u\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p+2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} \geq \frac{p}{2p+2} l_0 \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+2},$$

звідки

$$\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+2} \leq \frac{(2p+2)b}{pl_0}.$$

Оскільки $u \in l^2$ можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ і $u^- \in E^-$, то

$$0 = \langle J'(u), u^+\rangle = (Lu - \omega^2 u, u^+) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+ =$$

$$= (Lu^+ - \omega^2 u^+, u^+) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+.$$

Тоді, використовуючи (9) і нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\delta\|u^+\|^2 \leq (Lu^+ - \omega^2 u^+, u^+) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+ \leq$$

$$\leq l\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^{4p+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u_n^+)^2\right)^{\frac{1}{2}} = l\|u\|_{l^{4p+2}}^{2p+1}\|u^+\| \leq l\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1}\|u^+\|.$$

Звідси

$$\|u^+\|^2 \leq \delta^{-1} l\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1}\|u^+\| \leq \delta^{-1} l\left(\frac{(2p+2)b}{pl_0}\right)^{\frac{2p+1}{2p+2}}\|u^+\| =$$

$$= 2^{\frac{2p+1}{p+1}}\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}}\|u^+\|.$$

Аналогічно

$$\|u^-\|^2 \leq 2^{\frac{2p+1}{p+1}}\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}}\|u^-\|.$$

І остаточно, оскільки

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$$

і

$$\|u^+\| + \|u^-\| \leq 2^{\frac{1}{2}}\|u\|,$$

то

$$\|u\| = \left(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2^{\frac{2p+1}{p+1}}\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}}(\|u^+\| + \|u^-\|)\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2\delta^{-\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} (pl_0)^{-\frac{2p+1}{4p+4}} b^{\frac{2p+1}{4p+4}}\|u\|^{\frac{1}{2}},$$

звідки

$$\|u\| \leq 4\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}},$$

що й дає необхідне.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

Лема 4. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^2 \geq \varepsilon_0,\ J(u) \geq \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \geq \varepsilon_0,\ J_k(u) \geq \varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2p}}\delta^{\frac{1}{p}}l^{-\frac{1}{p}}$, $\varepsilon = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}}\delta^{\frac{p+1}{p}}l^{-\frac{p+1}{p}}pl_0$.

Доведення. Нехай $u = u^+ + u^- \in E$ ($u^\pm \in E^\pm$) критична точка функціоналу J, а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді, як і в доведенні попередньої леми, маємо

$$\delta\|u^+\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1}u_n^+ \leq l\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^{2p+1}u_n^+.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності нерівність Гельдера:

$$|(x,y)| \leq \|x\|_{l^p}\|y\|_{l^q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

при $p = \frac{2p+2}{2p+1}$ і $q = 2p+2$, одержуємо

$$\delta\|u^+\|^2 \leq l\|u^{2p+1}\|_{l^{\frac{2p+2}{2p+1}}}\|u^+\|_{l^{2p+2}} = l\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n^{2p+1}|^{\frac{2p+2}{2p+1}}\right)^{\frac{2p+1}{2p+2}}\|u^+\|_{l^{2p+2}} =$$

$$= l\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1}\|u^+\|_{l^{2p+2}} \leq \|u\|^{2p+1}\|u^+\|.$$

Аналогічно

$$\delta\|u^-\|^2 \leq l\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1}\|u^+\|_{l^{2p+2}} \leq \|u\|^{2p+1}\|u^+\|.$$

І остаточно, оскільки $\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$ і $\|u^+\| + \|u^-\| \leq 2^{\frac{1}{2}}\|u\|$, то

$$\delta\|u\|^2 = \delta\left(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right) \leq l\|u\|^{2p+1}(\|u^+\| + \|u^-\|) \leq 2^{\frac{1}{2}}l\|u\|^{2p+2},$$

звідки

$$\|u\|^2 \geq 2^{-\frac{1}{2p}}\delta^{\frac{1}{p}}l^{-\frac{1}{p}}.$$

Для оцінки критичного значення використаємо останню нерівність і верхню оцінку з попередньої леми

$$\|u\| \leq 4\delta^{-1}l(pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}}b^{\frac{2p+1}{2p+2}}.$$

Таким чином, маємо

$$b \geq \left(4^{-1}\delta l^{-1}(pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}}\|u\|\right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} \geq \left(4^{-1}\delta l^{-1}(pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}}2^{-\frac{1}{4p}}\delta^{\frac{1}{2p}}l^{-\frac{1}{2p}}\right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} =$$

$$= \left(2^{-\frac{8p+1}{4p}}\delta^{\frac{2p+1}{2p}}l^{-\frac{2p+1}{2p}}(pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}}\right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}}\delta^{\frac{p+1}{p}}l^{-\frac{p+1}{p}}pl_0.$$

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

5. Теорема про зачеплення. Далі нам знадобиться одна із популярних мінімаксних теорем — теорема про зачеплення.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Кажуть, що I задовольняє *умову Пале–Смейла*, якщо виконується така умова:

(PS) *будь-яка послідовність Пале-Смейла* $\{u_n\} \subset H$ *містить збіжну підпослідовність.*

Нехай $H = Y \oplus Z$. І нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \le \rho, \lambda \ge 0\}$$

і

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \ge 0, \text{ або } \|u\| \le \rho, \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа M. Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо C^1-функціонал I на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I(u).$$

В такому випадку кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення.*

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення (див. [5, 16, 18]).

Теорема про зачеплення. *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1, який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує критична точка $u \in H$ функціоналу I така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I(\gamma(u)) \ge \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$. *При цьому*

$$I(u) \le \sup_{u \in M} I(u).$$

6. Існування періодичних розв'язків. За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних kN-періодичних розв'язків системи (4). Для цього, згідно леми 1, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k.

Основним результатом цього параграфу є теорема:

Теорема 1. *Нехай виконується умова (i), $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ та $b \ne +\infty$. Тоді для будь-якого $k \ge 1$ система (4) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок $u \in l_k^2$. Більше того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le C_0,$$

$$\varepsilon \le J_k(u) \le C.$$

Перевіримо виконання умов теореми про зачеплення для функціоналу J_k. Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 5. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Оскільки l_k^2 є скінченновимірним простором, то для доведення леми достатньо показати, що будь-яка послідовність Пале–Смейла в просторі l_k^2 є обмеженою.

Справді, нехай $\{u^{(j)}\}$ послідовність Пале–Смейла функціоналу J_k на деякому рівні b, тобто $J_k(u^{(j)}) \to b$ і $J_k'(u^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$. Зауважимо, що замінивши L на $L + \omega_0^2$ та ω^2 на $\omega^2 + \omega_0^2$ з деяким ω_0^2 можна вважати, що $\|L\| \gg 1$, тобто

$$(Lu, u)_k \geq \|u\|_k^2,$$

де $u \in l_k^2$ та $\omega^2 > 0$. Тоді, вибраши $\beta \in \left(\frac{1}{2p+2}, \frac{1}{2}\right)$, для достатньо великих j маємо

$$b + 1 + \beta\|u^{(j)}\|_k \geq J_k(u^{(j)}) - \beta\langle J_k'(u^{(j)}), u^{(j)}\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(Lu^{(j)} - \omega^2 u^{(j)}, u^{(j)}\right)_k + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right)\sum_{n\in Q_k} d_n (u_n^{(j)})^{2p+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(Lu^{(j)}, u^{(j)}\right)_k - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\omega^2\|u^{(j)}\|_k^2 +$$

$$+ \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right)\sum_{n\in Q_k} d_n (u_n^{(j)})^{2p+2} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\omega^2\|u^{(j)}\|_k^2 + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) l_0 \|u^{(j)}\|_k^{2p+2}.$$

Оскільки $r^2 \leq K(\varepsilon) + \varepsilon r^{2p+2}$, де $K(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, та $\omega^2 > 0$, то

$$b + 1 + \beta\|u^{(j)}\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\omega^2 K(\varepsilon) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\omega^2 \varepsilon \|u^{(j)}\|_k^{2p+2} + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) l_0 \|u^{(j)}\|_k^{2p+2}.$$

Вибираючи достатньо мале $\varepsilon > 0$, одержуємо

$$b + 1 + \beta\|u^{(j)}\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 + C\|u^{(j)}\|_k^{2p+2} - C_0$$

з деякими додатними сталими C і C_0. Остання нерівність і доводить обмеженість послідовності $\{u^{(j)}\}$. Лему доведено.

Покладемо $Y = E_k^-$ та $Z = E_k^+$. Нагадаємо, що функціонал J_k має нетривіальні критичні точки у випадку, коли $b \neq +\infty$, а отже, $Z \neq \{0\}$.

Введемо тепер так званий *оператор обрізки* (див. [12]). Покладемо для $u_n \in l^2$

$$R_k u_n = \begin{cases} u_n, & n \in Q_k, \\ 0, & n \notin Q_k. \end{cases}$$

І нехай $\{S_k u_n\}$ єдина послідовність з l_k^2 така, що $S_k u_n = u_n$, якщо $n \in Q_k$ (оператор періодизації). Тоді $\|u\|_{l_k^p} = \|R_k u\|_{l^p}$. Очевидно, що

$$\|R_k u\|_{l^p} \le \|u\|_{l^p},\ \|S_k u\|_{l_k^p} \le \|u\|_{l^p}$$

для всіх $u \in l^p$. Більше того, для всіх $u \in l^p$, $1 \le p < \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \|R_k u\|_{l^p} = \lim_{k\to\infty} \|S_k u\|_{l_k^p} = \|u\|_{l^p},$$

$$\lim_{k\to\infty} \|L R_k u\|_{l^p} = \lim_{k\to\infty} \|R_k L u\|_{l_k^p} = \|Lu\|_{l^p},$$

$$\lim_{k\to\infty} \|L S_k u\|_{l_k^p} = \lim_{k\to\infty} \|S_k L u\|_{l_k^p} = \|Lu\|_{l^p}.$$

Візьмемо довільний одиничний вектор $z \in E^+$ і покладемо

$$z^{(k)} = \frac{P_k^+ S_k z}{\|P_k^+ S_k z\|_k} \in Z.$$

Зафіксуємо дві сталі $\rho > r > 0$ і позначимо через

$$N = \{u \in Z:\ \|u\|_k = r\},$$

$$M = \{u = y + \lambda z^{(k)}:\ y \in Y,\ \|u\|_k \le \rho,\ \lambda \ge 0\},$$

$$M_0 = \{u = y + \lambda z^{(k)}:\ y \in Y,\ \|u\|_k = \rho,\ \text{і}\ \lambda \ge 0,\ \text{або}\ \|u\|_k \le \rho,\ \text{і}\ \lambda = 0\}.$$

Наступна лема показує, що функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.

Лема 6. *При $r^{2p} \le l^{-1}\delta p$ маємо, що*

$$J_k(u) \ge \frac{\delta}{2p+2} r^2,\ u \in N,$$

і

$$J_k(u) \le 0,\ u \in M_0$$

для достатньо великих ρ. Більше того, існує стала $C > 0$, яка не залежить від k і така, що

$$J_k(u) \le C,\ u \in M. \tag{11}$$

Доведення. Якщо $u \in Z$, то

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega^2 u, u)_k - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in Q_k} d_n u_n^{2p+2} \ge \frac{\delta}{2}\|u\|_k^2 - \frac{l}{2p+2}\|u\|_k^{2p+2}.$$

Тоді якщо $u \in N$, то

$$J_k(u) \ge \frac{\delta}{2} r^2 - \frac{l}{2p+2} r^{2p+2} \ge \frac{\delta}{2p+2} r^2$$

при $r^{2p} \le l^{-1}\delta p$.

Нехай тепер $u = y + \lambda z^{(k)} \in M$. Тоді, оскільки Y та Z взаємно ортогональні спектральні підпростори оператора $L_k - \omega^2$, то

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) = \frac{1}{2}(L_k y - \omega^2 y, y)_k + \frac{\lambda^2}{2}(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)})_k -$$

$$-\frac{1}{2p+2}\sum_{n\in Q_k} d_n \left(y_n + \lambda z_n^{(k)}\right)^{2p+2} \leq$$

$$\leq -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k - \frac{1}{2p+2} l_0 \|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}.$$

Розглянемо підпростір $X = Y \oplus \mathbb{R} z^{(k)} \subset l_k^2$, наділений нормою

$$\|u\|_{l_k^{2p+2}} = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^{2p+2}\right)^{\frac{1}{2p+2}}.$$

Відображення $y + \lambda z^{(k)} \mapsto \lambda z^{(k)}$ є обмеженим проектором на $\mathbb{R} z^{(k)}$. Оскільки його норма не менше 1, то

$$\|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2} \geq \|\lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}.$$

Таким чином,

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) \leq -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k - \frac{\lambda^{2p+2}}{2p+2} l_0 \|z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}. \quad (12)$$

Крім того, оскільки

$$\left(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k \leq \|L_k - \omega^2\| = a_0$$

та

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2} = \|P^+ z\|_{l^{2p+2}}^{2p+2},$$

то з нерівності (12) маємо

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) \leq -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^{2p+2} \leq \frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^{2p+2}$$

з деяким $a_1 > 0$, яке не залежить від k. Отже, для всіх достатньо великих ρ

$$J_k(u) \leq 0, \; u \in M_0.$$

Більше того,

$$\sup_{u\in M} J_k(u) \leq C = \max_{\lambda>0}\left(\frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^{2p+2}\right)$$

з деяким $C > 0$, яке не залежить від k. Лему доведено.

Доведення теореми 1. З лем 5 та 6 випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення, а отже, він має нетривіальну критичну точку $u \in l_k^2$. Більше того, за цією ж теоремою відповідне критичне значення задовольняє нерівність

$$b = J_k(u) \le \sup_{u \in M} J_k(u).$$

Тепер оцінки для критичної точки і відповідного критичного значення випливають з лем 3, 4 та 6. Теорему доведено.

7. Існування локалізованих розв'язків. Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (4). За лемою 1 ці розв'язки є критичними точками функціоналу J. Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k.

Основним результатом цього параграфу є така теорема:

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (i), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ *та* $b \ne +\infty$. *Тоді система (4) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$.

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \{u_n^{(k)}\} \in l_k^2$ нетривіальний kN-періодичний розв'язок системи (4), який існує за теоремою 1.

Зазначимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $n_k \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\left|u_{n_k}^{(k)}\right| \ge \delta_0. \tag{13}$$

Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \to 0$ в l^∞, а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \to 0$ в l^∞. За теоремою 1, $\|v^{(k)}\| = \|u^{(k)}\|_k$ обмежена. Далі оскільки

$$\|v\|_{l^p}^p \le \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2, \ p > 2,$$

то $v^{(k)} \to 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\|u^{(k)}\|_{l_k^p} \to 0$ для всіх $p > 2$. Тоді, як на початку доведення леми 3, для відповідного критичного значення $b_k = J_k(u^{(k)})$ маємо що суперечить лемі 4.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\{u_{n+N}^{(k)}\}$ є також розв'язком системи (4). Тому можна вважати, що $0 \le n_k \le N-1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$.

В силу обмеженості $\{u^{(k)}\}$, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо $u_n^{(k)} \to u_n$ при $k \to \infty$ (для всіх $n \in \mathbb{Z}$). Крім того, за нерівністю (13),

$$|u_{n_0}| \ge \delta_0,$$

а отже, $u = \{u_n\}$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що $u = \{u_n\}$ є розв'язком системи (4).

Залишається показати, що $u = \{u_n\} \in l^2$. Справді, оскільки для будь-якого фіксованого $\tilde{n}, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k,

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n^{(k)}|^2 \le \|u^{(k)}\|_k^2 \le C^2,$$

то переходячи до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n|^2 \leq C^2.$$

В силу довільності $\tilde{n}$ маємо, що $u \in l^2$. Теорему доведено.

Зауважимо, що якщо $b = +\infty$, то за лемою 2 система (4) має тільки тривіальний розв'язок.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $[m^2, 4 + m^2]$, то з теореми 2 одержуємо наслідок:

Наслідок 1. *Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ та $\omega^2 < m^2$. Тоді система (3) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Список використаної літератури

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D.* 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Repts.* 1998. Vol. 306. P. 1–108.
3. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
4. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D.* 2006. Vol. 216. P. 327–345.
5. Pankov A. Traveling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices. London: Imperial College Press, 2005. 196 p.
6. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *J. Math. Sci.* 2016. Vol. 217, № 2. P. 187–197.
7. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves for a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2d-lattice. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, № 4. P. 509–520.
8. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Commun. Math. Analysis.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
9. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4. P. 916–920.
10. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.
11. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Commun. Math. Analysis.* 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
12. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity.* 2006. Vol. 19. P. 27–40.
13. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equations, II: generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.
14. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389–2401.
15. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205–211.
16. Rabinowitz P. H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1986. 100 p.
17. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I.: American Math. Soc. 2000. 251 p.
18. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser, 1996. 162 p.

Bak S. M. Standing waves in discrete Klein-Gordon type equations with power nonlinearities.

This article is devoted to the study of discrete Klein-Gordon type equations that describe the dynamics of an infinite chain of linearly coupled nonlinear oscillators. These equations represent a countable system of ordinary differential equations. Such systems are infinite-dimensional Hamiltonian systems. Equations of the Klein-Gordon type with power nonlinearities of odd degree are considered. When substituting the ansatz in the form of a standing wave, a system of algebraic equations for the amplitude of the standing wave is obtained. Further, we consider a system with a more general operator L of linear interaction of oscillators, which is bounded and self-adjoint in the Hilbert space of real two-sided sequences l^2. The problem of the existence of periodic and localized (converging to zero at infinity) solutions for such systems is considered. The main conditions for the existence of these solutions are the spatial periodicity of the coefficients of the linear interaction operator of the oscillators and the belonging of the standing wave frequency to the spectral interval of the operator L. If the right end of the spectral interval is finite, then the system has nontrivial solutions. This article shows that periodic and localized solutions of this system can be constructed as critical points of the corresponding functionals J_k and J. The existence of periodic solutions was established using the linking theorem. In particular, it is shown that the functional J_k satisfies the so-called Palais-Smale condition and the linking geometry, and therefore has nontrivial critical points, which are the periodic solutions of the system. In the case of localized solutions, the linking theorem cannot be used, since the Palais-Smale condition does not hold for the functional J. Therefore, in this case, the method of periodic approximations is used, that is, the critical points of the functional J are constructed using the passage to the limit as $k \to \infty$ at the critical points of the functional J_k. By virtue of the well-known properties of the discrete Laplace operator, a corollary is obtained in which conditions for the existence of localized solutions for the original system are established.

Keywords: discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, power nonlinearities, critical points, linking theorem, periodic approximations.

References

1. Aubry, S. (1997). Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D., 103*, 201–250.
2. Braun, O. M., & Kivshar, Y. S. (1998). Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Repts., 306*, 1–108.
3. Iooss, G., & Pelinovsky, D. (2006). Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D, 216*, 327–345.
4. Braun, O. M., & Kivshar, Y. S. (2004). The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer.
5. Pankov, A. (2005). Traveling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices. London: Imperial College Press.
6. Bak, S.M. (2016). Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *J. Math. Sci., 217*(2), 187–197.
7. Bak, S. M. (2017). Existence of solitary traveling waves for a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2d-lattice. *Ukr. Math. J., 69*(4), 509–520.
8. Bak, S. M. (2007). Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Commun. Math. Analysis., 3*(1), 19–26.
9. Bak, S. N., & Pankov, A. A. (2011). Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci., 174*(4), 916–920.
10. Iooss, G., & Kirschgässner, K. (2000). Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys., 211*, 439–464.
11. Bak, S., & Kovtonyuk, G. (2019). Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Commun. Math. Analysis., 22*(2), 18–34.
12. Pankov, A. (2006). Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity, 19*, 27–40.

13. Pankov, A. (2007). Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equations, II: generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Sys., 19*(2), 419–430.
14. Ghimenti, M., Le Coz, S., & Squassina, M. (2013). On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys., 33*(6), 2389–2401.
15. Morgante, A. M., Johansson, M., Kopidakis, G., & Aubry, S. (2001). Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers, 205–211.
16. Rabinowitz, P. H. (1986). Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence: Amer. Math. Soc.
17. Teschl, G. (2000). Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc.
18. Willem, M. (1996). Minimax theorems. Boston: Birkhäuser.

Одержано 16.09.2021