УДК 512.44
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).91-99

А. М. Тегза

ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5310-4311

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ З ЗАДАНИМИ ТОЧНІСТЮ І НАДІЙНІСТЮ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю.В.Козаченко. Розглянуто гауссовий стаціонарний центрований випадковий процес з обмеженим спектром з заданою коваріаційною функцією. Використовуючи ентропійні характеристики та оцінку субгауссового стандарту, для моделі одержано розбиття спектрального проміжку, при якому модель наближатиме процес з заданими точністю і надійністю. У середовищі Python було змодельовано процес для часткового випадку.

Ключові слова: гауссів стаціонарний випадковий процес, модель процесу, ентропійні характеристики, точність, надійність моделі.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі, а також дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день активно розроблюються загальні методи чисельного моделювання випадкових процесів, а також швидко зростає область застосування стохастичних моделей, зокрема в радіотехніці, електроніці, у фінансовій математиці і т.д.

Оскільки більшість фізичних явищ залежить від багатьох факторів, то при їх моделюванні намагаються відтворити процеси, що є сумою великого числа випадкових факторів, тобто, згідно з центральною граничною теоремою, гауссові або близькі до них процеси. Тому найбільш поширеними і найбільш розробленими є методи моделювання гауссових випадкових процесів і полів. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів та полів розроблено Г. О. Михайловим, Ю. В. Козаченком та їх учнями [5], [1, 3, 4] . Дана робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко [2]. У роботі [6] досліджувалась точність і надійність моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром. У даній роботі використовуючи точніші оцінки, побудовано модель поцесу з обмеженим спректром з заданими точністю і надійністю, для часткового випадку комп'ютерно змодельовано процес.

2. Основний результат. Розглянемо гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $X(t)$ з обмеженим спектром, тобто коваріаційна функція якого має вигляд:

$$r(\tau) = EX(t+\tau)X(t) = \int_0^\Lambda \cos\lambda t dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Тоді випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int_0^\Lambda \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\Lambda \sin\lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що $E(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$, $i = 1, 2$.

За модель процесу візьмемо випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M-1} [\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t], \tag{1}$$

де η_{l1}, η_{m2}, ζ_k — незалежні при всіх l, m та k випадкові величини, $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$ – таке розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_M = \Lambda$, η_{k1}, η_{k2} – гауссові випадкові величини, такі що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, та якщо $b_k^2 > 0$, то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, то $\eta_{k1} = 0, \eta_{k2} = 0, \zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Означення 1 (див. [1])**.** *Випадковий процес $X_\Lambda(t)$ наближує гауссів процес $X(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0,T])$, якщо існує таке розбиття Λ, що справедлива нерівність*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T} |X(t) - X_\Lambda(t)| > \delta\right\} \le \beta.$$

Означення 2 (див. [1])**.** *Випадкову величину ξ називатимемо субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \ge 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність*

$$E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас всіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$.
Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in \mathfrak{T}\}$ називається субгауссовим процесом, якщо для всіх $t \in \mathfrak{T}$, $X(t)$ – субгауссова випадкова величина та $\sup\limits_{t\in\mathfrak{T}} \tau(X(t)) < \infty$.

Нехай $\eta_M(t) = X(t) - X_M(t)$. Тоді

$$\eta_M(t) = \sum_{k=0}^{M-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right). \tag{2}$$

Нехай $\tau(\eta_M(t))$ – субгауссів стандарт процесу $\eta_M(t)$.

З досліджень статті [6] маємо, що для субгауссового процесу $\eta_M(t)$ має місце така нерівність

$$\tau\left(\eta_M(t)\right) \le \left[\sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m\ge 1} \frac{8}{b_k^{2/m}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^m dF(u)\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

де $b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$.

Використовуючи твердження із [1] про ентропійні характеристики, маємо, що при $\delta > 8I(\varepsilon_0)$ для субгауссового процесу $\eta_M(t)$ виконується нерівність [6]

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T} |\eta_M(t)| > \delta\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta - \sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}, \quad (4)$$

де

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{H(\varepsilon)}d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)}d\varepsilon < \infty,$$

$H(\varepsilon)$ – метрична ентропія компактної множини $[0, T]$, $\varepsilon_0 = \sup\limits_{0\le t\le T} \tau(\eta_M(t))$, $\sigma(h) = \sup\limits_{|t-s|<h} \tau(\eta_M(t) - \eta_M(s))$.

Тобто для дослідження збіжності моделі до свого випадкового процесу, потрібно оцінити ε_0 і $\sigma(h)$.

Використовуючи умову (3), матимемо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 = \sup_{0\le t\le T} \tau(\eta_M(t)) &\le \sup_{0\le t\le T}\left(\sum_{k=0}^{M-1} 8b_k^2 \frac{t^2(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^2}{4}\right)^{1/2} = \\ &= \sup_{0\le t\le T}\left(\sum_{k=0}^{M-1} 2b_k^2 \frac{t^2\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} = \frac{T\Lambda}{M}\sqrt{2F(\Lambda)}.\end{aligned} \quad (5)$$

Для довільних $t, s \in [0, T]$ розглянемо різницю

$$\eta_M(t) - \eta_M(s) = \sum_{k=0}^{M-1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda) \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right]$$

Справедлива наступна лема:

Лема 1. *Для* $m = 0, 1, \cdots$ *справедливі співвідношення*

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m+1} = 0,$$

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m+1}=0,$$

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\leq$$
$$\leq\Delta_{2m}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot|t+s|\cdot\frac{\lambda^2+\zeta_k^2}{2}\right)^2dF(\lambda)\right)^m,$$

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\leq$$
$$\leq\Delta_{2m}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot(|\lambda|+|\zeta_k|)\right)^2dF(\lambda)\right)^m.$$

Доведення. Проведемо оцінки підінтегральних виразів:

$$\begin{aligned}
&|\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s|=\\
&=\left|2\sin\frac{\lambda(s-t)}{2}\sin\frac{\lambda(s+t)}{2}+2\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\sin\zeta_k\frac{(s+t)}{2}\right|\leq\\
&\leq 2\left|\sin\frac{\lambda(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\lambda(s+t)}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right|\leq\\
&\leq 2\left|\frac{\lambda(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\frac{\lambda(s+t)}{2}\right|+2\left|\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\right|\cdot\left|\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right|=\\
&=|t-s|\cdot|t+s|\cdot\frac{\lambda^2+\zeta_k^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s|=\\
&=\left|2\sin\frac{\lambda(t-s)}{2}\cdot\cos\frac{\lambda(t+s)}{2}+2\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\cdot\cos\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right|\leq\\
&\leq 2\left|\sin\frac{\lambda(t-s)}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\lambda(t+s)}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right|<\\
&<|t-s|\cdot(|\lambda|+|\zeta_k|).
\end{aligned}$$

Оскільки для центрованої гауссової випадкової величини ξ маємо $E\xi=0$, $E\xi^2=\sigma^2$,

$E\xi^{2k+1}=0,\ E\xi^{2k}=\Delta_{2k}\sigma^{2k},\ k=1,2,\ldots,\ \Delta_{2k}=\frac{(2k)!}{2^k k!}$, то

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\lambda s-\cos\zeta_k t+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\le$$
$$\le\ \Delta_{2m}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\lambda s-\cos\zeta_k t+\cos\zeta_k s)^2dF(\lambda)\right)^{m}\le$$
$$\le\ \Delta_{2m}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot|t+s|\cdot\frac{\lambda^2+\zeta_k^2}{2}\right)^2dF(\lambda)\right)^{m}.$$

Аналогічно для синусів.

$$E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\lambda s-\sin\zeta_k t+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\le$$
$$\le\ \Delta_{2m}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot(|\lambda|+|\zeta_k|)\right)^2dF(\lambda)\right)^{m}.$$

Для процесу $\eta_M(t)$ на $[0,T]$ проведемо оцінку величини $\sigma(h)=\sup\limits_{|t-s|\le h}\tau(\eta_M(t)-$ $-\eta_M(s))$.

Розглянемо інтеграли:

$$\omega_{k1}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda).$$

Як і при оцінці $\tau(\eta_M(t))$ отримаємо такі нерівності

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\le 2\sum_{k=0}^{M-1}\left(\tau^2(\omega_{k1})+\tau^2(\omega_{k2})\right)\le 2\sum_{k=0}^{M-1}\left(\Theta^2(\omega_{k1})+\Theta^2(\omega_{k2})\right),$$

де $\Theta(\omega_{ki})=\sup\limits_{m\ge1}\left(\frac{2^m m!}{(2m)!}E\omega_{ki}^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}}$, $i=1,2$.

Отже, згідно леми 1 матимемо:

$$
\begin{aligned}
&\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\\
\leq\ & 2\sum_{k=0}^{M-1}\sup_{m\geq 1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot(t+s)\cdot\frac{\lambda^2+u^2)}{2}\right)^2 dF(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}+\\
+\ & 2\sum_{k=0}^{M-1}\sup_{m\geq 1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}|t-s|^2\cdot(|\lambda|+|u|)^2 dF(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}\\
\leq\ & 2\sum_{k=0}^{M-1}\sup_{m\geq 1}\left[b_k^{2m}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(|t-s|\cdot(t+s)\cdot\frac{\lambda^2+u^2)}{2}\right)^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}+\\
+\ & 2\sum_{k=0}^{M-1}\sup_{m\geq 1}\left[b_k^{2m}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}|t-s|^2\cdot(|\lambda|+|u|)^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}\\
\leq\ & 2|t-s|^2\sum_{k=0}^{M-1}b_k^2(t+s)^2\lambda_{k+1}^4+2|t-s|^2\sum_{k=0}^{M-1}4b_k^2\lambda_{k+1}^2=\\
=\ & 2|t-s|^2\sum_{k=0}^{M-1}b_k^2\lambda_{k+1}^2\left((t+s)^2\lambda_{k+1}^2+4\right).
\end{aligned}
$$

Якщо врахувати, що $\lambda_{k+1}\leq\Lambda$ і $\sum\limits_{k=0}^{M-1}b_k^2=F(\Lambda)$, то отримаємо, що

$$\tau(\eta_M(t)-\eta_M(s))\leq|t-s|\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(T^2\Lambda^2+1)}.$$

Отже,

$$\sigma(h)\leq h\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(T^2\Lambda^2+1)}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай в моделі $X_M(t)$ розбиття Λ таке, що при $\delta>8\tilde{I}(\varepsilon_0)$ виконується співвідношення:*

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}\leq\beta, \tag{7}$$

де $\varepsilon_0=\sup\limits_{0\leq t\leq T}\tau(\eta_M(t))=\sigma_0$,

$$\tilde{I}(\varepsilon_0)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(\frac{T\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon}+1\right)}d\varepsilon<\infty. \tag{8}$$

Тоді існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого модель $X_M(t)$ наближатиметься з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $C([0,T])$.

Доведення. Дана теорема випливає з (4) та тверджень з [1]. Дійсно, з попередніх оцінок для $\sigma(h)$ маємо, що

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h}{\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}},$$

тоді

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln\left(\frac{T\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon} + 1\right)} d\varepsilon,$$

яке можна зробити як завгодно малим при певному підборі Λ і M. Тобто буде існувати таке розбиття Λ, для якого виконуватиметься згідно означення 1 умова

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta - \sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)})^2\right\} \le \beta.$$

Розглянемо реалізацію даної теореми на прикладах різних спектральних функцій. Для цього спершу оцінимо інтеграл (8) в теоремі 1.

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln\left(\frac{T\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon} + 1\right)} d\varepsilon <$$
$$< \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{T\Lambda\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon}} d\varepsilon = \sqrt{T\Lambda\varepsilon_0\sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}} =$$
$$= 2\Lambda T\sqrt{\frac{F(\Lambda)}{M}} \cdot \sqrt[4]{1+T^2\Lambda^2}.$$

Підставимо даний результат в нерівність (7), отримаємо

$$M^2\left(\delta - 4\sqrt{\delta\Lambda T} \cdot \sqrt[4]{\frac{F(\Lambda)}{M}} \cdot \sqrt[8]{1+T^2\Lambda^2}\right)^2 \ge 4F(\Lambda)\Lambda^2T^2\ln\frac{2}{\beta}.$$

Підставляючи різні спектральні функції, точності і надійності, можемо одержати залежність числа M від довжини спектру Λ. Результати подані у зведеній таблиці 1.

Отже, наприклад, якщо для спектральної функції $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$ проміжок $[0,\ 100]$ розбити на $M = 561$ частин, тоді модель (1) наближатиме випадковий процес $X(t)$ з точністю 0,001 та надійністю 0,99.

Комп'ютерно змоделюємо процес (1) для даного часткового випадку, використовуючи середовище Python. Для цього потрібно змоделювати компоненти моделі (1), тобто гауссові випадкові величини η_{k1}, η_{k2}, для яких $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$ та випадкові величини ζ_k, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Таблиця 1.

Залежність числа M від точності і надійності моделі.

			$F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$	$F(\Lambda) = \ln \frac{2e^{\Lambda}}{1+e^{\Lambda}}$
δ	β	Λ	M	M
		30	56	51
0.01	0.1	50	66	59
		100	83	75
		30	82	73
0.01	0.01	50	97	87
		100	122	109
		30	377	332
0.001	0.01	50	446	395
		100	561	497

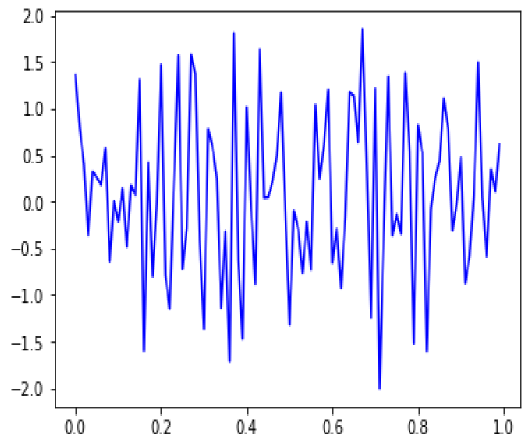

Рис. 1. Модель випадкового процесу, при $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$.

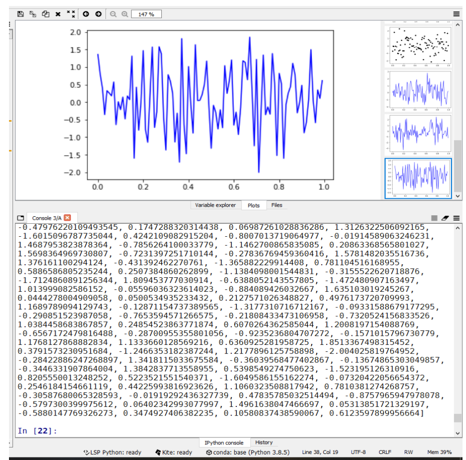

Рис. 2. Скріншот результату.

Для моделювання випадкових величин ζ_k використано метод Смірнова, а для моделювання нормально розподілених випадкових величин, використано готові функції бібліотеки numpy.random; часову змінну t взято з проміжку $[0,\ 1]$. Одержимо графічне представлення процесу на рис. 1.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі побудовано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спректром у рівномірній метриці з заданими точністю і надійністю. Для двох часткових випадків спектральних функцій, деяких значень точності і надійності одержано таблицю значень числа M в залежності від величини спектрального проміжку. Проаналізувавши її, видно, що із покращенням точності і надійності, зростає кількість доданків у моделі (1). Для точності 0,001, надійності 0,99 і спектральної функції $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$, одержано графічне представлення процесу (див. рис. 1).

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI.*, 2000.

2. Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича I. *Теория вероятн. и матем.статист.*, 1984, Вып. 30, С. 92-107.
3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Моделювання випадкових процесiв. *К.: Київський унiверситет*, 1999. 223 с.
4. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Точнiсть моделювання випадкових прцесiв в нормах просторiв Орлича I. *Теор. ймовiрн. та матем.стат.*, 1988. № 58, С. 45-60.
5. Михайлов Г. А. Приближенные модели случайных процессов и полей. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 1983. Т. 23, № 3, С. 558-566.
6. Тегза А. М. Про точнiсть та надiйнiсть деяких моделей гауссових процесiв з обмеженим спектром. *Наук. вiсник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика i iнформатика»*, 2001. Вип. 6, С. 125-131.

Tegza A. M. Simulation of a Gaussian stationary random process with a limited spectrum with a given accuracy and reliability in a uniform metric.

The work is devoted to the further development of the theory of modeling of Gaussian stationary random processes by the method proposed and developed by Yu.V. Kozachenko. A Gaussian stationary centered random process with a limited spectrum with a given covariance function is considered. Using the entropy characteristics and the estimation of the sub-Gaussian standard, a partition of the spectral interval is obtained for the model, at which the model will approximate the process with the given accuracy and reliability. For the partial case, the process was modeled in the Python environment.

Keywords: Gaussian stationary random process, model of random process, entropy characteristics, accuracy, model reliability.

References

1. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI.*
2. Kozachenko, Yu. V. (1984). Random processes in Orlicz spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat., 30*, 92-107 [In Russian].
3. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1999). Modeling of random processes. *Kyiv: Kyiv University* [In Ukrainian].
4. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1988). Accuracy of modeling of random processes in norms of Orlych spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat., 58*, 45-60 [In Ukrainian].
5. Mihajlov, G. A. (1983). Approximate models of random processes and fields. *Journal of Comp. Math. and Physics, 23*(3), 558-566 [In Russian].
6. Tegza, A. M. (2001). On the accuracy and reliability of some models of Gaussian processes with a limited spectrum. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics, 6*, 125-131 [In Ukrainian].

Одержано 30.10.2021