Староста В.И. Как обучать осмысленному решению расчетных задач // Химия в школе, 2002. - № 10. – С. 53-58.
СТАРОСТА В.И.

Ужгородский национальный университет, Украина

КАК ОБУЧАТЬ ОСМЫСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

Различными правилами, которые существенно облегчают решение некоторых задач в химии и других предметах насыщены пособия для учителей и учеников. Однако, всегда ли субъект, применяющий такие правила, понимает или воспринимает их, как догму? Автору этих строк довольно часто приходится общаться с учительской аудиторией, и при рассмотрении задач на смешивание растворов у большинства из них в арсенале приемов по решению задач есть вышеуказанное правило или «правило креста» (или «квадрат Пирсона»). Но когда возникает вопрос: «На основании чего мы применяем это правило?», или «Как решать задачу, если смешивают не два, а три раствора?», - часто возникает пауза, которая оканчивается ответом уже в единичных случаях.

Подойдем к рассмотрению возникшей проблемы с другой стороны. Расмотрим различные подходы к решению задач. В [1, с. 68] указано на два принципиально разные подходы – алгоритмический и неалгоритмический (евристический). «Первый характеризуется тем, что решающий осуществляет свою деятельность по решению данной задачи в соответствии с известным ему алгоритмом, а второй характеризуется отсутствием у решающего такого алгоритма, и главная составная часть его деятельности состоит в поисках плана, способа или метода решения данной задачи. То, что найденный им способ решения может представлять собой объективно некоторый алгоритм, не меняет психологической сущности его деятельности».

Основные этапы работы в рамках обоих подходов: объяснение учителя $\Rightarrow$ коллективное решение под руководством учителя $\Rightarrow$ самостоятельное или полусамостоятельное решение под руководством учителя $\Rightarrow$ самостоятельное решение задачи. Однако, в первом случае, деятельность учителя направлена на формирование понимания (или запоминания) алгоритма по решению. Что же такое алгоритм? Согласно [2, с. 5]: “алгоритм – конечная последовательность точно сформулированных правил решения некоторых типов задач”; в этом же пособии автором предложены алгоритмы для решения различных типов школьных химических задач.

Какие же этапы проходит при решении задачи в каждом случае учитель (ученик, клас) или должен проходить? Согласно [1, с. 58-68], основные из них такие:

- Первый этап: анализ условия задачи.
- Второй этап: поиск плана решения задачи.
- Третий этап: реализация найденного плана решения и доказательство, что полученный результат удовлетворяет требованиям задачи.
- Четвертый этап (который редко применяется на практике): этап обсуждения (анализа) проведенного решения задачи.

Рассмотрим указаные рассуждения и рекомендации на примере применения правила смешивания. Условие исходной задачи, пример 1: К 5 %-ному (ω_1) раствору вещества А массой m_1 прилили 30 %-ный (ω_2) раствор этого же вещества массой m_2. Определите массу смешиваемых растворов, если в итоге получили раствор А массой 250 г и ω_3(А)=20 %.

Согласно правилу смешивания получаем такую схему решения:

1 шаг		
Раствор 2	ω_2	
Раствор 3		ω_3
Раствор 1	ω_1	

2 шаг		
ω_2		
	ω_3	
ω_1		ω_2-ω_3=b

3 шаг		
ω_2		ω_3-ω_1=a
	ω_3	
ω_1		ω_2-ω_3=b

или конкретно к данным условиям

1 шаг		
Раствор 2	30	
Раствор 3		20
Раствор 1	5	

2 шаг		
30		
	20	
5		10

3 шаг		
30		15
	20	
5		10

4 шаг: система двух уравнений с двумя неизвестными – $\begin{cases} m_1+m_2=m_3 \\ m_1/m_2=b/a \end{cases}$

первое уравнение: общая масса всей системы
второе уравнение: отношение масс растворов,

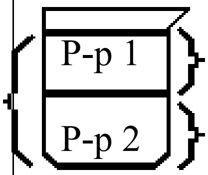
или конкретно к данным условиям: $\begin{cases} m_1+m_2=250 \\ m_1/m_2=10/15 \end{cases}$

А теперь пойдем другим путем – логического обоснования каждого шага. При этом постараемся обосновать этим способом и правило смешивания, а также выработать общие подходы для аналогичных и обратных задач по отношению к исходной.

На первом етапе при анализе условия необходимо провести актуализацию понятий, которые фигурируют в содержании задачи и других, необходимых для ее решения: “раствор”, “растворенное вещество”, “растворитель”, “массовая доля”, “смешивание”, “исходный раствор”, “конечный раствор” или в последних двух случаях – соответственно “исходная система”, конечная система” и т.п. В общем виде, согласно [3, с. 266]: «Процесс решения задачи существенно зависит от установления связи между этой задачей и соответствующими элементами накопленного вами ранее запаса знаний». Как правило, на этапе актуализации опорных и вспомогательных понятий у части учеников возникает и гипотеза или план будущего решения. Для наочности и более осознанного характера восприятия задачи желательно максимально провести ее схематизацию – графики, уравнения реакций и другие графические модели задачи, которые вытекают из ее содержания и указывают взаимоотношения между отдельными ее составляющими. В [1, с.58] указано, что на первом этапе решающий стремится изменить формулировку отдельных условий (переформулировка); в большинстве случаев субъект строит “свою” задачу на основе полученной, т.е. проводит формирование субъективной модели полученной задачи.

В данном случае возможно видоизменение исходной задачи и представление ее основного содержания в такой схеме-таблице (табл. 1):

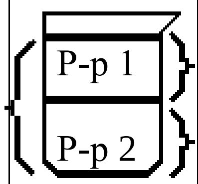
Таблица 1. Схема анализа примера 1

Конечная система (после смешивания)			Схема задачи	Исходная система (до смешивания)			
m_3, г	ω_3(A)	m_3(A),г		№	m, г	ω(A)	m(A), г
250	0,20	…….	 Р-р 1 Р-р 2	1	x	0,05	…..
				2	y	0,30	…...
				Σ	…….	–	……

Таким образом, на основе анализа опорных и вспомогательных понятий задачи составлена опорная схема-таблица исходной задачи. Использование понятия «исходная система» включает в себя самые разнообразные варианты: раствор+раствор, раствор+вода, раствор+вещество, раствор+кристаллогидрат или соответствующие тройные комбинации.

Повторный анализ основного опорного понятия «масовая доля» приводит к етапу решения - дальнейшего заполнения окошек табл. 1 и получаем табл. 2:

Таблица 2. Схема анализа и решения примера 1.

Конечная система (после смешивания)			Схема задачи	Исходная система (до смешивания)			
m_3, г	ω_3(A)	m_3(A),г		№	m, г	ω (A)	m(A), г
250 или x+y	0,20	0,2х250 или 0,05x+ +0,30y	 Р-р 1 Р-р 2	1	x	0,05	0,05x
				2	y	0,30	0,30y
				Σ	x+y	–	0,05x+0,30y

Осталось проделать обобщение полученных результатов в форме возможных уравнений:

$$\begin{cases} 0,05x + 0,30y = 0,2 \times 250 \\ x + y = 250 \end{cases}$$

Подальшее решение не представляется сложным. Данный подход также можно рассматривать как форму алгоритма. Однако, в отличие от правила смешивания, здесь каждый шаг логически обоснован. По сравнению с другими алгоритмическими схемами возможности подхода существенно шире, так как он базируется на постоянном анализе опорных понятий задачи и взаимоотношений между ними, а не на конкретных указаниях по вычислению.

Важен последующий анализ задачи, поскольку согласно [1]: «Обсуждение проделанного решения, его анализ, выявление недостатков решения, поиски лучшего решения, установление и закрепление в памяти учащихся тех приемов, которые были использованы в данном решении, выявление условий возможности применения этих приемов – все это и будет в наибольшей степени способствовать превращению решения задач в могучее обучающее средство».

Обучающее средство можно усилить, если сейчас не решать серию других задач, а комплексно поработать с исходной и создавать на ее основе под руководством учителя, а затем самостоятельно серии обратных и аналогичных задач. Любая из известных величин исходной задачи может стать неизвестной, т.е. возникает задание в проведении ротации известных и неизвестных величин. Проведем такое изменение исходной задачи. Пример 2: К 5 %-ному (ω_1) раствору вещества А массой m_1=100 г прилили 30 %-ный (ω_2) раствор этого же вещества массой m_2. Определите массу второго раствора, если в итоге получили раствор с ω_3=20 %.

Схема задачи согласно условию представлена в таблице 3:

Таблица 3. Схема анализа примера 2.

Конечная система (после смешивания)			Схема задачи	Исходная система (до смешивания)			
m_3,	ω_3(A)	m_3(A),г		№	m, г	ω (A)	m(A), г
…..	0,20	…….	Р-р 1 Р-р 2	1	100	0,05	…..
				2	y	0,30	…..
				Σ	…….	–	….

Возможна и обратная последовательность – *согласно представленной схемы, составить текст задачи*. Желательно использование обоих приемов.

Последующий анализ приводит к заполнению «белых пятен» таблицы (это даем возможность проделать читателю) и конечное уравнение после повторного анализа опорного понятия «массовая доля»:

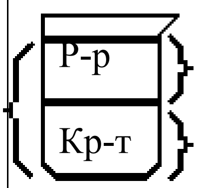
$0,2=\dfrac{0,05\times100+0,30\times y}{100+y}$. Итог решения – легко проверить, поскольку это одна из известных величин исходной задачи. Аналогично можно проделать серию других обратных задач в классе, или несколько в классе, а другие в форме домашнего задания. Вариации последующих заданий могут быть разнообразные, например, составление обратных и аналогичных задач к задачам учебника или задачника, составление задач с лишними или с недостающими данными для их решения, составление задачи по ее схеме и т.п.

Используем представленный прием схематизации на основании анализа задачи при смешивании раствора соли с ее кристаллогидратом.

Пример 3: К 4 %-ному (ω_1) раствору сульфата меди массой m_1 добавили ее кристаллогидрат $CuSO_4{\cdot}5H_2O$ (m_2). Определите массу смешиваемых раствора и кристаллогидрата, если в итоге получили 7 %-ный раствор $CuSO_4$ масой 100 г.

Анализ условия, опорных понятий и определение массовой доли сульфата меди в кристаллогидрате ($\omega(CuSO_4)$=160/250=0,64) дают возможность прийти к следующей схеме-табл. 4:

Таблица 4. Схема анализа и решения примера 3.

<table>
<tr><td colspan="3">Конечная система (после смешивания)</td><td rowspan="2">Схема задачи</td><td colspan="4">Исходная система (до смешивания)</td></tr>
<tr><td>m_Σ, г</td><td>ω ($CuSO_4$)</td><td>m_Σ ($CuSO_4$), г</td><td>№</td><td>m, г</td><td>ω($CuSO_4$)</td><td>m($CuSO_4$), г</td></tr>
<tr><td rowspan="3">x+y=100</td><td rowspan="3">0,07</td><td rowspan="3">0,07x100=70</td><td rowspan="3"></td><td>1</td><td>x</td><td>0,04</td><td>0,04x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y</td><td>0,64</td><td>0,64y</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>x+y</td><td>–</td><td>0,04x+
+0,64y</td></tr>
</table>

Итоговую систему равнений составляем при последующем анализе табл. 4:

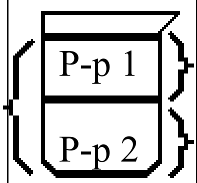
$$\begin{cases} 0,04x + 0,64y = 0,07 \times 100 = 70 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

Не возникает проблем в рамках данного подхода при решении задач на смешивание трех растворов, - серия возможных обратных задач при этом увеличивается. Полностью аналогично мыслим с использованием иного способа выражения концентрации растворов – молярной концентрации.

Пример 4: Определите объем 5 М раствора вещества А, который необходимо добавить к его 1,5 М раствора объемом 400 мл, чтобы образовался 2,5 М раствор А. Возможные разницы в плотности растворов при проведении расчетов не учитывать.

Последняя поправка очень важна, поскольку реально плотности растворов смешиваемых или конечного могут быть разные. Схема-таблица в данном случае имеет вид:

Таблица 5. Схема анализа и решения примера 4.

Конечная система (после смешивания)			Схема задачи	Исходная система (до смешивания)			
V_Σ, л	C(A), моль/л	ν_Σ(A), моль		№	V, л	C(A), моль/л	ν(A), моль
x+0,4	2,5	5x+6,0		1	x	5	5x
				2	0,4	1,5	0,4x1,5=6,0
				Σ	x+0,4	–	5x+6,0

Завершающее уравнение (опять же исходя из анализа опорного понятия, в данном случае - “молярная концентрация”):

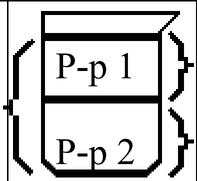
$C(A) = \dfrac{\nu(A)}{V(\text{раствора})}$, или $2,5 = \dfrac{5x + 6,0}{x + 0,4}$ и далее следует математическое решение, которое завершается не только ответом и анализом всех шагов, но и составлением опять же серии аналогичных и обратных задач.

А сейчас мы можем спокойно вывести известное правило смешивания безо всяких догматических посыланий. Вывод проведем в общем виде, поскольку после серии конкретных задач как раз уместно провести такого рода обобщение и, таким образом, вывести это правило, которое может использоваться в некоторых случаях с целью упрощения вычислений или их проверки.

Сформулируем условие задачи (пример 5): К раствору массой m_1 г и $\omega(A)=\omega_1$ прилили раствор этого же вещества (m_2) с $\omega(A)=\omega_2$. Определите массу смешиваемых растворов, если в итоге получили раствор А масой m_3 г и $\omega(A)=\omega_3$.

Схема-таблица на основании анализа условия и первых шагов по решению имеет вид:

Таблица 6. Схема анализа и решения примера 5.

<table>
<tr><td colspan="3">Конечная система
(после смешивания)</td><td rowspan="2">Схема задачи</td><td colspan="4">Исходная система
(до смешивания)</td></tr>
<tr><td>m_{Σ}, г</td><td>ω (А)</td><td>$m_{\Sigma}(A)$,г</td><td>№</td><td>m, г</td><td>ω (А)</td><td>m(A), г</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$m_1+m_2=m_3$</td><td rowspan="3">ω_3</td><td rowspan="3">$m_1 x \omega_1+m_2 x \omega_2=$
$=m_3 x \omega_3$</td><td rowspan="3">
</td><td>1</td><td>m_1</td><td>ω_1</td><td>$m_1 x \omega_1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>m_2</td><td>ω_2</td><td>$m_2 x \omega_2$</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>m_1+m_2</td><td>–</td><td>$m_1 x \omega_1+m_2 x \omega_2$</td></tr>
</table>

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m_3 \\ m_1 \times \omega_1 + m_2 \times \omega_2 = m_3 \times \omega_3 \end{cases}$$

Решение:

$$m_1 \times \omega_1 + m_2 \times \omega_2 = (m_1 + m_2) \times \omega_3$$
$$m_1 \times \omega_1 - m_1 \times \omega_3 = m_2 \omega_3 - m_2 \omega_2$$
$$m_1(\omega_1 - \omega_3) = m_2(\omega_3 - \omega_2)$$
$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Что и следовало доказать. Последнее уравнение трансформируется в форму креста, что и было представлено в начале статьи. Автор не выступает против алгоритмов, - вышеописанные подходы – это и есть логическое обоснование некоторых алгоритмов. Однако абсолютизация любого приема, способа или метода недопустима. В данном случае абсолютизация алгоритмических подходов без их обоснования приводит к догматизму в обучении и яркий пример, упоминаемое уже неоднократно, правило креста или смешивания. Если бы учитель сам знал принцип построения алгоритмов, он смог бы выводить их вместе с учениками (коллективное решение нескольких аналогических или обратных задач, анализ их структуры, схемы решения, поиск общих подходов, разработка алгоритмов или инструкций по решению, проверка работоспособности разрабатывемого алгоритма коллективним методом, самостоятельное применение разработанных алгоритмов); в противном случае, он сам порождает догматическую схему.

Аналогичная ситуация возникает при изучении теоретического или фактического материала. Ученику можно предложить готовую опорную схему, а можно составить ее вместе з классом. Эффект двух подходов нетрудно предвидеть. Рассматривая решение задач как вид учебной деятельности, можно основные четыре этапа по решению задач, которые описаны в [1], при таком комплексном подходе дополнить этапом составления (моделирования) аналогичных и обратных задач на основании решенной. При этом очень важно не увлекаться расчетным этапом в решении, а основную часть времени уделить:

- анализу исходной задачи, представление условия в различных схемах, графиках, уравнениях реакциях и т.п., т.е., что указывает на взаимосвязь отдельных частей условия;

- возможным выводам после ее решения. Серии однотипных задач сами выведут учителя и ученика на путь упрощения – обобщающий вывод в форме найденного алгоритма или отдельных приемов. В другой форме это выражает известный педагог-математик Д.Пойя [3, с.305]: «Выискивайте в вашей задаче то, что может пригодиться при решении других задач, - за данной конкретной ситуацией старайтесь обнаружить метод».

При этом надо помнить, что задача не цель, а средство развития мыслительной деятельности учителя и ученика. В [4] подчеркнуто, что каждый школьник должен в процессе обучения выработать умения учиться самостоятельно, а оно включает также умение ставить учебную задачу и решать ее. Однако, этот прием не возникает самопроизвольно, а отсюда необходимость использование приема постановки и конструирования заданий в вузовском учебном процессе при подготовке учителей и не только химии.

Для иллюстрации сказанного расмотрим возможный этап моделирования на представленном исходном примере в табличной форме (табл. 7), которая особенно ярко демонстрирует такие возможности.Представим все известные параметры по каждой системе: можем назвать это нулевым вариантом, - и на основании только этих данных проведем конструирование заданий. Возможный текст задания, если следовать табличной форме представления: «Сформулируйте условие задачи за такими данными вариантов 1-10 табл. 7. Определите неизвестный параметр, обозначенный «?». В каких случаях приведены избыточные или недостающие данные?»

Если варианты 1-3 довольно типичны в журнальных публикациях (за последние тридцать лет в журнале «Химия в школе» опубликовано более 30 публикаций по методике решения задач на смешивание растворов) и задачных пособиях, то последующие практически не используются. Интересны конструкции как с избытком данным (8, 9), так и с их недостатком (10), поскольку приучают к критическому анализу имеющихся сведений. Варианты возможных конструкций можно продолжить как в направлении одного ответа в задачи, так и множества.

На завершение интересная и довольно древняя цитата: “Чтобы узнать вещь, надо ее сделать, ибо, хотя вы думаете, что знаете ее, в этом не может быть уверенности, пока вы не попытаетесь ее сделать». Эти слова написал более двух тисяч лет назад древнегреческий драматург Софокл, однако они не утратили своего значения и сейчас, особенно, в аспекте рассматриваемого вопроса о задачах и алгоритмах.

Литература

1. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. - М.: Педагогика, 1977.- 208 с.
2. Пак М. Алгоритмы в обучении химии: Кн. для учителя: М.: Просвещение, 1993.- 64 с.
3. Пойа Д. Математическое открытие// Пер. с англ. В.С.Бергмана, под ред. И.М. Яглома. - М.: Наука, 1976. – 448 с.
4. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. - М.: Просвещение, 1991.-288 с.

Таблица 7. Некоторые возможные примеры заданий на смешивание растворов.

Вариант	Исходная система (до смешивания)						Конечная система(или конечный раствор после смешивания)		
	Раствор 1 (или система 1)			Раствор 2 (или система 2)					
	m_1, г	$\omega_1(A)$	$m_1(A)$, г	m_2, г	$\omega_2(A)$	m_2,(A), г	m_3, г	$\omega_3(A)$	$m_3(A)$,г
0	100	0,05	5	150	0,30	45	250	0,20	50
1	?	0,05		?	0,30		250	0,20	
2	100	0,05		?	0,30			0,20	
3	?	0,05		150	0,30			0,20	
4	100	?		150	0,30			0,20	
5	100	0,05		150	?			0,20	
6	100	?			?		250	0,20	
7		0,05	5		0,30	45		?	
8	100	0,05	5	150	0,30			?	
9	100	0,05		150	0,30		250	?	
10	100	0,05			0,30			?	