УДК 004.932: 621.383.7: 523.44

М.М. Безкровный[1], А.М. Кожухов[2], В.Е. Саваневич[3], А.Б. Анненков[1], Н.С. Соковикова[3]

[1] *Запорожский институт экономики и информационных технологий, Запорожье*
[2] *Национальный Центр управления и испытаний космических средств, Евпатория*
[3] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

ОЦЕНКА МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА ПЗС-КАДРЕ ПРИ СРЕДНЕМ ВРЕМЕНИ ЭКСПОЗИЦИИ

Разработан метод оценки положения протяженных объектов на ПЗС-кадре, основанный на теории группированных выборок. В качестве закона распределения координат падения фотонов, принадлежащих объекту с протяженным изображением, принята сумма конечного количества двумерных нормальных законов распределения координат падения фотонов, математические ожидания которых расположены вдоль траектории видимого движения объекта. Метод может быть использован в программах автоматизированного обнаружения астероидов при оценке местоположения астероидов, имеющих большие скорости видимого движения, например, астероидов, сближающихся с Землей.

Ключевые слова: *обработка ПЗС-изображений, протяженный объект, оценка положения объекта.*

Введение

Проблемы астероидной безопасности обусловили рост интереса к наблюдению астероидов сближающихся с Землей (АСЗ) в настоящее время [1]. Изучение астероидов в основном проводится оптическими телескопами, оснащенными ПЗС-камерами. При этом требования к точности измерений координат астероидов высоки – ошибка не должна превышать 1 угловой секунды [2].

Наибольшие сложности с получением подобной точности измерений возникают при наблюдении сравнительно небольших АСЗ. Их размеры не позволяют проводить их наблюдения на значительных расстояниях от Земли, когда скорость видимого движения таких астероидов невелика и их изображения представляют собой «размытые точки». При приближении к Земле видимые скорости движения данных АСЗ резко возрастают, и их изображения из точечных превращаются в протяженные (штрихи). Это значительно снижает точность оценки местоположения таких АСЗ обычными методами. Стоит отметить, что данная особенность касается не только обнаружения новых АСЗ, но и наблюдения известных. Дело в том, что при сопровождении подобного быстрого объекта по технологии track&stack [3], не смотря на то, что изображение объекта остается точечным, протяженными становятся изображения звезд, по которым производится высокоточная оценка местоположения.

Все это делает актуальной задачу разработки методов высокоточной оценки местоположения протяженных объектов, в том числе объектов с ненулевым видимым движением при большом времени экспозиции.

Анализ литературы. Наиболее точные методы оценки местоположения точечных объектов основаны на «аппроксимации сигналов от небесных объектов функцией рассеяния точки» (PSF-fitting) [3, 5, 6]. Методы данной группы используют различные модели распределения фотонов от небесного объекта на изображении, что позволяет добиться большей точности оценки [5, 6]. Разработаны методы оценки местоположения нескольких объектов, изображения которых статистически зависят друг от друга [7, 8].

Известные методы оценки местоположения протяженных объектов [3, 9] обычно не учитывают все значимые особенности формирования цифровых изображений небесных объектов, связанных с использованием для этого ПЗС-матриц.

Целью статьи является разработка метода оценки положения протяженного объекта на ПЗС-кадре, учитывающего как факт оценки непрерывных параметров (координат объекта) на дискретном изображении (совокупность потенциалов пикселей ПЗС-матрицы), так и то, что остаточные помеховые фотоны могут быть распределены по изображению объекта неравномерно.

Постановка задачи. Считается, что изображение объекта действительно присутствует в кадре.

Объект одиночный, его изображение в кадре не пересекается с изображением какого-либо другого объекта. Изображение объекта является протяженным, то есть за время экспозиции Δ_τ объект проходит расстояние, которым нельзя пренебречь при оценке его местоположения.

Объект в картинной плоскости телескопа движется равномерно по каждой координате:

$$\alpha_\tau = \alpha_0 + V_\alpha \tau; \quad \beta_\tau = \beta_0 + V_\beta \tau, \qquad (1)$$

где τ – время; α_τ, β_τ – координаты объекта на момент времени τ; α_0, β_0 – координаты объекта на начальный момент времени $\tau = 0$; V_α, V_β – скорость объекта по координатам α и β соответственно.

Координаты падения сигнальных фотонов объекта на ПЗС-матрицу имеют круговое нормальное распределение с изменяющимися во времени математическими ожиданиями (1) и СКО $\sigma_ф$.

Изображение объекта находится в стробе внутрикадровой обработки (СВКО), размер $N_{СВКО}$ (в пикселях) которого существенно превышает размер изображения объекта (десятки пикселей).

Помеховые фотоны вызваны шумами считывания изображения с ПЗС-матрицы, «темновыми токами», неравномерностью чувствительности пикселей ПЗС-матрицы, фоновым излучением неба [5]. Помеховые фотоны в СВКО образуют плоскую помеховую «подложку» с произвольным наклоном. Предварительная оценка местоположения объекта на кадре известна с точностью, достаточной для выделения группы пикселей, соответствующих сигналу, внутри СВКО.

Наблюдению доступны напряжения на выходе $N_{СВКО}$ пикселей ПЗС-матрицы, которые можно привести к опытным относительным частотам попадания фотонов в ik-й пиксель ПЗС-матрицы в t-м кадре υ^*_{ikt}:

$$\upsilon^*_{ikt} = A_{ikt} / \sum_{i,k}^{N_{СВКО}} A_{ikt} \,, \qquad (2)$$

где A_{ikt} – амплитуда ik-го пикселя ПЗС-матрицы, принадлежащего исследуемому СВКО.

Результатом наблюдений является совокупность относительных частот

$$\tilde{U} = (\upsilon^*_{11t}, ..., \upsilon^*_{ikt}, ..., \upsilon^*_{N_{СВКО}t}) \,.$$

Напряжения на выходе пикселей ПЗС-матрицы независимы.

Теоретическим аналогом опытных относительных частот являются вероятности .. попадания фотонов в ik-й пиксель ПЗС-матрицы с границами $\alpha_{íi}, \alpha_{êi}$ по координате α и $\beta_{ík}, \beta_{êk}$ – по координате β на t-м кадре за время t-й экспозиции. Размеры области Δ_α и Δ_β ответственности пикселей ПЗС-матрицы по координатам α и β одинаковы.

Необходимо на основе совокупности значений υ^*_{ikt} и информации об изображении объекта на ПЗС-матрице разработать метод максимально правдоподобной оценки местоположения протяженного объекта на t-м кадре. Считается, что используемая при решении поставленной задачи функция правдоподобия дифференцируема в окрестности своего глобального максимума, начальное приближение находится в этой окрестности. Совокупность оцениваемых параметров Θ включает в себя параметры местоположения астероида α_t, β_t на t-м кадре (на момент привязки кадра τ_t). Также во множество оцениваемых параметров могут быть внесены скорости объекта V_α, V_β, СКО координат падения фотонов $\sigma_ô$.

Функция правдоподобия кадра телескопа с ПЗС-камерой

Для получения максимальной точности оценки местоположения астероида необходимо учесть факт дискретизации пространства наблюдения (оцениваются непрерывные величины – координаты объекта, по дискретным – амплитудам напряжений на выходах элементов ПЗС-матрицы), при этом выборка координат падения фотонов является группированной [7]. Общий вид системы уравнений максимального правдоподобия для оценки местоположения протяженного объекта на цифровом изображении можно представить выражением:

$$\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \frac{\upsilon^*_{ikt}}{\upsilon_{ikt}(\Theta)} \frac{\partial \upsilon_{ikt}(\Theta)}{\partial \theta_m} = 0 \,, \qquad (3)$$

где Θ – совокупность оцениваемых параметров, например, $(\alpha_t, \beta_t, \sigma_ô, V_\alpha, V_\beta)$, протяженного объекта.

Выражение для вероятности $\upsilon_{ikt}(\Theta)$ попадания фотонов в ik-й пиксель ПЗС-матрицы для протяженного объекта имеет вид:

$$\upsilon_{ikt}(\Theta) = \frac{1}{\Delta_\tau} \int_{\alpha_{íi}}^{\alpha_{ki}} \int_{\beta_{ík}}^{\beta_{kk}} \int_{\tau_t - \Delta_\tau/2}^{\tau_t + \Delta_\tau/2} f(\alpha, \beta, \tau) d\alpha d\beta d\tau \,, \quad (4)$$

где τ_t – время привязки t-го кадра.

При этом, согласно постановке задачи, после компенсации помеховой подложки, например, методом, описанным в [5], закон распределения координат падения фотонов на ПЗС-матрицу в любой момент времени τ можно представить смесью вероятностных распределений:

$$f(\alpha, \beta, \tau) = p_0 + \frac{p_1}{2\pi\sigma_ô^2} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_ô^2} \left[(\alpha - \alpha_\tau)^2 + (\beta - \beta_\tau)^2 \right] \right\}, \qquad (5)$$

где $p_1 = 1 - p_0$ – относительный вес сигнальных фотонов; p_0, $(0 \le p_0 < 1)$ – относительный вес остаточных помеховых фотонов ПЗС-матрицы после компенсации плоской помеховой подложки; α_τ, β_τ – координаты объекта на момент времени τ, соответствующие математическим ожиданиям координат падения сигнальных фотонов от него.

Для удобства нахождения более детальной формы представления системы уравнений оценки местоположения объекта на дискретном изображении выражение (5) может быть представлено в виде:

$$f(\alpha,\beta,\tau)=p_0+$$

$$+\frac{p_1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}\left[\begin{matrix}(\alpha-\alpha_t-V_\alpha(\tau_t-\tau))^2+\\+(\beta-\beta_t-V_\beta(\tau_t-\tau))^2\end{matrix}\right]\right\}, \quad (6)$$

где α_t, β_t – координаты объекта на время привязки t-го кадра.

Для получения закона распределения координат падения фотонов за все время экспозиции необходимо выражение (6) представить в виде интеграла по времени экспозиции:

$$f(\alpha,\beta)=\Delta_\tau p_0+$$

$$+\int\limits_{\tau_t-\Delta/2}^{\tau_t+\Delta/2}\frac{p_1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}\left[\begin{matrix}(\alpha-\alpha_t-V_\alpha(\tau_t-\tau))^2+\\+(\beta-\beta_t-V_\beta(\tau_t-\tau))^2\end{matrix}\right]\right\}d\tau . \quad (7)$$

Воспользовавшись формулой прямоугольника численного интегрирования, второе слагаемое в выражении (7) можно представить в виде суммы:

$$f(\alpha,\beta)=\Delta_\tau p_0+$$

$$+\sum_{n=0}^{N}\psi_n\frac{p_1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}\left[\begin{matrix}(\alpha-\alpha_t-V_\alpha(\tau_t-\tau_n))^2+\\+(\beta-\beta_t-V_\beta(\tau_t-\tau_n))^2\end{matrix}\right]\right\}, \quad (8)$$

где $\tau_n=\tau_t+\Delta(n/N-0.5)$ – начало интервала численного интегрирования по времени; N – количество интервалов численного интегрирования по времени; ψ_n – коэффициент численного интегрирования.

Согласно выражения (8), закон распределения координат падения фотонов объекта можно представить в виде суммы конечного количества двумерных нормальных законов распределения координат падения фотонов (гауссоид), математические ожидания которых расположены вдоль траектории видимого движения объекта. При этом, чем больший путь проходит объект за время экспозиции, тем большее количество гауссоид необходимо для его представления.

Для закона распределения координат падения фотонов (8) координаты объекта на n-й момент времени можно определить как:

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\alpha_0+\ell_n\cos\omega;\\ \beta_n&=\beta_0+\ell_n\sin\omega,\end{aligned} \quad (9)$$

где ω – угол между направлением движения объекта и осью абсцисс в системе координат ПЗС-кадра; $\ell_n=-\frac{d}{2}+n\cdot\frac{d}{N}$; d – длина пути (в пикселях), пройденного объектом за время экспозиции, которая также является длиной изображения объекта.

Учитывая выражение (9), выражение (8) можно представить в виде:

$$f(\alpha,\beta)=\Delta_\tau p_0+$$

$$+\frac{p_1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^2}\sum_{n=0}^{N}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}\left[\begin{matrix}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)^2+\\+(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2\end{matrix}\right]\right\}. \quad (10)$$

В дальнейшем в работе используются следующие обозначения. Для нормально распределенной случайной величины z с математическим ожиданием m_z и дисперсией σ^2 плотность распределения определяется выражением:

$$N_z(m_z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(z-m_z)^2).$$

При этом вероятность F_z того, что случайная величина z находится на интервале $[z_í, z_ê]$, определяется следующим образом:

$$F_{zi}(m_z;\sigma^2)=\int\limits_{z_k}^{z_í}N_z(m_z;\sigma^2)dz.$$

С учетом сказанного, вероятность (4) попадания фотонов в пиксель ПЗС-матрицы может быть представлена в виде:

$$\upsilon_{ikt}(\Theta)=I_{iktø}+I_{iktñ}, \quad (11)$$

где $I_{iktø}=\Delta^2_{Ï\,ÇÑ}p_0$,

$$I_{iktñ}=p_1\sum_{n=0}^{N}F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{\hat{o}}^2)F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{\hat{o}}^2)$$

– вероятности падения в ik-й пиксель ПЗС-матрицы остаточных помеховых и сигнальных фотонов; $\Delta_{Ï\,ÇÑ}=\Delta_\alpha=\Delta_\beta$ – размеры области ответственности пикселя по координатам α и β соответственно.

Система уравнений максимального правдоподобия для оценки местоположения протяженного объекта

Для получения выражений производных, входящих в (5), необходимо выражение (10) подставить в (4) и воспользоваться известным правилом дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^b f(x,\lambda)dx=\int\limits_a^b\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda)dx. \quad (12)$$

Выражение для производной по положению объекта в момент привязки может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\alpha_t}=\frac{1}{N}\frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}\int\limits_{\beta_{í\,k}}^{\beta_{kk}}\sum_{n=0}^{N}\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\alpha_t}\sum_{n=0}^{N}\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}((\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)^2)d\alpha d\beta. \quad (13)$$

Помня о том, что $\exp'(x)=x'\exp(x)$, выражение (13) можно переписать в виде:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\alpha_t}=\frac{1}{N}\frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^4}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}\int\limits_{\beta_{í\,k}}^{\beta_{kk}}\sum_{n=0}^{N}\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)\times(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))^2)d\alpha d\beta=\frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{o}}^3}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{\beta_{í\,k}}^{\beta_{kk}}\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)d\beta\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{o}}}\times\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))^2)d\alpha. \quad (14)$$

Для взятия интеграла, стоящего во второй строке выражения (14), целесообразно использовать замену переменной $t=\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega$. При этом

$$\alpha=t+\alpha_t+\ell_n\cos\omega,\ d\alpha=dt,$$

$$t_{min}=\alpha_{í\,i}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega,\ \ t_{max}=\alpha_{ki}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega.$$

С учетом проведенной замены переменной и введенных обозначений, выражение (14) примет вид:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\alpha_t}=\frac{1}{N}\frac{1}{\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ф}}\int\limits_{\alpha_{нi}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega}^{\alpha_{ki}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega}t\exp(-\frac{t^2}{2\sigma_{ф}^2})dt.$$

Воспользовавшись табличным интегралом [10]:

$$\int xe^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}, \quad (15)$$

выражение (14), где $a=\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}$, можно записать в виде:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\alpha_t}=\frac{1}{N}\frac{1}{\sigma_{\hat{o}}^2}\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{o}}}\sigma_{\hat{o}}^2(\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\alpha_{ki}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)^2)-$$

$$-\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\alpha_{í\,i}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)^2))==\frac{1}{N}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega);\sigma^2)\times(N_{\alpha_{ki}}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega);\sigma_{\hat{o}}^2)$$

$$-N_{\alpha_{í\,i}}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega);\sigma_{\hat{o}}^2)). \quad (16)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (16) целесообразно воспользоваться понятием [5, 7] локального математического ожидания случайной величины на интервале $[\alpha_{í\,i},\alpha_{ki}]$:

$$m_{\alpha_i}^{ëîê}=\frac{1}{F_{\alpha i}(m_\alpha;\sigma^2)}\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}\alpha N_\alpha(m_\alpha;\sigma^2)d\alpha=m_\alpha+$$

$$+\frac{\sigma^2}{F_{\alpha i}(m_\alpha;\sigma^2)}(N_{\alpha_{ki}}(m_\alpha;\sigma^2)-N_{\alpha_{í\,i}}(m_\alpha;\sigma^2)). \quad (17)$$

При этом выражение (16) примет вид:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\alpha_t}=\frac{1}{N\sigma_{ф}^2}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\times$$

$$\times(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega), \quad (18)$$

где $m_{\alpha_i}^{лок}$ – локальное математическое ожидание местоположения падения фотонов по координате α при их попадании в i-й дискрет ПЗС-матрицы.

Аналогично для другой координаты:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\beta_t}=\frac{1}{N\sigma_{\hat{o}}^2}\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)(m_{\beta_k}^{лок}-\beta_t-\ell_n\sin\omega), \quad (19)$$

где $m_{\beta_k}^{ëîê}$ – локальное математическое ожидание местоположения падения фотонов по координате β при их попадании в k-й дискрет ПЗС-матрицы.

В свою очередь, выражение производной по синусу угла ω при использовании равенства $\cos^2\omega+\sin^2\omega=1$ может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d(\sin\omega)}=\frac{1}{N}\frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^4}\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}\int\limits_{\beta_{í\,k}}^{\beta_{kk}}\sum_{n=0}^{N}\ell_n((\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)-$$

$$-(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)\cdot\frac{\sin\omega}{\cos\omega})\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))^2)\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{o}}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)d\alpha d\beta. \quad (20)$$

Учитывая, что

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx,$$

выражение (20) можно привести к следующему виду:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d(\sin\omega)}=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{o}}^4}\sum_{n=0}^{N}\ell_n(\int\limits_{\alpha_{í\,i}}^{\alpha_{ki}}\int\limits_{\beta_{í\,k}}^{\beta_{kk}}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\delta}^2}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))^2)\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\delta}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)d\alpha d\beta-$$

$$-\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\cdot\int\limits_{\alpha_{íi}}^{\alpha_{ki}}\int\limits_{\beta_{ík}}^{\beta_{kk}}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)\cdot\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\delta}^2}(\alpha-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))^2)\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2\sigma_{\delta}^2}(\beta-\beta_t-\ell_n\sin\omega)^2)d\alpha d\beta)\,. \quad (21)$$

При использовании замены переменной и соответствующего табличного интеграла (15), позволивших перейти от выражения (14) к выражению (16), выражение (21) преобразуется к виду:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d(\sin\omega)}=\frac{1}{N\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}\ell_n F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\times$$

$$\times((m_{\beta_k}^{лок}-\beta_t-\ell_n\sin\omega)-\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\times$$

$$\times(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))\,. \quad (22)$$

Аналогично, для косинуса угла ω:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d(\cos\omega)}=\frac{1}{N\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}\ell_n F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\times$$

$$\times((m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}\times$$

$$\times(m_{\beta_k}^{лок}-\beta_t-\ell_n\sin\omega))\,. \quad (23)$$

Выражение для производной непосредственно по углу ω, с учетом вышеизложенного, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d\upsilon_{ikt}(\Theta)}{d\omega}=\frac{1}{N\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}\ell_n F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma^2)\times$$

$$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)(\cos\omega\cdot(m_{\beta_k}^{лок}-\beta_t-\ell_n\sin\omega)-$$

$$-\sin\omega\cdot(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega))\,. \quad (24)$$

Выражение для вероятности попадания фотонов в ik–й дискрет ПЗС–матрицы на t–м кадре, входящее в систему уравнений максимального правдоподобия (5), с учетом (4) и (10) можно записать в виде:

$$\upsilon_{ikt}=\Delta_{ПЗС}^2 p_0+\frac{p_1}{N}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\,. \quad (25)$$

Вычислительная схема оценки параметров местоположения одиночного объекта при среднем времени экспозиции кадра

С учетом (18), (25) уравнение максимального правдоподобия для оценки координаты положения α_t можно записать следующим образом:

$$\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\frac{\upsilon_{ikt}^{*}\frac{p_1}{\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}\begin{bmatrix}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n\cos\omega)\end{bmatrix}}{\Delta_{ПЗС}^2 p_0 N+p_1\sum_{n=0}^{N}\begin{bmatrix}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\end{bmatrix}}=0$$

.

Или, учитывая, что по определению $\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\upsilon_{ikt}^{*}=1$, а оцениваемый параметр не зависит от индексов i,k,n :

$$\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\frac{\upsilon_{ikt}^{*}\frac{p_1}{\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}\begin{bmatrix}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times(m_{\alpha_i}^{лок}-\ell_n\cos\omega)\end{bmatrix}}{\Delta_{ПЗС}^2 p_0+p_1\sum_{n=0}^{N}\begin{bmatrix}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)\end{bmatrix}}=$$

$$=\alpha_t\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}(\upsilon_{ikt}^{*}\frac{p_1}{\sigma_{ф}^2}\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times$$

$$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2))\,/$$

$$/(\Delta_{ПЗС}^2 p_0+p_1\sum_{n=0}^{N}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times$$

$$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{\delta}^2)\,.$$

Отсюда, при условии, что дисперсия координат падения фотонов не равна нулю:

$$\alpha_t=\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum_{n=0}^{N}g_{1iknt}(m_{\alpha_i}^{лок}-\ell_n\cos\omega)}{\sum_{n=0}^{N}g_{2iknt}}\Bigg/\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКОс}}\upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum_{n=0}^{N}g_{1iknt}}{\sum_{n=0}^{N}g_{2iknt}}\right), \quad (26)$$

где $g_{1iknt}=p_1\,F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n\sin\omega;\sigma_{ф}^2)\times$

$\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n\cos\omega;\sigma_{ф}^2)$; $g_{2iknt}=p_0\,/\,(N)+$

$$+p_1\, F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n \sin\omega;\sigma_\delta^2)\times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n \cos\omega;\sigma_\delta^2)\,.$$

По аналогии уравнение максимального правдоподобия для оценки координаты положения β_t имеет вид:

$$\beta_t=\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{1iknt}(m_{\beta_k}^{лок}-\ell_n \sin\omega)}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\Bigg/\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{1iknt}}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\right). \qquad (27)$$

При этом выражения для оценки относительных весов шумовых и сигнальных фотонов имеет вид [11]:

$$\hat{p}_1=\frac{1}{N_{СВКО}}\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{1iknt}}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}},\ \hat{p}_0=1-\hat{p}_1\,. \qquad (28)$$

В свою очередь, с учетом (22), (25) уравнение максимального правдоподобия для синуса угла наклона можно записать в виде:

$$\sum_{i,k}^{N_{СВКО}}\frac{\upsilon_{ikt}^{*}\dfrac{p_1}{\sigma_\phi^2}\sum\limits_{n=0}^{N}\left[\begin{array}{l}\ell_n F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n \sin\omega;\sigma^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n \cos\omega);\sigma_\phi^2)\times\\ \times((m_{\beta_i}^{лок}-\beta_t-\ell_n \sin\omega)-\\ -\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n \cos\omega))\end{array}\right]}{\Delta_{ПЗС}^2 p_0 N+p_1\sum\limits_{n=0}^{N}\left[\begin{array}{l}F_{\beta k}(\beta_t+\ell_n \sin\omega;\sigma_\phi^2)\times\\ \times F_{\alpha i}(\alpha_t+\ell_n \cos\omega;\sigma_\phi^2)\end{array}\right]}=0\,.$$

Не трудно показать, что последнее уравнение может быть преобразовано к виду:

$$\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\beta_i}^{лок}-\beta_t-\ell_n \sin\omega)}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}=$$

$$=\sin\omega\cdot\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n \cos\omega)}{\cos\omega\cdot\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\,.$$

Или, окончательно:

$$\sin\omega=\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\beta_i}^{лок}-\beta_t-\ell_n \sin\omega)}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\right)\Bigg/\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n \cos\omega)}{\cos\omega\cdot\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\right). \qquad (29)$$

По аналогии:

$$\cos\omega=$$

$$=\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\alpha_i}^{лок}-\alpha_t-\ell_n \cos\omega)}{\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\right)\Bigg/\left(\sum_{i,k}^{N_{СВКО}} \upsilon_{ikt}^{*}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\ell_n g_{1iknt}(m_{\beta_i}^{лок}-\beta_t-\ell_n \sin\omega)}{\sin\omega\cdot\sum\limits_{n=0}^{N} g_{2iknt}}\right). \qquad (30)$$

Уравнения (29), (30) позволяют однозначно определить угол между направлением движения объекта и осью абсцисс в системе координат ПЗС-кадра ω, поэтому уравнение для выражения (24) не составлялось.

Таким образом, система уравнений максимального правдоподобия оценки параметров местоположения одиночного объекта по данным телескопа с ПЗС-камерой при среднем времени экспозиции кадра и линейной модели движения объекта в картинной плоскости телескопа с известной дисперсией координат падения фотонов состоит из уравнений (26) – (30). Данная система уравнений может быть решена методом последовательных приближений [12].

В свою очередь, выражение для производной по дисперсии координат падения фотонов при использовании процедур численного интегрирования, может быть получено аналогично (22) – (24). Однако его громоздкость едва ли оставляет надежду на возможность практического использования при оценке искомого параметров. В связи с этим предлагается решать систему уравнений максимального правдоподобия (26), (27), (29), (30) для дискретного множества возможных значений дисперсии координат падения фотонов. В дальнейшем выбрать то значение дисперсии, которое соответствует наибольшему значению функции правдоподобия.

Выводы

Разработан итерационный метод оценки координат объектов, изображение которых на ПЗС-кадре является протяженным. Метод основан на учете факта оценки непрерывных параметров (координат объекта) по дискретному пространству наблюдений (совокупность потенциалов пикселей ПЗС-матрицы). Данный учет стал возможен благодаря использованию математического аппарата группированных выборок для описания потенциалов пикселей, соответствующих координатам падения сигнальных и шумовых фотонов. В качестве закона распределения координат падения фотонов, принадлежащих объекту с протяженным изображением, принята сумма конечного количества двумерных нормальных законов распределения координат падения фотонов (гауссоид), математические ожидания которых расположены вдоль траектории видимого движения объекта. Количество используемых гауссоид тем больше, чем выше скорость объекта и чем больший путь он прошел за время экспозиции.

Практическая значимость метода заключается в возможности их использования в системах оперативного автоматизированного обнаружения новых и сопровождения известных астероидов, например, в программе CoLiTec [13] для повышения точности оценки местоположения астероидов с высокой скоростью видимого движения.

Список литературы

1. Ericson J. Asteroids, comets, and meteorites. Cosmic Invaders of the Earth / J. Ericson. – New York: Fact on File.– 2003.

2. IAU Minor Planet Center. Guide to Minor Body Astrometry. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://www.cfa.harvard.edu/iau/info/Astrometry.html.

3. Great Shefford Observatory. Stacking Techniques. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://www.birtwhistle.org/StackingTechniques.htm – Название с экрана.

4. Kouprianov V. Distinguishing features of CCD astrometry of faint GEO objects / V. Kouprianov // Advances in Space Research. – 2008. – Vol. 41, Issue 7. – P. 1029-1038.

5. Саваневич В.Е. Оценка координат астероида на дискретном изображении / В.Е. Саваневич, А.Б. Брюховецкий, А.М. Кожухов, Е.Н. Диков // Радиотехника. – 2010. – Вып. 162. – С. 78-86.

6. Zacharias N. UCAC3 pixel processing / N. Zacharias // The Astronomical Journal. – 2010. – 139. – P. 2208-2217.

7. Саваневич В.Е. Определение координат статистически зависимых объектов на дискретном изображении / В.Е. Саваневич // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 4-8.

8. Astrometric CCD observations of visual double stars at the Pulkovo Observatory / I.S. Izmailov, M.L. Khovricheva, M.Yu. Khovrichev Et al. // Astronomy Letters. – 2010. – Vol. 36, Issue 5. – P. 349-354.

9. Biryukov V. Limited accuracy of asteroid trails estimation at observations with CCD detectors / V. Biryukov, V. Rumyantsev // Proceedings of Asteroids, Comets, Meteors - ACM 2002. International Conference, (29 July - 2 August 2002, Berlin, Germany). Ed. Barbara Warmbein. ESA SP-500. Noordwijk, Netherlands: ESA Publications Division. – 2002. – P. 405-408.

10. Брычков Ю.А. Таблицы неопределенных интегралов: Справочник / Ю.А. Брычков, О.И. Марычев, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

11. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

12. Зализняк В.Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков: Учебное пособие для вузов / В.Е. Зализняк. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 296 с.

13. Сайт программы CoLiTec. [Электронный ресурс]. Режим доступа к ресурсу: http://neoastrosoft.com/home/ – Название с экрана.

Поступила в редколлегию 15.08.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.П. Деденок, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ОЦІНКА РОЗТАШУВАННЯ ОБ'ЄКТА НА ПЗЗ-КАДРІ ПРИ СЕРЕДНЬОМУ ЧАСІ ЕКСПОЗИЦІЇ

М.М. Безкровний, О.М. Кожухов, В.Є. Саванєвич, О.Б. Анненков, Н.С. Соковікова

Розроблено метод оцінки місцезнаходження протяжних об'єктів на ПЗЗ-кадрі, який ґрунтується на теорії групування вибірок. В якості закону розподілу координат падіння фотонів, які належать об'єкту з протяжним зображенням, прийнята сума кінцевої кількості двомірних нормальних законів розподілу координат падіння фотонів, математичні очікування яких розташовані вздовж траєкторії видимого руху об'єкту. Метод може бути використаний в програмах автоматизованого виявлення астероїдів при оцінці місцезнаходження астероїдів, які мають великі швидкості видимого руху, наприклад, астероїдів, що наближаються до Землі.

Ключові слова: *обробка ПЗЗ-зображень, протяжний об'єкт, оцінка місцезнаходження об'єкту.*

ASSESSMENT LOCATION OBJECTS ON CCD-IMAGE AT AVERAGE EXPOSURE TIME

M.M. Bezkrovniy, A.M. Kozhukhov, V.Ye. Savanevich, A.B. Annenkov, N.S. Sokovikova

Developed method represents the estimation of extended objects' location on the CCD frame. Method is based on the theory of grouped samples. The sum of the finite number of two-dimensional Gaussians is accepted as the distribution of the photons falling of an object with an extended image. The Gaussians mathematical expectations are located along the path of the object's apparent motion. The method can be used in programs for automated asteroids detection. For example, to estimate the location of fast moving asteroids, such as Near-Earth asteroids.

Keywords: *CCD-image processing, extended object, assessment the location of the object.*