УДК 512.547.25

Г. Е. Копча, В. П. Рудько (Ужгородський держ. ун-т)

ПРО КРИСТАЛОГРАФІЧНІ ГРУПИ БЕЗ КРУЧЕННЯ З НЕРОЗКЛАДНОЮ ТОЧКОВОЮ ЦИКЛІЧНОЮ p-ГРУПОЮ

Torsion free crystallographic groups with indecomposable cyclic point p-group are studied in the paper. We have proved, that the problem of classification of these groups is wild.

В роботі вивчаються кристалографічні групи без кручення з нерозкладною циклічною точковою p-групою. Показується, що класифікація цих груп є дикою.

Ця робота написана під впливом статті Плескена [1], в якій розглядається проблематика теорії кристалографічних груп і приведена теорема про те, що не існує кристалографічної групи без кручення, точкова група якої є незвідна і не є одиничною [2].

Приведемо спочатку деякі відомості про кристалографічні групи. Нехай $\mathbf{R}^n$ — n-вимірний векторний евклідів простір, E^n — n-вимірний точковий евклідів простір, зв'язаний з простором $\mathbf{R}^n$. Для групи K рухів простору E^n через $T(K)$ будемо позначати підгрупу всіх паралельних переносів, що містяться в K, а через $R(K)$ — адитивну групу всіх тих векторів із $\mathbf{R}^n$, які визначають паралельні переноси із $T(K)$. Кожен елемент із K індукує ортогональний оператор простору $\mathbf{R}^n$. Множина всіх елементів із K, що індукують один і той же оператор простору $\mathbf{R}^n$, є суміжним класом групи K по підгрупі $T(K)$. Позначимо через $G(K)$ групу операторів простору $\mathbf{R}^n$, яка індукується групою K. Нехай K — кристалографічна група. Тоді $R(K) \cong \mathbf{Z}^n$, $G(K)$ — скінченна група і $R(K)$ є $\mathbf{Z}G(K)$-модулем. Виберемо в $R(K)$ $\mathbf{Z}$-базис $e_1, \ldots, e_n$. Нехай Γ — $\mathbf{Z}$-зображення групи $G(K)$ в цьому базисі. Тоді

$$G(K) \cong \Gamma(G(K)) \subset GL(n, \mathbf{Z}).$$

Позначимо через $\mathbf{R}^n_+$ $\left(\mathbf{Z}^n_+\right)$ адитивну групу n-вимірних векторів-стовпців над полем $\mathbf{R}$ (над кільцем $\mathbf{Z}$). Нехай $R^n = \mathbf{R}^n_+/\mathbf{Z}^n_+$. Будемо вважати, що група $\Gamma(G(K))$ діє в групах $\mathbf{R}^n_+$, $\mathbf{Z}^n_n, R^n$ (дія матриці на стовпчик — це добуток цієї матриці на цей стовпчик). Введемо в розгляд групи $B' = B'(\Gamma(G(K)), R^n)$, $C' = C'(\Gamma(G(K)), R^n)$, $H'(\Gamma(G(K)), R^n) = B'/C'$ відповідно коциклів, кограниць і когомологій групи $\Gamma(G(K))$ із значеннями в групі R^n. Нехай в просторі E^n вибрано систему координат з початком в деякій точці O і координатним базисом $e_1, \ldots, e_n$. Існує коцикл $f \in B'$ такий, що дія групи $G(K)$ в $\mathbf{R}^n$ і групи K в E^n визначається за наступним правилом. Нехай $g \in G(K)$, $\tilde{g}$ — той суміжний клас групи K по підгрупі $T(K)$, що визначається оператором g. Якщо X і Y — координатні стовпці векторів a і $g(a)$ $(a \in \mathbf{R}^n)$, X і X_φ — координатні стовпці точок M і $\varphi(M)$ $(\varphi \in \tilde{g})$, то

$$Y = \Gamma(g)X, \; X_\varphi = \Gamma(g)X + a_\varphi, \tag{1}$$

де $a_\varphi \in f(g)$.

Якщо за початок координат взяти іншу точку $O' \in E^n$, то в (1) коцикл f заміниться на когомологічний йому коцикл f' (тобто $f' - f \in C'$). Нехай в $R(K)$ вибрано інший $\mathbf{Z}$-базис з матрицею переходу $C \in GL(n, \mathbf{Z})$. Тоді зображення Γ групи $G(K)$ заміниться на еквівалентне йому зображення Γ': $g \to C^{-1}\Gamma(g)C$ $(g \in G(K))$, а коцикл f групи $\Gamma(G(K))$ на коцикл f' групи $\Gamma'(G(K))$: $f'(\Gamma'(g)) = C^{-1}f(\Gamma(g))$ $(g \in G(K))$.

Кристалографічні групи K і K' є еквівалентними групами, якщо існує такий паралельний перенос φ простору E^n, що $\varphi^{-1}K\varphi = K'$.

Якщо K і K' еквівалентні кристалографічні групи простору E^n, то $T(K) = T(K')$, $G(K) = G(K')$, $\Gamma = \Gamma'$ і відповідні коцикли f і f' групи $\Gamma(G(K))$ когомологічні: $f' - f \in C'$. Кожний елемент групи $H'(\Gamma(G), R)$ визначає рівно один клас еквівалентних кристалографічних груп.

Нехай H — довільна скінченна підгрупа групи $GL(n, \mathbf{Z})$ і $f \in B'(H, R^n)$. Тоді існує кристалографічна група K простору E^n така, що $\Gamma(G(K)) = H$ і дія групи K в $\mathbf{R}^n$ і E^n визначається формулами (1). Групу H назвемо точковою групою групи K. Нехай H і H_1 — скінченні підгрупи групи $GL(n, \mathbf{Z})$, f і f_1 — коцикли групи H і H_1 відповідно, K і K_1 — кристалографічні групи з точковими групами H і H_1 відповідно. Групи K і K_1 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує матриця $C \in GL(n, \mathbf{Z})$ така, що $C^{-1}HC = H_1$, $f_1(h) = c^{-1}f(chc^{-1})$ $(h \in H_1)$.

Кристалографічну групу K з точковою групою H назвемо незвідною (нерозкладною), якщо група H є незвідна (нерозкладна) підгрупа в групі $GL(n, \mathbf{Z})$. Група K називається групою без кручення, якщо в групі K немає нетривіальних елементів скінченного порядку.

Відмітимо, що елемент $\varphi \in K$ є елементом скінченного порядку тоді і тільки тоді, коли існує точка $M \in E^n$ така, що $\varphi(M) = M$ (нерухома точка).

Нехай $G_s = \langle a \rangle$ є циклічна p-група порядку p^s з твірним елементом a. Далі ми будемо розглядати кристалографічні групи, точкові групи яких ізоморфні групі G_s.

Нехай ε_t — первісний корінь степеня p^t із одиниці, вибраний так, що $\varepsilon_t^p = \varepsilon_{t-1}$ $(t = 1, 2, \ldots ; \varepsilon_0 = 1)$, $R_t = \mathbf{Z}[\varepsilon_t]$,

$$R_t = R_{t-1} + \varepsilon_t R_{t-1} + \cdots + \varepsilon_t^{p-1} R_{t-1}, \tag{2}$$

$1, \varepsilon, \ldots , \varepsilon^{p-2}$ — $\mathbf{Z}$-базис в R_1 і $\mathbf{Z}$-базис в R_t проведено через розклад в (2) $\mathbf{Z}$-модуля R_t в пряму суму $\mathbf{Z}$-підмодулів $(t = 2, 3, \ldots)$.

Позначимо через $\widetilde{\varepsilon}_t$ матрицю оператора множення на ε_t кільця R_t у вибраному $\mathbf{Z}$-базисі цього кільця.

Кожний із $\mathbf{Z}$-модулів R_t $(t = 0, 1, 2, \ldots, s;\ R_0 = \mathbf{Z})$ є $\mathbf{Z}G_s$-модулем з дією оператора $a(x) = \varepsilon_t x$, $(x \in R_t)$. $\mathbf{Z}$-зображення δ_t групи G_s у вибраному базисі модуля R_t має вигляд:

$$\delta_t \colon a \to \tilde{\varepsilon}_t. \tag{3}$$

Будь-яке незвідне $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s еквівалентне над полем $\mathbf{Q}$ (а також над кільцем Z_p — p-цілих раціональних чисел) одному із зображень (3). Нехай Γ — $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s і M — модуль цього зображення. $\mathbf{Z}$-модуль M можна представити у вигляді прямої суми $\mathbf{Z}$-підмодулів

$$M = M_0 + M_1 + \cdots + M_s \tag{4}$$

такої, що M_0, $M_0 + M_1, \ldots, M_0 + \cdots + M_{s-1}$ є $\mathbf{Z}G_s$-підмодулями в M, а фактор-модулі $N_0 = M_0$, $N_i = (M_0 + \cdots + M_i)/(M_0 + \cdots + M_{i-1})$ $(i = 1, \cdots, s)$ є цілком звідні $\mathbf{Z}G_s$-модулі, причому $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s, що реалізуються в $N_0, N_1, \ldots, N_s$, еквівалентні над полем $\mathbf{Q}$ $\mathbf{Z}$-зображенням $k_0\delta_0$, $k_1\delta_1$, $\ldots, k_s\delta_s$ відповідно ($k_i\delta_i = \delta_i + \cdots + \delta_i$; k_i — невід'ємні цілі числа; $i = 0, \ldots, s$). Будемо говорити, що Γ має канонічний вигляд, якщо $\mathbf{Z}$-базис в M проведено через розклад (4). Відмітимо, що зображення Γ є точним тоді і тільки тоді, коли $k_s \geq 1$.

Сформулюємо основні результати даної роботи.

Теорема 1. *Нехай G_s — циклічна p-група порядку p^s, де $s > 4$. Тоді дикою є задача класифікації нерозкладних кристалографічних груп без кручення, точкові групи яких ізоморфні групі G_s, тобто ця задача включає задачу класифікації відносно перетворення подібності всіх пар матриць над полем із p елементів.*

Нехай $m'(Gs)$ — найменша розмірність, для якої існує нерозкладна кристалографічна група з точковою групою, ізоморфною групі Gs (див.[1]).

Теорема 2. *Для циклічної групи G_s порядку p не існує нерозкладної кристалографічної групи без кручення, точкова група якої ізоморфна групі G_s. Нехай $s > 1$. Тоді $m'(Gs) = p^s - p^{s-1} + p$. В розмірності $m'(G_s)$ існують рівно $p-1$ нерозкладні кристалографічні групи без кручення, точкові групи яких ізоморфні групі G_s і попарно неспряжені в групі $GL(m'(G_s), Zp)$.*

Доведення цих теорем спирається на ряд допоміжних результатів.

Лема 1. *Нехай Γ — точне $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s степеня n і K — кристалографічна група з точковою групою $\Gamma(G_s)$. Якщо $k_0 = 0$, то група K є напівпрямий добуток групи $T(K)$ і групи $G(K)$. Нехай $k_0 = 1$. Тоді будь-який коцикл із групи $B'(\Gamma(G_s), R)$ є когомологічний коциклу f такому, що $f^{\mathrm{T}}(\Gamma(a)) = (\alpha, 0, \dots, 0) + \mathbf{Z}^n_+$, де $\alpha \in \mathbf{R}$ і $p^s\alpha \in \mathbf{Z}$.*

Доведення. Нехай $k_0 = 0$. Тоді $\Gamma(a) - E_n$ — оборотна над полем $\mathbf{R}$ матриця (E_n — одинична матриця порядку n). Звідси витікає, що $B'(\Gamma(G_s), R^n) = C'(\Gamma(G_s), R^n)$. Одержане є необхідною і достатньою умовою для того, щоб група K була вказаним напівпрямим добутком.

Нехай $k_0 = 1$. Із уже доведеного витікає, що будь-який коцикл із групи $B'(\Gamma(G_s), R^n)$ є когомологічний коциклу f такому, що $f^{\mathrm{T}}(\Gamma(a)) = (\alpha\ , 0, \dots, 0) + \mathbf{Z}^n$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). Із умови $(\sum_{i=0}^{p^{s-1}} \Gamma^i(a))f(\Gamma(a)) = 0$ в R^n витікає, що $p^s\alpha \in \mathbf{Z}$. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай Γ — точне $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s з $k_0 = 1$ і f — вказаний в лемі 1 коцикл з $\alpha = p^{-s}$. Припустимо, що зображення Γ задовольняє умовам:*

1) Коцикл f не є когомологічний коциклу f' такому, що $f'(\Gamma(a)) = (tp^{-k}, 0, \dots, 0)$ з $t \in \mathbf{Z}$ і $k < s$;

2) $\mathbf{Z}$-модуль M зображення Γ (див. (4)) є прямою сумою $M = M_0 + M'$, де M' — інваріантний відносно оператора $b = a^{p^{s-1}}$ $\mathbf{Z}$-підмодуль в M.

Тоді кристалографічна група K з точковою групою $\Gamma(G_s)$ і коциклом f є групою без кручення.

Доведення. Нехай n — степінь зображення Γ, $R(K) = M \subset \mathbf{R}^n$ і e — базисний вектор $\mathbf{Z}$-модуля M_0. Виберемо в E^n координатний базис, провівши його через вектор e і $\mathbf{Z}$-базис $\mathbf{Z}\langle b\rangle$-модуля M'. Тоді дія групи K в E^n визначиться формулами (1), в яких g пробігає групу G_s. Нехай φ — рух із K, що відповідає елементу $a \in G_s$. Із умови (2) слідує, що $\psi = \varphi^{p^{s-1}}$ є гвинтовий рух навколо прямої L, що проходить через початок координат і паралельно вектору e. Точніше, φ є добуток повороту на кут $2\pi/p$ навколо прямої L на паралельне перенесення $\mathcal{T}_{e_1}$ на вектор $e_1 = p^{-1}e$, що не належить $M = R(K)$.

Нехай A — довільна точка із E^n і x_0 — її перша координата (проекція на вектор e). Тоді для будь-якого паралельного переносу $\mathcal{T} \in T(K)$ образ $\psi\mathcal{T}(A)$ має першу координату $y_0 = x_0 + 1/p + z$, де $z \in \mathbf{Z}$. Очевидно, $\psi\mathcal{T}(A) \neq A$, тобто рух $\psi\mathcal{T}$ не має нерухомих точок. Звідси слідує, що $(\psi T)^p \neq 1$ при будь-якому $T \in T(K)$, тобто група K не містить елементів порядку p і так як $K/T(K)$ є p-група, то група K не містить нетривіальних елементів скінченного порядку. Лема доведена.

Розглянемо $\mathbf{Z}$-зображення Γ_{ij} групи G_s з двома незвідними компонентами δ_i та δ_j $(0 \leq i < j \leq s)$, взявши за модуль цього зображення $M = R_i + R_j$ (пряму суму $\mathbf{Z}$-модулів R_i та R_j). $\mathbf{Z}G_s$-модуль M є розширенням $\mathbf{Z}G_s$-модуля R_i за допомогою $\mathbf{Z}G_s$-модуля R_j. Еквівалентним розширенням відповідають сильно еквівалентні $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s.

Лема 3. *1) $\mathbf{Z}$-зображення Γ_{ij} групи G_s сильно еквівалентно наступному $\mathbf{Z}$-зображенню цієї групи:*

$$\Gamma_{ij,\,\omega}: \quad a \rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}_i & \langle\omega\rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}_j \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $\langle\omega\rangle$ — матриця, всі стовпці якої є нульовими за винятком останнього стовпчика, який є координатним стовпчиком елемента $\omega \in R_i$ (в раніше вибраному $\mathbf{Z}$-модулі R_i).

2) Зображення $\Gamma_{ij,\omega}$ і $\Gamma_{ij,\omega'}$ $(\omega, \omega' \in R_i)$ сильно еквівалентні над $\mathbf{Z}$ тоді і тільки тоді, коли $\omega \equiv \omega' \pmod{pR_i}$.

3) Нехай $\pi_i = 1 - \varepsilon_i$ (це простий елемент кільця R_i і $R_i/\pi_i R_i$ — поле із p елементів). Нерозкладні $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s з двома незвідними компонентами δ_i та δ_j з точністю до $\mathbf{Z}$-еквівалентності вичерпуються зображеннями Γ_{ij,π_i^r}, де $r = 0, 1, \dots, \varphi(p^i) - 1$ (φ — функція Ейлера).

Доведення цієї леми можна знайти в роботах [3–4].

Нехай t — ціле число, взаємно просте з p і Γ — $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s. Відображення Γ^t: $a \rightarrow \Gamma^t(a)$ є також $\mathbf{Z}$-зображенням групи G_s.

Лема 4. *Нехай $\omega = \pi_i^{-1}p$. Тоді $\mathbf{Z}$-зображення $\Gamma^t_{ij,\omega}$ групи G_s еквівалентно над $\mathbf{Z}$ $\mathbf{Z}$-зображенню $\Gamma_{ij,t\omega}$.*

Доведення. Нехай при $p > 2$ t є первісним коренем із одиниці по модулю p^s і $t < p$, а при $p = 2$ нехай $t = -1$ або $t = 3$. Досить розглянути тільки ці випадки. Нехай ціле число t' таке, що $tt' \equiv 1 \pmod{p^s}$. Існує автоморфізм σ кільця R_i такий, що $\sigma(\varepsilon_0) = \varepsilon_i^{t'}$. Якщо $\widetilde{\sigma}$ — матриця цього автоморфізму, то $\widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\varepsilon}_i^{\,t}\widetilde{\sigma}_i = \widetilde{\varepsilon}_i$. Матриця $\widetilde{\varepsilon}_j$ є матрицею порядку $r = p^{j-i}$ над кільцем $\widetilde{R}_i = \mathbf{Z}[\widetilde{\varepsilon}_i]$. Існує така узагальнена мономіальна матриця S, ненульові елементи якої належать групі $\langle\widetilde{\varepsilon}_i, \widetilde{\sigma}\rangle$, що $S^{-1}\widetilde{\varepsilon}_j^{\,t}S = \widetilde{\varepsilon}_j$. Розглянемо $\widetilde{R}_i$-зображення групи G_s:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}_i & \langle E\rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}_j \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\langle E\rangle$ — r-вимірний вектор над $\widetilde{R}_i$, всі компоненти якого нульові, окрім останньої компоненти, що рівна одиниці E кільця $\widetilde{R}_i$.

Використавши еквівалентність $\mathbf{Z}$-зображення δ_k^t $\mathbf{Z}$-зображенню δ_k $(k = i$, або $k = j)$, неважко показати, що зображення (6) еквівалентно над $\mathbf{Z}$ зображенню

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}_i & X \\ 0 & \varepsilon_j \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де в r-вимірному векторові X над $\widetilde{R}_i$ тільки t компонент відмінно від нуля і ці ненульові компоненти належать групі $\langle\widetilde{\varepsilon}_i\rangle$. Зображення (7) сильно еквівалентно над кільцем $\widetilde{R}_i$ зображенню

$$a \to \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon}_i & \langle tE\rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}_j \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В свою чергу зображення (6) та (8) сильно еквівалентні над кільцем $\mathbf{Z}$ зображенням $\Gamma_{ij,\omega}$ і $\Gamma_{ij,t\omega}$ відповідно. Лема доведена.

Нехай A і B — матриці порядку r над $\mathbf{Z}$. Введемо в розгляд наступну матрицю

$$U(A,B) = \begin{pmatrix} p\pi_1^{-1}(E_r, E_r, E_r) \\ p\pi_2^{-1}(E_r, A, B) \end{pmatrix} \tag{9}$$

(E_r — одинична матриця порядку r).

Нехай

$$\Delta_1 = r\delta_1 + r\delta_2\,,$$

$$\Delta_2 = r\delta_3 + r\delta_4 + r\delta_s$$

— цілком звідні $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s, в яких відповідні незвідні компоненти мають одну і ту ж кратність r.

Нехай

$$\Delta_{A,B} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \langle\langle U(A,B)\rangle\rangle \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

— $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s, в якому значення зв'язуючої функції $\langle\langle U(A,B)\rangle\rangle$ на твірному елементі a групи G_s одержується із матриці (9) заміною її елементів u_{ij} на матриці $\langle u_{ij}\rangle$ (див.(5)). Для цілочислової матриці A через $\overline{A}$ позначимо матрицю над полем $Z_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, що одержується з матриці A приведенням її елементів по модулю p.

Лема 5. *Нехай (A_i, B_i) $(i = 1, 2)$ — дві пари матриць порядку r над $\mathbf{Z}$, $V_i = \Delta_{A_i,B_i}(G_s)$ — образи групи G_s відносно $\mathbf{Z}$-зображення Δ_{A_i,B_i} $(i = 1, 2)$. Групи V_1 і V_2 спряжені над кільцем цілих p-адичних чисел Z_p' тоді і тільки тоді, коли пара матриць $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ подібна над полем Z_p парі матриць $(\overline{A}_2, \overline{B}_2)$.*

Доведення. Група V_1 спряжена над Z_p' групі V_2 тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм φ групи G_s такий, що зображення Δ_{A_1,B_1} еквівалентно над Z_p' зображенню $\Delta^{\varphi}_{A_2,B_2}$ $\big(\Delta^{\varphi}(g) = \Delta(\varphi(g)),\ g \in G_s,\ \Delta = \Delta_{A_2,B_2}\big)$. Із леми 4 витікає, що для будь-якого $\varphi \in \operatorname{Aut} G_s$ $\mathbf{Z}$-зображення $\Delta^{\varphi}_{A_1,B_1}$ і Δ_{A_1,B_1} еквівалентні над кільцем Z_p' (навіть над кільцем p-цілих раціональних чисел). Використовуючи цю обставину та результати роботи [4], неважко закінчити доведення леми.

Лема 5 показує, що задача класифікації всіх циклічних матричних p-груп над кільцем $\mathbf{Z}$ не є простіша, ніж задача про пару матриць над полем Z_p.

Розглянемо наступні $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s:

$$\Gamma_{A,B}\colon \qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & \langle 1\rangle \\ 0 & \Delta(a) \end{pmatrix} \qquad (\Delta = \Delta_{A,B})\,, \tag{11}$$

$$\Gamma_i\colon \qquad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \langle 1\rangle \\ 0 & \widetilde{\varepsilon_1} & \langle\pi_1^i\rangle \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon}_s \end{pmatrix} (i = 0, 1, \ldots, p-2;\ \pi_1 = 1 - \varepsilon_1). \tag{12}$$

Лема 6. *Нехай* Γ *— одне із зображень (11)-(12) і* n *— степінь зображення* Γ. *Тоді* Γ *задовольняє умовам 1)-2) леми 2.*

Доведення. Нехай $G = \Gamma(G_s)$. Кожен елемент групи $H'(G, R^n)$ містить коцикл f, всі компоненти якого нульові , за вийнятком першої компоненти, і якщо ця компонента рівна α ($\alpha \in \mathbf{R}$), то $p^s\alpha \in \mathbf{Z}$. Позначимо цей коцикл через f_α. Легко бачити, що твірним елементом групи $H'(G, R^n)$ є клас, що містить коцикл f_α з $\alpha = p^{-s}$. Додаючи до коцикла f_α кограниці, ми одержимо коцикл виду f_β, де $\beta = \alpha + x$ з дійсним числом x, яке є останньою компонентою вектора-стовпчика X над $\mathbf{R}$ такого, що $(\widetilde{\varepsilon}_s - E)X = 0$ над групою $R = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Із цієї умови неважко одержати, що px має бути цілим числом. Отже, коцикл f_α з $\alpha = p^{-s}$ не когомологічний коциклу f_β з таким β, що $p^{s-1}\beta$ є ціле число. Ми показали виконання умови 1) леми 2 для зображення Γ.

Перевіримо умову 2) цієї леми. Нехай $\Gamma = \Gamma_i$ $(0 \leq i \leq p-2)$ і M — модуль зображення Γ. Тоді $M = M_0 + M_1 + M_s$, де M_0, M_1 — $\mathbf{Z}G_s$-підмодулі в M, $M_0 \cong \mathbf{Z}$, $M_1 \cong R_1$ і $M/M_0 + M_1 \cong R_s$. Легко бачити, що

$$\Gamma(a^p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \langle 1\rangle & \langle 1\rangle & \dots & \langle 1\rangle \\ & \widetilde{\varepsilon_1}^p & \langle \pi_1^i\rangle & \langle \varepsilon\pi_1^i\rangle & \dots & \langle \varepsilon^{p-1}\pi_1^i\rangle \\ & & \widetilde{\varepsilon}_{s-1} & & 0 & \\ & & & \widetilde{\varepsilon}_{s-1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \widetilde{\varepsilon}_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Вважаючи $M_1 = R_1$, зробимо заміну базиса $1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1^{p-2}$ на базис $1, \pi_1, \dots, \pi_1^{p-2}$ в $\mathbf{Z}$-модулі R_1. Тоді $(i+1)$-а компонента координатних стовпчиків елементів $\varepsilon^j\pi^i$ $(j = 0, 1, \dots, p-1)$ в новому базисі буде рівна одиниці по модулю p. Замінимо базисний вектор $e_{i+1} = \pi^i$ в $M_0 + M_1$ на вектор $e'_{i+1} = e_{i+1} + e_0$ (e_0 — базисний вектор в M_0). Тоді в новому базисі всі елементи 1-го рядка, починаючи з 2-го, матриці оператора a^p будуть кратні p. Застосуємо лему 3. В результаті одержимо розклад $M = M_0 + M'$, де M' — інваріантний відносно оператора a^p підмодуль в $\mathbf{Z}$-модулі M. Тим самим для зображення $\Gamma = \Gamma_i$ $(0 \leq i \leq p-2)$ установлено виконання умови 2) леми 2.

Нехай тепер $\Gamma = \Gamma_{A,B}$ і N — модуль зображення Γ. Неважко показати, що $\mathbf{Z}$-модуль N є прямою сумою $N = N_1 + N_2 + N_3$ таких $\mathbf{Z}$-підмодулів, що N_1 і $N_1 + N_2$ є $\mathbf{Z}G_s$-підмодулі в N, а фактор-модуль $(N_1 + N_2)/N_1$ ізоморфний модулю зображення Γ_{p-2} групи G_s. Тепер легко встановити розклад $N = M_0 + N'$ в пряму суму $\mathbf{Z}$-модулів, де $M_0 \cong \mathbf{Z}$ (ізоморфізм $\mathbf{Z}G_s$-модулів) і N' — інваріантний відносно оператора $b = a^{p^{s-1}}$ підмодуль в N. Тобто і в цьому випадку зображення Γ задовольняє умові 2) леми 2. Лема доведена.

Наслідок 1. *Нехай* K_i *— кристалографічна група з точковою групою* $G(K_i) = \Gamma_i(G_s)$ *і коциклом* f_α*, де* $\alpha = p^{-s}$ $(0 \leq i \leq p-2)$. *Тоді групи* $K_0, \dots, K_{p-2}$ *є* n*-вимірними* ($n = p^s - p^{s-1} + p$) *кристалографічними групами без кручення, точкові групи яких є нерозкладні.*

Наслідок 2. *Нехай* $K_{A,B}$ *— кристалографічна група з точковою групою* $G(K_{A,B}) = \Gamma_{A,B}(G_s)$ *і коциклом* f_α*, де* $\alpha = p^{-s}$. *Тоді* $K_{A,B}$ *є група без кручення.*

Доведення теореми 1 витікає із наслідка 2 і наступного зауваження: $\mathbf{Z}$-зображення $\Gamma_{A,B}$ групи G_s є розкладним тільки в тому випадку, коли є розкладним $\mathbf{Z}$-зображення $\Delta_{A,B}$. В свою чергу $\mathbf{Z}$-зображення $\Delta_{A,B}$ є розкладне над кільцем Z'_p тоді і тільки тоді, коли є розкладною пара $(\overline{A}, \overline{B})$ відносно одночасного перетворення подібності над полем Z_p.

Нехай $m = p^s - p^{s-1} + p$. Поряд із зображеннями Γ_i $(i = 0, \dots, p-2)$ (див.(12)) група G_s має ще p нерозкладних зображень степеня m. Щоб ввести ці зображення, розглянемо наступний нерозкладний $\mathbf{Z}G_s$-модуль N ранга p над $\mathbf{Z}$: в модулі N існує елемент e такий, що $e, ae, \dots, a^{p-1}e$ — $\mathbf{Z}$-базис в N і $a^p e = e$. Нехай δ — $\mathbf{Z}$-зображення, що відповідає вказаному $\mathbf{Z}$-базису модуля N. Нехай Γ'_i: $G_s \to GL(m, \mathbf{Z})$ таке $\mathbf{Z}$-зображення, що

$$\Gamma'_i(a) = \begin{pmatrix} \delta & \langle (a-1)^i e \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_s \end{pmatrix} \qquad (i = 0, \ \dots \ , p-1) \ , \tag{13}$$

де $\langle (a-1)^i e \rangle$ — матриця, в якої останній стовпчик є координатний стовпчик елемента $(a-1)^i e \in N$ і всі інші стовпці є нульовими. Із [4] витікає, що зображення (12) та (13) з точністю до p-цілої еквівалентності вичерпують всі нерозкладні $\mathbf{Z}$-зображення групи G_s, степінь яких рівна m.

Лема 7. *В кристалографічній групі K з матричною групою $\Gamma'_i(G_s)$ $(0 \le i \le p-1)$ існують нетривіальні елементи скінченного порядку.*

Доведення. Група $H'(\Gamma'_i(G_s), R^m)$ є циклічна порядку p^{s-1} і породжується тим класом, що містить коцикл $f(T'_i(G_s)) = (p^{-s+1}, \ 0, \ \dots \ , \ 0)$. Розглядаючи $\Gamma'_i(a^p)$, неважко показати, що модуль M зображення є прямою сумою $\mathbf{Z}$-модуля M' ранга i з тривіальною дією оператора a^p та $p-i$ екземплярів $\mathbf{Z}$-модуля M'', який є модулем $\mathbf{Z}$-зображення

$$a^p \to \begin{pmatrix} 1 & \langle 1 \rangle \\ o & \tilde{\varepsilon}_{s-1} \end{pmatrix}$$

групи $G_s = \langle a^p \rangle$. При цьому проекція значень коцикла f на підпростір M' складається із векторів із цілими компонентами.

Нехай φ — рух із групи K, що відповідає матриці $\Gamma'_i(a^{p^{s-1}})$, і K_1 — підгрупа в K, що породжується елементом φ і групою $T(K)$. Використовуючи розклад модуля M, неважко знайти нетривіальні елементи в групі K_1, для яких існують нерухомі точки в E^m. Лема доведена.

Доведення теореми 2 витікає із наслідка 1, леми 7 і частково міститься в доведенні леми 7.

Автори виражають подяку професору П. М. Ґудивку, поради і наукові праці якого вони використовували.

1. *Plesken W.* Some applications of representation theory // Progress in Mathematics, Vol. 95. – 1991. – C. 477–496.

2. *Hiss G., Szczepanski A.* On torsion free crystallographic groups //J. Pure and Appl. Algebra. – 1991. – **74**, №1. – С. 39–56.

3. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, №4. – С. 875–910.

4. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА

Випуск 3

Ужгород 1998

Зміст