МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 5

Ужгород 2000

ЗМІСТ

Короткі повідомлення

Г.Е. Копча (Ужгородський держ. ун-т)

НЕРОЗЩЕПЛЮВАЛЬНІ РОЗШИРЕННЯ НЕРОЗКЛАДНОГО МОДУЛЯ *p*-ЦІЛОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ ПОРЯДКУ p^2

All nonsplit extensions of additive group of the module of indecomposable representations of the cyclic group of order p^2 over the ring of p-integers (p-adic integers) are described up to isomorphysm in the paper. The number of these expansions is equal $4p$-5.

В роботі описуються з точністю до ізоморфізму всі нерозщеплювальні розширення адитивної групи модуля нерозкладного зображення циклічної групи порядку p^2 над кільцем p-цілих (p-адичних) раціональних чисел. Число цих розширень рівно $4p$-5.

Нехай R – область головних ідеалів, що є підкільцем в полі F, G – скінченна група, Γ – точне R-зображення групи G, M – RG-модуль зображення Γ, FM – лінійний простір над полем F такий, що $M \subset FM$ і будь-який R-базис в M є F-базис в FM. Нехай

$$\hat{M} = FM^+ / M^+ \qquad (1)$$

– факторгрупа адитивної групи FM^+ за підгрупою M^+. Група $\hat{M}$ буде RG-модулем. Нехай f – 1-коцикл групи G із значеннями в групі $\hat{M}$. Через $K(G, M, f)$ будемо позначати групу, елементами якої є пари

$$(g,x) \ \ (g \in G, \ \ x \in f(g), f(g) \in \hat{M}) \qquad (2)$$

з наступною дією над цими парами:

$$(g,x)(g',y) = (gg', gy + x), \qquad (g, g' \in G, \ \ x \in f(g); \ \ y \in f(g')). \qquad (3)$$

Група $K(G,M,f)$ є розширення групи M^+ за допомогою групи G. Це розширення розщеплюється тоді і тільки тоді, коли коцикл f буде когомологічний нульовому, тобто коли існує такий вектор $z \in FM$, що

$$f(g) = (g-1)z + M \qquad (g \in G). \qquad (4)$$

Відмітимо (див. [1]), що коли R=**Z**, F=**R**, то група $K(G,M,f)$ ізоморфна багатовимірній кристалографічній групі.

В даній роботі описуються всі нерозщеплювальні розширення $K(G,M,f)$ у випадку, коли $G = H = \langle a \rangle$ – циклічна група порядку p^2, $R = I_p$ – кільце p-цілих раціональних чисел (або кільце p-адичних чисел), M – модуль нерозкладного I_p-зображення групи H.

Відмітимо (див. [2]), що задача описання груп $K(G,M,f)$ для циклічної p-групи G порядка p^n $(n > 4)$ і $R = I_p$ є дикою задачею.

Нехай ε і ζ – первісні корені степенів p і p^2 із одиниці, $I_p[\varepsilon]$ і $I_p[\xi]$ – кільця p-цілих величин полів $Q(\varepsilon)$ і $Q(\zeta)$ відповідно (Q – поле раціональних або p-адичних чисел). Системи елементів $B=\{1,\varepsilon,...,\varepsilon^{p-2}\}$ та $B'=\{B,\xi B,...,\xi^{p-1}B\}$ утворюють I_p-базис в кільцях $I_p[\varepsilon]$ та $I_p[\xi]$ відповідно.

Нехай ε і ξ – матриці операторів множення на ε і ξ в базисах B і B' відповідно. Наступні I_p-зображення групи H є незвідні:

$$\gamma_0: \ a \to 1, \qquad \gamma_1: \ a \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \gamma_2: \ a \to \tilde{\xi}. \tag{5}$$

В роботі [3] класифіковані всі I_p-зображення групи H. Приведемо цю класифікацію. Окрім незвідних I_p-зображень група G_{p^2} має наступні нерозкладні I_p-зображення:

$$T_i: \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta_i\rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \qquad (i = 0,1,...,p-2),$$

де $\langle\delta_i\rangle$ – матриця, всі стовпці якої нульові, за виключенням останнього стовпчика, який складається з координат елемента $\delta_i = (1-\xi)^i$ кільця $I_p[\xi]$ в базисі B' цього кільця;

$$X_i: \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta_i\rangle & \langle 1\rangle \\ & \tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ (\delta_i = (1-\xi)^i); \quad (i=0,1,...,p\text{-}2);$$

$$Y_i: \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta_i\rangle & 0 \\ & \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\delta_i = (1-\xi)^i; \quad i = 0,1,...,p-1),$$

(зображення Y_0 еквівалентно регулярному I_p-зображенню групи H);

$$Z_i: \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta_i\rangle & \langle 1\rangle & 0 \\ & \tilde{\varepsilon} & 0 & \langle 1\rangle \\ & & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \ (\delta_i = (1-\xi)^i; \quad i = 1,...,p-2; \quad p > 2);$$

$$Z_0: \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle 1\rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Z_0': \ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із класифікації I_p-зображень групи H витікає наступна класифікація всіх нерозкладних циклічних порядку p^2 матричних груп над кільцем I_p з точністю до спряженості над цим кільцем.

Лема 1. *Нехай H – нерозкладна циклічна порядку p^2 підгрупа в $GL(n,\ I_p)$. Тоді з точністю до спряженості над кільцем I_p група H співпадає з $\Gamma(H)$, де Γ – нерозкладне I_p-зображення групи H. Всі можливі значення числа n і зображень Γ приведені в наступній таблиці:*

n	p^2-p+1	p^2-1	p^2		$p^2+1,\ p>2$
Γ	Z_0	T_i $i=0,1,\ldots,p-2$	X_i $i=0,1,\ldots,p-2$	Y_i $I=0,1,\ldots,p-1$	Z_i $i=0,1,\ldots,p-2$
t_n	1	$p-1$	$2p-1$		$p-2$

(t_n – число неспряжених нерозкладних циклічних порядку p^2 підгруп в $GL(n,\ I_p)$).

Нехай Γ – I_p-зображення групи H і n – степінь цього зображення. За модуль зображення Γ будемо брати модуль $I_p^{(n)}$. Тоді $FI_p^{(n)}=F^{(n)}$ – n-вимірний векторний простір над полем F (I_p – підкільце в полі F). Нехай $g\in H$, $x\in I_p^{(n)}$ (або $x\in F^{(n)}$). Тоді стовпчик компонент вектора gx дорівнює добутку $\Gamma(g)x^T$ матриці $\Gamma(g)$ на стовпчик x^T компонент вектора x. Далі, щоб видно було зв'язок із зображеннями, ми будемо позначати через $M(\Gamma)$ модуль зображення Γ і через $\hat{\Gamma}$ відповідну групу $\hat{M}(\Gamma)$ (див. (1)).

Нехай Γ – I_p-зображення групи H, $B'(H,\hat{\Gamma})$ – група 1-коциклів групи H із значеннями в групі $\hat{\Gamma}(=FM(\Gamma)^+/M(\Gamma)^+)$, $C'(H,\hat{\Gamma})$ – група кограниць (див. (4)), $H'(H,\hat{\Gamma})=B'(H,\hat{\Gamma})/C'(H,\hat{\Gamma})$ – перша група когомологій групи H із значеннями в групі $\hat{\Gamma}$. Елемент групи $H'(H,\hat{\Gamma})$ – це клас кограниць. Якщо $f:H\to\hat{\Gamma}$ когранична, то

$$f(gh)=gf(h)+f(g)\qquad (g,h\in H)\tag{6}$$

Із (6) витікає, що:

$$\begin{gathered}f(a^i)=(1+a+\ldots+a^{i-1})f(a)\qquad (i>1),\\ (1+a+\ldots+a^{p^2-1})f(a)=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Значення $f(a)$ є суміжний клас групи $FM(\Gamma)^+$ по підгрупі $M(\Gamma)^+$ і ми далі будемо вказувати лише один вектор $FM(\Gamma)$, що представляє цей клас. Якщо $f(a)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+M(\Gamma)$, то $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – такі елементи поля F, що $(1+a+\ldots+a^{p^2-1})*$ $*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ є вектором над кільцем I_p. Використаємо ці позначення в наступній лемі.

Лема 2. *Нехай Γ – одне із зображень γ_3, Y_0 або T_j (j=0,1,...,p-2). Тоді група $H'(H,\hat{\Gamma})$ є нульова. Нехай Γ – одне із зображень Z_0 або X_i (i=0,1,...,p-2), або Y_j (j=1,...,p-1). Тоді $H'(H,\hat{\Gamma}) = \langle f \rangle$ – циклічна група порядку p, що породжується класом коциклів з представником f таким, що $(\alpha_1,...,\alpha_n) = (0,...,0,p^{-1})$ $(f(a) = (\alpha_1,...,\alpha_n) + M(\Gamma))$. Нехай Γ – одне із зображень Z_j $(j = 1,...,p-2;\ p > 2)$. Тоді $H'(H,\hat{Z}_j) = \langle f, f' \rangle$ – елементарна абелева група типу (p,p) і породжується коциклами f і f' такими, що*

$$(\alpha_1,...,\alpha_n) = (0,..., p^{-1}),$$
$$(\alpha'_1,...,\alpha'_n) = (0,...,0, p^{-1},0) \quad (n = p^2 + 1),$$
$$(f(a) = (\alpha_1,...,\alpha_n) + M(\Gamma),\ \ f'(a) = (\alpha'_1,...,\alpha'_n) + M(\Gamma)).$$

Доведення. Нехай Γ – будь-яке із перерахованих у лемі I_p-зображень групи Н. Неважко бачити, що I_p-модуль М(Г) зображення Γ можна представити у виді прямої суми I_p-підмодулів:

$$M = M_1 + M_2 \tag{8}$$

таких, що M_1 буде I_pH-модулем, всі незвідні підмодулі якого відмінні від модуля одиничного зображення групи *H*, а у фактор модулі M / M_1 (якщо $M_2 \neq \{0\}$) оператори із групи H будуть одиничними. Тоді оператор (*a*-1) буде оборотним оператором в просторі FM_1. Нехай

$$f:\ \ H \to \hat{\Gamma} = FM(\Gamma)^+ / M(\Gamma)^+$$

– довільний коцикл. Тоді згідно з (8) маємо

$$f(a) = x + y + M(\Gamma),$$

де $x \in FM_1$, $y \in FM_2$. Із оборотності оператора *a*-1 на FM_1 витікає, що $x = (a-1)z$.

Це значить, що у кожному класі коциклів можна вибрати представник f такий, що

$$f(a) = (\alpha_1,....\alpha_n) + M(\Gamma) \qquad (\alpha_i \in F), \tag{9}$$

де вектор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ належить FM_2 (всі компоненти цього вектора, що відповідають базису в FM_1, будуть рівні нулю). Так як $M_2 = \{0\}$ у випадку $\Gamma = \gamma_3$ і $\Gamma = T_j$, то $f(a) = M(\Gamma)$ і $H'(H,\hat{\Gamma}) = \{0\}$. Нехай $\Gamma = X_j$ (або $\Gamma = Z_0$) і в (9)

$$(\alpha_1,...\alpha_n) = (0,...,0,\alpha) \qquad (\alpha \in F). \tag{10}$$

Із (7) витікає, що

$$p^2(\xi-1)^{-1}\alpha \in I_p[\xi]. \tag{11}$$

Так як $(\xi-1)^{-1}$ не належить $Ip[\xi]$, а $p(\xi-1)^{-1} \in I_p[\xi]$, то із (11) слідує, що $p\alpha \in I_p$. Взявши $\alpha = p^{-1}$, ми одержимо твірний елемент f в групі $H'(H, X_j)$ (і в групі $H'(H, Z_0)$).

Нехай $\Gamma = Y_j$ і для коцикла $f: H \to \hat{Y}_j$ виконуються умови (9)-(10). Неважко бачити, що

$$E + \Gamma(a) + \ldots + \Gamma(a^{p^2-1}) = \begin{pmatrix} 0 & X & Y \\ & 0 & Z \\ 0 & & p^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де X, Y, Z – деякі матриці над I_p. Добуток матриці $\Gamma(a) - E$ на матрицю (12) буде нульовою матрицею. Із цієї умови отримуємо

$$Z = -p^2\left\langle(\varepsilon-1)^{-1}\right\rangle, \quad Y = p^2\left\langle(\xi-1)^{-1}\delta_i\right\rangle\left\langle(\varepsilon-1)^{-1}\right\rangle. \tag{13}$$

Легко бачити, що

$$(\varepsilon-1)^{-1} = -p^{-1}(\varepsilon^{p-2} + 2\varepsilon^{p-3} + \ldots + (p-1)).$$

Тоді в (13)

$$Y = -p\left\langle(\xi-1)^{-1}\delta_j\right\rangle. \tag{14}$$

Із вигляду Z в (13) слідує, що $p^2(\varepsilon-1)^{-1}\alpha \in I_p[\varepsilon]$. Тоді $p\alpha \in I_p$. Якщо $j \geq 1$, то із (14) витікає, що αY є матриця над I_p. Це значить, що при $j=1,\ldots,p$-2 вектор $(0,\ldots,0,p^{-1})$ задає твірний елемент в групі $H'(H, \hat{Y}_j)$. Нехай j=0. Тоді із (14) слідує, що αY буде матрицею над I_p тільки в тому випадку, коли $\alpha \in I_p$, що вказує на необхідність рівності $f(a) = M(\Gamma)$. Отже, $H'(H, \hat{Y}_0) = \{0\}$. Описання групи $H'(H, Z_j)$ одержується із описання груп $H'(H, \hat{X}_j)$ та $H'(H, \hat{Y}_j)$. Лема доведена.

Нехай φ – автоморфізм групи H. Тоді існує натуральне число s, взаємно просте з p $(1 \leq s < p^2)$ і таке, що $\varphi(a) = a^s$. Для I_p-зображення Γ групи H визначимо спряжене I_p- зображення $\Gamma\varphi$ таке, що

$$(\Gamma\varphi)(g) = \Gamma(\varphi(g)) \quad (g \in H).$$

Лема 3. *Нехай φ – автоморфізм зрупи H і Γ – нерозкладне I_p-зображення групи H. Тоді спряжене I_p-зображення $\Gamma\varphi$ буде еквівалентно зображенню Γ і при цьому матриця еквівалентності буде мати такий же блочно-трикутний вид, що і матриця $\Gamma(a)$.*

Доведення витікає із леми 1 (див. [4]).

Теорема. *Нехай $H=\langle a\rangle$ – циклічна група порядку p^2. I_p – кільце р-цілих (або цілих р-адичних) раціональних чисел, F – довільне поле, що містить I_p, Γ – нерозкладне I_p-зображення групи H і $M(\Gamma)$ – модуль зображення Γ, f – 1-коцикл групи H із значеннями в групі $\hat{M}(\Gamma)=FM(\Gamma)^+/M(\Gamma)^+$, $K(H,M(\Gamma),f)$ – розширення групи $M(\Gamma)^+$ за допомогою групи H. Тоді з точністю до ізоморфізму всі нерозщеплювальні розширення $K(H,M(\Gamma),f)$ визначаються даними, приведеними в наступній таблиці:*

n	Γ	$f(a)=(\alpha_1,...,\alpha_n)^{\cdot}+M(\Gamma)$	t_n
p^2-p+1	Z_0	$\alpha_n=p^{-1}$, $\alpha_i\neq 0$	1
p^2	1) X_i $i=0,1,...,p-2$	$\alpha_n=p^{-1}$, $\alpha_i=0$ $(i\neq n)$	$2p-2$
	2) Y_i $i=1,...,p-1$	$\alpha_n=p^{-1}$ $\alpha_i=0$ $(i\neq n)$	
p^2+1 $(p>2)$	Z_i $i=1,...,p-2$	1) $\alpha_n=p^{-1}$, $\alpha_i=0$ $(i\neq n)$; 2) $\alpha_{n-1}=p^{-1}$, $\alpha_i=0$ $(i\neq n-1)$	$2p-4$

(n – степінь зображення Γ, f – коцикл, t_n – число груп $K(H.M(\Gamma),...)$).

Доведення. Із леми 2 витікає, що група $K(H,M(\Gamma),f)$ може бути нерозщеплювальним розширенням групи $M(\Gamma)$ тільки для зображення Γ із множини зображень

$$N=\{Z_0, X_i\ (i=0,1,...,p-2),\ Y_i\ (i=1,...,p-1),\ Z_i\ (i=1,...,p-2)\ (p>2)\}. \qquad (15)$$

Для всіх зображень Γ із множини N група $H'(H,\hat{\Gamma})$ є ненульовою групою. Нехай $\Gamma\in N$ і φ – автоморфізм групи H і S – така матриця, оборотна над I_p, що

$$S\Gamma(g)S^{-1}=\Gamma(\varphi(g)) \qquad (g\in H).$$

Для коцикла $f: H\to\hat{\Gamma}$ визначимо функцію $f^{\varphi}: H\to\hat{\Gamma}$, поклавши

$$f^{\varphi}(g) = Sf\left(\varphi^{-1}(g)\right) \quad (g \in G).$$

Тоді f^{φ} є коцикл групи H із значеннями в $\hat{\Gamma}$. Тим самим визначається дія групи $Aut\ H$ автоморфізмів групи H і дія централізатора зображення Γ на групу $B'(H,\hat{\Gamma})$ коциклів групи H із значеннями в групі $\hat{\Gamma}$.

Якщо кожному елементу (g,x) $(g \in H,\ x \in f(g))$ поставити у відповідність елемент $(\varphi(g), Sx)$, то ми одержимо ізоморфізм групи $K(H, M(\Gamma), f)$ на групу $K(H, M(\Gamma) f^{\varphi})$. Отже, класам ізоморфних розширень $K(H, M(\Gamma), ...)$ відповідають орбіти групи $H'(H,\hat{\Gamma})$ відносно вказаних дій над коциклами. Уточнимо ці дії. Нехай $\varphi^{-1}(a) = a^t$ (де t – натуральне число, взаємно просте із p). Тоді із (7) і леми 3 слідує, що для зображень $\Gamma \in N$ $(\Gamma \neq Z_j)$ дія автоморфізму φ на коцикл f зводиться до множення на t останньої компоненти в векторах коцикла f.

Нехай $\Gamma = Z_j$ $(j \geq 1,\ p > 2)$. В централізаторі зображення Z_j існує оператор ρ такий, що $\rho(u_1) = u_1$, $\rho(u_2) = u_2 + \alpha u_1$ $(\alpha \in I_p)$; де u_1, u_2 – базисні вектори I_p-підмодуля M_2 в M (див.(8)). Нехай (x_1, x_2) – останні дві компоненти довільного вектора коцикла f. Тоді у векторі f^{φ} ці компоненти можуть приймати вид (y_1, y_2), де

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

(t – натуральне число, взаємно просте з p, $\alpha \in I_p$).

Нехай $\Gamma \in N$ і $\Gamma \neq Z_j$. Тоді $H'(H,\hat{\Gamma}) \cong \bar{I}_p^{+}$ – адитивна група поля $\bar{I}_p = I_p / pI_p$ із p елементів. На групі I_p^{+} діє група I_p^{*} (елементи із I_p^{+} множаться на елементи групи I_p^{*} – мультиплікативної групи поля I_p). Маємо дві орбіти з представниками $\{0\}$ та $\{1\}$. Друга орбіта визначає клас нерозщеплювальних розширень $K(H, M(\Gamma), f)$, вказаний у таблиці. Нехай $\Gamma = Z_j$ $(p > 2, j \geq 1)$. Тоді $H'(H,\hat{Z}_j) \cong \bar{I}_p^{(2)+}$ – адитивній групі двохвимірного векторного простору над полем $\bar{I}_p$. На цій групі діє підгрупа із $GL(2,\bar{I}_p)$, що складається з матриць в (17). Маємо три орбіти групи $\bar{I}_p^{(2)+}$ з представниками: (0,0), (1,0) і (0,1). Ненульові представники визначають два класи нерозщеплювальних розширень $K(H, M(Z_j), f)$, вказаних в таблиці. Теорема доведена.

1. *Zassenhaus H.* Uber einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen // Comment. Math. Helvetici. – 1948. – **21**, №2. – P.117-141.
2. *Г.Е.Копча, В.П.Рудько.* Про кристалографічні групи без кручення з нерозкладною точковою циклічною *p*-групою // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С.117-123.
3. *Берман С.Д., Гудивок П.М.* Неразложимие представления конечных групп над кольцом целых *p*-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1964. – **28**, №4. – С.875-910.
4. *Ч.Кэртис, И.Райнер.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668с.

Одержано 05.06.2000