МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Карбованець М.І., Лазур В.Ю.

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник
(для студентів спеціальності
172 Телекомунікації та радіотехніка)

Ужгород
Видавництво УжНУ «Говерла»
2019

Карбованець М.І., Лазур В.Ю. Методи математичної фізики: навчальний посібник (для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка). – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. – 74 с.

Посібник створено на базі лекційних курсів “Вища математика”, “Методи математичної фізики” та “Рівняння математичної фізики”, що читаються студентам фізичного факультету УжНУ спеціальностей “Телекомунікації та радіотехніка”, “Кібербезпека”, “Прикладна фізика і наноматеріали”, “Мікро- та наносистемна техніка”, “Фізика та астрономія”, “Біомедична інженерія” та “Середня освіта. Фізика”. Він містить ряд основних ідей і методів математичної фізики в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах та спецкурсах із загальної та теоретичної фізики. Наводиться велика кількість фізичних прикладів, які можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із теоретичної механіки, електродинаміки, квантової механіки, статистичної фізики, квантової теорії поля тощо.

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей університетів.

Розробники:

Карбованець Мирослав Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ»

Лазур Володимир Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Рекомендовано до друку методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 6 від 19 лютого 2019 року)

ЗМІСТ

стор.

ВСТУП

Прогрес фізики вимагає для її теоретичного формулювання все більш і більш витонченої математики. З цього приводу наведемо одну фразу, висловлену англійським фізиком-теоретиком, лауреатом Нобелівської премії П. Діраком, у 1930 році у відомій статті, в якій він теоретично передбачив існування античастинок (див. [1]): "Здається ймовірним, що цей процес неперервного абстрагування буде продовжуватися і в майбутньому, і що успіх фізики повинен у більшій мірі спиратися на неперервні модифікації і узагальнення аксіом на математичній основі, аніж на логічний розвиток якої-небудь однієї вітки математики у фіксованих рамках." Подальший розвиток теоретичної фізики, особливо квантової теорії поля, повністю підтвердив це висловлювання Дірака.

Побудова та дослідження математичних моделей різноманітних фізичних процесів та явищ складає предмет математичної фізики. Метод дослідження, що характеризує цю галузь науки, є математичним за своєю сутністю. Однак постановка задач математичної фізики, будучи тісно пов'язаною з вивченням фізичних проблем, має свої специфічні риси.

Математична фізика почала інтенсивно розвиватися з часів Ісаака Ньютона паралельно з розвитком фізики та математики. У кінці XVII ст. було створено диференціальне та інтегральне числення (І. Ньютон, В. Лейбніц) і сформульовано основні закони класичної механіки та закон всесвітнього тяжіння (І. Ньютон). У XVIII ст. методи математичної фізики почали формуватися при вивченні процесів коливань струн і стержнів, а також задач, пов'язаних з акустикою та гідродинамікою; започатковуються основи аналітичної механіки (Ж.Д'Аламбер, Л.Ейлер, Д.Бернуллі, Ж.Лагранж, П.Лаплас). У XIX ст. ідеї математичної фізики набули нового розвитку у зв'язку із задачами теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки, нелінійних хвильових процесів тощо; створюються теорія потенціалу та теорія стійкості руху (Ж.Фур'є, С.Пуассон, К.Гаус, О.Коші, М.В.Остроградський, П.Діріхле, Б.Ріман, С.В.Ковалевська, Д.Стокс, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, В.А.Стеклов, Д.Гільберт). У XX ст. у математичну фізику включаються задачі квантової фізики і теорії відносності, а також нові проблеми газової динаміки, перенесення частинок та фізики плазми.

Багато задач класичної математичної фізики зводяться до крайових задач для диференціальних (інтегро-диференціальних) рівнянь – рівнянь математичної фізики. Основними математичними засобами дослідження цих задач служать теорія диференціальних рівнянь (включаючи споріднені області: інтегральні рівняння та варіаційне числення), теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені методи та обчислювальна математика.

Вивчення математичних моделей квантової фізики викликало залучення нових областей математики, таких, як теорія узагальнених функцій, теорія функцій багатьох комплексних змінних, топологічних і алгебраїчних моделей. У створенні і розвитку сучасної математичної фізики визначну роль відіграли роботи французького математика Л.Шварца, українських та російських математиків М.М. Боголюбова, І.Н. Векуа, В.С. Владімірова, М.В. Келдиша, Л.В. Канторовича, М.О. Лаврентєва, О.А. Самарського, С.Л. Соболєва, Ю.О. Митропольського, П.Г. Петровського та багатьох інших.

З появою в середині минулого століття електронних обчислювальних машин (ЕОМ) значно розширився клас математичних моделей, котрі допускають детальний аналіз; з'явилася реальна можливість ставити комп’ютерні експерименти. У цій інтенсивній взаємодії теоретичної фізики і сучасної математики створюються якісно нові класи моделей сучасної математичної фізики.

Серед задач математичної фізики слід виділити важливий клас коректно поставлених задач, тобто задач, для яких розв’язок існує, єдиний і неперервно залежить від даних задачі. Хоча ці вимоги, на перший погляд, здаються цілком природними, їх, тим не менше, необхідно доводити в рамках прийнятої математичної моделі. Доведення коректності – це перша апробація математичної моделі: модель несуперечлива (розв’язок існує), модель однозначно описує фізичний процес (розв’язок єдиний), модель малочутлива до похибок вимірювань фізичних величин (розв’язок неперервно залежить від даних задачі).

Таким чином, завдання курсу "Методи математичної фізики" полягає у побудові для фізичних процесів математичних моделей у вигляді диференціального, інтегрального чи інтегро-диференціального рівняння, коректній постановці задачі для цього рівняння та її розв’язуванні.

У пропонованому навчальному посібнику вивчаються, в основному, коректно поставлені крайові задачі для диференціальних рівнянь класичної математичної фізики. Значну увагу приділено питанням координації і узгодження курсу математичної фізики з іншими курсами теоретичної фізики, які вивчаються на фізичних факультетах університетів, а також фізичній інтерпретації одержаних результатів і використанню фізичних уявлень та аналогій. До деяких розділів подано короткі історичні відомості.

У посібнику для скорочення запису замість слів "існує", "для довільного", і "слідує" використовуються відповідно такі логічні символи: $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$.

1. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

При дослідженні різноманітних процесів та явищ часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, окрім незалежних змінних і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні шуканих функцій. Такі рівняння називаються диференціальними (термін “диференціальне рівняння” запровадив у 1676 р. В. Лейбніц).

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і диференціальним рівнянням у частинних похідних, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних.

Переважна більшість задач математичної фізики приводить до диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку, чим і пояснюється необхідність детального вивчення та аналізу саме цього класу диференціальних рівнянь. їх класифікацію розглянемо нижче.

1.1. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку

Означення. Співвідношення, що пов’язує незалежні змінні x, y, невідому функцію $U(x, y)$ та її частинні похідні за змінними x, y, називається диференціальним рівнянням у частинних похідних:

$$\Phi(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, \ldots) = 0. \tag{1.1}$$

У рівнянні (1.1) запроваджено наступні позначення для частинних похідних:

$U_x \equiv \dfrac{\partial U}{\partial x}, U_y \equiv \dfrac{\partial U}{\partial y}, U_{xx} \equiv \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U_{xy} \equiv \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ і т.д.

Рівняння (1.1) може не містити явно x, y або $U(x, y)$, але обов’язково має містити хоча б одну частинну похідну невідомої функції $U(x, y)$ (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння (1.1), називають порядком цього рівняння.

Функція $U(x, y)$, неперервна в області D разом із її частинними похідними, що входять у рівняння (1.1), яка при підстановці у це рівняння обертає його у тотожність за незалежними змінними, називається регулярним або класичним розв’язком рівняння (1.1).

Надалі будемо розглядати диференціальні рівняння другого порядку.

Рівняння називається лінійним відносно старших похідних, якщо воно має вигляд

$$a_{11} U_{xx} + 2a_{12} U_{xy} + a_{22} U_{yy} + F(x, y, U, U_x, U_y) = 0, \tag{1.2}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} - задані функції x і y. Якщо ж коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} залежать не тільки від x і y, а, подібно до F, є функціями x, y, U, U_x, U_y, то таке рівняння називається квазілінійним.

Рівняння називається лінійним, якщо воно лінійне як відносно старших похідних U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, так і відносно невідомої функції U та її перших похідних U_x, U_y:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + b_1U_x + b_2U_y + cU = f, \tag{1.3}$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - функції тільки x і y. Термін "лінійне рівняння" пояснюється тим, що невідома функція U та її похідні $U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}$ входять у рівняння лінійно.

Рівняння виду (1.3), коефіцієнти якого не залежать від x і y, називається лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Рівняння (1.3) називають лінійним неоднорідним, якщо $f(x, y) \neq 0$, і лінійним однорідним, якщо $f(x, y) \equiv 0$.

1.2. Типи рівнянь другого порядку

Відомо (див., наприклад [2]), що криві другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \tag{1.4}$$

поділяються на три суттєво різні типи (гіперболічний, еліптичний та параболічний) в залежності від знака дискримінанта $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ квадратичної форми $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, а запровадження нових змінних дозволяє рівняння кривої (1.4) записати у найпростішій (канонічній) формі. Аналогічно, в основу класифікації квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F(x, y, U, U_x, U_y) = 0 \tag{1.5}$$

покладемо його дискримінант $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, а спрощення – зведення до канонічного виду – досягається також за допомогою заміни незалежних змінних x і y.

Кажуть, що рівняння (1.5) у точці (x, y) буде гіперболічного типу, якщо $\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$; параболічного типу, якщо $\Delta(x, y) = 0$; еліптичного типу, якщо $\Delta(x, y) < 0$. У тому випадку, коли умови $\Delta(x, y) > 0$, $\Delta(x, y) = 0$, $\Delta(x, y) < 0$ виконуються у кожній точці (x, y) області D, говорять, відповідно, що в області D рівняння (1.5) буде гіперболічного, параболічного, еліптичного типу. Якщо коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} рівняння (1.5) в області D сталі, дискримінант $\Delta(x, y) \equiv const$, тип рівняння буде один і той самий у всіх точках області D. Проте, якщо дискримінант залежить від (x, y), то може виявитися, що в одній частині області D має місце нерівність $\Delta(x, y) > 0$, тобто рівняння буде гіперболічного типу, в іншій частині $\Delta(x, y) < 0$ - еліптичного типу, а на кривій $\Delta(x, y) = 0$ відбувається виродження типу рівняння. У цьому випадку криву $\Delta(x, y) = 0$ називають лінією параболічного виродження. Так, наприклад, рівняння

$$xU_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} + b_1U_x + b_2U_y + cU = f$$

має дискримінант $\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 5x$. Це рівняння буде гіперболічного типу при $1 - 5x > 0$, еліптичного типу при $1 - 5x < 0$, а на лінії $1 - 5x = 0$ виникає параболічне виродження типу.

Проведена вище класифікація рівнянь другого порядку може бути перенесена і на більш загальний випадок n незалежних змінних $n > 2$.

1.3. Інваріантність типу диференціального рівняння

Розглянемо в області D квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x, y:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F(x, y, U, U_x, U_y) = 0. \tag{1.6}$$

Надалі будемо вважати, що коефіцієнти $a_{ij}(i, j = 1,2)$ - неперервні в області D функції і покажемо, що тип рівняння інваріантний відносно перетворень незалежних змінних.

Перейдемо в рівнянні (1.6) до нових незалежних змінних за формулами

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \tag{1.7}$$

де $\xi(x, y), \eta(x, y)$ є неперервними функціями разом з частинними похідними до другого порядку включно. Припустимо, що перетворення (1.7) невироджене, тобто система (1.7) однозначно розв’язна в околі будь-якої точки $(x, y) \in D$. Це буде мати місце, якщо якобіан перетворення (1.7) не обертається в нуль у жодній точці області D:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.8}$$

Розглядаючи тепер $U(\xi, \eta)$ як складену функцію від (x, y), знайдемо частинні похідні $U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}$ і підставимо отримані вирази у рівняння (1.6). В результаті отримаємо:

$$\bar{a}_{11}U_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}U_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}U_{\eta\eta} + \bar{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0, \tag{1.9}$$

де запроваджено позначення

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

Зауважимо, що у випадку, коли вихідне рівняння (1.6) лінійне, тобто

$$F(x, y, U, U_x, U_y) = b_1U_x + b_2U_y + cU + f,$$

$\bar{F}$ має вигляд

$$\bar{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = \bar{b}_1U_\xi + \bar{b}_2U_\eta + \bar{c}U + \bar{f}.$$

Таким чином, перетворене рівняння (1.9) також залишається лінійним.

Обчислимо тепер дискримінант рівняння (1.9); одержимо

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(\xi, \eta) &= \left(\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\right) = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\cdot\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2 = \\ &= \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\cdot\left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right)\end{aligned} \quad . \quad (1.10)$$

Таким чином, $\bar{\Delta} = \Delta \cdot \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right)^2$. Звідси видно, що, якщо коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} неперервні в околі точки (x, y), а перетворення (1.7) невироджене, то знаки дискримінантів Δ і $\bar{\Delta}$ в околі відповідних точок (x, y) і (ξ, η) збігаються, отже тип рівняння зберігається.

1.4. Зведення рівнянь другого порядку до канонічного вигляду

Природно виникає питання: як вибрати змінні ξ і η, щоб рівняння в цих змінних мало найпростішу – канонічну форму? У цьому розділі ми дамо відповідь на поставлене питання для рівняння (1.6), лінійного відносно старших похідних з двома незалежними змінними x і y.

Спробуємо вибрати за змінні ξ і η такі функції, щоб у перетвореному рівнянні (1.9) оберталися у нуль коефіцієнти біля $U_{\xi\xi}$ і $U_{\eta\eta}$:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0, \quad (1.11)$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = 0. \quad (1.12)$$

Обидва рівняння (1.11), (1.12), по суті, збігаються, а тому нам необхідно знайти два незалежні розв’язки одного рівняння:

$$a_{11}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad (1.13)$$

де через ω позначено одну із функцій ξ, η. Нехай $\omega = \varphi(x, y)$ - деякий частинний розв’язок рівняння (1.13). Тоді, поклавши $\xi = \varphi(x, y)$, одержимо із (1.11), що $\bar{a}_{11} = 0$. Таким чином, задача про вибір нових незалежних змінних зводиться до інтегрування рівняння (1.13).

Означення. Звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0, \tag{1.14}$$
яке відповідає рівнянню (1.13), називається характеристичним, а його інтеграли – характеристиками рівняння у частинних похідних (1.6).

Поклавши $\xi = \varphi(x, y)$, де $\varphi(x, y) = const$ є загальним інтегралом рівняння (1.14), ми занулимо коефіцієнт біля другої похідної $U_{\xi\xi}$. Аналогічно, якщо $\psi(x, y) = const$ є другим загальним інтегралом рівняння (1.14), незалежним від $\varphi(x, y)$, то, поклавши $\eta = \psi(x, y)$, ми перетворимо у нуль і коефіцієнт біля $U_{\eta\eta}$.

Припустимо надалі, що серед коефіцієнтів рівняння (1.6) хоча б один відмінний від нуля. Нехай $a_{11} \neq 0$. Розв'яжемо рівняння (1.14) відносно y':
$$y' = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \; y' = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.15}$$

В залежності від значення дискримінанта $\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ в розглядуваній області значень x, y можливі три випадки.

1. Гіперболічний тип, $\Delta(x, y) > 0$. Праві частини в рівняннях (1.15) дійсні і різні, тому загальні інтеграли
$$\varphi(x, y) = C_1, \psi(x, y) = C_2 \tag{1.16}$$
цих рівнянь дійсні і незалежні. Прийнявши за нові незалежні змінні $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ характеристики (1.16) рівняння (1.6), зведемо його до вигляду
$$2\overline{a}_{12}U_{\xi\eta} + \overline{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0. \tag{1.17}$$
Але запровадження нових змінних не змінює тип рівняння, і тому, як видно із (1.10), $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. За побудовою $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} = 0$, отже $\overline{a}_{12} \neq 0$. Поділивши рівняння (1.17) на $2\overline{a}_{12}$, перепишемо його у вигляді
$$U_{\xi\eta} + F_1(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0, \tag{1.18}$$
який називають першим канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу (рівнянням у характеристичних змінних).

Якщо запровадити нові незалежні змінні за формулами $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \xi - \eta$, то рівнянню (1.18) можна надати іншої форми запису
$$U_{\xi_1\xi_1} - U_{\eta_1\eta_1} + F_1(\xi_1, \eta_1, U, U_{\xi_1}, U_{\eta_1}) = 0, \tag{1.19}$$
яка називається другим канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу.

2. Еліптичний тип, $\Delta(x, y) < 0$. У цьому випадку праві частини в рівняннях (1.15) комплексні і спряжені, тому загальні інтеграли цих рівнянь
$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = C_1, \psi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = C_2$$
також будуть комплексно спряженими. Якщо ввести нові змінні, як і у випадку рівнянь гіперболічного типу, за допомогою співвідношень

$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, то в результаті перетворення рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\eta} + F_2(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0. \qquad (1.20)$$

Але, на відміну від гіперболічного випадку, тут ξ і η - комплексні змінні. Бажаючись залишатися в області дійсних змінних, запровадимо нові незалежні змінні $\xi_1 = \dfrac{\xi + \eta}{2} = \alpha(x, y)$, $\eta_1 = \dfrac{\xi - \eta}{2i} = \beta(x, y)$. Перетворюючи похідні до нових змінних замість (1.20) одержимо рівняння вигляду

$$U_{\xi_1\xi_1} + U_{\eta_1\eta_1} + F_3(\xi_1, \eta_1, U, U_{\xi_1}, U_{\eta_1}) = 0, \qquad (1.21)$$

який називають канонічним виглядом рівняння еліптичного типу.

3. Параболічний тип, $\Delta(x, y) = 0$. Праві частини в рівняннях (1.15), а, значить, і їх інтеграли (характеристики рівняння (1.6)) збігаються – існує лише одна сім'я характеристик $\varphi(x, y) = C$. Нові змінні запровадимо рівностями $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, де $\varphi(x, y)$ - характеристики рівняння (1.6), а $\psi(x, y)$ - довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від $\varphi(x, y)$; зручно вибрати $\psi = x$, або $\psi = y$.

Функція $\omega = \varphi(x, y)$ є розв'язком рівняння (1.13), тому

$$\bar{a}_{11} \equiv a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 \equiv 0.$$

Тип рівняння не змінюється в результаті перетворення, тому $\overline{\Delta} = \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = 0$. Але $\bar{a}_{11} = 0$, значить $\bar{a}_{12} = 0$ і перетворене рівняння (1.9), після ділення на $\bar{a}_{22}$, зводиться до канонічного вигляду

$$U_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0. \qquad (1.22)$$

Узагальнюючи викладене, можемо зробити такі висновки. Рівняння гіперболічного типу ($\Delta(x, y) > 0$) має дві сім'ї незалежних характеристик $\varphi(x, y) = C_1, \psi(x, y) = C_2$; через кожну точку $(x, y) \in D$ проходить по одній характеристиці з кожної сім'ї. Якщо за нові незалежні змінні вибрати характеристики, то рівняння (1.6) перетвориться до першого канонічного вигляду (1.18). Характеристичні напрями (напрями, дотичні до характеристик) визначаються рівностями (1.15).

Рівняння еліптичного типу ($\Delta(x, y) < 0$) дійсних характеристик не має. Якщо за нові змінні вибрати дійсну та уявну частини комплексної характеристики $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = C$, то рівняння (1.6) зводиться до канонічного вигляду (1.21).

Рівняння параболічного типу ($\Delta(x, y) = 0$) має одну сім'ю характеристик $\varphi(x, y) = C$; характеристичний напрямок визначається рівністю $y' = a_{12} / a_{11}$. Якщо за нові змінні вибрати $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ не залежить від $\varphi(x, y)$, то рівняння (1.6) зводиться до канонічного вигляду (1.22).

У випадку, коли незалежних змінних більше двох, можна довести, що в кожній точці $(x_1, x_2, ..., x_n)$ квазілінійне рівняння другого порядку залежно від типу зводиться до однієї з наступних канонічних форм:

$$U_{tt} = \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i} + F\left(x_1, ..., x_n, x_t, U, U_{x_1}, ..., U_{x_n}, U_t\right) \text{ (гіперболічний тип);}$$

$$U_t = \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i} + F\left(x_1, ..., x_n, U, U_{x_1}, ..., U_{x_n}\right) \text{ (параболічний тип);}$$

$$\sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i} + F\left(x_1, ..., x_n, U, U_{x_1}, ..., U_{x_n}\right) = 0 \text{ (еліптичний тип).}$$

2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Із різноманітних рівнянь у частинних похідних найбільш часто зустрічаються, а, отже, і найбільш докладно вивченими є цілком певні рівняння, відомі під назвою основних рівнянь математичної фізики. До останніх відносяться:

2.1. Рівняння коливань

Багато задач механіки (коливання струн, стержнів, мембран і тривимірних об'ємів) та фізики (електромагнітні коливання) описується рівнянням коливань вигляду

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = div\big(p(x)gradU(x,t)\big) - q(x)U(x,t) + F(x,t), \qquad (2.1)$$

де невідома функція $U(x,t)$ залежить від $n(n=1,2,3)$ просторових координат $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ і часу t; коефіцієнти $\rho(x)$, $p(x)$ та $q(x)$ визначаються властивостями середовища, в якому відбувається коливний процес; вільний член $F(x,t)$ характеризує інтенсивність зовнішнього збурення. У рівнянні (2.1), у відповідності із означенням операторів div і $grad$,

$$div(pgradU) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial U}{\partial x_i}\right).$$

Якщо $\rho(x)$, $p(x)\equiv const$ і $q(x)\equiv 0$, поклавши $\frac{p}{\rho}=a^2, \frac{F(x,t)}{\rho} = f(x,t)$, перейдемо до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}\right) + f(x,t). \qquad (2.2)$$

Запровадивши стандартне позначення для диференціального оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

можемо хвильове рівняння подати у еквівалентному вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\Delta U + f(x,t).$$

Різноманітні коливні процеси описуються рівнянням гіперболічного типу.

2.2. Рівняння теплопровідності

Процеси поширення теплоти або дифузії частинок в середовищі описуються наступним рівнянням параболічного типу:

$$\rho(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = div\big(p(x)gradU(x,t)\big) - q(x)U(x,t) + F(x,t). \qquad (2.3)$$

Зокрема, якщо $\rho(x),\ p(x) \equiv const$ і $q(x) \equiv 0$, то рівняння (3.3) набуває вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + f(x,t).$$

Це рівняння називається рівнянням теплопровідності.

2.3. Стаціонарні рівняння

Якщо процеси, що описуються рівнянням коливань або теплопровідності, не залежать від часу ($U(x,t) = U(x), F(x,t) = F(x)$) – стаціонарні процеси – то ми приходимо до рівняння еліптичного типу

$$-div\big(p(x)gradU(x)\big) + q(x)U(x) = F(x). \qquad (2.4)$$

При $p(x) = const$ і $q(x) = 0$ рівняння (3.4) називається рівнянням Пуассона:

$$\Delta U = -f,\ f = \frac{F}{p}. \qquad (2.5)$$

При відсутності зовнішнього збурення ($f(x) \equiv 0$) рівняння (2.5) зводиться до рівняння Лапласа

$$\Delta U = 0. \qquad (2.6)$$

2.4. Рівняння Гельмгольца

До важливих рівнянь еліптичного типу ми приходимо, якщо будемо шукати розв’язок хвильового рівняння

$$U_{tt} = a^2 \Delta U \qquad (2.7)$$

у вигляді добутку

$$U(x,t) = V(x)T(t). \qquad (2.8)$$

Підставивши (2.8) у (2.7), одержимо

$$V(x)T''(t) = a^2 T(t)\Delta V(x), \qquad (2.9)$$

а поділивши обидві частини (2.9) на $a^2 V(x)T(t)$, прийдемо до рівності

$$\frac{\Delta V(x)}{V(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}, \qquad (2.10)$$

яка може мати місце тільки у випадку, коли відношення сталі, бо ліва частина (2.10) не залежить від t, а права - від x. Прирівнюючи відношення до сталої λ, для $T(t)$ і $V(x)$ відповідно одержимо рівняння

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad (2.11)$$

$$\Delta V(x) - \lambda V(x) = 0. \tag{2.12}$$

Рівняння еліптичного типу для визначення $V(x)$ називають рівнянням Гельмгольца.

2.5. Рівняння Максвела

Нехай у деякому середовищі наявне змінне електромагнітне поле. Позначимо через $\vec{E}(x,t) = (E_1, E_2, E_3)$ - напруженість електричного поля, $\vec{H}(x,t) = (H_1, H_2, H_3)$ - напруженість магнітного поля, $\rho(x)$ - густину електричних зарядів, ε - діелектричну проникність середовища, μ - магнітну проникність середовища, $\vec{I}(x,t) = (I_1, I_2, I_3)$ - струм провідності. Тоді ці величини задовольняють наступній (лінійній) системі диференціальних рівнянь, які називають рівняннями Максвела:

$$div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 4\pi\rho, \;\; div\left(\mu\vec{H}\right) = 0, \tag{2.13}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}, \tag{2.14}$$

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{I}, \tag{2.15}$$

де $c = 3\cdot 10^8$ ì /с - швидкість світла у вакуумі.

Рівняння (2.14) виражає закон Фарадея, а (2.15) – закон Ампера.

Відмітимо деякі важливі у застосуваннях випадки рівнянь Максвела.

а) $\rho = 0, \varepsilon = const, \mu = const, \vec{I} = \lambda\vec{E}$ (закон Ома), $\lambda = const$. Застосовуючи до рівнянь (2.14) і (2.15) оператор rot і використовуючи рівняння (2.13), для компонент векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ одержимо так зване телеграфне рівняння

$$\Box_a U + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \; a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{2.16}$$

де $\Box_a$ - хвильовий оператор (оператор Даламбера):

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta.$$

б) $\varepsilon = const, \mu = const, \vec{I} = 0$. Запровадивши чотирикомпонентний електромагнітний потенціал $(\varphi_0, \vec{\varphi}), \vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, зобразимо розв'язок рівнянь Максвела у вигляді

$$\vec{E} = grad\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}, \; \vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{\varphi}. \tag{2.17}$$

При цьому компоненти електромагнітного потенціалу повинні задовольняти хвильовим рівнянням

$$\Box_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2 \mu}\rho, \qquad \Box_a \vec{\varphi} = 0, \tag{2.18}$$

та умові Лоренца

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - div\vec{\varphi} = 0. \tag{2.19}$$

в) Якщо процес стаціонарний, то рівняння Максвела перетворюються у рівняння електростатики

$$div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 4\pi\rho,\ rot\vec{E} = 0$$

і в рівняння магнітостатики

$$div\left(\mu\vec{H}\right) = 0,\ rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{I}.$$

При $\varepsilon = const$ електростатичний потенціал φ_0 задовольняє, в силу (2.18), рівнянню Пуассона (2.5) при $f = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$.

При перетворенні рівнянь Максвела ми користувалися наступними формулами векторного аналізу: $divgrad = \Delta, rotrot = graddiv - \Delta,\ rotgrad = 0,$ $divrot = 0$.

2.6. Рівняння Шредінґера

Вивчення фізичних властивостей атомів, молекул і їх складових привело на початку XX ст. дослідників до переконання, що в мікросвіті діють свої закони, якісно відмінні від законів макросвіту. Поступово сутність цих законів була розкрита і в кінці двадцятих років в атомній фізиці склалася струнка логічна система – квантова механіка.

Основне твердження квантової механіки полягає в тому, що поведінка будь-якої мікрочастинки (скажімо, електрона) описується деякою (взагалі кажучи, комплексною) функцією координат і часу $\Psi(x,t)$, причім, квадрат її модуля характеризує густину ймовірності, тобто ймовірність знаходження частинки в одиниці об’єму простору в момент часу t.

Нехай квантова частинка маси m_0 рухається у зовнішньому силовому полі з потенціалом $V(x)$. Тоді хвильова функція $\Psi(x,t)$ цієї частинки задовольняє так званому рівнянню Шредінґера

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi + V\Psi, \tag{2.20}$$

де $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}\ \mathit{åðã} \cdot \tilde{n}$ - стала Планка.

Якщо енергія E частинки має певне значення, то такий стан її називається стаціонарним. У цьому випадку хвильова функція $\Psi(x,t)$ має вигляд:

$$\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\Psi(x),$$

де хвильова функція $\Psi(x)$, в силу (2.20), задовольняє стаціонарному рівнянню Шредінґера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi + V\Psi = E\Psi\,. \qquad (2.21)$$

При $V = 0$ (вільна частинка) рівняння Шредінгера (2.21) перетворюється в однорідне рівняння Гельмгольца (2.12).

Як і в рівнянні Гельмгольца, в задачах розсіювання на потенціалі V необхідно вимагати виконання умов випромінювання Зоммерфельда на нескінченності (при $E \geq 0$; див., наприклад, Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц [3], гл.III і XVIII).

Рівняння Шредінґера є основним диференціальним рівнянням нерелятивістської квантової механіки і, отже, одним із самих поширених типів рівнянь в частинних похідних математичної фізики.

2.7. Рівняння Кляйна-Гордона та рівняння Дірака

Хвильова функція $\varphi(x_0, x), x_0 = ct, x = (x_1, x_2, x_3)$, де с – швидкість світла у вакуумі, яка описує вільну релятивістську (псевдо) скалярну частинку маси m_0, задовольняє рівнянню Кляйна-Гордона-Фока

$$(\Box + m_0^2)\varphi = 0. \qquad (2.22)$$

Для описання вільної релятивістської частинки маси m_0 зі спіном 1/2 (електрон, протон, нейтрон, нейтрино та інші) служить чотирикомпонентна хвильова функція (спінор)

$$\Psi(x_0, x) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}.$$

Вона задовольняє рівняння Дірака – систему чотирьох лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку:

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\Psi(x_0, x) = 0\,, \qquad (2.23)$$

де I - одинична матриця, а γ^k - матриці Дірака (у реалізації Паулі):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння Дірака є результатом матричної факторизації рівняння Клейна-Гордона-Фока

$$\left(i\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I \right)\left(i\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I \right) = -(\Box + m_0^2) I$$

(див. [4]).

Зауважимо, що у рівняннях (2.22) і (2.23) змінні x_0 і $x = (x_1, x_2, x_3)$ входять рівноправним чином. Тому виклад квантової теорії із самого початку стає релятивістськи коваріантним.

3. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Рівняння з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу найчастіше зустрічаються у фізичних задачах, пов'язаних з процесами коливань. Характерною особливістю цих процесів є скінчена швидкість їх поширення.

3.1. Найпростіші задачі, які приводять до рівнянь гіперболічного типу. Рівняння поперечних коливань струни

Продемонструємо вивід рівняння гіперболічного типу на прикладі малих поперечних коливань струни. Струною будемо називати тонку, гнучку, пружну нитку, закріплену своїми кінцями у двох точках.

У процесі одержання рівняння малих поперечних коливань струни будемо виходити з таких припущень:

а) товщиною і вагою струни нехтуємо;

б) сили пружності, які виникають у струні, підкоряються закону Гука (сила пружності прямо пропорційна відносному видовженню);

в) струна абсолютно гнучка (не чинить опір згинанню; з математичної точки зору ця умова означає, що сили натягу, які виникають у струні, завжди напрямлені по дотичних до її миттєвого профілю);

г) всі точки струни здійснюють коливання в одній площині в напрямку, перпендикулярному до стану рівноваги;

д) відхилення точок струни і кути її нахилу до положення рівноваги малі.

В основу виведення покладемо принцип Даламбера: рівнодійна всіх сил, які діють на систему, включаючи і сили інерції, дорівнює нулю. Нехай у площині (x,U) струна здійснює малі поперечні коливання в околі свого положення рівноваги, що збігається з віссю абсцис Ох. Величину відхилення струни від положення рівноваги в точці з абсцисою x у момент часу t позначимо через $U(x,t)$, так що $U = U(x,t)$ - рівняння форми струни у момент часу t.

Нехай на одиницю довжини струни задані: $\rho(x)$ - лінійна густина струни в точці x; $F(x,t)$ - густина зовнішніх сил, що діють на струну в точці x в момент часу t і напрямлених перпендикулярно осі OX в площині (x,U); $-k(x)\dfrac{\partial U}{\partial t}$ - густина сили опору середовища, пропорційна швидкості руху точок струни U_t.

Позначимо через $T(x,t)$ величину сили натягу струни в точці з абсцисою x у момент часу t, $\alpha(x,t)$ - кут між дотичною до кривої $U = U(x,t)$ у точці з абсцисою x та віссю Ох при фіксованому t, ds диференціал довжини дуги струни. Обмежуючись розглядом лише малих коливань струни (умова (д)), нехтуємо величинами вищого порядку малості у порівнянні з $tg\alpha = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x$. Тоді в межах прийнятої нами точності одержимо:

$$ds = \sqrt{1+U_x^2}\,dx = \left(1 + \frac{1}{2}U_x^2 + \ldots\right)dx \approx dx,$$

$$tg\alpha(x) = U_x, \cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = 1 - \frac{1}{2}U_x^2 + \ldots \approx 1,$$

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{U_x}{\sqrt{1+U_x^2}} = U_x\left(1 - \frac{1}{2}U_x^2 + \ldots\right) \approx U_x;$$

тут ми скористалися розвиненням $\left(1+U_x^2\right)^{\pm 1/2}$ у ряд Тейлора за степенями U_x.

Виділимо уявно деякий малий елемент струни з проекцією (x_1, x_2), а відкинуті частини замінимо силами натягу $\vec{T}(x_1,t)$ і $\vec{T}(x_2,t)$, напрямленими по дотичним до струни у точках з координатами x_1, x_2, відповідно (рис.3.1). Довжина дуги виділеної ділянки рівна

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U_x^2}\,dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Таким чином, у межах нашого наближення довжина струни не змінюється з часом і, отже, сила натягу $T(x,t)$ не залежить від t.

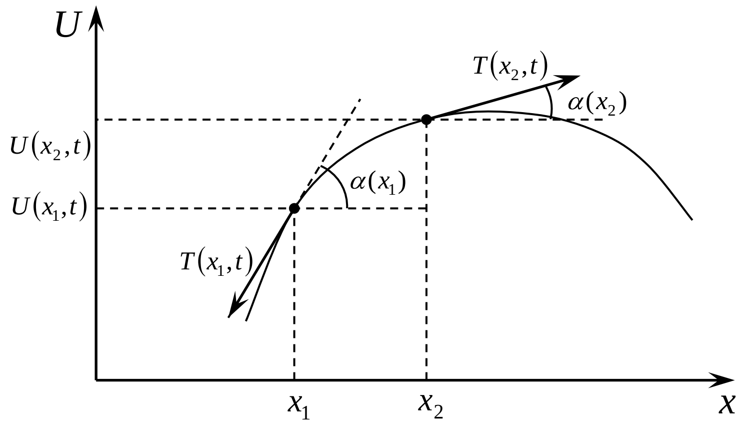

Рисунок 3.1.

Покажемо також, що сила натягу не залежить і від x, тобто $T(x) = const$. Проектуючи на вісь OX сили, що діють на виділений елемент струни (x_1, x_2), за принципом Даламбера одержимо

$$T(x_1)\cos(\pi - \alpha(x_1)) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

звідки

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) = T(x_2)\cos\alpha(x_2).$$

Але $\cos\alpha(x_1) \approx \cos\alpha(x_2) \approx 1$, тому $T(x_1) \approx T(x_2)$, тобто сила натягу $T(x,t)$ не залежить від x. Таким чином, з точністю до малих другого порядку маємо $T(x,t) \equiv T = const$. Зауважимо, що хоча сила натягу вздовж струни стала за модулем, вона у відхиленій струні змінюється від точки до точки за напрямком.

Принагідно зауважимо, що проекція сил натягу на вісь Ou буде рівна

$$\begin{aligned} &T\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha(x_1)\right) + T\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x_2)\right) = \\ &= T(-\sin\alpha(x_1) + \sin\alpha(x_2)) \approx \\ &\approx T(-U_x(x_1,t) + U_x(x_2,t)) = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} TU_{xx}(x,t)dx. \end{aligned}$$

Оскільки за припущенням сили інерції, зовнішні сили та сили опору напрямлені вздовж вертикальної осі Ou, то проекція результуючої сили на вісь Ou буде

$$\int_{x_1}^{x_2} [TU_{xx} + F(x,t) - k(x)U_t - \rho(x)U_{tt}]dx = 0. \tag{3.1}$$

Вважаючи підінтегральну функцію неперервною, застосуємо теорему про середнє значення інтеграла, скоротивши одержану при цьому рівність на $(x_2 - x_1)$ та перейшовши до границі при $x_1 \to x, x_2 \to x$. В результаті одержимо диференціальне рівняння поперечних коливань струни

$$TU_{xx} + F(x,t) - k(x)U_t - \rho(x)U_{tt} = 0. \tag{3.2}$$

Запровадивши позначення

$$\frac{T}{\rho(x)} = a^2, \quad \frac{k(x)}{\rho(x)} = k_1, \quad \frac{F(x,t)}{\rho(x)} = f(x,t),$$

перепишемо рівняння вимушених коливань струни в середовищі з опором у вигляді

$$U_{tt} + k_1 U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t). \tag{3.3}$$

Зокрема, якщо $k(x) = 0$, одержимо хвильове рівняння в одновимірному просторі E_1, що описує вимушені коливання в середовищі без опору

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t); \tag{3.4}$$

тут $f(x,t)$ – густина зовнішніх сил, віднесена до одиниці маси струни.

Однорідне хвильове рівняння $(f(x,t) \equiv 0)$ у просторі E_1

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \tag{3.5}$$

описує вільні коливання струни.

3.2. Граничні і початкові умови

При математичному описанні фізичного процесу перш за все потрібно поставити задачу, тобто сформулювати умови, достатні для однозначного визначення процесу.

Диференціальне рівняння із звичайними, а тим більше із частинними похідними має, взагалі кажучи, незліченну множину розв'язків. Для того, щоб із всієї сукупності розв'язків виділити конкретний, що описує даний процес, необхідно до рівняння приєднати додаткові умови, характер яких суттєво залежить від типу рівняння. Вказані додаткові умови поділяються на граничні та початкові.

Граничні умови. На коливання струни, що описуються рівнянням (3.3), істотно впливає характер закріплення її кінців, тобто граничні умови.

Будемо говорити, що закріплення точки струни в напрямі вектора $\vec{v}$ жорстке, якщо ця точка в напрямі $\vec{v}$ або в протилежному йому напрямі, не може переміщуватися, м'яке – якщо переміщення вільне, пружне – якщо переміщення на величину μ у цьому напрямі викликає у вузлі кріплення реакцію

$$R = -k_1\mu, \quad k_1 > 0. \tag{3.6}$$

У формулу (3.6) для реакції пружного закріплення можна включити жорстке кріплення, поклавши у цьому випадку $k_1 = \infty$, і м'яке, поклавши $k_1 = 0$. Надалі будемо вважати закріплення кінців струни $x = 0, \quad x = l$ уздовж осі Ох жорстким.

Знайдемо умови, що накладаються вузлами кріплення на коливання струни. Виокремимо елемент струни $0 \le x \le x_1 \left(x_2 \le x \le l\right)$, який містить один із її кінців, а відкинуті кріплення і частину струни замінимо реакцією у вузлі кріплення $R(0) = -k_1 U(0,t) \quad \left(R(l) = -k_1 U(l,t)\right)$ і силою натягу T в іншому кінці. Проекція на вісь Ou сил, які діють на елемент $[0, x_1]$ (на елемент $[x_x, l]$) буде:
в околі точки $x = 0$

$$-k_1 U(0,t) + T(x_1)\cos(T(x_1), Ou) + \int_0^{x_1} F(x,t)dx - \int_0^{x_1} k(x) U_t dx - \int_0^{x_1} \rho(x) U_{tt} dx = 0; \tag{3.7}$$

в околі точки $x = l$

$$-k_1 U(l,t) + T(x_2)\cos(T(x_2), Ou) + \int_{x_2}^{l} F(x,t)dx - \int_{x_2}^{l} k(x) U_t dx - \int_{x_2}^{l} \rho(x) U_{tt} dx = 0. \tag{3.8}$$

Але $\cos(T(x_1), Ou) \approx U_x(x_1, t), \quad \cos(T(x_2), Ou) \approx -U_x(x_2, t)$. Підставивши останні вирази у рівності (3.7), (3.8) і перейшовши до границі при $x_1 \to 0$ (при $x_2 \to l$), знайдемо граничну (або крайову) умову у точці $x = 0$ (у точці $x = l$):

$$-k_1 U(0,t) + T U_x(0,t) = 0; \tag{3.9}$$

$$-k_1 U(l,t) - T U_x(l,t) = 0. \tag{3.10}$$

Таким чином, у випадку рівняння коливання струни в залежності від режиму на її кінцях ($x = 0$ і $x = l$) розглядають три основні типи крайових умов:

Крайові умови I роду. Поклавши у формулах (3.9) і (3.10) $k_1 = \infty$, знайдемо умови жорсткого закріплення кінців:

$$U(0,t) = 0; \quad U(l,t) = 0. \tag{3.11}$$

Якщо кінці струни рухаються за заданими законами $\mu_1(t), \quad \mu_2(t)$, то граничні умови будуть неоднорідними:

$$U(0,t) = \mu_1(t); \quad U(l,t) = \mu_2(t), t \geq 0. \tag{3.12}$$

Крайові умови II роду. Поклавши у формулах (3.9) і (3.10) $k_1 = 0$, знайдемо умови м'якого закріплення (кінці вільно рухаються уздовж осі Ou):

$$U_x(0,t) = 0; \quad U_x(l,t) = 0. \tag{3.13}$$

Геометрично це означає, що кут нахилу струни до осі Ох у вузлах кріплення дорівнює нулю. Якщо до кінців струни прикладені сили, які діють у напрямку коливань, крайові умови записуються у вигляді:

$$U_x(0,t) = \nu_1(t); \quad U_x(l,t) = \nu_2(t), t \geq 0, \tag{3.14}$$

де $\nu_1(t)$ і $\nu_2(t)$ - задані функції часу t.

Крайові умови III роду. Кінці струни закріплені пружно ($k_1 \neq 0, k_1 \neq \infty$). Запровадимо позначення: $k_1 / T = h_1$ - для лівого кінця струни і $k_2 / T = h_2$ - для правого кінця струни. Тоді граничні умови у випадку пружного закріплення запишуться у вигляді

$$U_x(0,t) - h_1 U(0,t) = 0; \quad U_x(l,t) + h_2 U(l,t) = 0. \tag{3.15}$$

Початкові умови. Оскільки процес коливання струни залежить від її початкової форми та розподілу швидкостей точок струни, слід задати "початкові умови":

$$\left. \begin{aligned} U(x,t_0) &= \varphi(x), \\ U_t(x,t_0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \tag{3.16}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - задані функції точки x. Таким чином, додаткові умови складаються із граничних і початкових умов. У подальшому ми покажемо, що ці умови цілком визначають розв'язок рівняння коливання струни (3.3).

3.3. Рівняння поздовжніх коливань стержня

Процес поздовжніх коливань можна описати однією функцією $U(x,t)$, яка зображає в момент часу t зміщення точки, що мала в положенні стійкої рівноваги абсцису x. При поздовжніх коливаннях це зміщення здійснюється уздовж осі стержня. Тоді хвильове рівняння в просторі E_1

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t); \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \tag{3.17}$$

описує також малі поздовжні коливання пружного стержня. Тут ρ - об'ємна густина стержня, E - модуль пружності (модуль Юнга) матеріалу, $f(x,t)$ - густина зовнішніх сил, віднесена до одиниці маси.

3.4. Рівняння поперечних коливань мембрани

Нехай мембрана у ненапруженому стані розташована у площині Ox_1x_2, $U(x,t)$ - відхилення точки (x_1, x_2) мембрани від положення рівноваги в перпендикулярному напрямі. Вимушені малі поперечні коливання мембрани описуються неоднорідним хвильовим рівнянням в просторі E_2 (двох геометричних змінних)

$$U_{tt} = a^2\left(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2}\right) + f(x_1, x_2, t); a^2 = \frac{T}{\rho}. \qquad (3.18)$$

Тут ρ - поверхнева густина мембрани, T - сила натягу, розрахована на одиницю довжини границі мембрани, $f(x_1, x_2, t)$ - густина зовнішніх сил, діючих в напрямі, перпендикулярному положенню рівноваги, віднесена до одиниці маси.

3.5. Коливання тривимірного середовища

Неоднорідне хвильове рівняння в просторі E_3

$$U_{tt} = a^2\left(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + U_{x_3x_3}\right) + f(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (3.19)$$

описує малі пружні коливання твердих тіл, коливання газу, звукові коливання, електромагнітні коливання, тощо.

4. МЕТОД ФУР'Є

Метод Фур'є, або метод відокремлення змінних, є одним з найпоширеніших методів розв'язування багатовимірних крайових задач для рівнянь математичної фізики. У цьому розділі метод Фур'є застосовується до розв'язання мішаної задачі для рівняння гіперболічного типу. Обґрунтування методу Фур'є для розв'язання мішаної задачі для рівняння параболічного типу та крайової задачі для рівняння еліптичного типу буде дано у наступних розділах даного посібника.

У класичних працях самого Фур'є та його послідовників метод Фур'є був пов'язаний із відокремленням змінних у диференціальному рівнянні з частинними похідними. У більш загальному розумінні, метод Фур'є є методом розв'язування мішаних задач та задач Коші, який ґрунтується на використанні спектральних властивостей оператора, що входить в дане рівняння.

4.1. Задача Штурма-Ліувілля

(<u>загальна теорія одновимірної задачі на власні значення та власні функції</u>)

Нехай оператор L визначається диференціальним виразом

$$LX(x) \equiv \left(p(x)X'(x)\right)' - q(x)X(x), \quad x \in (0,l),$$

де, стосовно задач про коливання та дифузії, будемо вважати

$$p(x) \in C^1\left([0,l]\right),\ p(x) > 0; \qquad q(x) \in C\left([0,l]\right),\ q(x) \geq 0 .$$

Розглянемо рівняння

$$LX(x) \equiv \left(p(x)X'(x)\right)' - q(x)X(x) = -\lambda\rho(x)X(x), \qquad (4.1)$$
$$x \in (0,l), \quad q(x) \in C\left([0,l]\right), \quad q(x) > 0,$$

яке залежить від довільного числового параметра λ.

Побудуємо розв'язки рівняння (4.1), що задовольняють граничні умови

$$\tilde{A}_1 X(x) \equiv \alpha X'(0) + \beta X(0) = 0,$$
$$\tilde{A}_2 X(x) \equiv \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0, \qquad (4.2)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі і $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Задача на побудову нетривіального розв'язку рівняння (4.1), що задовольняє граничні умови (4.2), має назву крайової задачі Штурма-Ліувілля. Значення параметра λ, для яких задача (4.1), (4.2) має нетривіальні розв'язки, називаються <u>власними числами</u>, або <u>власними значеннями</u>, а розв'язки, що їм відповідають, – <u>власними функціями</u> задачі Штурма-Ліувілля. Множину власних значень λ називають спектром задачі (4.1), (4.2). Повне число $r \quad (1 \leq r \leq \infty)$ лінійно незалежних власних функцій, що відповідають даному власному значенню λ, називають кратністю цього власного значення; якщо кратність $r = 1$, то λ називають простим власним значенням.

Якщо позначити через $\overset{1}{X}(x,\lambda)$ і $\overset{2}{X}(x,\lambda)$ лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.1), то його загальний розв'язок буде визначатися рівністю

$$X(x,\lambda) = C_1 \overset{1}{X}(x,\lambda) + C_2 \overset{2}{X}(x,\lambda). \tag{4.3}$$

Сталі C_1 і C_2 та параметр λ доберемо так, щоб розв'язок (4.3) задовольняв граничні умови (4.2). Підставивши (4.3) в (4.2), дістанемо відносно C_1 і C_2 лінійну однорідну систему, а прирівнявши до нуля визначник цієї системи, знайдемо умову існування нетривіального розв'язку для C_1 і C_2. Розв'язуючи одержане рівняння відносно λ, знайдемо власні значення крайової задачі, тобто такі значення параметра λ, при яких задача Штурма-Ліувілля (4.1), (4.2) має нетривіальні розв'язки – власні функції.

Запровадимо тепер поняття ортогональності з вагою. Система функцій $X_1(x), X_2(x), \dots,\ x \in (0,l)$ називається ортогональною на відрізку $[0,l]$ з вагою $\rho(x) > 0$, якщо

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x) dx = \begin{cases} 0, & \forall s \neq k, \quad (4.4) \\ \|X_k\|^2 = \mu_k^2, & s = k. \quad (4.5) \end{cases}$$

4.2. Властивості власних значень та власних функцій

<u>Властивість 1.</u> *(без доведення)*. Крайова задача (4.1), (4.2) має зліченну множину власних значень і всі вони дійсні; якщо власні значення розмістити у порядку їх зростання: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

<u>Властивість 2.</u> Всі власні значення задачі Штурма-Ліувілля (4.1), (4.2) – прості, тобто кожному власному значенню відповідає тільки одна власна функція.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що деякому λ відповідають дві лінійно незалежні власні функції $\overset{1}{X}(x,\lambda)$ і $\overset{2}{X}(x,\lambda)$. Тоді їх лінійна комбінація

$$X(x,\lambda) = C_1 \overset{1}{X}(x,\lambda) + C_2 \overset{2}{X}(x,\lambda) \tag{4.6}$$

також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння (4.1), який задовольняє умови (4.2). Зокрема, при будь-яких C_1 і C_2 матимемо:

$$\alpha X'(0,\lambda) + \beta X(0,\lambda) = 0. \tag{4.7}$$

З іншого боку, (4.6) є загальним розв'язком рівняння (4.1) (оскільки $\overset{1}{X}(x,\lambda)$ і $\overset{2}{X}(x,\lambda)$ - лінійно незалежні), отже, можна знайти C_1 і C_2 такі, що

$X(0,\lambda)=\beta$, а $X'(0,\lambda)=\alpha$. Але тоді, згідно (4.7), одержимо $\alpha^2+\beta^2=0$, що суперечить умовам, накладеним на α і β умовами (4.2).

Властивість 3. Власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні на відрізку $[0,l]$ з вагою $\rho(x)$.

Доведення. Нехай λ_k і λ_s – різні власні значення, а $X_k(x)$ і $X_s(x)$ – власні функції, що їм відповідають. Функції $X_k(x)$ і $X_s(x)$ задовольняють рівняння

$$\left(p(x)X_k'(x)\right)'+\left(\lambda_k\rho(x)-q(x)X_k(x)\right)=0,$$
$$\left(p(x)X_s'(x)\right)'+\left(\lambda_s\rho(x)-q(x)X_s(x)\right)=0.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, попередньо помноживши їх відповідно на $X_s(x)$ і $X_k(x)$, та інтегруючи обидві частини одержаної рівності за x від 0 до l, дістанемо

$$\int_0^l[X_s(x)(p(x)X_k'(x))'-X_k(x)(p(x)X_s'(x))']dx=$$
$$=(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l\rho(x)X_k(x)X_s(x)dx.$$

Скориставшись очевидною тотожністю

$$X_s(x)(p(x)X_k'(x))'-X_k(x)(p(x)X_s'(x))'\equiv$$
$$\equiv\frac{d}{dx}[p(x)(X_s(x)X_k'(x)-X_k(x)X_s'(x))],$$

обчислимо інтеграл в лівій частині останньої рівності:

$$p(x)(X_s(x)X_k'(x)-X_k(x)X_s'(x))\Big|_0^l=$$
$$=(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l\rho(x)X_k(x)X_s(x)dx.$$

Функції $X_k(x)$ і $X_s(x)$ задовольняють граничні умови (4.2), тому можна записати

$$\begin{cases}\alpha X_k'(0)+\beta X_k(0)=0,\\ \alpha X_s'(0)+\beta X_s(0)=0.\end{cases}$$

Ці нерівності можна розглядати, як однорідну систему відносно α і β. Оскільки ця система має ненульовий розв’язок (за умовою $\alpha^2+\beta^2\neq 0$), то її визначник дорівнює нулю

$$X_k'(0)X_s(0)-X_s'(0)X_k(0)=0. \tag{4.8}$$

Аналогічно можна довести рівність

$$X_k'(l)X_s(l)-X_s'(l)X_k(l)=0. \tag{4.9}$$

З рівностей (4.8) і (4.9) випливає, що

$$(\lambda_s - \lambda_k)\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x)\,dx = 0.$$

Оскільки $\lambda_s - \lambda_k \neq 0$, то

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_s(x)\,dx = 0,$$

тобто власні функції $X_k(x)$ і $X_s(x)$ при $k \neq s$ ортогональні.

Властивість 4. Якщо граничні умови такі, що

$$p(x)X(x)X'(x)\Big|_0^l \leq 0, \tag{4.10}$$

то всі власні значення невід’ємні.

Доведення. Нехай $X_k(x)$ – власна функція, що відповідає власному значенню λ_k. Помножимо обидві частини тотожності

$$\left(p(x)X_k'(x)\right)' + \left(\lambda_k \rho(x) - q(x)\right)X_k(x) \equiv 0$$

на $X_k(x)$ та проінтегруємо одержану рівність на відрізку $[0,l]$; одержимо

$$\int_0^l X_k\left(pX_k'\right)' dx + \lambda_k \int_0^l \rho X_k^2 dx - \int_0^l q X_k^2 dx = 0.$$

Інтегруючи перший доданок частинами, дістанемо

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)\Big|_0^l - \int_0^l p X_k'^2 dx + \lambda_k \int_0^l \rho X_k^2 dx - \int_0^l q X_k^2 dx = 0.$$

З цієї рівності випливає, що $\lambda_k \geq 0$ (оскільки перший доданок недодатний, а $\rho(x) > 0,\ p(x) > 0,\ q(x) \geq 0$).

Наслідок. Якщо граничні умови мають вигляд

1°. $X(0) = 0,\quad X(l) = 0;$

2°. $X'(0) = 0,\quad X'(l) = 0;$

3°. $X'(0) - h_1 X(0) = 0,\quad X'(l) + h_2 X(l) = 0,\qquad h_1, h_2 > 0,$

то всі власні значення $\lambda_k \geq 0$.

Доведення. Перевіримо виконання умови (4.10), наприклад, для випадку 3°:

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)\big|_0^l =$$
$$= p(l)X_k(l)X_k'(l) - p(0)X_k(0)X_k'(0) =$$
$$= p(l)X_k(l)(-h_2X_k(l)) - p(0)X_k(0)(h_2X_k(0)) =$$
$$= -\left(h_2 p(l)X_k^2(l) + h_1 p(0)X_k^2(0)\right) \le 0,$$

оскільки $p(x) > 0, \quad \forall x \in [0,l]$.

Аналогічно можна пересвідчитись у виконанні умови (4.10) для випадків 1° і 2°.

Приведемо без доведення наступну

Властивість 5. Число $\lambda = 0$ буде власним значенням крайової задачі (4.1), (4.2) тоді і тільки тоді, коли $q(x) = 0,\ \beta(x) = 0$ і $\delta(x) = 0$, тобто для задачі:

$$\left(p(x)X'\right)' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Тепер сформулюємо без доведення теореми про розклад функції $\Phi(x)$ в ряд Фур'є за власними функціями крайової задачі (4.1), (4.2).

Теорема Стеклова. Якщо функція $\Phi(x)$:

1° на відрізку $[0,l]$ має неперервну першу похідну і кусково-неперервну другу;

2° задовольняє граничні умови (4.2),

то вона розкладається в рівномірно та абсолютно збіжний ряд Фур'є за власними функціями крайової задачі (4.1), (4.2):

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k X_k(x). \tag{4.11}$$

Прийнявши дану теорему буз доведення, зупинимося коротко на визначенні функції $\Phi(x)$, а саме знайдемо коефіцієнти Фур'є Φ_k функції $\Phi(x)$. Помножимо обидві частини рівності (4.11) на $\rho(x)X_n(x)$ і результат почленно проінтегруємо на відрізку $[0,l]$. Враховуючи рівності (4.4) і (4.5) (тобто властивість ортогональності 3), дістанемо

$$\int_0^l \rho(x)\Phi(x)X_n(x)dx = \Phi_n \int_0^l \rho(x)X_n^2(x)dx,$$

звідки для коефіцієнтів Фур'є одержимо

$$\Phi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \rho(x)\Phi(x)X_n(x)dx; \qquad \|X_n\|^2 = \int_0^l \rho(x)X_n^2(x)dx.$$

Теорема. Якщо функція $\Phi(x)$ на відрізку $[0,l]$ сумовна з квадратом, то її ряд Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k X_k(x)$ збігається до $\Phi(x)$ в середньому з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l \rho(x)\left(\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x)\right)^2 dx = 0.$$

Приймемо дану теорему без доведення.

Зауваження 1. Теореми розкладання функції $\Phi(x)$ в ряд за власними функціями крайової задачі мають місце і у випадку, коли граничні умови мають характер періодичності

$$X(0)=X(l); \qquad X'(0)=X'(l).$$

Зауваження 2. Кінцева точка відрізку $[0,l]$ називається сингулярною, якщо у цій точці коефіцієнт при старшій похідній в рівнянні обертається в нуль. Гранична умова в сингулярному кінці довільним чином задаватися не може і, як правило, зводиться до вимоги обмеженості розв'язку.

4.3. Розв'язання рівняння поперечних коливань струни

Продемонструємо сутність методу Фур'є на прикладі розв'язання рівняння малих поперечних коливань струни. Знайдемо розв'язок рівняння (3.5) вільних коливань струни

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.12}$$

який задовольняє крайові умови:

$$U(0,t)=0, \tag{4.13}$$

$$U(l,t)=0, \tag{4.14}$$

$$U(x,0)=\varphi(x), \tag{4.15}$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \tag{4.16}$$

Для знаходження нетривіального частинного розв'язку рівняння (4.12), що задовольняє крайові умови (4.13)-(4.16), використаємо метод відокремлення змінних. А саме, представимо шукану функцію $U(x,t)$ у вигляді

$$U(x,t)=X(x)\cdot T(t). \tag{4.17}$$

Підставивши вираз (5.25) у рівняння (4.12), одержимо рівність

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{4.18}$$

Оскільки права частина вказаної рівності не залежить від t, а ліва - від x, то (4.18) має місце тільки у випадку, коли відношення сталі, тобто

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\lambda>0,$$

В результаті для визначення $X(x)$ і $T(t)$, відповідно, одержимо звичайні диференціальні рівняння

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{4.19}$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0. \tag{4.20}$$

Загальні розв'язки рівнянь (4.19) і (4.20), відповідно, мають вигляд

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), \qquad (4.21)$$

$$T(t) = C\cos\left(a\sqrt{\lambda}t\right) + D\sin\left(a\sqrt{\lambda}t\right), \qquad (4.22)$$

де A, B, C, D - довільні сталі.

Підставивши вирази (4.21), (4.22) у формулу (4.17), одержимо

$$U(x,t) = \left[A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]\cdot\left[C\cos\left(a\sqrt{\lambda}t\right) + D\sin\left(a\sqrt{\lambda}t\right)\right]. \qquad (4.23)$$

Для визначення довільних сталих A і B, що містяться у виразі (4.23), використаємо граничні умови (4.13), (4.14). Відокремимо змінні x, t у граничних умовах (4.13), (4.14). Оскільки функція $T(t)$ тотожно не рівна нулю (у противному випадку одержимо тривіальний розв'язок $U(x,t) \equiv 0$), то із граничних умов (4.13), (4.14) слідує, що

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \qquad (4.24)$$

Враховуючи співвідношення (4.24), із виразу (4.23) одержимо систему алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти A і B:

$$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0,$$

$$0 = A\cos\left(\sqrt{\lambda}l\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right),$$

звідки одержимо наступні співвідношення: $A = 0, \quad B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0$. Оскільки $n \neq 0$ (бо інакше $X(x) \equiv 0$, а, отже, і $U(x,t) \equiv 0$), то повинна виконуватися умова $\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$, звідки

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (4.25)$$

(зауважимо, що $n \neq 0$, бо у цьому випадку $X(x) \equiv 0$ і $U(x,t) \equiv 0$).

Таким чином, для функції $X(x)$ одержимо вираз

$$X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \qquad (4.26)$$

Зауважимо, що коли вибрати $\lambda < 0$, для функції $X(x)$ одержимо рівняння виду $X''(x) - k^2X(x) = 0$ $(k^2 > 0)$, загальний розв'язок якого $X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ задовольняє граничним умовам, лише у випадку, коли $X(x) \equiv 0$.

Із врахуванням (4.25), перепишемо розв'язок (4.22) у вигляді

$$T(t) = C\cos\left(\frac{an\pi t}{l}\right) + D\sin\left(\frac{an\pi t}{l}\right). \qquad (4.27)$$

Тепер для функції $U(x,t)$ одержимо наступний вираз (для конкретного значення $n = 1,2,3,\ldots$; окрім того, константа B включена у нові сталі C_n і D_n):

$$U_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left[C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right], \qquad (4.28)$$

Оскільки рівняння (4.12) лінійне і однорідне, то сума розв'язків виду (4.28) також буде його розв'язком, тобто

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right]. \qquad (4.29)$$

Для визначення сталих C_n і D_n надамо змінній t у виразі (4.29) значення $t=0$ і використаємо початкову умову (4.15):

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (4.30)$$

Якщо функція $\varphi(x)$ така, що на інтервалі $(0,l)$ її можна розкласти в ряд Фур'є, то умова (4.30) буде виконуватися, якщо

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (4.31)$$

Далі диференціюємо (4.29) за t і підставляємо $t=0$. Із початкової умови (4.15) одержимо рівність

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Визначаємо коефіцієнти Фур'є цього ряду:

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (4.32)$$

Таким чином, ми довели, що ряд (4.29), у якому коефіцієнти C_n і D_n визначаються співвідношеннями (4.31) та (4.32), якщо він допускає двократне почленне диференціювання, зображає функцію $U(x,t)$, що є розв'язком рівняння (4.12) і задовольняє крайові умови (4.13)-(4.16).

5. РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Процеси поширення теплоти або дифузії частинок у середовищі описуються рівняннями параболічного типу. Виведемо рівняння поширення теплоти.

5.1. Рівняння теплопровідності

Розглянемо процес поширення теплоти в середовищі з густиною $\rho(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, питомою теплоємністю $c(x)$ і коефіцієнтом теплопровідності $k(x)\geq 0$; середовище рахуємо ізотропним – теплопровідність залежить лише від координат і не залежить від напрямку. Позначимо через $U(x,t)$ температуру середовища в точці x в момент часу t. Знайдемо рівняння, якому повинна задовольняти функція $U(x,t)$. В основу виводу покладемо закон збереження енергії і емпіричний закон Фур'є, згідно якому кількість теплоти dQ, що протікає за малий проміжок часу dt через площадку $d\sigma$ в напрямку вектора нормалі ν до цієї площадки, буде

$$dQ=-k(x)\frac{\partial U}{\partial \nu}d\sigma dt\,. \tag{5.1}$$

Величина теплового потоку в напрямку ν рахується додатою (від'ємною), якщо температура $U(x,t)$ спадає (зростає) у цьому напрямку, тобто $\frac{\partial U}{\partial \nu}\leq 0$ ($\frac{\partial U}{\partial \nu}\geq 0$). Припускаємо, що в тілі наявні теплові джерела (наприклад, проходить електричний струм або відбувається хімічна реакція), розподілені з густиною $F(x,t)$, віднесеною до одиниці об'єму.

Виділимо в тілі об'єм D, обмежений довільною гладкою поверхнею σ з вектором зовнішньої нормалі $\nu(x), x\in\sigma$ і підрахуємо тепловий баланс у цьому об'ємі за проміжок часу $t_1<t<t_2$. Позначимо через Q_1 кількість теплоти, яку виділяють в тілі об'єму D теплові джерела за проміжок часу t_2-t_1, Q_2 - кількість теплоти, витраченої на підвищення температури тіла за цей час, і Q_3 - кількість теплоти, що розповсюдилась через поверхню σ в напрямку вектора зовнішньої нормалі ν за проміжок часу t_2-t_1. Згідно закону збереження енергії будемо мати:

$$Q_1=Q_2+Q_3\,. \tag{5.2}$$

У результаті дії теплових джерел в елементі об'єму $dx=dx_1dx_2dx_3$ за час dt виділиться кількість теплоти $dQ=F(x,t)dxdt$; інтегруючи dQ по об'єму D і по часу від t_1 до t_2, знайдемо

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D F(x,t)dx. \tag{5.3}$$

Згідно з законом Фур'є, кількість теплоти Q_2, що розповсюджується через поверхню σ в напрямку вектора зовнішньої нормалі ν, буде

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma (-k(x)) \frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu} d\sigma. \tag{5.4}$$

Кількість теплоти dQ_3, витраченої на підвищення температури елементу об'єму dx від $U(x,t_1)$ до $U(x,t_2)$, дорівнює добутку маси $\rho(x)dx$ цього елементу на питому теплоємність $c(x)$ і на приріст температури $U(x,t_2) - U(x,t_1)$:

$$dQ_3 = \rho(x)dx \cdot c(x)(U(x,t_2) - U(x,t_1)) =$$

$$= c(x)\rho(x)dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dt. \tag{5.5}$$

Інтегруючи (5.5) по об'єму D, знайдемо

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c(x)\rho(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dx. \tag{5.6}$$

Підставивши вирази для Q_1, Q_2, і Q_3 у рівність (5.2), одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D F(x,t)dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma (-k(x)) \frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu} d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c(x)\rho(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dx.$$

Перетворимо інтеграл по σ. Записавши похідну по напрямку в розгорнутому вигляді, будемо мати

$$\int_\sigma k(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu} d\sigma = \int_\sigma k \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(\nu, x_j) d\sigma. \tag{5.8}$$

Якщо тепер у формулі Гауса-Остроградського

$$\int_\sigma \sum_{j=1}^{3} A_j \cos(\nu, x_j) d\sigma = \int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dx$$

покласти

$$A_j = k \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,3,$$

то одержимо

$$\int_\sigma k(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu} d\sigma = \int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) dx.$$

Підставивши у (5.7) вираз для інтегралу по σ і зібравши всі члени під одним інтегралом, прийдемо до інтегрального рівняння для $U(x,t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \left[F(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - c(x)\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} \right] dt = 0. \qquad (5.9)$$

Щоб одержати рівняння теплопровідності у диференціальній формі, припустимо, що підінтегральний вираз у (5.9) є неперервною функцією від (x,t). Застосовуючи теорему про середнє значення інтегралу, одержимо рівність

$$\left[F(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - c(x)\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} \right]\Bigg|_{\substack{x=x_{cp} \\ t=t_{cp}}} \cdot (t_2 - t_1)|D| = 0. \qquad (5.10)$$

Скоротивши (5.10) на $(t_2 - t_1)|D|$, де $|D|$ – об'єм області D, перейшовши до границі при $t_1, t_2 \to t$ і стягнувши одночасно об'єм тіла D в точку $x = (x_1, x_2, x_3)$, одержимо диференціальне рівняння теплопровідності для функції $U(x,t)$:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + F(x,t) = c(x)\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (5.11)$$

Розглянемо частинні випадки цього рівняння. Якщо середовище однорідне, тобто ρ, c і k – сталі, то рівняння (5.11) прийме вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + f(x,t), \qquad (5.12)$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho},$$

де a^2 - коефіцієнт теплопровідності, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ - оператор Лапласа.

Якщо теплові джерела відсутні, тобто $f(x,t) = 0$, то рівняння теплопровідності прийме простий вигляд:

$$U_t = a^2 \Delta U. \qquad (5.13)$$

Якщо температура $U(x_1, x_2, x_3, t)$ не залежить від x_2, x_3 (залишається незмінною у кожній площині, перпендикулярній до осі OX_1), то для одновимірного випадку рівняння теплопровідності (5.12) буде

$$U_t = a^2 U_{x_1 x_1} + f(x_1, t). \qquad (5.14)$$

Цей випадок може бути реалізований на тонкому стержні, теплоізольованому з бічної поверхні.

Зауваження. Можна показати, що рівняння (5.12) описує також процес переносу речовини, дифузії; але у цьому випадку, природно, коефіцієнти у (5.12) мають інший фізичний зміст:

$$a^2 = \frac{k}{c}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c},$$

де a^2 - коефіцієнт дифузії, c - коефіцієнт поруватості, $F(x,t)$ - густина джерел дифундуючої речовини.

Постановка крайових задач. Для виокремлення єдиного розв'язку рівняння теплопровідності необхідно до рівняння приєднати початкові та граничні умови.

Початкова умова на відміну від рівняння гіперболічного типу полягає тільки у заданні значень функції $U(x,t)$ у початковий момент часу t_0 (рівняння (5.12) містить похідну за часом тільки першого порядку):

$$U(x,t)\big|_{t=t_0} = \varphi(x). \tag{5.15}$$

Граничні умови можуть буди різними в залежності від теплового режиму на границі σ. Розглядають три типи граничних (крайових) умов:

Крайова умова I роду. На поверхні σ тіла D підтримується задана температура

$$U(x,t)\big|_{\sigma} = \mu(x,t), x \in \sigma. \tag{5.16}$$

Крайова умова II роду. На поверхні σ заданий тепловий потік (кількість теплоти, що протікає за одиницю часу через поверхню одиничної площі). У цьому випадку маємо

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu}\right|_{\sigma} = \mu(x,t), x \in \sigma. \tag{5.17}$$

Тут ν – вектор зовнішньої нормалі до поверхні σ.

Крайова умова III роду. Середовище, у якому міститься тіло D, має задану температуру $\Theta(x,t)$; теплообмін між тілом і оточуючим середовищем відбувається згідно закону Ньютона: тепловий потік Q через поверхню σ у напрямку вектора зовнішньої нормалі ν пропорційний різниці температур

$$Q = \alpha[U(x,t) - \Theta(x,t)], x \in \sigma, (\alpha > 0),$$

де α - коефіцієнт теплообміну.

З іншого боку, за законом Фур'є, в одиницю часу через одиничну площадку поверхні σ у напрямку вектора ν розповсюджується тепловий потік $Q = -k\frac{\partial U}{\partial \nu}$. Прирівнюючи вирази для потоку, одержимо граничну умову

$$-k\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu}\right|_{\sigma} = \alpha[U(x,t) - \Theta(x,t)]\big|_{\sigma} \Rightarrow$$

$$\left.\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu} + hU(x,t)\right)\right|_{\sigma} = \mu(x,t), \ x \in \sigma, h > 0. \tag{5.18}$$

Розглянемо одновимірний випадок, коли тіло D - теплоізольований з бічної поверхні тонкий стержень довжини l. У точці $x = 0$ напрямок вектора зовнішньої нормалі ν до перерізу стержня збігається з від'ємним напрямком осі Ox, тому

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial(-x)}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}$$

і умова (5.18) запишеться у вигляді

$$\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x} - h_1 U\right)\right|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ h_1 > 0\,. \tag{5.19}$$

У точці $x = l$ напрямок вектора нормалі до перерізу співпадає з напрямком осі Ox, тому $\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l}$ і гранична умова (5.18) прийме вигляд

$$\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x} + h_2 U\right)\right|_{x=l} = \mu_2(t),\ \ h_2 > 0\,. \tag{5.20}$$

Таким чином, будь-яку граничну умову для задачі про поширення теплоти у стержні можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &\left.\left(\gamma_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma_1 U\right)\right|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \gamma_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0, \\ &\left.\left(\gamma_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma_2 U\right)\right|_{x=l} = \mu_2(t), \quad \gamma_2^2 + \sigma_2^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

де $\gamma_1,\ldots,\sigma_2$ - сталі. Формально граничні умови записуються у тому ж вигляді, що і у задачі про коливання струни.

Крайові задачі для рівняння параболічного типу. Крайові задачі будемо формулювати для випадку однієї геометричної (просторової) змінної x_0.

Мішана задача. У прямокутнику $H = (0,l)\times(0,T)$ знайти регулярний розв'язок рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t), \tag{5.22}$$

що задовольняє граничним умовам (5.21) і початковій умові

$$\left.U(x,t)\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5.23}$$

Задача (5.22), (5.21), (5.23) буде однорідною, якщо $f(x,t), \mu_1(t), \mu_2(t) \equiv 0$, і неоднорідною у випадку, коли хоча б одна із цих функцій не рівна тотожно нулеві.

В залежності від характеру граничних умов говорять, що мішана задача буде першого роду, якщо $\gamma_k = 0, \quad \delta_k = 1$:

$$U(0,t) = \mu_1(t); \quad U(l,t) = \mu_2(t);$$

другого роду, якщо $\gamma_k = 1, \quad \delta_k = 0$:

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \mu_1(t); \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = \mu_2(t);$$

третього роду, якщо $\gamma_k = 1, \quad \delta_1 = -h_1, \quad \delta_2 = h_2, \quad h_k > 0$:

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0,t) = \mu_1(t); \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l,t) = \mu_2(t).$$

5.2. Розв'язання рівняння теплопровідності для нескінченного стержня

Нехай у початковий момент часу задана температура у різних перерізах нескінченого стержня. Вимагається визначити розподіл температури стержня у довільний момент часу. До задачі про розподіл теплоти у нескінченому стержні приводять фізичні задачі у тому випадку, коли стержень настільки довгий, що температура у внутрішніх точках стержня у довільний момент часу слабо залежить від умов на кінцях стержня.

Якщо стержень співпадає з віссю Ох, то математично задача формулюється наступним чином: у області $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$ знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{5.24}$$

який задовольняє початкову умову

$$U(x,0) = \varphi(x). \tag{5.25}$$

Застосуємо до знаходження нетривіального частинного розв'язку рівняння (5.24), що задовольняє початковій умові (5.25), метод відокремлення змінних. А саме, представимо шукану функцію $U(x,t)$ у вигляді

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t), \tag{5.26}$$

Підставивши вираз (5.26) у рівняння (5.24), одержимо рівність

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{5.27}$$

Кожне із вказаних співвідношень не може залежати ні від x, ні від t, тому ми і прирівняли їх до сталої $-\lambda^2$. Знак мінус при λ^2 має простий фізичний зміст: оскільки функція $T(t)$ є скінченною при довільному значенні t, якщо скінченою є функція $\varphi(x)$, то відношення T'/T повинне бути від'ємним, чим і диктується необхідність від'ємного значення константи відокремлення у виразі (5.27). Із (5.27) для визначення $X(x)$ і $T(t)$, відповідно, одержимо звичайні диференціальні рівняння

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \tag{5.28}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{5.29}$$

Розв'язуючи їх, одержимо:

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

де A, B, C - довільні сталі.

Підставивши знайдені вирази у формулу (5.26), одержимо

$$U_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]. \qquad (5.30)$$

Тут стала C включена у $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$.

Для кожного значення λ ми одержуємо розв’язок виду (5.30). Довільні сталі A і B для кожного значення λ мають певні значення, тому можемо вважати їх функціями λ. Сума розв’язків виду (5.27)

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]$$

у силу лінійності рівняння (5.24) також є його розв’язком. Інтегруючи вираз (5.30) за параметром λ в межах від 0 до ∞, одержимо загальний розв’язок рівняння (5.24) у виді:

$$U(x,t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]d\lambda. \qquad (5.31)$$

Величини $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ повинні бути такими, щоб існували інтеграл (5.31), його похідна за t, друга похідна за x, причому вказані похідні обчислюються шляхом диференціювання інтегралу за t і x. Підберемо $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ так, щоб розв’язок $U(x,t)$ задовольняв початкову умову (5.25). Поклавши у рівності (5.31) $t = 0$ на основі умови (5.25) одержимо

$$U(x,0) = \varphi(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]d\lambda. \qquad (5.32)$$

Нехай функція $\varphi(x)$ така, що її можна представити інтегралом Фур’є

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)d\alpha\right)d\lambda,$$

або

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha\cos\lambda x + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\sin\lambda x\right)d\lambda. \qquad (5.33)$$

Порівнюючи праві частини виразів (5.29) та (5.33), одержимо

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha.. \end{aligned}\right\} \qquad (5.34)$$

Підставляючи знайдені вирази для $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ у формулу (5.28), знайдемо

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha\right)\cos\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x)d\alpha\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)d\alpha\right)d\lambda,$$

або, змінюючи порядок інтегрування, остаточно одержимо

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda\right)\right]d\alpha. \qquad (5.35)$$

Вираз (5.35) і є розв’язком поставленої задачі.

Запровадивши в інтегралі у круглих дужках виразу (5.35) підстановки

$$a\lambda\sqrt{t}=z, \quad \frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\beta, \qquad (5.36)$$

перепишемо його у вигляді

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z dz. \qquad (5.37)$$

Позначимо

$$K(\beta)=\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z dz. \qquad (5.38)$$

Диференціюючи останній вираз за β, знайдемо

$$K'(\beta)=-\int_0^\infty e^{-z^2}z\sin\beta z dz.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$K'(\beta)=\frac{1}{2}e^{-z^2}\sin\beta z\Big|_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z dz,$$

або

$$K'(\beta)=-\frac{\beta}{2}K(\beta).$$

Інтегруючи дане диференціальне рівняння, одержимо

$$K(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \qquad (5.39)$$

Визначимо сталу C. Із (5.38) випливає:

$$K(0)=\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

тому стала C у (5.39) має бути рівною $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Отже,

$$K(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \qquad (5.40)$$

Значення (5.40) інтегралу (5.38) підставляємо у вираз (5.37), одержимо

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Підставляючи замість β його значення (5.36), остаточно одержимо для інтегралу (5.37)

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}. \qquad (5.41)$$

Підставляючи цей вираз інтегралу у розв'язок (5.35), остаточно одержимо:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha. \qquad (5.42)$$

Ця формула, яка має назву інтеграла Пуассона, зображає розв'язок поставленої задачі про розподіл теплоти у необмеженому стержні.

6. РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

6.1. Основні поняття. Постановка крайових задач

При дослідженні стаціонарних (не залежних від часу) процесів різної фізичної природи (коливання, теплопровідності, дифузії та ін.) зазвичай приходять до рівнянь еліптичного типу. Найпоширенішими рівняннями еліптичного типу є рівняння Лапласа

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}=0 \qquad (6.1)$$

і рівняння Пуассона

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}=F(x_1,\ldots,x_n). \qquad (6.2)$$

Ми будемо розглядати задачі для рівнянь еліптичного типу у просторі E_n n - незалежних змінних ($n=2{,}3$). Запровадимо такі позначення: $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)$; $xy=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ - скалярний добуток векторів x і y; $|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$ - відстань між x і y; якщо x – фіксована і y - змінна координати точки, то $|x-y|=r$ - сфера $\sigma(x,r)$ із центром у точці x радіуса r; $|x-y|<r$ - куля $K(x,r)$ із центром у точці x радіуса r.

Область D в E_n називається обмеженою, якщо існує $R>0$ таке, що $D\subset K(0,R)$, а у протилежному випадку – необмеженою, що містить нескінченно віддалену точку. Однозв'язна замкнута поверхня σ ділить простір E_n на дві області: D^+ - внутрішню і D^- - зовнішню, яка містить нескінченно віддалену точку.

Функція $U(x)$ називається гармонічною у області D, якщо вона неперервна у цій області разом зі своїми похідними до другого порядку включно і задовольняє рівнянню Лапласа.

Розв'язок $U(x)$ рівняння Лапласа називається регулярним на нескінченності, якщо він у околі нескінченно віддаленої точки обмежений у E_2, спадає не повільніше $\dfrac{C}{|x|}$ в E_3, тобто задовольняє умові, $|U(x)|<\dfrac{C}{|x|^{n-2}}$, $\quad n=2{,}3$, де n - розмірність простору, а С – деяка стала.

Сформулюємо основні крайові задачі для рівняння Лапласа. Нехай гладка поверхня σ ділить простір E_n на D^+ і D^-.

Перша крайова задача – внутрішня (задача D^+). У області D^+ необхідно знайти гармонічну функцію як розв'язок рівняння (6.1), неперервний аж до границі σ, який задовольняє умові

$$U(x)\big|_\sigma = f(x), \tag{6.3}$$

де $f(x)$ - задана функція.

Друга крайова задача – внутрішня (задача N^+). У області D^+ необхідно знайти гармонічну функцію, неперервно диференційовну аж до границі σ, яка задовольняє умові

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_\sigma = f(x), \tag{6.4}$$

де $\dfrac{\partial U}{\partial \nu}$ - похідна по зовнішній нормалі до поверхні σ.

Перша крайова задача – зовнішня (задача D^-). У області D^- необхідно знайти гармонічну функцію, неперервну аж до границі σ, регулярну на нескінченності, яка задовольняє умові

$$U(x)\big|_\sigma = f(x). \tag{6.5}$$

Друга крайова задача – зовнішня (задача N^-). У області D^- необхідно знайти гармонічну функцію, неперервно диференційовну аж до границі σ, регулярну на нескінченності яка задовольняє умові

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_\sigma = f(x). \tag{6.6}$$

Першу крайову задачу для рівняння Лапласа часто називають задачею Діріхле, а другу крайову задачу – задачею Неймана.

6.2. Рівняння Лапласа у криволінійній системі координат

Нехай у тривимірному просторі замість декартових координат x_1, x_2, x_3 запроваджено криволінійні координати q_1, q_2, q_3 за допомогою співвідношень

$$q_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad q_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad q_3 = f_3(x_1, x_2, x_3). \tag{6.7}$$

Розв'язуючи (6.7) відносно змінних x_1, x_2, x_3, знайдемо

$$x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad x_2 = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad x_3 = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{6.8}$$

Поклавши $q_1 = C_1, \quad q_2 = C_2, \quad q_3 = C_3$, де C_1, C_2, C_3 - сталі, одержимо три сім'ї координатних поверхонь:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = C_1, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = C_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = C_3. \quad (6.9)$$

Лінії перетину двох координатних поверхонь називаються координатними лініями. Доволі очевидно, що через кожну точку простору проходять по три координатні поверхні, які взаємно перетинаються і по три координатні лінії.

Якщо криволінійна система координат володіє тією властивістю, що у будь-якій точці простору через неї проходять три взаємно перпендикулярні координатні лінії, то система координат називається ортогональною. Зрозуміло, що різні векторні і тензорні співвідношення мають у ортогональних системах координат більш простий вигляд, ніж у довільних неортогональних системах координат. А тому корисно сформулювати умови, яким повинні задовольняти функції $\varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$, щоб координатна система була ортогональною.

Як відомо із аналітичної геометрії, умова перпендикулярності двох прямих, що утворюють з осями координат кути α, β, γ і α', β', γ', зводиться до рівності:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \quad (6.10)$$

Оскільки косинуси кутів між дотичною до координатної лінії q_i з прямокутними осями координат x_1, x_2, x_3 пропорційні відповідним частинним похідним $\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}$, то ми одержимо наступні умови взаємної перпендикулярності координатних кривих q_i і q_j:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_j} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_j} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_j} = 0 \quad (i \neq j). \quad (6.11)$$

Щоб криволінійна система координат q_1, q_2, q_3 була ортогональною, її координатні лінії повинні зображати собою три взаємно перпендикулярні сім'ї кривих, а, отже, функції $\varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$ повинні задовольняти три умови типу (6.11).

Виразимо елемент дуги ds у нових координатах. У прямокутних координатах, як відомо,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (6.12)$$

Диференціюючи рівності (6.8), одержимо:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_3} dq_3, \quad (i = 1,2,3). \tag{6.13}$$

Підставляючи (6.13) у (6.12) і приймаючи до уваги умову ортогональності (6.11), знаходимо, що

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \tag{6.14}$$

де H_1, H_2, H_3 - так звані коефіцієнти Ляме, які визначаються наступним виразом:

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \right)^2. \tag{6.15}$$

Розглянемо в нових координатах елемент об’єму, обмежений трьома парами координатних поверхонь. Уздовж кожного із ребер елементарного об’єму змінюється тільки одна координата, тому для довжини цих ребер згідно формули (6.14) будемо мати:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 ds_3, \tag{6.16}$$

так що елемент об’єму дорівнює

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \tag{6.17}$$

Розглянемо тепер основні диференціальні операції у криволінійних координатах. За означенням, градієнт скалярної функції φ зображає вектор $grad\varphi$, проекція якого на довільний напрямок l дорівнює похідній від φ по цьому напрямку:

$$grad_l \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l}. \tag{6.18}$$

Нехай вектор $grad\varphi$ задано у деякій точці простору М. Через неї проходять три взаємно перпендикулярні лінії q_1, q_2, q_3. Проведемо у точці М дотичні до цих ліній і уздовж цих дотичних відкладемо одиничні орти $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Ця трійка ортогональних ортів, що називається базисом (або репером), утворює локальну прямокутну систему координат. Проекція вектора $grad\varphi$ на напрямок координатних ліній (тобто на дотичні до цих ліній у точці М) дорівнює:

$$\left(grad\varphi \right)_{q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_i}, \tag{6.19}$$

де довжина дуги координатної кривої $ds_i = H_i dq_i$.

Отже, градієнт скалярної функції у деякій точці простору визначається в криволінійній системі координат трьома проекціями на координатні лінії, що проходять через цю точку:

$$grad\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3. \qquad (6.20)$$

Розглянемо деяке векторне поле $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$. Обчислимо $div\vec{A}$, що визначається відомою формулою векторного аналізу

$$div\vec{A} = \frac{dN}{dV}. \qquad (6.21)$$

Тут dV - елемент об'єму, який виражається у криволінійних координатах формулою (6.17), а dN визначає потік вектора через малу замкнуту поверхню $\Delta\sigma$, яка обмежує об'єм dV:

$$dN = \oiint_{\Delta\sigma} A_n d\sigma.$$

У якості елементарного об'єму dV виберемо криволінійний кубик, гранями якого є ділянки координатних поверхонь. Розглянемо дві грані, перпендикулярні q_1 - ліву 1 і праву 2. Площа грані 1 рівна:

$$d\sigma_1 = H_2(q_1)H_3(q_1)dq_2 dq_3,$$

а площа грані 2 запишеться так:

$$d\sigma_2 = H_2(q_1 + dq_1)H_3(q_1 + dq_1)dq_2 dq_3.$$

Нехай змінний вектор $\vec{A}$ у точках елементарної грані 1 приймає значення $\vec{A}(q_1)$, а у точках грані 2 – відповідно $\vec{A}(q_1 + dq_1)$. Оскільки координатна лінія q_1 перпендикулярна до обох цих граней, то нормальні проекції векторів $\vec{A}(q_1)$ і $\vec{A}(q_1 + dq_1)$ з урахуванням напрямків нормалі приймають значення: $-A_{q_1}(q_1)$ і $A_{q_1}(q_1 + dq_1)$. Тому результуючий потік уздовж q_1 дорівнює:

$$dN_{q_1} = -A_{q_1}H_2(q_1)H_3(q_1)dq_2 dq_3 +$$
$$+ A_{q_1}(q_1 + dq_1)H_2(q_1 + dq_1)H_3(q_1 + dq_1)dq_2 dq_3,$$

або, користуючись формулою Тейлора і нехтуючи малими вищих порядків,

$$dN_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}(A_{q_1}H_2 H_3)dq_1 dq_2 dq_3.$$

Повний же потік через усі грані кубика визначається рівністю:

$$dN = dN_{q_1} + dN_{q_2} + dN_{q_3} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 A_{q_1}\right) + \right. \tag{6.22}$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1 H_3 A_{q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 A_{q_3}\right) \right\} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Підставляючи це співвідношення у (6.21) і приймаючи до уваги (6.16), одержуємо вираз для дивергенції у криволінійних координатах:

$$div\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 A_{q_1}\right) + \right. \tag{6.23}$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1 H_3 A_{q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 A_{q_3}\right) \right\}.$$

Щоб одержати вираз для оператора Лапласа у криволінійних координатах скористаємося співвідношенням

$$\Delta U = divgradU\ . \tag{6.24}$$

Позначимо $grad\varphi = \vec{A}$. Тоді згідно (6.19)

$$A_{q_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \Delta U = div\vec{A}.$$

Використовуючи формулу (6.23), у яку замість A_{q_i} підставимо $\frac{1}{H_i}\frac{\partial U}{\partial q_i}$, приходимо до шуканого виразу для рівняння Лапласа у ортогональних криволінійних координатах:

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \right. \tag{6.25}$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) \right\}.$$

Розглянемо два частинні випадки.

1. Сферичні координати. У цьому випадку криволінійні координати $q_1 = r,\quad q_2 = \theta,\quad q_3 = \varphi$ пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{6.26}$$
$$x_3 = r\cos\theta,$$

тому

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta. \tag{6.27}$$

Підставивши (6.27) у формулу (6.25), одержимо рівняння Лапласа у сферичних координатах

$$\begin{gathered}\Delta_{r,\theta,\varphi}U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0.\end{gathered} \tag{6.28}$$

2. Циліндричні координати. У даному випадку $q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$ і

$$x_1 = \rho\cos\varphi,$$
$$x_2 = \rho\sin\varphi,$$
$$x_3 = z,$$
$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Рівняння Лапласа у циліндричних координатах має вигляд

$$\begin{gathered}\Delta_{\rho,\varphi,z}U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \\ + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.\end{gathered} \tag{6.29}$$

Якщо шукана функція U не залежить від z, то рівняння (6.29) спрощується:

$$\begin{gathered}\Delta_{\rho,\varphi,z}U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \\ + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0.\end{gathered} \tag{6.30}$$

Великий інтерес становлять також розв’язки рівняння Лапласа, що володіють сферичною або циліндричною симетрією, тобто залежать тільки від однієї змінної r або ρ.

6.3. Фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа

Розв’язок рівняння Лапласа, яке залежить лише від однієї геометричної змінної – від відстані до параметричної точки $y=(y_1,...,y_n)$ - називається фундаментальним, або елементарним.

Знайдемо фундаментальний розв’язок $\mathrm{E}_n(x,y)$ в E_n.

Випадок $n=2$.

Запровадивши нові змінні
$x_1=y_1+\rho\cos\varphi \quad x_2=y_2+\rho\sin\varphi, \quad \rho=|x-y|$, запишемо рівняння Лапласа у полярних координатах

$$\Delta_{\rho,\varphi,z}U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+ \\ +\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0. \tag{6.31}$$

За означенням фундаментальний розв’язок залежить тільки від ρ, отже $\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$ і для такого розв’язку рівняння (6.31) набуває вигляду

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right)=0\Rightarrow\rho\frac{dU}{d\rho}=C_1;\quad U=C_1\ln\rho+C_2\,. \tag{6.32}$$

Вибравши $C_1=-1,\ C_2=0$, запишемо фундаментальний розв’язок у вигляді

$$\mathrm{E}_2(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|};\quad |x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,. \tag{6.33}$$

Випадок $n=3$.

Запровадивши сферичні координати

$$x_1=y_1+r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$x_2=y_2+r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$x_3=y_3+r\cos\theta,$$
$$r=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\,,$$

запишемо рівняння Лапласа у вигляді

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+ \\ +\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0. \tag{6.34}$$

За означенням фундаментальний розв'язок залежить тільки від $r = |x-y|$, а тому для такого розв'язку рівняння (6.34) набуває вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0 \Rightarrow r^2\frac{dU}{dr}=C_1;\quad U=-\frac{C_1}{r}+C_2\,.$$

Вибравши $C_1=-1,\ C_2=0$, запишемо фундаментальний розв'язок у вигляді

$$U(x,y)=\frac{1}{|x-y|}\,.$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок у $E_n(n=2,3)$ буде

$$\mathrm{E}_n(x,y)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2;\\ \dfrac{1}{|x-y|}, & n=3.\end{cases} \tag{6.35}$$

Як видно із формули (6.35), фундаментальний розв'язок є гармонічною функцією в усьому просторі, за виключенням точки $x=y$. Відмітимо також, що $\mathrm{E}_n(x,y)$ буде розв'язком рівняння Лапласа і по координатам параметричної точки y при фіксованій x: $\Delta_x\mathrm{E}_n(x,y)\equiv\Delta_y\mathrm{E}_n(x,y)\equiv 0, x\neq y$.

Окрім того, із (6.35) випливає, що в E_3 фундаментальний розв'язок регулярний, а у E_2 має логарифмічну особливість на нескінченності.

Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа допускає просте фізичне тлумачення. Функція $\mathrm{E}_3(x,y)$ з точність до множника пропорціональності збігається із потенціалом електростатичного поля, створеного точковим зарядом e, розташованим у точці $y=(y_1,y_2,y_3)$. Аналогічно, функція $\mathrm{E}_2(x,y)$ з точність до множника збігається із потенціалом електростатичного поля, створеного зарядами, розподіленими на прямій зі сталою густиною μ, віднесеною до одиниці довжини (цей потенціал називається логарифмічним).

6.4. Гармонічні функції і аналітичні функції комплексної змінної

Загальним методом розв’язання двовимірних задач для рівняння Лапласа є метод, що використовує функції комплексної змінної. Нехай

$$W = f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

- деяка функція комплексної змінної $z = x + iy$, причому U і V є дійсними функціями x і y. Найбільший інтерес становлять т.з. аналітичні функції, для яких існує похідна

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (6.36)$$

Приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, може прямувати до нуля багатьма способами, для кожного з яких, взагалі кажучи, може вийти своє значення границі. Проте, якщо функція $W = f(z)$ аналітична, то границя (6.36) не залежить від способу прямування Δz до нуля.

Необхідними і достатніми умовами аналітичності функції є т.з. умови Коші-Рімана

$$\begin{aligned} U_x &= V_y, \\ U_y &= -V_x. \end{aligned} \qquad (6.37)$$

Ці умови можна одержати наступним чином. Нехай $W = U + iV = f(z)$ - аналітична функція. Обчислимо похідні

$$W_x = U_x + iV_x = \frac{\partial W(z)}{\partial z} z_x = \frac{dW}{dz},$$
$$W_y = U_y + iV_y = \frac{\partial W(z)}{\partial z} z_y = i\frac{dW}{dz}.$$

Із цих рівностей одержуємо

$$U_x + iV_x = V_y - iU_x,$$

звідки і випливають умови Коші-Рімана.

Диференціюючи першу рівність у (6.37) по x, а другу – по y, одержимо:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0,$$

або

$$\Delta_2 U = 0.$$

Подібним же чином, міняючи порядок диференціювання, знаходимо:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0,$$

або

$$\Delta_2 V = 0\,.$$

Таким чином, дійсна та уявна частини аналітичної функції задовольняють рівнянню Лапласа. Тому кажуть, що функції U і V, які задовольняють умовам Коші-Рімана, є спряженими гармонічними функціями.

6.5. Перетворення Кельвіна

Розглянемо перетворення, важливість якого полягає у тому, що воно дозволяє зводити зовнішню (внутрішню) крайову задачу до внутрішньої (зовнішньої) і дає можливість проводити оцінки на нескінченності для довільної гармонічної функції.

Перетворення інверсії. Точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ і $x' = (x_1', x_2', x_3')$ називаються симетричними відносно сфери $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_2^3\right)^{1/2} = a$, якщо вони лежать на одному промені, який виходить із центра сфери, а добуток відстаней від $x = (x_1, x_2, x_3)$ і $x' = (x_1', x_2', x_3')$ до центру дорівнює квадрату радіуса цієї сфери:

$$|x||x'| = a^2. \qquad (6.38)$$

Точку x' називають зворотним, або інверсним зображенням точки x, а саме перетворення називають <u>перетворенням інверсії</u>. При цьому, якщо точка x лежить усередині сфери, то її інверсне зображення x' обов'язково буде лежати поза сферою, і навпаки.

Дану сферу називають сферою інверсії, а її центр – полюсом, або центром інверсії. Величина a^2 є степенем інверсії. Термін “інверсія” походить від латинського слова inversio – перетворення, перестановка.

Із означення перетворення інверсії випливає, що одиничні вектори $\dfrac{x}{|x|}$, $\dfrac{x'}{|x'|}$ дорівнюють один одному:

$$\frac{x'}{|x'|} = \frac{x}{|x'|} \Rightarrow x' = \frac{|x'|}{|x|}x, \quad x = \frac{|x|}{|x'|}x'. \qquad (6.39)$$

Враховуючи (6.38), перепишемо (6.39) у вигляді

$$x' = \frac{a^2}{|x|^2} x \Leftrightarrow x'_k = \frac{a^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} x_k, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$
$$x = \frac{a^2}{|x'|^2} x' \Leftrightarrow x_k = \frac{a^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2} x'_k. \tag{6.40}$$

Перетворенням Кельвіна функції $U(x)$ називають функцію

$$V(x') = \left(\frac{|x|}{a} \right)^{n-2} U(x), \tag{6.41}$$

де x, x' - точки, симетричні відносно сфери $|x| = a$. Використовуючи формули (6.38), (6.40), можна надати іншу форму запису перетворення Кельвіна:

$$V(x') = \left(\frac{a}{|x'|} \right)^{n-2} U\left(\frac{a^2}{|x'|^2} x' \right), \tag{6.42}$$

$$U(x) = \left(\frac{a}{|x|} \right)^{n-2} V\left(\frac{a^2}{|x|^2} x \right). \tag{6.43}$$

Тепер переконаємося у тому, що гармонічна функція $U(x)$ перетворенням Кельвіна переводиться у гармонічну функцію $V(x')$.

Розглянемо функцію $U(x)$, гармонічну у E_2. Згідно (6.43)

$$U(x) = V\left(\frac{a^2}{|x|^2} x \right). \tag{6.44}$$

Запровадимо полярні координати. Точки x, x' лежать на одному промені, тому

$$x_1 = \rho \cos\varphi, \quad x_2 = \rho \sin\varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (\rho, \varphi),$$
$$x'_1 = \rho' \cos\varphi, \quad x'_2 = \rho' \sin\varphi,$$
$$\rho' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}, \quad x' = (\rho', \varphi).$$

У полярній системі координат перетворення Кельвіна запишеться у вигляді $V(\rho', \varphi) = U(\rho, \varphi)$. Враховуючи рівність $|x||x'| = a_2 \Leftrightarrow \rho\rho' = a^2$, обчислимо

$$\Delta_{x'} V(\rho',\varphi) \equiv \frac{1}{\rho'^2}\left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho' \frac{\partial V}{\partial \rho'}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right).$$

Перейшовши до змінних ρ і φ,

$$\rho'' \frac{\partial}{\partial \rho'} = \rho' \frac{\partial \rho}{\partial \rho'} \frac{\partial}{\partial \rho} =$$
$$= \rho'\left(-\frac{a^2}{\rho'^2}\right)\frac{\partial}{\partial \rho} = -\rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

одержимо

$$\Delta_{x'} V(\rho',\varphi) = \frac{1}{\rho'^2}\left(-\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(-\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2}\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\rho'^2} \Delta_x U(\rho,\varphi).$$

Але $U(\rho,\varphi)$ гармонічна функція, тому

$$\Delta_x U(\rho,\varphi) \equiv 0 \Rightarrow \Delta_{x'} V(\rho',\varphi) \equiv 0,$$

тобто $V(\rho',\varphi)$ - гармонічна функція по координатам точки $x' = (\rho',\varphi)$.

Міркуючи аналогічно, можна переконатися у тому, що перетворення Кельвіна

$$V(x') = \frac{|x|}{a} U(x)$$

у E_3 також переводить гармонічну функцію $U(x)$ у гармонічну функцію $V(x')$.

6.6. Розв'язання задачі Діріхле

Кільце зі сталим значенням шуканої функції на внутрішньому і зовнішньому колах

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа в області D (кільце), обмеженій колами $K_1 : x^2 + y^2 = R_1^2$ і $K_2 : x^2 + y^2 = R_2^2$, який набуває наступних граничних значень:

$$U\big|_{K_1} = U_1,$$
$$U\big|_{K_2} = U_2, \tag{6.45}$$

де U_1 і U_2 - сталі.

Розв'язуємо задачу у полярних координатах. Доцільно шукати розв'язок, не залежний від φ. Рівняння (6.30) при цьому набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0 \tag{6.46}$$

Інтегруючи рівняння (6.46), знайдемо:

$$U = C_1 \ln \rho + C_2. \tag{6.47}$$

Сталі C_1, C_2 визначимо із умов (6.45):

$$U_1 = C_1 \ln R_1 + C_2,$$
$$U_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Звідси знаходимо:

$$C_1 = \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$
$$C_2 = \frac{U_1 \ln R_2 - U_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Підставляючи знайдені значення C_1, C_2 у формулу (6.47), одержимо кінцевий результат:

$$U = \frac{U_2 \ln \frac{\rho}{R_1} - U_1 \ln \frac{\rho}{R_2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \tag{6.48}$$

Зауваження. Фактично, ми розв'язали наступну задачу: знайти функцію U, яка задовольняє рівнянню Лапласа в області, обмеженій поверхнями (в циліндричних координатах): $\rho = R_1, \quad \rho = R_2, \quad z = 0, \quad z = H$, і задовольняє граничні умови:

$$U\big|_{\rho=R_1} = U_1, \quad U\big|_{\rho=R_2} = U_2,$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$$

(задача Діріхле-Неймана). Очевидно, що шуканий розв'язок не залежить ні від z, ні від φ і дається формулою (6.48).

Задача Діріхле для круга

Нехай у площині Oxy є круг радіуса R із центром у початку координат і на його границі задана деяка функція $f(\varphi)$, де φ – полярний кут. Необхідно знайти функцію $U(\rho,\varphi)$ неперервну в крузі, включаючи його границю, яка всередині круга задовольняє рівнянню Лапласа (в полярних координатах)

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad (6.49)$$

і на границі круга приймає задані значення

$$U\big|_{\rho=R} = f(\varphi). \qquad (6.50)$$

Для знаходження шуканого розв'язку застосуємо метод відокремлення змінних, поклавши

$$U(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \qquad (6.51)$$

Підстановка виразу (6.50) у рівняння (6.48) приводить нас до двох рівнянь на функції $\Phi(\varphi)$ та $R(\rho)$:

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad (6.52)$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0, \qquad (6.53)$$

де $\left(-k^2\right)$ - константа відокремлення змінних.

Загальний розв'язок рівняння (6.52) буде

$$\Phi(\varphi) = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \qquad (6.54)$$

Розв'язок рівняння (6.53) шукаємо у вигляді $R(\rho) = \rho^m$, підстановка якого у рівняння (6.53) дає:

$$\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m \rho^{m-1} - k^2\rho^m = 0,$$

або

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння (6.53) буде

$$R(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k}. \qquad (6.55)$$

Підставляючи (6.54) і (6.55) у (6.51), одержимо:

$$U_k = \left(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi\right)\left(C_k\rho^k + D_k\rho^{-k}\right). \qquad (6.56)$$

Функція (6.56) буде розв'язком рівняння (6.49) при довільному ненульовому значенні k. У випадку, коли $k = 0$, рівняння (6.52) і (6.53) приймають вигляд $\Phi''(\varphi) = 0$, $\rho R''(\rho) + R'(\rho) = 0$, тому

$$U_0 = \left(A_0 + B_0\varphi\right)\left(C_0 + D_0\ln\rho\right). \qquad (6.57)$$

Умова періодичності розв’язку по φ вимагає, щоб $B_0 = 0$. Крім того, у центрі круга розв’язок повинен бути скінченим, тому у (6.55) $D_0 = 0$, а у формулі (6.56) - $D_k = 0$. Перепозначивши сталі $A_0 C_0 \to \frac{A_0}{2}$, із (6.57) одержимо

$$U_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{6.58}$$

Із врахуванням (6.56) і (6.58) для загального розв’язку $U(\rho,\varphi)$ задачі одержимо наступний вираз:

$$U(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\rho^n \tag{6.59}$$

(стала C_n включена у A_n і B_n). Підберемо зараз довільні сталі A_n і B_n так, щоб задовольнити крайову умову (6.50). Підставляючи в рівність (6.59) $\rho = R$, на основі (6.50) одержимо:

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)R^n . \tag{6.60}$$

Для виконання останньої рівності необхідно, щоб функцію $f(\varphi)$ можна було розкласти у ряд Фур’є на інтервалі $(-\pi,\pi)$ і щоб $A_n R^n$ і $B_n R^n$ були її коефіцієнтами Фур’є. Таким чином, A_n і B_n повинні визначатися формулами:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t dt. \tag{6.61}$$

Отже, ряд (6.59) із коефіцієнтами (4.7.17) буде розв’язком нашої задачі при умові, що він допускає почленне двократне диференціювання по ρ і φ. Підставивши у (6.59) замість A_n і B_n їх вирази із (6.61) у результаті нескладних тригонометричних перетворень прийдемо до наступного виразу для $U(\rho,\varphi)$:

$$\begin{aligned} U(\rho,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-\varphi)dt\left(\frac{\rho}{R}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right]dt. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Вираз у квадратних дужках в останньому виразі можна звести до вигляду

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(t-\varphi) + \rho^2},$$

в результаті чого (4.7.18) прийме кінцевий вигляд:

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(t-\varphi)+\rho^2}dt. \qquad (6.63)$$

Формула (6.63) носить назву інтегралу Пуассона. Шляхом її аналізу можна довести, що у випадку неперервної функції $f(t)$ функція $U(\rho,\varphi)$, визначена інтегралом (6.63), задовольняє рівнянню (6.49) і $U(\rho,\varphi)\xrightarrow[\rho\to R]{} f(\varphi)$, тобто $U(\rho,\varphi)$ є розв'язком поставленої задачі Діріхле для круга.

7. ФУНКЦІЯ ГРІНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

7.1. Означення та основні властивості функції Гріна

До цих пір ми розв'язували диференціальні рівняння в частинних похідних методом відокремлення змінних. Іншим поширеним у математичній фізиці методом розв'язання таких рівнянь є метод функцій Гріна. Цей метод дає зручний математичний апарат аналітичного зображення розв'язків крайових задач. У даному розділі приведемо визначення та основні властивості функції Гріна для оператора Лапласа, а також наведемо приклади на побудову функцій Гріна для найпростіших областей (круг, куля, напівпростір).

Нехай скінчена область D обмежена гладкою поверхнею σ і функція $u(y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Для функцій розглядуваного класу має місце інтегральне зображення

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \iint_{\sigma} \left(E_n(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial E_n(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n} \iiint_{D} E_n(x,y) \Delta u(y) dy, \quad (7.1)$$

де ω_n – площа одиничної сфери в E_n (довжина одиничного кола в E_2), а $E_n(x,y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в E_n:

$$E_n(x,y) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 3. \end{cases}$$

Для гармонічної в області D функції $u(y)$ ($\Delta u(y) \equiv 0,\ y \in D$) класу $C^1(\overline{D})$ останній доданок в рівності дорівнює нулю і формула Гріна (7.1) виражає значення гармонічної в області D функції $u(x)$ через її значення та значення її нормальної похідної на границі цієї області. Але в задачі Діріхле на границі σ задається тільки функція $u(y)\big|_{\sigma}$, а її нормальна похідна $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\sigma}$ невідома. Тому формулу Гріна (7.1) не можна безпосередньо використовувати для розв'язуванні задачі Діріхле. Однак, якщо б нам вдалося перетворити формулу (7.1) так, щоб під знаком поверхневого інтеграла зникла нормальна похідна, тоді ця формула (при $\Delta u(y) \equiv 0,\ y \in D$) дозволяла б знайти гармонічну функцію $u(x),\ x \in D$, як тільки задані її граничні значення $u(y)\big|_{\sigma}$. Інакше кажучи, можна було б відразу записати розв'язок задачі Діріхле.

Уведемо в розгляд гармонічну по $y \in D$ функцію $g(x,y) \in C^1(\overline{D})$, яка залежить від параметричної точки x. Застосувавши до функцій $u(y) \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$ і $g(x,y)$ формулу Гріна, можемо записати

$$0 = \iint_{\sigma} \left(g(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y - \iiint_{D} g(x,y) \Delta u(y) dy . \quad (7.2)$$

Додамо до рівності (7.1) рівність (7.2), помножену на $1/\omega_n$. Одержимо співвідношення

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \iint_{\sigma} \left(G(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n} \iiint_{D} G(x,y) \Delta u(y) dy , \quad (7.3)$$

де запроваджено позначення

$$G(x,y) = E_n(x,y) + g(x,y), \quad x \in D, \ y \in \overline{D} .$$

Якщо функцію $g(x,y)$ підібрати так, що $G(x,y)\big|_{y \in \sigma} = 0$, то нормальну похідну $\left.\dfrac{\partial u(y)}{\partial \nu}\right|_{\sigma}$ можна виключити з-під поверхневого інтеграла.

<u>Визначення</u>. Функція $G(x,y)$ називається функцією Гріна оператора Лапласа в області D, якщо вона задовольняє двом умовам:

1° $G(x,y)$ зображається у вигляді суми фундаментального розв’язку $E_n(x,y)$ рівняння Лапласа і гармонічної по y в області D функції $g(x,y) \in C^1(\overline{D})$:

$$G(x,y) = E_n(x,y) + g(x,y). \quad (7.4)$$

2° на границі σ області D функція $G(x,y)$ задовольняє граничну умову

$$G(x,y)\big|_{y \in \sigma} = 0 . \quad (7.5)$$

Перерахуємо найпростіші властивості функції Гріна $G(x,y)$, що безпосередньо випливають з її визначення.

<u>Властивість 1.</u> Функція $G(x,y)$ гармонічна і неперервна по y в області D при $y \neq x \in D$, тобто $\Delta_y G(x,y) = 0, \quad y \neq x \in D$.

<u>Властивість 2.</u> Побудова функції Гріна зводиться до розв’язування задачі Діріхле $\Delta_y g(x,y) = 0, \quad y \in D; \ g(x,y)\big|_{y \in \sigma} = -E_n(x,y)\big|_{y \in \sigma}, \quad x \in D$.

<u>Властивість 3.</u> Якщо функція Гріна існує, то вона єдина.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що існують дві функції Гріна в області D.

$$G_1(x,y) = E_n(x,y) + g_1(x,y),$$
$$G_2(x,y) = E_n(x,y) + g_2(x,y).$$

Тоді функція $g(x,y)=G_1(x,y)-G_2(x,y)=g_1(x,y)-g_2(x,y)$ гармонічна в області D і задовольняє умову $g(x,y)\big|_{y\in\sigma}=0$. Із принципу максимального значення випливає, що $g(x)\equiv 0 \Rightarrow G_1(x,y)=G_2(x,y)$.

<u>Властивість 4.</u> Функція Гріна для області D додатна в цій області.

<u>Доведення.</u> У виколотому околі точки $y=x\in D$ фундаментальний розв'язок $E_n(x,y)$ необмежено зростає при $y\to x$, функція $g(x,y)$ неперервна й обмежена. Тому знайдеться $\delta>0$, таке, що на сфері $\sigma_\delta=\{|y-x|=\delta\}$ матимемо:

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma_\delta}=\left(E_n(x,y)+g(x,y)\right)_{y\in\sigma_\delta}>0.$$

Окрім того, $G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=0$. Звідсіля, на основі принципу максимального значення, робимо висновок: в області, обмеженій поверхнями σ_δ і σ, гармонічна функція $G(x,y)$ додатна.

<u>Властивість 5.</u> Функція Гріна оператора Лапласа симетрична відносно своїх змінних, тобто $G(x,y)\equiv G(y,x)$.

Із симетрії функції Гріна $G(x,y)$ випливає наступна властивість: функція Гріна задовольняє рівняння Лапласа по координатам кожної точки при фіксованій іншій точці:

при фіксованому $x,\ y\in D,\ y\neq x$ маємо

$$\Delta_y G(x,y)=0;$$

при фіксованому $y,\ x\in D,\ x\neq y$ маємо

$$\Delta_x G(x,y)=0.$$

Будемо вважати тепер, що у формулі (7.3) $G(x,y)$ є функцією Гріна для області D. Тоді, маючи на увазі, що $G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=0$, знайдемо для довільної функції $u(x)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$ інтегральне зображення

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\iint_\sigma\left(u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}\right)d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\iiint_D G(x,y)\Delta u(y)dy. \quad (7.6)$$

Із цієї рівності випливають очевидні твердження.

Якщо в області D існує функція Гріна та існує розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u(x)=F(x),\quad u(x)\big|_\sigma=f(x), \quad (7.7)$$

що має неперервну нормальну похідну на σ, то цей розв'язок можна записати у вигляді:

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\iint_\sigma f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\iiint_D F(y)G(x,y)dy. \quad (7.8)$$

Зокрема, із (7.7), (7.8) маємо: якщо в області D існують функція Гріна та розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad u(x)\big|_{\sigma} = f(x), \tag{7.9}$$

що володіє неперервною нормальною похідною на σ, то цей розв’язок можна зобразити у вигляді

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\iint_{\sigma} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} d\sigma_y. \tag{7.10}$$

Як видно з формул (7.6)–(7.9), розв’язання задачі Діріхле зводиться до побудови функції Гріна, а точніше – до розв’язування спеціальної задачі Діріхле

$$\Delta_y g(x,y) = 0,$$

$$g(x,y)\big|_{y\in\sigma} = -E_n(x,y)\big|_{y\in\sigma}, \quad x \in D$$

Знайдені формули (7.8) і (7.10), на перший погляд, можуть здатися не корисними через те, що одну задачу Діріхле зводять до іншої. Проте, це не так – для багатьох важливих областей функцію Гріна, а відповідно і розв’язок задачі Діріхле (7.7), або (7.9) вдається побудувати в явному вигляді.

7.2. Фізична інтерпретація функції Гріна

Фундаментальний розв’язок $E_3(x-y) = \dfrac{1}{|x-y|}$ рівняння Лапласа в E_3 можна розглядять як потенціал в довільній точці $y = (y_1, y_2, y_3)$, що створюється електричним зарядом, розміщеним в параметричній точці $x = (x_1, x_2, x_3) \in D^+$. Розподілимо заряди в D^- так, щоб потенціал $g(x,y)$ цих зарядів на границі σ області D^+ збігався з потенціалом $E_3(x,y)$, але мав протилежний знак, тобто $g(x,y)\big|_{y\in\sigma} = -E_n(x,y)\big|_{y\in\sigma}$.

Функція $g(x,y)$ по координатам точки y гармонічна в D^+, через те, що вона з потенціалом зарядів у точках, що не належать D^+.

Розглянемо функцію $G(x,y) = E_3(x,y) + g(x,y)$, що задовольняє наступні умови:

1°. є сумою гармонічної в області D^+ функції, ($g(x,y)$ ($\Delta_y g(x,y) = 0,\ y \in D^+,\ x$ – фіксоване) і фундаментального розв'язку $E_3(x,y)$ рівняння Лапласа в E_3;

2°. на границі σ області D^+ перетворюється в нуль:

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma} = \left(E_3(x,y) + g(x,y)\right)_{y\in\sigma} = 0.$$

Визначена таким чином функція $G(x,y)$ є, очевидно, функцією Гріна для області D^+. Точки області D^-, в яких розподілені заряди, що створюють потенціал $g(x, y)$, та величини цих зарядів називаються електростатичним зображенням заряду, розміщеного в точці $x \in D^+$.

Отже, для того щоб побудувати функцію Гріна для області D^+, достатньо знайти електростатичне зображення одиничного заряду, розміщеного в точці $x \in D^+$. Аналогічне фізичне тлумачення функції Гріна можна привести і для площинних областей, що містяться в E_2. Використовуючи приведену електростатичну інтерпретацію, побудуємо функцію Гріна для деяких областей.

Приклади на побудову функції Гріна. Метод електростатичних зображень.

Для побудови функції Гріна для області з достатньо широкою групою симетрії дуже ефективним виявляється метод електростатичних зображень. Цей метод ми проілюструємо на низці прикладів.

а) Функція Гріна для напівпростору. Побудуємо функцію Гріна в E_3 для напівпростору $D^+ = \{y_3 > 0\}$. Границею σ області D^+ буде площина $Oy_1y_2(y_3 = 0)$. Помістимо в точку $x = (x_1, x_2, x_3) \in D^+$ одиничний заряд, який створює в необмеженому просторі електростатичне поле з потенціалом $E_3(x-y) = 1/|x-y|$. Якщо в точку $\overset{1}{x} = (x_1, x_2, -x_3)$, що симетрична до точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ відносно площини $\sigma(y_3 = 0)$, помістимо заряд, рівний за величиною і протилежний за знаком заряду в точці x, то він створює поле, потенціал якого визначається функцією

$$g(x, y) = -\frac{1}{|\overset{1}{x} - y|} \equiv -E_3(\overset{1}{x} - y).$$

Ця функція гармонічна всюди поза точкою $\overset{1}{x}$, отже вона гармонічна і в області D^+. Із міркувань симетрії випливає (див. рис. 7.1), що на границі σ області D^+ функція $g(x, y)$ приймає значення, рівні за величиною та протилежні за знаком потенціалу $E_3(x, y)$:

$$\left(E_3(x, y) + g(x, y)\right)_{y \in \sigma} = \left(E_3(x, y) - E_3(\overset{1}{x} - y)\right)_{y \in \sigma} = 0.$$

Таким чином, функція

$$G(x, y) = E_3(x, y) - E_3(\overset{1}{x} - y) = \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|\overset{1}{x} - y|} \tag{7.11}$$

1. зображається в області D^+ і вигляді суми фундаментального розв'язку рівняння Лапласа $E_3(x,y)$ і гармонічної в цій області функції $-E_3(\overset{1}{x}-y)$;

2. на границі σ області D^+

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=\left(E_3(x,y)-E_3(\overset{1}{x}-y)\right)_{y\in\sigma}=\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}\right)_{y\in\sigma}=0.$$

Звідси випливає, що функція (7.11) є функцією Гріна для напівпростору $y_3>0$ в E_3.

Повторюючи міркування, які призвели до побудови функції Гріна (7.11) для напівпростору в E_3, можна показати, що подібна формула має місце і для функції Гріна напівпростору в E_2, тобто для на півплощини $y_2>0$:

$$G(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}-\ln\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}, \qquad (7.12)$$

де $x=(x_1,x_2)$, $\overset{1}{x}(x_1,-x_2)$, $y=(y_1,y_2)$.

Перепишемо в розгорнутому вигляді функцію Гріна для на півпростору:
в E_3:

$$G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}},$$

в E_2:

$$G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}.$$

б) <u>Функція Гріна для кулі.</u> При побудові функції Гріна для кулі скористаємось перетворенням інверсії. Нехай куля D^+ обмежена сферою $\sigma=\{|y|=a\}$, а фіксовані точки $x=(x_1,x_2,x_3)\in D^+$ і $\overset{1}{x}=\left(\overset{1}{x}_1,\overset{1}{x}_2,\overset{1}{x}_3\right)\in D^-$ симетричні відносно σ при перетворенні інверсії:

$$\overset{1}{x}=\frac{a^2}{|x|^2}x,\quad x=\frac{a^2}{|\overset{1}{x}|^2}\overset{1}{x},\quad |x||\overset{1}{x}|=a^2. \qquad (7.13)$$

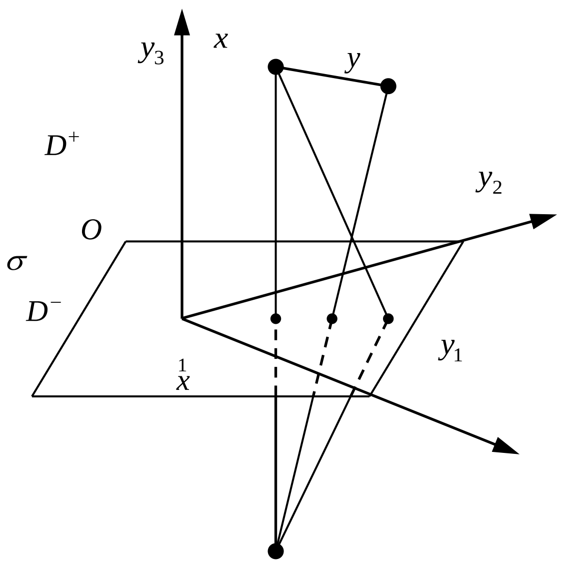

Рисунок 7.1.

Доведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема. Відношення відстаней від довільної точки сфери σ до двох фіксованих та симетричних відносно цієї сфери точок x і $\overset{1}{x}$ є величина постійна.

Доведення. Скалярний добуток вектора на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора:

$$|\overset{1}{x}-y|^2=(\overset{1}{x}-y)^2=\overset{1}{x}{}^2-2\overset{1}{x}y+y^2.$$

Користуючись рівностями (7.13), можемо записати

$$|\overset{1}{x}-y|^2=\left(\frac{a^4}{|x|^4}x^2-2\frac{a^2}{|x|^2}xy+y^2\right)=\frac{a^2}{|x|^2}\left(\frac{a^2}{|x|^2}x^2-2xy+y^2\frac{|x|^2}{a^2}\right).$$

Але $|x|^2=x^2,\ |y|^2=y^2=a^2,$ тому

$$|\overset{1}{x}-y|^2=\frac{a^2}{|x|^2}(y^2-2xy+x^2)=\frac{a^2}{|x|^2}|x-y|^2\Rightarrow\frac{|\overset{1}{x}-y|^2}{|x-y|^2}=\frac{a}{|x|}\equiv const\quad\forall y\in\sigma$$

при фіксованих x і $\overset{1}{x}$.

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\frac{1}{|x-y|}=\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}\quad\forall y\in\sigma. \tag{7.14}$$

Тепер можна стверджувати, що функція

$$G(x,y)=E_3(x,y)-g(x,y)\equiv\frac{1}{|x-y|}-\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|} \qquad (7.15)$$

і є шуканою функцією Гріна для кулі D^+, оскільки $g(x,y)=-\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}$ – гармонічна функція, що має особливості в точці $\overset{1}{x}\in\overline{D^+}$; крім цього на сфері σ

$$G(x,y)\Big|_{y\in\sigma}=\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}\right)_{y\in\sigma}=0.$$

Функцію (7.15) можна інтерпретувати, як потенціал одиничного заряду в точці x та його електростатичного зображення в $\overset{1}{x}$.

Скориставшись рівністю (7.13), виконаємо перетворення:

$$g(x,y)=-\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}=-\frac{1}{\frac{|x|}{a}\left|\frac{a^2}{|x|^2}x-y\right|}=-\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|}=-E_3\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right).$$

Тепер функцію Гріна для кулі $\{|y|<a\}\subset E_3$ запишемо у вигляді

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|}=E_3(x,y)-E_3\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right). \qquad (7.16)$$

в) <u>Функція Гріна для круга.</u> Нехай круг D^+ обмежений колом $\sigma=\{|y|=a\}$; фіксована точка $\overset{1}{x}=(\overset{1}{x}_1,\overset{1}{x}_2)\in D^-$ симетрична до точки $x=(x_1,x_2)\in D^+$ відносно σ, $y=(y_1,y_2)$ – довільна точка в E_2.

Функція Гріна для круга може бути одержана в тим же способом, що і функція Гріна для кулі. У цьому випадку функцію $G(x,y)$ слід шукати у вигляді суми фундаментального розв'язку $E_2(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}$ рівняння Лапласа в E_2 і гармонічної по y â D^+ функції $g(x,y)=-\ln\frac{a}{|x|}\frac{1}{|\overset{1}{x}-y|}$:

$$G(x,y)=E_2(x,y)+g(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}-\ln\frac{a}{|x||\overset{1}{x}-y|}.$$

Неважко переконатися в тому, що визначена таким способом функція $G(x,y)$ перетворюється в нуль на границі σ:

$$G(x,y)\Big|_{y\in\sigma} = \left(\ln\frac{1}{|x-y|} - \ln\frac{a}{|x||\overset{1}{x}-y|} \right)_{y\in\sigma} = 0$$

Отже, $G(x,y)$ – функція Гріна для круга $D^+ \subset \mathbf{E_2}$.

Скориставшись рівністю (7.13), виконаємо перетворення

$$g(x,y) = -\ln\frac{a}{|x||\overset{1}{x}-y|} = -\ln\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x - \frac{|x|}{a}y\right|} \equiv -E_2\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right).$$

Тепер функцію Гріна для круга $\{|y|<a\} \subset E_2$ можемо записати у вигляді

$$G(x,y) = \ln\frac{1}{|x-y|} - \ln\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x - \frac{|x|}{a}y\right|} \equiv E_2(x,y) - E_2\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right). \quad (7.17)$$

7.3. Розв’язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна

а) <u>Задача Діріхле для кулі в E_n ($n = 2{,}3$).</u> Використовуючи функцію Гріна, знайдемо розв’язок внутрішньої задачі Діріхле для кулі D^+, обмеженої сферою $\sigma = \{|x| = a\}$:

$$\Delta U(x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0, \quad (7.18)$$

$$U(x)\Big|_{x\in\sigma} = f(x) \in C(\sigma). \quad (7.19)$$

Якщо розв’язок крайової задачі (7.18), (7.19) існує, то він дається формулою (7.10):

$$U(x) = -\frac{1}{\omega_n} \iint_{|y|=a} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} d\sigma_y, \quad (7.20)$$

де функція Гріна

$$G(x,y) = E_n(x,y) - E_n\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right),\ E_n(x,y) = \begin{cases} \ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2 \\ \dfrac{1}{|x-y|}, & n=3. \end{cases} \quad (7.21)$$

Обчислимо похідну функції Гріна $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$ на сфері. Напрямок вектора зовнішньої нормалі ν в точці $y \in \sigma$ збігається з напрямком радіуса, що йде від центра $\hat{I}$ до точки y (рис. 7.2). Позначивши $(y, Oy_k) = \alpha_k$, можемо записати $\cos\alpha_k = \dfrac{y_k}{a}$.

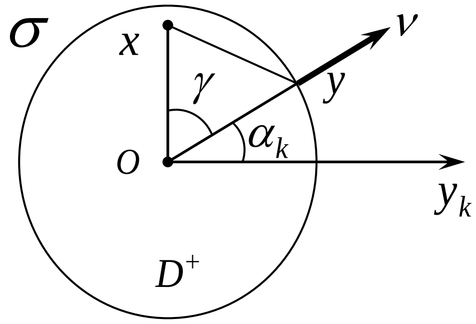

Рисунок 7.2.

Введемо скалярні сталі $\grave{A}$, $\hat{A}$ і обчислимо в точці $y \in \sigma$ похідну за напрямком вектора зовнішньої нормалі ν:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}|Ax - By|^{-1} = \sum_k \frac{\partial |Ax - By|^{-1}}{\partial y_k}\cos\alpha_k = \sum_k \frac{\partial |Ax - By|^{-1}}{\partial y_k}\frac{y_k}{a}.$$

Але

$$|Ax - By|^{-1} = \left(\sum_j \left(Ax_j - By_j\right)^2\right)^{-1/2},$$

тому

$$\frac{\partial |Ax - By|^{-1}}{\partial y_k} = -\frac{1}{2}\left(\sum_j \left(Ax_j - By_j\right)^2\right)^{-3/2} 2\left(Ax_k - By_k\right)\left(-B\right) = \frac{-B\left(By_k - Ax_k\right)}{|Ax - By|^3}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial |Ax - By|^{-1}}{\partial y_k} = -\sum_k \frac{B\left(By_k - Ax_k\right)}{|Ax - By|^3}\cdot\frac{y_k}{a} = -\frac{B^2\sum\limits_k y_k^2 - AB\sum\limits_k x_k y_k}{a|Ax - By|^3}.$$

Оскільки $y \in \sigma$, то $\sum\limits_k y_k^2 = a^2$. Позначивши скалярний добуток $\sum\limits_k x_k y_k = xy$, будемо мати

$$\frac{\partial |Ax - By|^{-1}}{\partial \nu} = -\frac{B^2 a^2 - ABxy}{a|Ax - By|^3}.$$

Поклавши $A = B = 1$, знайдемо

$$\frac{\partial \dfrac{1}{|x-y|}}{\partial v}=-\frac{a^2-xy}{a|x-y|^3}. \qquad (7.22)$$

Поклавши тепер $A=a/|x|,\quad B=|x|/a$, одержимо

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\left|\dfrac{a}{|x|}x-\dfrac{|x|}{a}y\right|}=\frac{|x|^2-xy}{a\left|\dfrac{a}{|x|}x-\dfrac{|x|}{a}y\right|^3}.$$

За властивістю функції Гріна

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=\left(E_n(x,y)-E_n\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right)\right)_{y\in\sigma}=0\Rightarrow$$

$$E_n(x,y)\big|_{y\in\sigma}=E_n\left(\frac{a}{|x|}x,\ \frac{|x|}{a}y\right)_{y\in\sigma}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|_{y\in\sigma}=|x-y|_{y\in\sigma}.$$

Враховуючи цю рівність, для похідної одержуємо вираз

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\left|\dfrac{a}{|x|}x-\dfrac{|x|}{a}y\right|}\right|_{y\in\sigma}=-\frac{|x|^2-xy}{a|x-y|^3}. \qquad (7.23)$$

Тепер, скориставшись (7.22), (7.23), знайдемо похідну функції Гріна (7.21).
При $n=3$:

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial v}\right|_{y\in\sigma}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{\left|\dfrac{a}{|x|}x-\dfrac{|x|}{a}y\right|}\right)_{y\in\sigma}=$$

$$=-\frac{a^2-xy}{a|x-y|^3}+\frac{|x|^2-xy}{a|x-y|^3}=-\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^3},$$

при $n=2$:

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y\in\sigma} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left.\left(\ln\frac{1}{|x-y|} - \ln\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x - \frac{|x|}{a}y\right|}\right)\right|_{y\in\sigma} = -\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^2}.$$

Підставивши у формулу (7.20) значення похідної $\left.\frac{\partial G}{\partial \nu}\right|_{\sigma}$, зобразимо загальних розв'язок задачі Діріхле (7.18), (7.19) для кулі $|x|<a$ (при $n=3$) і для круга $|x|<a$ (при $n=2$) у вигляді

$$U(x) = -\frac{1}{a\omega_n}\iint_{|y|=a} f(y)\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^n}d\sigma_y\,, \tag{7.24}$$

де $\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi$. Формулу (7.24) називають інтегралом Пуассона.

Надамо інтегралові Пуассона (7.24) іншої форми запису. Позначимо через γ кут між променями Ox і Oy (рис.7.2). Тоді з трикутника, що з'єднує точки $O,\ x\in D^+$ та $y\in\sigma$, знайдемо

$$|x-y|^2 = a^2 - 2a|x|\cos\gamma + |x|^2.$$

При $n=3$ введемо сферичну систему координат з початком в центрі сфери σ. Нехай (a,θ,φ) – сферичні координати точки $y=(y_1,y_2,y_3)$, а (r_0,θ_0,φ_0) – сферичні координати точки $x=(x_1,x_2,x_3)$:

$$y_1 = a\sin\theta\cos\varphi,\ y_2 = a\sin\theta\sin\varphi,\ y_3 = a\cos\theta,\ d\sigma_y = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

$$x_1 = r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0,\ x_2 = r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ x_3 = r_0\cos\theta_0.$$

Тоді формулу (7.24) можна переписати у вигляді

$$U(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\frac{a^2-r_0^2}{\left(a^2-2ar_0\cos\gamma+r_0^2\right)^{3/2}}\sin\theta\, d\theta, \tag{7.25}$$

де

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{7.26}$$

У тому випадку, коли задача Діріхле є плоскою, а областю визначення функції $U(x)$ є круг радіуса a, інтеграл Пуассона набуває більш простого вигляду:

$$U(\rho_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}d\varphi, \tag{7.27}$$

де (a,φ) – полярні координати точки $y=(y_1,y_2)$, що лежать на колі σ, а (ρ_0,φ_0) – координати точки $x=(x_1,x_2)$:

$$y_1 = a\cos\varphi,\ y_2 = a\sin\varphi,\ d\sigma_y = a\,d\varphi;$$

$$x_1 = \rho_0\cos\varphi_0,\ x_2 = \rho_0\sin\varphi_0.$$

б) Зовнішня задача Діріхле. В області $D^- = \{|x| > a\}$ знайти гармонічну функцію $U(x)$, яка регулярна на нескінченості і задовольняє граничну умову $U(x)\big|_{x\in\sigma} = f(x)\in C(\sigma)$.

Єдина відмінність у міркуваннях при розв'язанні зовнішньої задачі зводиться до того, що вектор зовнішньої нормалі направлений по радіусу до центра сфери σ. Отже

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y\in\sigma} = -\frac{a^2 - |x|^2}{a\,|x-y|^n},$$

і розв'язок знову запишеться у вигляді інтеграла Пуассона:

$$U(x) = -\frac{1}{a\omega_n}\iint\limits_{|y|=a} f(y)\frac{|x|^2 - a^2}{|x-y|^n}\,d\sigma_y.$$

в) Задача Діріхле для півпростору. Використовуючи функцію Гріна, знайдемо розв'язок задачі Діріхле для півпростору $D^+ = \{y_n > 0\}$:

$$\Delta U(x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0, \tag{7.29}$$

$$U(x)\big|_{x_n=0} = f(x)\in C(\sigma),\quad f(x) = 0\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right). \tag{7.30}$$

Якщо розв'язок задачі (7.29), (7.30) існує, то він зображається у вигляді

$$U(x) = -\frac{1}{\omega_n}\iint\limits_{y_n=0} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\,d\sigma_y. \tag{7.31}$$

Для півпростору функція Гріна визначається формулами (7.11) і (7.12):

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|} - \dfrac{1}{|\overset{1}{x} - y|},\ n = 3, \\[2ex] \ln\dfrac{1}{|x-y|} - \ln\dfrac{1}{|\overset{1}{x} - y|},\ n = 2, \end{cases}$$

де

$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ \overset{1}{x} = (x_1,\ldots,-x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n).$$

Вектор зовнішньої нормалі ν до площини $y_n = 0$, має напрямок, протилежний осі Oy_n, тому

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y_n=0} = -\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}\right|_{y_n=0}.$$

При $n=3$ маємо:

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y\in\sigma} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y_3}\left\{\left(\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^{2}(x_j-y_j)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{y_3=0} = \quad (7.32)$$

$$= \left\{\frac{y_3-x_3}{|x-y|^3} - \frac{y_3+x_3}{|x-y|^3}\right\}_{y_3=0} = -\frac{2x_3}{|x-y|^3}.$$

Аналогічно, при $n=2$ знайдемо

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y_2=0} = -\frac{2x_2}{|x-y|^2}. \quad (7.33)$$

Підставляючи вирази (7.32) і (7.33) для похідної у (7.31), запишемо розв'язок задачі Діріхле для півпростору у вигляді інтеграла Пуассона

$$U(x) = \frac{2}{\omega_n}\iint_{y_n=0} f(y)\frac{x_n}{|x-y|^n}d\sigma_y, \quad n=2,3. \quad (7.34)$$

Перепишемо формулу Пуассона у розгорнутому вигляді.

Для півплощини $y_2>0$:

$$U(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1)\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1. \quad (7.35)$$

Для півпростору $y_3>0$:

$$U(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_2)\frac{x_3}{\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right)^{3/2}}dy_1dy_2. \quad (7.36)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Дирак. Принципы квантовой механики. – Москва: Физматгиз, 1960.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. – Москва: Наука, 1971. – 232 с.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. - Москва: Наука, 1974. – 752 с.
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. - Москва: Наука, 1973. – 416 с.
5. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1976. – 527 с.
6. А.Г. Свешников, А.Н.Тихонов. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972.
7. В.Н. Николенко. Уравнения математической физики. – Москва: Изд. МГУ, 1981. – 391 с.
8. Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. – Москва: Мир, 1982. – 486 с.
9. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. Специальные функции математической физики. – Москва: Наука, 1978. – 319 с.

Карбованець М.І., Лазур В.Ю.

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник
(для студентів спеціальності
172 Телекомунікації та радіотехніка)

Рекомендовано до друку методичною комісією фізичного факультету (протокол № 6 від 19 лютого 2019 року).

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 4,30. Зам. № 81. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ "Говерла". м. Ужгород, вул. Капітульна, 18. Тел.: 3-32-48.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції – Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року