

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

М.І. Карбованець, В.Ю. Лазур

**МЕТОДИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ
ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ**

Навчальний посібник

Ужгород – 2019

Карбованець М.І., Лазур В.Ю. Методи операційного числення та його застосування: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. – 56 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник
відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Посібник створено на базі лекційних курсів “Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення”, “Спеціальні розділи математики” та “Методи математичної фізики”, що читаються студентам фізичного факультету УжНУ спеціальностей “Телекомунікації та радіотехніка”, “Середня освіта. Фізика”, “Фізика та астрономія”, “Прикладна фізика і наноматеріали” та “Кібербезпека” (ОПП “Системи технічного захисту інформації”). Він містить ряд основних ідей і методів операційного числення в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах та спецкурсах із загальної та теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із теоретичної механіки, електродинаміки, теорії коливань тощо.

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей університетів.

*Рекомендовано до друку науково-методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 6 від 19 лютого 2019 року).*

© Карбованець М.І., Лазур В.Ю., 2019 р.
© ДВНЗ «Ужгородський національний університет» 2019 р.

Зміст

	Стор.
В С Т У П.....	4
1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА	5
1.1. Означення і основні властивості перетворення Лапласа	5
1.2. Зображення деяких елементарних функцій.....	6
1.3. Зображення функцій зі зміненим масштабом незалежної змінної	7
1.4. Властивість лінійності зображення	7
1.5. Теорема зміщення зображення	8
1.6. Зображення похідних.....	9
1.7. Диференціювання зображення.....	9
1.8. Теорема згортання.....	10
1.9. Зображення інтеграла	11
1.10. Теорема запізнення	12
1.11. Інтегрування зображення	13
1.12. Зображення періодичної функції.....	14
1.13. Зображення полігональної функції	15
1.14. Таблиця властивостей зображень.....	18
1.15. Таблиця зображень.....	19
Завдання до розділу 1.....	20
2. ВИЗНАЧЕННЯ ОРИГІНАЛА ЗА ЗОБРАЖЕННЯМ.....	24
2.1. Формула Мелліна	24
2.2. Умови існування оригінала	25
2.3. Обчислення інтеграла Мелліна. Приклади.....	26
Завдання до розділу 2.....	29
3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ОПЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ.....	30
3.1. Звичайні диференціальні рівняння	30
3.2. Системи диференціальних рівнянь першого порядку.....	34
3.3. Системи двох диференціальних рівнянь першого порядку	36
3.4. Крайова задача для рівняння в частинних похідних	39
3.5. Рівняння теплопровідності	41
Завдання до розділу 3.....	44
4. ОПЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	52
Завдання до розділу 4.....	54
ЛІТЕРАТУРА.....	55

ВСТУП

Операційне числення – це сукупність методів розв’язання різноманітних математичних задач, у першу чергу диференціальних рівнянь, який отримав доволі широке застосування в задачах механіки, математичної фізики, електротехніки, автоматики. В основі операційних методів лежить ідея інтегральних перетворень, яка пов’язана із співставленням розв’язку $f(t)$ вихідної задачі деякої функції $F(p)$ комплексної змінної таким чином, що звичайному диференціальному рівнянню для функції $f(t)$ ставиться у відповідність алгебраїчне рівняння для $F(p)$. Аналогічно рівнянню в частинних похідних для функції двох дійсних змінних можна співставити звичайне диференціальне рівняння і т.д. Метод операційного числення ґрунтується на перетворенні Лапласа, із з’ясування властивостей якого ми і розпочнемо вивчення основ операційних методів.

Пропонований навчальний посібник призначений для студентів фізичного факультету спеціальностей “Телекомунікації та радіотехніка”, “Середня освіта. Фізика”, “Фізика та астрономія”, “Прикладна фізика і наноматеріали” та “Кібербезпека” (ОП “Системи технічного захисту інформації”), що вивчають курси “Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення”, “Спеціальні розділи математики” та “Методи математичної фізики”. Він містить матеріал з операційного числення, який, на думку авторів, важливий для математичної підготовки спеціалістів з фізики і технології матеріалів та компонентів електронної техніки. Посібник також буде корисний студентам-фізикам при вивченні курсів: “Вища математика”, “Диференціальні та інтегральні рівняння”, “Основи радіоелектроніки”, “Основи теорії кіл, сигнали та процеси в електроніці”, а також студентам інженерно-технічного факультету і факультету математики та цифрових технологій при вивченні окремих розділів фахових дисциплін.

Даний навчальний посібник не претендує на повноту – поза його межами залишився розгляд дискретних перетворень Лапласа. Окрім того, у посібнику, як правило, подано тільки формулювання теорем, а їх доведення читач, при потребі, знайде у наведеній у переліку літературі.

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1. Означення і основні властивості перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції $f(t)$ дійсної змінної t функцію $F(p)$ комплексної змінної p за допомогою співвідношення

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Оскільки даний інтеграл має зміст не для довільної функції $f(t)$, визначимо клас функцій $f(t)$, для яких вказане інтегральне перетворення можна завідомо реалізувати. Нехай функція $f(t)$ визначена для всіх значень дійсної змінної $-\infty < t < +\infty$ і задовольняє умови:

1. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.
2. При $t \geq 0$ функція $f(t)$ є кусково-неперервною, тобто на будь-якому скінченному проміжку осі t функція $f(t)$ має скінченне число точок розриву першого роду.
3. При $t \rightarrow \infty$ функція $f(t)$ має обмежений показник росту, тобто для кожної із функцій $f(t)$ існують додатні числа M і s такі, що для всіх $t > 0$

$$|f(t)| \leq Me^{st}. \quad (1.1)$$

Точна нижня межа тих значень s , для яких виконується нерівність (1.1), називається показником росту функції $f(t)$.

Означення. Перетворенням Лапласа заданої функції $f(t)$ дійсної змінної t називається перетворення, що ставить у відповідність функції $f(t)$ дійсної змінної t функцію $F(p)$ комплексної змінної p , визначену за допомогою інтегралу

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.2)$$

Інтеграл (1.2) є невласним інтегралом, що параметрично залежить від змінної p .

Якщо $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$, а $\operatorname{Re} p < 0$, то інтеграл (1.2) розбіжний. Відповідь на питання про область збіжності інтеграла (1.2), а отже і про область визначення функції $F(p)$, дає наступна теорема.

Теорема 1. Інтеграл (1.2) збіжний в області $\operatorname{Re} p > s$, де s - показник росту функції $f(t)$, причому в області $\operatorname{Re} p \geq x_0 > s$ цей інтеграл рівномірно збіжний (доведення теореми 1 див. [2], стор.212).

Можна показати (див. [2], стор.213), що за допомогою перетворення Лапласа (1.2) функція $F(p)$ комплексної змінної p визначена у півплощині комплексної площини p правіше прямої $\operatorname{Re} p = s$, яка паралельна уявній осі.

Функція $F(p)$, яка визначена за допомогою перетворення (1.2), називається **зображенням Лапласа** функції $f(t)$ (або L -зображенням, або просто зображенням функції $f(t)$). Функція $f(t)$ називається **оригіналом** функції $F(p)$, або **початковою функцією**. Символічно зв'язок функцій $f(t)$ і $F(p)$ позначається у вигляді

$$f(t) \Leftarrow F(p) \text{ або } F(p) \Rightarrow f(t). \quad (1.3)$$

Деколи зручніше користуватися таким символічним позначенням

$$L\{f(t)\} = F(p). \quad (1.4)$$

Сформулюємо теореми, необхідні для подальшого розгляду.

Теорема 2. Зображення Лапласа функції $f(t)$ є аналітичною функцією комплексної змінної p в області $\operatorname{Re} p > s$, де s – показник росту функції $f(t)$ (доведення теореми 2 див. [2], стор.214).

В силу аналітичності функції $F(p)$ в області $\operatorname{Re} p > s$ її похідні можуть бути обчислені диференціюванням підінтегральної функції в (1.2) за параметром p .

Теорема 3. Якщо дві неперервні функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають одне і те ж L -зображення, то $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

Ця теорема має винятково важливе значення у подальшому розгляді, бо вона гарантує єдиність розв'язку заданих рівнянь.

1.2. Зображення деяких елементарних функцій

а) Одинична функція Хевісайда $\sigma_0(t)$.

Нехай

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Використовуючи (1.2), одержимо:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\sigma_0(t) \Leftarrow \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.6)$$

У подальшому під функцією $f(t)$ будемо розуміти добуток $f(t)\sigma_0(t)$, тобто функцію, яка тотожно дорівнює нулю при $t < 0$, не відмічаючи це спеціально у відповідних формулах.

б) Нехай $f(t) = \sin t$. Тоді $L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{1}{p^2 + 1}$. Отже,

$$\sin t \Leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (1.7)$$

в) Нехай $f(t) = \cos t$. За означенням (1.2) $L\{\cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{p}{p^2 + 1}$.

Таким чином,

$$\cos t \Leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (1.8)$$

1.3. Зображення функцій зі зміненням масштабом незалежної змінної

Теорема 4 (теорема подібності). Якщо $f(t) \Leftarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s$, то

$$f(\alpha t) \Leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > s. \quad (1.9)$$

Доведення. Справді, $L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. Теорема

доведена.

Використовуючи властивість (1.9), одержимо:

$$\sin(\omega t) \Leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (1.10)$$

$$\cos(\omega t) \Leftarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (1.11)$$

1.4. Властивість лінійності зображення

Теорема 5. Зображення суми декількох функцій $f_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), помножених на задані дійсні або комплексні числа C_i , рівне сумі зображень $F_i(p)$ цих функцій, помножених на відповідні сталі C_i , тобто, якщо

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t), \quad F(p) \Rightarrow f(t), \quad F_i(p) \Rightarrow f_i(t), \quad (1.12)$$

то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p) \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i f_i(t), \quad \operatorname{Re} p > \max s_i, \quad (1.13)$$

де s_i - показники росту функцій $f_i(t)$ (доведення теореми 5 див.[2], стор.217, [3], стор.415).

Приклад 1.1. Знайти зображення функції $f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$.

Розв'язання. Використовуючи вирази (1.10), (1.11) і властивість лінійності зображення (1.13), одержимо

$$L\{f(t)\} = 3\frac{4}{p^2 + 4^2} - 2\frac{p}{p^2 + 5^2} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25}.$$

1.5. Теорема зміщення зображення

Теорема 6. Якщо $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то $F(p + \alpha)$ є зображенням функції $e^{-\alpha t} f(t)$, тобто, якщо $F(p) \Rightarrow f(t)$, то

$$F(p + \alpha) \Rightarrow e^{-\alpha t} f(t), \quad \operatorname{Re}(p + \alpha) > s. \quad (1.14)$$

Доведення. Дійсно, $L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = F(p + \alpha)$. Теорема доведена.

Знайдемо зображення функцій $e^{\pm \lambda t}$, $sh \lambda t$, $ch \lambda t$, $e^{\pm \lambda t} \sin \omega t$, $e^{\pm \lambda t} \cos \omega t$, користуючись вказаними вище властивостями зображення:

а) Використовуючи вирази (1.6) і (1.14), одержимо

$$\frac{1}{p + \lambda} \Rightarrow e^{-\lambda t}, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{p - \lambda} \Rightarrow e^{\lambda t}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda. \quad (1.16)$$

б) Знайдемо піврізницю виразів (1.16) і (1.15):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \lambda} - \frac{1}{p + \lambda} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}),$$

або

$$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \Rightarrow sh \alpha t, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda. \quad (1.17)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{p}{p^2 - \lambda^2} \Rightarrow ch \lambda t, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda. \quad (1.18)$$

в) Використовуючи вирази (1.10), (1.11) і (1.14), безпосередньо одержимо:

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \Leftarrow \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|), \quad (1.19)$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \Leftarrow \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|). \quad (1.20)$$

1.6. Зображення похідних

Теорема 7. Якщо функція $f'(t)$ задовольняє умови існування зображення і $f(t) \Leftarrow F(p)$, $\text{Re } p > s$, то

$$f'(t) \Leftarrow pF(p) - f(0). \quad (1.21)$$

Доведення. За означенням

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p)$$

(оскільки $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$), що і доводить теорему 7.

Аналогічно можна довести і теорему про зображення похідної n -го порядку $f^{(n)}(t)$.

Теорема 8. Якщо функція $f^{(n)}(t)$ задовольняє умови існування зображення і $f(t) \Leftarrow F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \Leftarrow p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)], \text{Re } p > s. \quad (1.22)$$

Зауваження 1.1. У важливому для застосувань випадку $n = 2$ маємо

$$f''(t) \Leftarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (1.23)$$

Зауваження 1.2. Якщо $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, вирази (1.21)-(1.23) спрощуються:

$$f'(t) \Leftarrow pF(p), \quad (1.21'')$$

$$f''(t) \Leftarrow p^2 F(p), \quad (1.23'')$$

$$f^{(n)}(t) \Leftarrow p^n F(p). \quad (1.22'')$$

Доведена властивість (1.21) дозволяє замінити диференціювання оригіналу множенням зображення на незалежну змінну і знаходить численні застосування (див. розділ 3).

1.7. Диференціювання зображення

Теорема 9. Якщо $F(p) \Rightarrow f(t)$, то

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \Rightarrow t^n f(t), \text{Re } p > s. \quad (1.24)$$

(доведення теореми 9 див. [2], стор.223, [3], стор.418).

Теорема 9 дозволяє знайти зображення степеневі функції $f(t) = t^n$. Дійсно, із (1.24) для $n = 1$ одержимо

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \Rightarrow t, \text{ або } \frac{1}{p^2} \Rightarrow t.$$

Для довільного цілого n вираз (1.25) приводить до такого співвідношення:

$$t^n \Leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (1.25)$$

Приклад 1.2. Знайти зображення функції $f(t) = t \sin \omega t$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.24) до виразу (1.10), маємо:

$$t \sin \omega t \Leftarrow (-1) \frac{d}{dp} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Отже,

$$t \sin \omega t \Leftarrow \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (1.26)$$

Аналогічно можна показати, що

$$t \cos \omega t \Leftarrow \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (1.27)$$

1.8. Теорема згортання

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $\varphi(t)$, яка визначена співвідношенням

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (1.28)$$

Справедливість останньої рівності легко встановлюється за допомогою заміни у лівому інтегралі змінної $t - \tau = z$. Операція отримання згортки (1.28) називається згортанням двох функцій. Наступна теорема є корисною при розв'язанні диференціальних рівнянь операційним методом.

Теорема 10. Якщо $f_1(t) \Leftarrow F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$ і $f_2(t) \Leftarrow F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$, то

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \Leftarrow F_1(p) F_2(p), \quad (1.29)$$

$$\operatorname{Re} p > \max \{s_1, s_2\}.$$

Доведення. За означенням зображення

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt.$$

Здійснивши у внутрішньому інтегралі заміну змінної $t - \tau = z$, одержимо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \Leftarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pz} f_2(z) dz = \\ &= F_1(p) F_2(p), \end{aligned}$$

що і доводить теорему 10.

Одержана формула (1.29) наведена у таблиці властивостей зображень (за №6). Вона часто застосовується для знаходження оригінала за відомим зображенням, коли задане зображення вдається розбити на співмножники із відомими оригіналами.

Приклад 1.3. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^t \sin \omega t \cos \omega(t - \tau) d\tau = \frac{t}{2} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Відповідь: $f(t) = \frac{t}{2} \sin \omega t$.

1.9. Зображення інтеграла

Використовуючи теорему згортання, знайдемо зображення інтеграла від даної функції. Нехай $f(t) \Leftarrow F(p)$, $\text{Re } p > s$. Покажемо, що

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftarrow \frac{1}{p} F(p). \quad (1.30)$$

Дійсно, запровадимо функції: $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = 1$ та їх зображення:

$F_1(p) = F(p)$, $F_2(p) = \frac{1}{p}$. Підстановка даних виразів у формулу (1.29) при-

водить до виразу (1.30).

Узагальнення результату (1.30) має вид:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \Leftarrow \frac{1}{p^n} F(p), \quad \text{Re } p > s. \quad (1.30')$$

Вирази (1.30), (1.30') мають широке застосування в обчисленнях зображень різних функцій.

1.10. Теорема запізнення

Нехай функція $f(t)$ при $t < 0$ тотожно рівна нулю (рис.1.1(а)). Тоді функція $f(t - t_0)$ тотожно рівна нулю при $t < t_0$ (рис.1.1(б)). Наступна теорема дає можливість знаходити зображення функції $f(t - t_0)$ за відомим зображенням $F(p)$ функції $f(t)$.

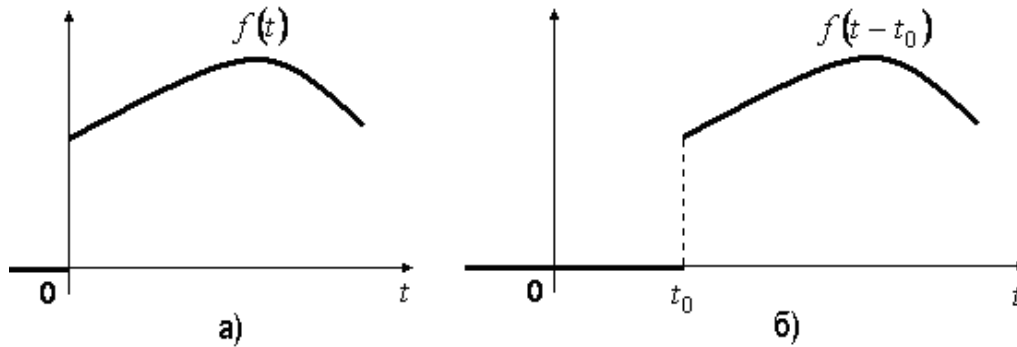


Рис. 1.1.

Теорема 11. Якщо $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то $e^{-pt_0} F(p)$ є зображенням функції $f(t - t_0)$, тобто, якщо $F(p) \Rightarrow f(t)$, то $e^{-pt_0} F(p) \Rightarrow f(t - t_0)$.

Доведення. За означенням

$$\begin{aligned} L\{f(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \\ &= \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Оскільки при $t < t_0$ оригінал $f(t - t_0) \equiv 0$, то $\int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0) dt = 0$. У другому інтегралі в (1.29) перейдемо до змінної $z = t - t_0$; матимемо:

$$\begin{aligned} L\{f(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-pt_0} F(p). \end{aligned}$$

Отже,

$$e^{-pt_0} F(p) \Rightarrow f(t - t_0). \quad (1.30)$$

Теорема доведена.

Приклад 1.4. Знайти зображення одиничної функції Хевісайда $\sigma_0(t - h)$, визначеної наступним чином (рис.1.2.):

$$\sigma_0(t-h) = \begin{cases} 1, & t \geq h, \\ 0, & t < h. \end{cases}$$

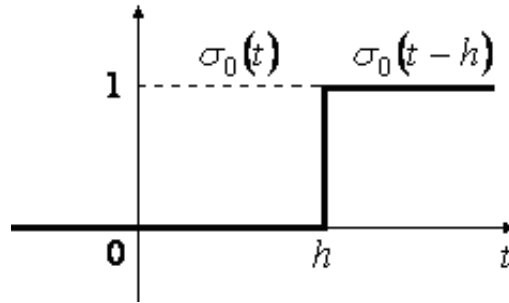


Рис. 1.2.

Розв'язання. Оскільки $\sigma_0(t) \Leftarrow \frac{1}{p}$, то згідно теореми запізнення (1.30)

$$\sigma_0(t-h) \Leftarrow \frac{1}{p} e^{-ph}.$$

1.11. Інтегрування зображення

Теорема 12. Якщо функція $\frac{f(t)}{t}$ задовольняє умови існування зображення і $f(t) \Leftarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s$, то

$$\frac{f(t)}{t} \Leftarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_p^{\infty} F(q) dq. \quad (1.31)$$

Доведення. Позначимо

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt. \quad (1.32)$$

Згідно теореми 2 функція $I(p)$ є аналітичною у області $\operatorname{Re} p > s$, причому $I(\infty) = 0$. Знайдемо похідну функції $I(p)$, диференціюючи (1.32) за параметром p :

$$\frac{d}{dp} I(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -F(p),$$

звідки (з урахуванням умови $I(\infty) = 0$) одержимо

$$I(p) = I(\infty) - \int_{\infty}^p F(p) dp = \int_p^{\infty} F(p) dp,$$

що і доводить теорему.

Приклад 1.5. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{1}{t} \sin \omega t$.

Розв'язання. Оскільки $\sin \omega t \Leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, то згідно (1.31) маємо:

$$\frac{1}{t} \sin \omega t \Leftarrow \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}. \quad (1.33)$$

Використовуючи результати (1.30) та (1.33), знайдемо також зображення функції інтегральний синус $si(t)$, яка визначається співвідношенням:

$$si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau. \text{ Маємо:}$$

$$si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \Leftarrow \frac{1}{p} L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p)\right). \quad (1.34)$$

1.12. Зображення періодичної функції

Розглянемо важливий випадок періодичного (з періодом $2T$) оригіналу $f(t)$: $f(t + 2T) = f(t)$, $t > 0$. Поряд із $f(t)$ запровадимо також допоміжну функцію $f_0(t)$ таку, що (див. рис.1.3)

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 2T], \\ 0, & t \in (2T, \infty). \end{cases} \quad (1.35)$$

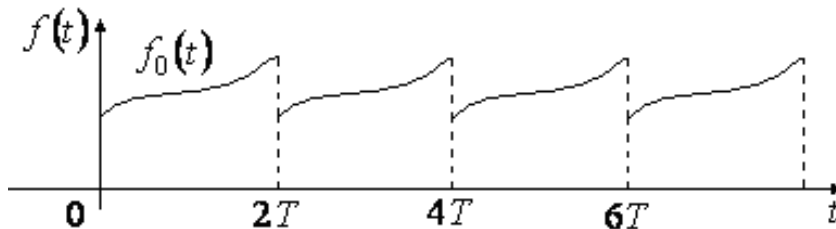


Рис. 1.3.

Знайдемо її зображення $F_0(p) \Rightarrow f_0(t)$. Згідно означення зображення Лапласа функції $f_0(t)$ маємо:

$$F_0(p) = L\{f_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f_0(t) dt = \int_0^{2T} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.36)$$

Але $f(t) = f_0(t) + f(t - 2T)$, тому за властивістю лінійності зображення одержимо

$$L\{f(t)\} = L\{f_0(t)\} + L\{f(t - 2T)\},$$

що, згідно теореми запізнення (1.30), приводить до наступного результату:

$$F(p) = F_0(p) + e^{-2Tp} F(p).$$

Звідси

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-2Tp}}.$$

Таким чином, враховуючи (1.36), для періодичного оригінала остаточно маємо:

$$F(p) = L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2Tp}} \int_0^{2T} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.37)$$

Приклад 1.6. Знайти зображення функції $f(t) = |\sin t|$.

Розв'язання. Функції $f(t) = |\sin t|$ є періодичною з періодом π . Із (1.37) маємо:

$$L\{|\sin t|\} = \frac{1}{1 - e^{-\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} |\sin t| dt = \frac{1}{1 - e^{-\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt. \quad (1.38)$$

Враховуючи, що $\int e^{\alpha t} \sin(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin(\beta t) - \beta \cos(\beta t)] + C$, для інтеграла у попередньому виразі одержимо

$$\int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = \frac{e^{-pt}}{p^2 + 1} [-p \sin t - \cos t] \Big|_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1}.$$

Підставивши цей вираз у (1.38), знайдемо зображення функції $f(t) = |\sin t|$:

$$L\{|\sin t|\} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 - e^{-\pi p}}.$$

1.13. Зображення полігональної функції

Знайдемо зображення полігональної функції, тобто кусково-аналітичної функції, елементами якої є лінійні функції виду $f_k(t) = a_k t + b_k$, де $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$. Графік полігональної функції утворений відрізками прямих; при цьому стрибки функції у вузлах стикування визначаються виразами:

$$\begin{aligned} \delta_k &= (a_k \tau_k + b_k) - (a_{k-1} \tau_k + b_{k-1}), \\ \alpha_k &= a_k - a_{k-1}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

де, у свою чергу, $\delta_1 = a_1 \tau_1 + b_1$, $\alpha_1 = a_1$.

У випадку, коли $f_{m+1}(t) = 0$ при $t > \tau_{m+1}$, графік полігональної функції складається із m відрізків прямих. Поклавши $\delta_{m+1} = -(a_m \tau_{m+1} + b_m)$, $\alpha_{m+1} = -a_m$, запишемо полігональну функцію у вигляді:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1] \\ a_k t + b_k, & t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = \overline{1, m} \\ 0, & t \in (\tau_{m+1}, \infty). \end{cases} \quad (1.40)$$

Зображення функції (1.40) можна подати у вигляді:

$$L\{f(t)\} = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{\delta_k}{p} + \frac{\alpha_k}{p^2} \right) e^{-\tau_k p}, \quad (1.41)$$

Частинним випадком полігональної функції є ступінчата функція, графік якої складається із відрізків прямих, паралельних осі абсцис. Оскільки для ступінчатої функції всі $\alpha_k = 0$, то її зображення матиме вигляд:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k e^{-\tau_k p}. \quad (1.42)$$

Приклад 1.7. Знайти зображення ступінчатої функції:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ -3, & t \in (1,2], \\ 0, & t \in (2,3], \\ 1, & t \in (3,5], \\ 0, & t \in (5,+\infty). \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо значення параметрів δ_k :

$\tau_1 = 0$	$\tau_2 = 1$	$\tau_3 = 2$	$\tau_4 = 3$	$\tau_5 = 5$
$\delta_1 = 2$	$\delta_2 = -5$	$\delta_3 = 3$	$\delta_4 = 1$	$\delta_5 = -1$

За формулою (1.42) знаходимо зображення заданої функції:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^5 \delta_k e^{-\tau_k p} = \frac{1}{p} (2 - 5e^{-p} + 3e^{-2p} + e^{-3p} - e^{-5p}).$$

Приклад 1.8. Знайти зображення полігональної функції, заданої графічно на рис. 1.4:

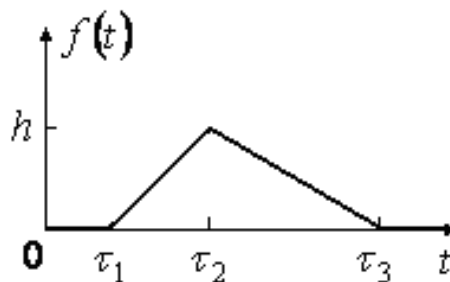


Рис. 1.4.

Розв'язання. Задану графічно полігональну функцію запишемо в аналітичному вигляді:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1), \\ \frac{h(t - \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ \frac{h(\tau_3 - t)}{\tau_3 - \tau_2}, & t \in [\tau_2, \tau_3), \\ 0, & t \in [\tau_3, \infty). \end{cases}$$

Обчислимо необхідні значення параметрів δ_k та α_k :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{h(\tau_1 - \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 0, & \alpha_1 &= \frac{h}{\tau_2 - \tau_1}; \\ \delta_2 &= \frac{h(\tau_3 - \tau_2)}{\tau_3 - \tau_2} - \frac{h(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 0, & \alpha_2 &= \frac{-h}{\tau_3 - \tau_2} - \frac{h}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{-h(\tau_3 - \tau_1)}{(\tau_3 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)}; \\ \delta_3 &= \frac{-h(\tau_3 - \tau_3)}{\tau_3 - \tau_2} = 0, & \alpha_3 &= \frac{h}{\tau_3 - \tau_2}. \end{aligned}$$

Шукане зображення заданої функції $f(t)$ знайдемо за допомогою формули (1.41). Остаточний результат має вигляд:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= -\frac{h}{(\tau_2 - \tau_1)p^2} e^{-\tau_1 p} - \\ &- \frac{h(\tau_3 - \tau_1)}{(\tau_3 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_1)p^2} e^{-\tau_2 p} + \frac{h}{(\tau_3 - \tau_2)p^2} e^{-\tau_3 p}. \end{aligned}$$

Підсумовуючи сказане вище, наведемо таблицю розглянутих властивостей зображень і таблицю зображень ряду елементарних функцій, які найчастіше зустрічаються у застосуваннях.

1.14. Таблица властивостей зображень

№	$f(t) \Leftarrow F(p)$
1	$\sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \Leftarrow \sum_{i=1}^n C_i F_i(p), f_i(t) \Leftarrow F_i(p), C_i = const$
2	$f(\alpha t) \Leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \alpha = const, \alpha > 0$
3	$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, \tau > t, \\ f(t - \tau), \tau \leq t \end{cases}, f_{\tau}(t) \Leftarrow e^{-p\tau} F(p)$
4	$f^{(n)}(t) \Leftarrow p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}$
5	$\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftarrow \frac{1}{p} F(p)$
6	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \Leftarrow F_1(p) F_2(p)$
7	$F^{(n)}(p) \Rightarrow (-1)^n t^n f(t)$
8	$\int_p^{\infty} F(p) dp \Rightarrow \frac{f(t)}{t}$
9	$F(p + \lambda) \Rightarrow e^{-\lambda t} f(t)$

1.15. Таблица зображень

№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
6	$sh \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$
7	$ch \lambda t$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$
8	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
9	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
10	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
11	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Im} \omega)$
12	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Im} \omega)$

Завдання до розділу 1

У задачах 1-25 визначити зображення $F(p)$ за відомим оригіналом $f(t)$:

1. $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, $\left(F(p) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{k!}{p^{k+1}} \right)$. 2. $f(t) = te^{\alpha t}$. 3. $f(t) = t^2 e^{\alpha t}$.

4. $f(t) = t^n e^{\alpha t}$. 5. $f(t) = t \sin \omega t$. 6. $f(t) = t \cos \omega t$. 7. $f(t) = t^2 \sin \omega t$.

8. $f(t) = t^2 \cos \omega t$. 9. $f(t) = sh \lambda t$. 10. $f(t) = ch \lambda t$. 11. $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$.

12. $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$. 13. $f(t) = e^{-\alpha t} sh \lambda t$. 14. $f(t) = e^{-\alpha t} ch \lambda t$.

15. $f(t) = \sin^2 \omega t$, $\left(F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \right)$.

16. $f(t) = \cos^2 \omega t$, $\left(F(p) = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)} \right)$.

17. $f(t) = \sin^3 t$, $\left(F(p) = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)} \right)$.

18. $f(t) = \cos^3 t$, $\left(F(p) = \frac{p^3 + 7p}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)} \right)$.

19. $f(t) = sh^2 \lambda t$, $\left(F(p) = \frac{2}{p(p^2 - 4)} \right)$.

20. $f(t) = ch^2 \lambda t$, $\left(F(p) = \frac{p^2 - 2}{p(p^2 - 4)} \right)$.

21. $f(t) = e^{-t} \sin^3 t$, $\left(F(p) = \frac{6}{[(p+1)^2 + 1] \cdot [(p+1)^2 + 9]} \right)$.

22. $f(t) = e^{-2t} \cos^3 t$, $\left(F(p) = \frac{(p+2)^3 + 7(p+2)}{[(p+2)^2 + 1] \cdot [(p+2)^2 + 9]} \right)$.

23. $f(t) = e^{-t} sh^2 t$, $\left(F(p) = \frac{2}{(p+1)[(p+1)^2 - 4]} \right)$.

24. $f(t) = e^{-t} ch^2 t$, $\left(F(p) = \frac{(p+1)^2 - 2}{(p+1)[(p+1)^2 - 4]} \right)$.

У задачах 25-36 відтворити оригінал $f(t)$ за відомим зображенням $F(p)$:

$$25. F(p) = \frac{A}{p-a}, \left(f(t) = Ae^{at} \right).$$

$$26. F(p) = \frac{A}{(p-a)^k}, \left(f(t) = A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at} \right).$$

$$27. F(p) = \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2},$$

$$\left(f(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[A \cos\left(t \cdot (a_2 - a_1^2/4)^{1/2}\right) + \frac{B - Aa_1/2}{(a_2 - a_1^2/4)^{1/2}} \sin\left(t \cdot (a_2 - a_1^2/4)^{1/2}\right) \right] \right).$$

$$28. F(p) = \frac{1}{p(p-\alpha)}. \quad 29. F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+a^2)}. \quad 30. F(p) = \frac{p}{p^2-7p+12}.$$

$$31. F(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}. \quad 32. F(p) = \ln(p^2+1).$$

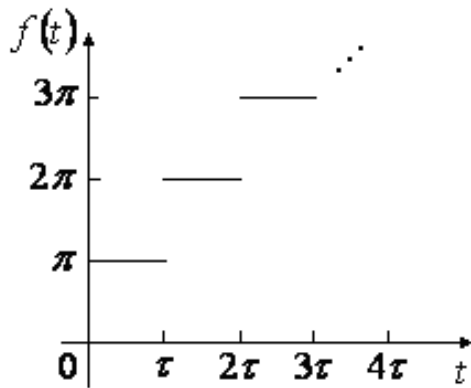
$$33. F(p) = \frac{e^{-2p} - e^{-5p}}{p}. \quad 34. F(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2+9}. \quad 35. F(p) = \frac{p}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

$$36. F(p) = \frac{p+1}{[(p+1)^2+4]^2}. \quad 37. F(p) = \frac{p^2+p-4}{p^2(p-1)}.$$

$$38. F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}. \quad 39. F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}.$$

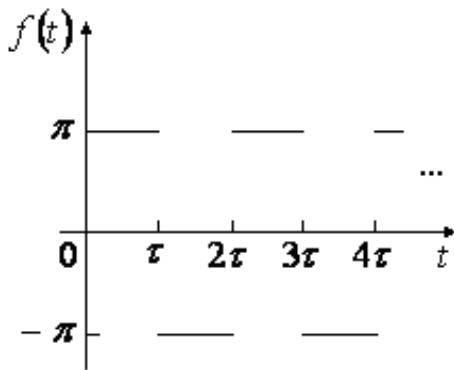
Знайти зображення $F(p)$ функцій $f(t)$, заданих графічно:

40.



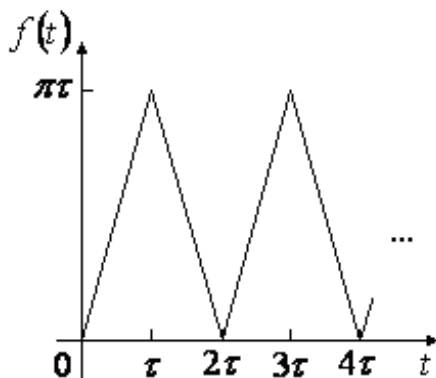
Відповідь: $F(p) = \frac{A}{p} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right)$.

41.



Відповідь: $F(p) = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$.

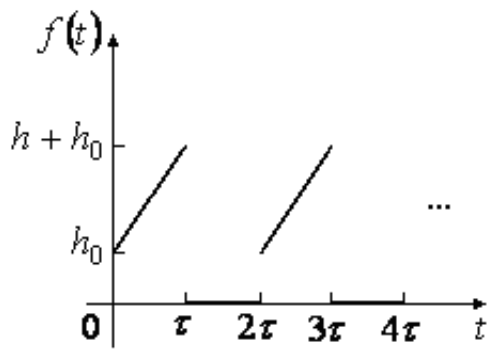
42.



Відповідь: $F(p) = \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$. Вказівка: оригінал у даній задачі визнача-

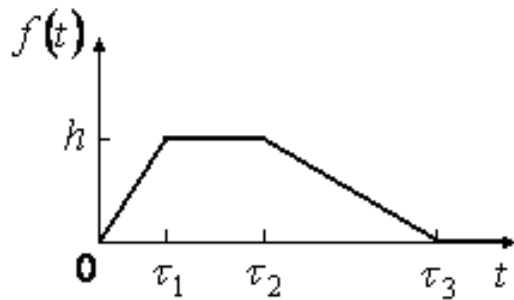
ється як $\int_0^t f(t') dt'$, де $f(t)$ є оригіналом із задачі 41.

43.



Відповідь:
$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p\tau}} \left[-\frac{(h + h_0)}{p} e^{-p\tau} + \frac{h}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) + \frac{h_0}{p} \right].$$

44.



Відповідь:
$$F(p) = \frac{h}{p^2} \left(\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-\tau_1 p}) - \frac{1}{\tau_3 - \tau_2} (e^{-\tau_2 p} - e^{-\tau_3 p}) \right).$$

2. ВИЗНАЧЕННЯ ОРИГІНАЛА ЗА ЗОБРАЖЕННЯМ

Розглянуті у розділі 1 методи визначення оригінала за зображенням мають характер підбору. Нижче розглянемо загальний метод побудови оригінала за зображенням.

2.1. Формула Мелліна

Нехай задано функцію $F(p)$ комплексної змінної p , яка є зображенням кусково-гладкої функції $f(t)$ дійсної змінної t із обмеженим показником росту $|f(t)| \leq Me^{st}$, причому значення сталої s відоме. Необхідно за даною функцією $F(p)$ побудувати шукану функцію $f(t)$.

Теорема 13. Нехай відомо, що задана функція $F(p)$ в області $\operatorname{Re} p > s$ є зображенням кусково-гладкої функції $f(t)$ дійсної змінної t і має показник росту s ($|f(t)| \leq Me^{st}$). Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad x > s, \quad p = x + iy. \quad (2.1)$$

Інтегрування в (2.1) здійснюється в комплексній площині p уздовж прямої, яка паралельна уявній осі і проходить справа від прямої $\operatorname{Re} p = s$ (доведення теореми 13 див. [2], стор.228).

Формула (2.1), що має назву формули Мелліна, обернена перетворенню Лапласа (1.2).

Наступна теорема надає можливість визначити зображення добутку за відомими зображеннями співмножників.

Теорема 14. Нехай $f_1(t) \Leftarrow F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$ і $f_2(t) \Leftarrow F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$. Тоді

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t)f_2(t) \Leftarrow F(p) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, \end{aligned}$$

причому функція $F(p)$ визначена і аналітична в області $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$, а інтегрування здійснюється уздовж будь-якої прямої, яка паралельна уявній осі і лежить справа від прямих $\operatorname{Re} p = s_1$ і $\operatorname{Re} p = s_2$ (доведення теореми 13 див. [2], стор.229).

Приклад 2.1. Нехай $f_1(t) = \cos(\omega t)$, $f_2(t) = t$. Знайти зображення функції $f(t) = t \cos(\omega t)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos(\omega t) \Leftarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, t \Leftarrow \frac{1}{p^2}$, то

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{q dq}{(q^2 + \omega^2)(p - q)^2}, \quad (2.2)$$

де $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$, а інтегрування здійснюється вздовж будь-якої прямої, яка паралельна уявній осі і лежить справа від прямої $\operatorname{Re} q = |\operatorname{Im} \omega|$. В якості такої прямої інтегрування виберемо пряму, що проходить лівіше точки $q = p$. Розглянемо на комплексній площині q замкнутий контур Γ , який складається із відрізка $[x - iR, x + iR]$ даної прямої і дуги півкола $|q - x| = R$, що замикає вказаний відрізок у правій півплощині. Всередині контура Γ підінтегральна функція в (2.2) аналітична всюди, окрім точки $q = p$, яка є полюсом 2-го порядку даної функції. Точка $q = \infty$ є нулем третього порядку цієї функції. Тому значення інтеграла (2.2) визначається лишком в особливій точці підінтегральної функції. Здійснюючи обхід контура Γ у від'ємному напрямку, отримаємо:

$$F(p) = - \frac{d}{dq} \left[\frac{q}{q^2 + \omega^2} \right] \Big|_{q=p} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Отже, $t \cos(\omega t) \Leftarrow \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$, що співпадає з формулою (10) таблиці зображень.

2.2. Умови існування оригінала

Теорема 15. Нехай функція $F(p)$ комплексної змінної $p = x + iy$ задовольняє наступні умови:

1. $F(p)$ – аналітична функція в області $\operatorname{Re} p > s$;
2. В області $\operatorname{Re} p > s$ функція $F(p)$ прямує до нуля при $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно відносно $\arg p$;
3. Для всіх $\operatorname{Re} p = x > s$ збігається інтеграл

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M, x > s. \quad (2.3)$$

Тоді функція $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s$ є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної t , яка визначається виразом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, x > s. \quad (2.4)$$

(доведення теореми 15 див. [2], стор.231).

Зауваження 2.1. Умови 1-3 є достатніми умовами, при яких задана функція $F(p)$ комплексної змінної p є зображенням деякої функції $f(t)$ дійсної змінної t .

Зауваження 2.2. Інтеграл (2.3) є невласним інтегралом першого роду вздовж прямої $\operatorname{Re} p = x$ від дійсної функції $|F(p)|$.

Зауваження 2.3. При доведенні теореми 15 невласний інтеграл (2.4) обчислюється вздовж прямої $\operatorname{Re} p = x$ і розуміється у змісті головного значення, тобто

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} e^{pt} F(p) dp.$$

2.3. Обчислення інтеграла Мелліна. Приклади

У багатьох важливих для застосувань випадках інтеграл (2.1), (2.4) може бути обчислений за допомогою методів обчислення контурних інтегралів від функції комплексної змінної. Нехай функцію $F(p)$, задану в області $\operatorname{Re} p > s$, можна аналітично продовжити на всю площину p . Нехай її аналітичне продовження задовольняє при $\operatorname{Re} p < s$ умови леми Жордана [2]. Тоді при $t > 0$

$$\int_{C_R} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0, R \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

де C_R – дуга півкола $|p - x| = R$ у лівій півплощині.

У цьому випадку інтеграл (2.4) може бути обчислений за допомогою теорії лишків. Продемонструємо спосіб обчислення інтегралу Мелліна (2.4) на конкретних прикладах.

Приклад 2.2. Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0, \omega^2 > 0.$$

Розв'язання. Згідно формули (2.1) маємо

$$F(p) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp, x > 0.$$

Аналітичним продовженням функції $F(p)$ у ліву півплощину $\operatorname{Re} p < 0$ є функція $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, яка задовольняє умови леми Жордана і має дві особливі точки -

полюси першого порядку при $p_{1,2} = \pm i\omega$. Тому при $t \geq 0$

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res} \left[e^{pt} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, p_k \right] = \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin \omega t; \quad t \geq 0.$$

Наступний приклад значно складніший і стосується випадку, коли умова 3 теореми 15 не виконується.

Приклад 2.3. Знайти оригінал функції $F(p) = 1/p^{\alpha+1}$, $-1 < \alpha < 0, \operatorname{Re} p > 0$.

Розв'язання. Вказана функція є багатозначною у розглядуваній області. Тому під функцією $F(p)$ будемо розуміти ту гілку даної багатозначної функції, котра є безпосереднім аналітичним продовженням в область $\operatorname{Re} p > 0$ дійсної функції $1/x^{\alpha+1}$ дійсної змінної $x > 0$. У цьому випадку $\arg p = 0$ при $p = x, x > 0$. Хоча функція $F(p)$ і не задовольняє умову 3 теореми 15, покажемо, проте, що функція

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{1}{p^{\alpha+1}} dp, x > 0 \quad (2.6)$$

є оригіналом заданої функції $F(p)$.

Аналітичне продовження функції $F(p)$ на ліву півплощину $\operatorname{Re} p < 0$ є багатозначною функцією, що має точки розгалуження $p = 0$ та $p = \infty$. Будемо розглядати в області G , що утворена комплексною площиною p із розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі, ту гілку багатозначної функції $1/p^{\alpha+1}$, яка є безпосереднім аналітичним продовженням функції $F(p)$, що спочатку була задана у правій півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. У області G розглянемо замкнутий контур Γ , який складається із відрізка прямої $[x - iR', x + iR']$, $x > 0$, відрізків $-R < x < -\rho$ на берегах розрізу і замикаючих їх дуг кола C'_ρ , $|p| = \rho$, і дуг кола $C''_{R'}$, $|p - x| = R'$, які з'єднують береги розрізу з вертикальним відрізком $[x - iR', x + iR']$ (див.рис.2.1). Оскільки функція $e^{pt} / p^{\alpha+1}$ в області G не має особливих точок, то згідно теореми Коші інтеграл від цієї функції по контуру Γ рівний нулю [2,4]. Спрямуємо R' до нескінченності, а ρ – до нуля. В силу леми Жордана інтеграли вздовж кривих $C''_{R'}$ дадуть у границі нуль. Оцінимо інтеграл по колу C'_ρ , поклавши $p = \rho e^{i\varphi}$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_\rho} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi \rho^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\rho \cos \varphi} d\varphi.$$

Оскільки $-1 < \alpha < 0$, то інтеграл уздовж C'_ρ також прямує до нуля при $\rho \rightarrow 0$. Тому залишаються лише інтеграли вздовж прямолінійних ділянок контуру інтегрування. Зауважимо, що на нижньому березі розрізу $\arg p = -\pi$, а на верхньому $\arg p = \pi$. Тому одержимо

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{1}{p^{\alpha+1}} dp = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{xt} \frac{dx}{(-x)^{\alpha+1} e^{i\pi\alpha}} + \int_0^{-\infty} e^{xt} \frac{dx}{(-x)^{\alpha+1} e^{-i\pi\alpha}} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-i\pi\alpha} \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{-\alpha-1} dx - e^{i\pi\alpha} \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{-\alpha-1} dx \right\} = \frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} x^{-\alpha-1} dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

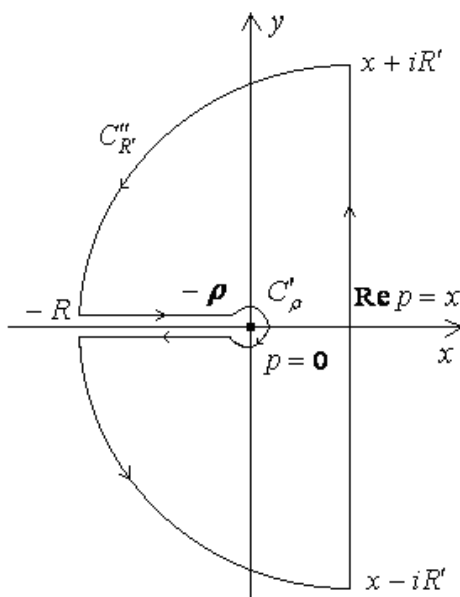


Рисунок 2.1.

Виконавши в інтегралі (2.7) заміну змінної інтегрування $xt = s$, одержимо

$$f(t) = t^\alpha \frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi} \Gamma(-\alpha),$$

де $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функція. Скориставшись рівністю

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha) = \frac{\pi}{\sin(-\pi\alpha)},$$

одержимо кінцеву формулу

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \Rightarrow f(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{2.8}$$

що є узагальненням формули (2) таблиці зображень.

Завдання до розділу 2

За допомогою інтеграла Мелліна знайти оригінали $f(t)$ функцій:

$$45. F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \omega^2 > 0.$$

Відповідь: $f(t) = \cos \omega t$.

$$46. F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha \sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \alpha > 0.$$

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha \sqrt{p}} \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$, $\alpha > 0, \operatorname{Re} p > 0$, де функція

$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta$ - т.з. інтеграл ймовірностей (див. [2], стор. 236, [3], стор. 490).

47. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) = t^2 \cos \omega t$, користуючись теоремою згортки.

3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ОПЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

3.1. Звичайні диференціальні рівняння

Як зазначалося у Вступі, методи операційного числення дозволяють звести задачу Коші із заданими початковими умовами для лінійного диференціального рівняння до простої алгебраїчної задачі для зображення. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами a_0, a_1, \dots, a_n виду:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \quad (3.1)$$

де $f(t)$ - задана функція.

Задача полягає у знаходженні розв'язку $x(t)$ рівняння (3.1) при $t \geq 0$, який при $t = 0$ задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (3.2)$$

Застосуємо методи операційного числення до розв'язання задачі Коші (3.1), (3.2). Знайдемо L - зображення розв'язку $x(t)$ рівняння (3.1), який задовольняє початкові умови (3.2): $X(p) \Rightarrow x(t)$. Для цього помножимо (3.1) на e^{-pt} і проінтегруємо за t в межах від 0 до ∞ :

$$a_n \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^n x(t)}{dt^n} dt + a_{n-1} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} dt + \dots + a_0 \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

або

$$a_n L \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} + a_{n-1} L \left\{ \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_0 L \{x(t)\} = L \{f(t)\}.$$

Використовуючи вирази (1.21)-(1.23), одержимо

$$\begin{aligned} & a_n \{p^n X(p) - (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + p^{n-3} x''_0 + \dots + x_0^{(n-1)})\} + \\ & + a_{n-1} \{p^{n-1} X(p) - (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)})\} + \dots + \\ & + a_1 \{pX(p) - x_0\} + a_0 X(p) = F(p). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) називається **допоміжним рівнянням** для даного диференціального рівняння (3.1). Невідомою величиною в (3.3) є зображення розв'язку $X(p)$. Вираз (3.3) можна переписати у вигляді

$$A(p)X(p) - B(p) = F(p), \quad (3.4)$$

де

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \quad (3.5)$$

$$B(p) = b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_1p + b_0. \quad (3.6)$$

Тут

$$\left. \begin{aligned} b_{n-1} &= a_n x_0, \\ b_{n-2} &= a_n x_0' + a_{n-1} x_0, \\ b_{n-3} &= a_n x_0'' + a_{n-1} x_0' + a_{n-2} x_0, \\ &\dots \\ b_1 &= a_n x_0^{(n-2)} + a_{n-1} x_0^{(n-3)} + \dots + a_2 x_0, \\ b_0 &= a_n x_0^{(n-1)} + a_{n-1} x_0^{(n-2)} + \dots \\ &\dots + a_2 x_0' + a_1 x_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Розв'язавши рівняння (3.4) відносно $X(p)$, одержимо

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}. \quad (3.8)$$

Запровадимо позначення:

$$R(p) = \frac{1}{A(p)}, \quad S(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (3.9)$$

і перепишемо (3.8) у вигляді

$$X(p) = F(p)R(p) + S(p). \quad (3.10)$$

Якщо $x_0 = x_0' = x_0'' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$, то $B(p) = 0$ і формула (3.10) набуде вигляду: $X(p) = F(p)R(p)$, або

$$X(p) = \frac{F(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (3.11)$$

Якщо ж диференціальне рівняння (3.1) однорідне ($f(t) \equiv 0$), то зображення $F(p) = 0$ і рівняння (3.10), що визначає зображення розв'язку $X(p)$ у цьому випадку, прийме вид

$$X(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (3.12)$$

Величини $R(p)$, $S(p)$ є раціональними дробами, які відомими способами можна розкласти на елементарні дроби. За допомогою теореми про згортку одержимо

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)r(t-\tau)d\tau + s(t). \quad (3.13)$$

Таким чином, ми одержали загальний розв'язок диференціального рівняння (3.1), який містить n довільних сталих, роль яких виконують початкові значення шуканої функції $x(t)$ та її $n - 1$ похідних. Конкретна форма розв'язку буде залежати від того, якими будуть корені характеристичного рівняння

$$A(p) = 0. \quad (3.14)$$

Розглянемо деякі можливі випадки.

I. Усі корені рівняння (3.14) дійсні і різні:

$$A(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (3.15)$$

У цьому випадку одержимо

$$R(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n},$$

$$S(p) = \frac{s_1}{p - p_1} + \frac{s_2}{p - p_2} + \dots + \frac{s_n}{p - p_n},$$

де сталі коефіцієнти r_k і s_k визначаються наступними співвідношеннями

$$r_k = \frac{1}{A'(p_k)}, \quad s_k = \frac{B(p_k)}{A'(p_k)},$$

$$B(p_k) = x_0 \sum_{l=1}^n a_l p_k^{l-1} + x_0' \sum_{l=2}^n a_l p_k^{l-2} + \dots + x_0^{(n-2)} \sum_{l=n-1}^n a_l p_k^{l-n+1} + x_0^{(n-1)} a_n.$$

Таким чином,

$$r(t) = \sum_{k=1}^n r_k e^{p_k t}, \quad s(t) = \sum_{k=1}^n s_k e^{p_k t}. \quad (3.16)$$

Підставивши (3.16) у (3.13), одержимо

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{A'(p_k)} \left[\int_0^t f(\tau) e^{-p_k \tau} d\tau + B(p_k) \right]. \quad (3.17)$$

II. У випадку нульових коренів рівняння (3.14) маємо:

$$A(p) = a_n p^n \quad (3.18)$$

і, отже,

$$R(p) = \frac{1}{a_n p^n},$$

$$S(p) = \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{1}{p} + \frac{b_{n-2}}{a_n} \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{b_1}{a_n} \frac{1}{p^{n-1}} + \frac{b_0}{a_n} \frac{1}{p^n}.$$

Тоді

$$r(t) = \frac{1}{a_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$s(t) = \frac{b_{n-1}}{a_n} + \frac{b_{n-2}}{a_n} \frac{t}{1!} + \dots + \frac{b_1}{a_n} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b_0}{a_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

У цьому випадку рівняння (3.13) прийме вигляд

$$x(t) = \frac{1}{a_n} \int_0^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-k}}{a_n} \frac{t^k}{k!}. \quad (3.19)$$

III. Усі корені рівняння (3.14) дійсні і рівні між собою, тобто:

$$A(p) = a_n(p - p_1)^n, \quad (3.20)$$

тоді

$$R(p) = \frac{1}{a_n(p - p_1)^n},$$

$$S(p) = \frac{B(p)}{a_n(p - p_1)^n} = \frac{c_n}{(p - p_1)^n} + \frac{c_{n-1}}{(p - p_1)^{n-1}} + \dots + \frac{c_1}{p - p_1},$$

де c_k - лінійні однорідні функції початкових умов, які можна визначити за допомогою відомих способів розкладання раціональних дробів на елементарні. Знайдемо

$$r(t) = \frac{t^{n-1}}{a_n(n-1)!} e^{p t}, \quad s(t) = e^{p_1 t} \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

У цьому випадку вираз (3.13) набуде вигляду:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{(t - \tau)^{n-1} e^{p_1(t-\tau)}}{a_n(n-1)!} d\tau + e^{p_1 t} \sum_{k=1}^n \frac{c_k t^k}{(k-1)!}. \quad (3.21)$$

У загальному випадку розгляд вельми громіздкий, тому обмежимося наведеними вище випадками.

Приклад 3.1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 1$, що задовольняє умову: $x_0 = 0$ при $t = 0$.

Розв'язання. У нашому випадку

$$f(t) = 1; F(p) \Rightarrow f(t); F(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow 1.$$

Складаємо допоміжне рівняння

$$X(p) = \frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Використовуючи формули (1) і (3) таблиці зображень, знайдемо розв'язок $x(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

Відповідь: $x(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

Приклад 3.2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\frac{d^2 x}{dt^2} + 9x = 1$, що задовольняє умову: $x_0 = x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Розв'язання. Запишемо допоміжне рівняння

$$X(p)(p^2 + 9) = \frac{1}{p}, \text{ або } X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)}.$$

Розкладаючи на елементарні дроби, отримаємо:

$$X(p) = \frac{-\frac{1}{9}p}{p^2 + 9} + \frac{1}{9}.$$

На основі формул (1) і (5) таблиці зображень знаходимо розв'язок:

$$x(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9}.$$

Відповідь: $x(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9}.$

3.2. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Операційний метод застосовують також і для розв'язання задачі Коші для систем лінійних диференціальних рівнянь. Отож розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \quad (3.22)$$

із початковими умовами

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

Тут $f_i(t)$ - задані функції незалежної змінної t .

Помножимо кожне із рівнянь системи (3.22) на e^{-pt} і проінтегруємо за t в межах від 0 до ∞ ; одержимо:

$$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dx_1(t)}{dt} dt = a_{11} \int_0^\infty e^{-pt} x_1(t) dt + a_{12} \int_0^\infty e^{-pt} x_2(t) dt + \dots + a_{1n} \int_0^\infty e^{-pt} x_n(t) dt + \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t) dt, \\ \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dx_2(t)}{dt} dt = a_{21} \int_0^\infty e^{-pt} x_1(t) dt + a_{22} \int_0^\infty e^{-pt} x_2(t) dt + \dots + a_{2n} \int_0^\infty e^{-pt} x_n(t) dt + \int_0^\infty e^{-pt} f_2(t) dt, \\ \dots\dots\dots \\ \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dx_n(t)}{dt} dt = a_{n1} \int_0^\infty e^{-pt} x_1(t) dt + a_{n2} \int_0^\infty e^{-pt} x_2(t) dt + \dots + a_{nn} \int_0^\infty e^{-pt} x_n(t) dt + \int_0^\infty e^{-pt} f_n(t) dt, \end{cases}$$

або

- раціональні дроби відносно p ; степінь чисельника $\Delta_{ji}(p)$ не менш, ніж на одиницю менша степені знаменника $\Delta(p)$, яка дорівнює n . Для розкладання $D_{ji}(p)$ на елементарні дроби необхідно знати корені рівняння $\Delta(p) = 0$. Після визначення функцій $X_i(p)$ із (3.26) для $x_i(t)$ одержимо

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t f_j(\tau) D_{ji}(t-\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n x_{j0} D_{ji}(t).$$

Аналогічно можна розв'язувати і системи лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

3.3. Системи двох диференціальних рівнянь першого порядку

Застосуємо розглянутий вище загальний метод розв'язання системи n диференціальних рівнянь до системи двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + f_1(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + f_2(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

із початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.. \quad (3.28)$$

Помножимо (3.27) на e^{-pt} і проінтегруємо за t в межах від 0 до ∞ :

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dx(t)}{dt} dt = a_{11} \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt + a_{12} \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt, \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dy(t)}{dt} dt = a_{21} \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt + a_{22} \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} pX(p) = a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) + F_1(p) + x_0, \\ pY(p) = a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) + F_2(p) + y_0, \end{cases} \quad (3.29)$$

де $X(p) \Rightarrow x(t)$, $Y(p) \Rightarrow y(t)$, $F_i(p) \Rightarrow f_i(t)$, $i = 1, 2$.

Розв'яжемо систему рівнянь (3.29) відносно $X(p)$ та $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p) = \Pi(p) [a_{12}F_2(p) - a_{22}F_1(p) + pF_1(p) + \\ \quad + px_0 + a_{12}y_0 - a_{22}x_0], \\ Y(p) = \Pi(p) [a_{21}F_1(p) - a_{11}F_2(p) + pF_2(p) + \\ \quad + py_0 + a_{21}x_0 - a_{11}y_0]. \end{cases} \quad (3.30)$$

Тут $\Pi(p)$ - так звана передаточна функція:

$$\Pi(p) = [p^2 - (a_{11} + a_{22})p + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]^{-1}. \quad (3.31)$$

Нехай передаточна функція $\Pi(p)$ є зображенням оригінала $\pi(t)$, тобто $\pi(t) \Leftarrow \Pi(p)$. Тоді $\frac{d\pi(t)}{dt} \Leftarrow p\Pi(p)$. Враховуючи запроваджені позначення і переходячи в (3.30) до оригіналів, одержимо розв'язок задачі Коші (3.27), (3.28):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \int_0^t \pi(\tau)[a_{12}f_2(t-\tau) - a_{22}f_1(t-\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t \pi'(\tau)f_1(t-\tau)d\tau + x_0\pi'(t) + (a_{12}y_0 - a_{22}x_0)\pi(t), \\ y(t) = \int_0^t \pi(\tau)[a_{21}f_1(t-\tau) - a_{11}f_2(t-\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t \pi'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau + y_0\pi'(t) + (a_{21}x_0 - a_{11}y_0)\pi(t). \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Якщо початкові умови є однорідними, тобто

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (3.33)$$

то розв'язок задачі Коші (3.27), (3.33), згідно (3.32), запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \int_0^t \pi(\tau)[a_{12}f_2(t-\tau) - a_{22}f_1(t-\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t \pi'(\tau)f_1(t-\tau)d\tau, \\ y(t) = \int_0^t \pi(\tau)[a_{21}f_1(t-\tau) - a_{11}f_2(t-\tau)]d\tau + \\ + \int_0^t \pi'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Продемонструємо застосування викладеного вище підходу на конкретних прикладах.

Приклад 3.3. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1, \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, \end{array} \right.$$

що задовольняє початкові умови: $x_0 = y_0 = 0$ при $t = 0$.

Розв'язання. Позначимо через $X(p)$, $Y(p)$ зображення шуканих розв'язків $x(t)$, $y(t)$, відповідно: $x(t) \Leftarrow X(p)$, $y(t) \Leftarrow Y(p)$. Запишемо систему допоміжних рівнянь:

$$\begin{cases} (3p+2)X(p) + pY(p) = \frac{1}{p}, \\ pX(p) + (4p+3)Y(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши одержану систему алгебраїчних рівнянь, знайдемо:

$$X(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)}.$$

Розкладаючи одержані раціональні дроби на прості дроби, дістанемо:

$$X(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)},$$

$$Y(p) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right).$$

За знайденими зображеннями знаходимо оригінали, тобто шукані розв'язки системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}, \\ y(t) = \frac{1}{5} \left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \right). \end{cases}$$

Приклад 3.4. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) + 2e^t, \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + t^2, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Розв'язання. Запишемо передаточну функцію у нашому випадку:

$$\Pi(p) = \frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right).$$

Її оригінал $\pi(t)$ та похідна $\pi'(t)$ відповідно рівні:

$$\pi(\tau) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}),$$

$$\pi'(t) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}).$$

Запровадимо наступні позначення для інтегралів:

$$\begin{aligned}
I_{11}(t) &= \int_0^t e^\tau f_1(t-\tau) d\tau = 2 \int_0^t e^\tau e^{t-\tau} d\tau, \\
I_{22}(t) &= \int_0^t e^{-\tau} f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} (t-\tau)^2 d\tau, \\
I_{12}(t) &= \int_0^t e^\tau f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^\tau (t-\tau)^2 d\tau, \\
I_{21}(t) &= \int_0^t e^{-\tau} f_1(t-\tau) d\tau = 2 \int_0^t e^{-\tau} e^{t-\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Розв'язок даної задачі Коші згідно (3.35) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}(I_{11}(t) + I_{12}(t) + I_{21}(t) - I_{22}(t)) + \\
&\quad + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}, \\
y(t) &= \frac{1}{2}(I_{11}(t) + I_{21}(t) + I_{22}(t) - I_{12}(t)) + \\
&\quad + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.
\end{aligned} \right.$$

Обчисливши інтеграли I_{ij} , $i, j = 1, 2$, одержимо:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= 2te^t; & I_{12} &= e^t - e^{-t}; \\
I_{21} &= -t^2 - 2t + 2e^t - 2; & I_{22} &= -t^2 - 2t - 2e^t + 2.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\left\{ \begin{aligned}
x(t) &= (3+t)e^t - t^2 - 2, \\
y(t) &= (2+t)e^t - 2t.
\end{aligned} \right.$$

3.4. Крайова задача для рівняння в частинних похідних

Застосуємо операційний метод для розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння в частинних похідних. Для цього розглянемо рівняння

$$P_n[u(x,t)] - L_2[u(x,t)] = f(x,t), \quad (3.36)$$

де $P_n[u]$ – лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами виду

$$P_n[u] = a_0 \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial u}{\partial t};$$

$L_2[u]$ – лінійний диференціальний оператор другого порядку виду

$$L_2[u] = b_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x)u,$$

коефіцієнти $b_i(x)$ якого є функціями лише однієї незалежної змінної x ; $f(x, t)$ - задана функція змінних x, t , достатньо гладка в області розв'язання задачі. Шукаємо розв'язок $u(x, t)$ рівняння (3.36) в області $t > 0, a < x < b$, який задовольняє початкові

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}(x, 0) &= \varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

і граничні умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \beta_1 u(a, t) &= \psi_1(t), \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \beta_2 u(b, t) &= \psi_2(t). \end{aligned}$$

Вважаємо, що початкові і граничні умови задачі, а також функція $f(x, t)$ такі, що існують зображення Лапласа по t функції $u(x, t)$ і всіх її похідних, які містяться в рівнянні (3.36):

$$\begin{aligned} u(x, t) \Leftarrow U(x, p) &= \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Leftarrow \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt & \end{aligned} \quad (3.37)$$

і т.д., причому будемо вважати, що умови обмеженості показника росту по t функції $u(x, t)$ і її похідних не залежать від x . Тоді в силу рівномірної збіжності за параметром x інтеграла (3.37) одержимо

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Leftarrow \frac{\partial U(x, p)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Leftarrow \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2}$$

і

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Leftarrow p^k U(x, p) - p^{k-1} \varphi_0(x) - p^{k-2} \varphi_1(x) - \dots - \varphi_{k-1}(x).$$

Окрім цього вважатимемо, що існують зображення по t функцій $f(x, t), \psi_1(t), \varphi(t)$:

$$f(x, t) \Leftarrow F(x, p), \psi_1(t) \Leftarrow \Psi_1(p), \psi_2(t) \Leftarrow \Psi_2(p).$$

Тоді, перейшовши в рівнянні (3.36) до зображень, одержимо звичайне диференціальне рівняння для функції $U(x, p)$ за незалежною змінною x :

$$-P_n(p)U(x, p) + L_2[U(x, p)] = -F(x, p) - F_0(x, p), \quad (3.38)$$

де

$$F_0(x, p) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(p) \varphi_{n-k-1}(x),$$

а поліноми $P_k(p)$ визначаються виразом

$$P_k(p) = a_0 p^{n-(k+1)} + a_1 p^{n-(k+2)} + \dots + a_{n-(k+1)}.$$

Рівняння (3.38) необхідно розв'язати з граничними умовами

$$\alpha_1 U_x(a, p) + \beta_1 U(a, p) = \Psi_1(p), \quad (3.39)$$

$$\alpha_2 U_x(b, p) + \beta_2 U(b, p) = \Psi_2(p), \quad U_x(x, p) \equiv \frac{\partial U(x, p)}{\partial x}.$$

Крайова задача (3.38), (3.39), у якій p відіграє роль параметра, розв'язується відомими методами розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Обернений перехід від зображення $U(x, p)$ до розв'язку вихідної задачі може бути здійснений за допомогою формули обернення (2.4).

3.5. Рівняння теплопровідності

Застосуємо одержані у попередньому розділі результати до розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності на прикладі розповсюдження теплоти по напівнескінченному стержні (розповсюдження крайового режиму по напівнескінченному стержні).

Нехай необхідно знайти розподіл температури у напівнескінченному стержні $0 < x < \infty$, якщо починаючи з моменту часу $t = 0$ на його лівому кінці $x = 0$ підтримується заданий температурний режим. Початкова температура

стержня рівня нулю. Математично задача полягає у визначенні обмеженого для $0 \leq x < \infty, t \geq 0$ розв'язку $u(x, t)$ рівняння теплопровідності [2,3]

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad x > 0, t > 0 \quad (3.40)$$

з додатковими умовами

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = q(t), \quad (3.41)$$

де $q(t)$ - задана функція часу, для якої існує перетворення Лапласа.

Вважатимемо, що шуканий розв'язок $u(x, t)$ і його похідні $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ задовольняють умовам існування перетворення Лапласа по t , причому умови обмеженості показника росту по t функції $u(x, t)$ і її похідних не залежать від x . Тоді одержимо

$$\begin{aligned} u(x, t) &\Leftarrow U(x, p), \\ u_t(x, t) &\Leftarrow pU(x, p), \\ u_{xx}(x, t) &\Leftarrow U_{xx}(x, p). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Друга із формул (3.42) одержана з урахуванням нульової початкової умови (3.41).

Перейшовши до зображень, замість задачі (3.40), (3.41) для функції $u(x, t)$ одержимо крайову задачу для зображення $U(x, p)$:

$$\begin{aligned} U_{xx}(x, p) - \frac{p}{a^2} U(x, p) &= 0, \\ U(0, p) &= Q(p), \quad |U(x, p)| < M. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Задача (3.43) – це крайова задача для звичайного диференціального рівняння, у якому змінна p відіграє роль параметра. Не важко бачити, що розв'язок задачі (3.43) має вигляд

$$U(x, p) = Q(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}. \quad (3.44)$$

Розв'язок $u(x, t)$ задачі (3.40), (3.41) можна знайти за його зображенням (3.44) за допомогою формули Мелліна, однак у випадку довільної функції $Q(p)$ обчислення відповідного інтеграла може бути вельми складним. Для того, щоб уникнути прямого обчислення інтеграла Мелліна для визначення оригіналу функції (3.44), скористаємося знайденим вище оригіналом для функції (див. задачу 38)

$$\frac{1}{p} e^{-\alpha \sqrt{p}} \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (3.45)$$

Тому, записавши

$$U(x, p) = Q(p) p e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} \frac{1}{p}$$

і врахувавши, що згідно (3.45)

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = G(x, t), \quad (3.46)$$

на основі теорем про зображення похідної та згортки одержимо

$$U(x, p) \Rightarrow u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(x, t - \tau) q(\tau) d\tau.$$

Підставивши явний вираз (3.46) функції $G(x, t)$ і виконавши диференціювання, одержимо розв'язок задачі (3.40), (3.41) у вигляді

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{q(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (3.47)$$

Завдання до розділу 3

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь при вказаних початкових умовах:

48. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t; x_0 = x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.

49. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t; x_0 = 1, x'_0 = 2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^{-t} \left(\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{20} \sin 2t \right) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$.

50. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0; x_0 = 6, x'_0 = 10$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 4e^t + 2e^{3t}$.

51. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 29x = 0; x_0 = 0, x'_0 = 15$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 3e^{-2t} \sin 5t$.

52. $4\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + x = 0; x_0 = 2, x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}(2 + t)$.

53. $4\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 15x = 4e^{-\frac{3}{2}t}; x_0 = 3, x'_0 = -5,5$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = (1 + t)e^{-\frac{3}{2}t} + 2e^{-\frac{5}{2}t}$.

54. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 10x = 10t^2 + 18t + 6; x_0 = 1, x'_0 = 3,2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^t(0,16 \cos 3t + 0,28 \sin 3t) + t^2 + 2,2t + 0,84$.

55. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = 2(1 - t); x_0 = 1, x'_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^t + t^2$.

56. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = e^t(t^2 + t - 3); x_0 = 2, x'_0 = 2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^t(e^t - t^2 - t + 1)$.

57. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \sin 2t = 0; x_0 = 1, x'_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{3} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin t - \cos t$.

58. $2\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 1; x_0 = 0, x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 1 - e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} + e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}$.

59. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t; x_0 = x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.

60. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t; x_0 = 1, x'_0 = 2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^{-t} \left(\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{20} \sin 2t \right) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$.

61. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3t; x_0 = x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$.

62. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = t \cos 2t; x_0 = x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right)$.

63. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0; x_0 = 1, x'_0 = 2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

64. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + b^2)x = 0; x = x_0, x' = x'_0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{e^{at}}{b} [x_0 b \cos bt + (x'_0 - x_0 a) \sin bt]$.

65. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}; x_0 = 1, x'_0 = 2$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t}$.

66. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 \frac{dx}{dt} = a \cos nt; x = x_0, x' = x'_0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{a}{m^2 - n^2}(\cos nt - \cos mt) + \frac{x'_0}{m} \sin mt$.

67. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2; x_0 = 0, x'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2$.

68. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 1; x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$.

69. $\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{dx}{dt}; x_0 = 2, x'_0 = 0, x''_0 = -1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 1 + \cos t$.

70. $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2e^{-2t} = 0; x_0 = 2, x'_0 = 1, x''_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 4 - 3e^{-t} + e^{-2t}$.

71. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{dx}{dt} = 3(2 - t^2); x_0 = x'_0 = x''_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = e^t + t^3$.

72. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0; x_0 = 1, x'_0 = 3, x''_0 = 8$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 2e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$.

73. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0; x_0 = 2, x'_0 = 0, x''_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = 1 - t + e^t$.

74. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t; x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{4} \left(t^2 - 3t + \frac{3}{2} \right) e^t - \frac{1}{24} e^{-t} - \frac{1}{3} \left(\cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right) e^{\frac{t}{2}}.$

75. $\frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = \sin t; x_0 = x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$ при $t = 0.$

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{8} [e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2 \sin t].$

76. $\frac{d^5 x}{dt^5} = \frac{dx}{dt}; x_0 = 0, x'_0 = 1, x''_0 = 0, x'''_0 = 1, x^{(4)}_0 = 2$ при $t = 0.$

Відповідь: $x(t) = e^t + \cos t - 2.$

Знайти розв'язки систем диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

77.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + y = 1, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + x = 0, \end{cases}$$

$x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$ при $t = 0.$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} (e^t + e^{-t}), \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} (e^t + e^{-t}) + 1. \end{cases}$$

78.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases}$$

$x_0 = 0, y_0 = 1$ при $t = 0.$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{2}{3} (e^t - e^{4t}), \\ y(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} e^t + e^{4t} \right). \end{cases}$$

79.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1, \end{cases}$$

$$x_0 = -2, y_0 = 0 \text{ при } t = 0.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} - 1, \\ y(t) = e^{-t} - 1. \end{cases}$$

80.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases}$$

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ при } t = 0.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t, \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$$

81.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 7\frac{dy}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + 3x + 11\frac{dy}{dt} + y = 0, \end{cases}$$

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ при } t = 0.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{1}{8}t} \left(ch \frac{\sqrt{17}}{8} t - \frac{9}{\sqrt{17}} sh \frac{\sqrt{17}}{8} t \right), \\ y(t) = e^{-\frac{1}{8}t} \left(ch \frac{\sqrt{17}}{8} t - \frac{1}{\sqrt{17}} sh \frac{\sqrt{17}}{8} t \right). \end{cases}$$

82.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x + y = 2t, \\ \frac{dy}{dt} - 6x + 9y = 4t, \end{cases}$$

$x_0 = 1, y_0 = 3$ при $t = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{72} e^{-\frac{7}{2}t} \left(277 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{97}}{2} t + \frac{2539}{\sqrt{97}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{97}}{8} t \right) - \frac{7}{6} t - \frac{61}{72}, \\ y(t) = \frac{1}{36} e^{-\frac{7}{2}t} \left(127 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{97}}{2} t + \frac{265}{\sqrt{97}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{97}}{2} t \right) - \frac{1}{3} t - \frac{19}{36}. \end{cases}$$

83.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} - y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 0, \end{cases}$$

$x_0 = x'_0 = y'_0 = 0, y_0 = 1$ при $t = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{6} e^t + \frac{1}{30} e^{-t} (13 \operatorname{ch} \sqrt{10} t + 5 \sqrt{10} \operatorname{sh} \sqrt{10} t) + 12, \\ y(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{30} e^{-t} (11 \operatorname{ch} \sqrt{10} t - 2 \sqrt{10} \operatorname{sh} \sqrt{10} t) - 36. \end{cases}$$

84.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = 1, \\ \frac{dx}{dt} + 6x + \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = e^{4t}, \end{cases}$$

$x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{30} (2e^{-t} + 3e^{4t} - 5e^{2t}), \\ y(t) = 1 - \frac{1}{6} (9e^t - 4e^{2t} + e^{-t}). \end{cases}$$

85.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$$

$x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \\ y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \\ z(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$$

86.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y, \end{cases}$$

$x_0 = -1, y_0 = 1, z_0 = 0$ при $t = 0$.

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t}, \\ y(t) = e^{-t}, \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

87. Знайти розв'язок лінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

у напівскінченній смузі $0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < +\infty$

при початкових умовах

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

та граничних умовах

$$u(0,t) = A; \quad u(l,t) = 0,$$

де a та A - сталі величини.

Відповідь:

$$u(x,t) = A \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n a t}{l}}{n} \right).$$

88. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

при початкових умовах

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x < \infty,$$

та граничних умовах

$$u(0,t) = u_0; \quad t > 0,$$

де a та A - сталі величини.

Відповідь:

$$u(x,t) = \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

4. ОПЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Серед лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь виділяють клас рівнянь типу Вольтерра. Так, лінійне неоднорідне рівняння Вольтерра другого роду має вигляд:

$$y(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)y(s)ds + f(t). \quad (4.1)$$

У рівнянні (4.1) $y(t)$ - невідома функція; $f(t)$, $K(t, s)$ - задані функції (ядро $K(t, s)$ визначене для $a \leq s \leq t$); λ - параметр.

До розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра зводяться численні прикладні задачі. Наприклад, нехай поставлено задачу Коші для диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_2(t)x(t) &= q(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) &= x'_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Позначимо $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = y(t)$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \int_0^t y(s)ds + x'_0, \\ x(t) &= \int_0^t \left(\int_0^v y(s)ds \right) dv + x'_0 t + x_0, \end{aligned}$$

або

$$x(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds + x'_0 t + x_0.$$

Підставимо здобуті значення у вираз (4.2):

$$y(t) + a_1(t) \left(\int_0^t y(s)ds + x'_0 \right) + a_2(t) \left(\int_0^t (t-s)y(s)ds + x'_0 t + x_0 \right) = q(t),$$

або

$$\begin{aligned} y(t) + \int_0^t (a_1(t) + a_2(t)(t-s))y(s)ds &= \\ = q(t) - (x'_0 a_1(t) + x'_0 t a_2(t) + x_0 a_2(t)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Запровадимо позначення

$$\begin{aligned} K(t, s) &= -(a_1(t) + a_2(t)(t-s)), \\ f(t) &= q(t) - (x'_0 a_1(t) + x'_0 t a_2(t) + x_0 a_2(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тепер (4.3) запишемо у вигляді

$$y(t) = \int_a^t K(t,s)y(s)ds + f(t). \quad (4.5)$$

Таким чином, ми одержали рівняння Вольтерра другого роду. Якщо в (4.4) коефіцієнти стали, то $K(t,s) = -(a_1 + a_2(t-s))$ є ядром, залежним лише від різниці аргументів:

$$y(t) = \lambda \int_a^t K(t-s)y(s)ds + f(t). \quad (4.6)$$

Рівняння (4.6) дістали назву **рівнянь типу згортки**. Розв'яжемо їх методами операційного числення.

Нехай $y(t)$ є оригіналом, а $Y(p)$ - його L -зображенням: $y(t) \Leftarrow Y(p)$. Аналогічно маємо і для функції $f(t)$: $f(t) \Leftarrow F(p)$. Тоді за теоремою про згортку (1.29) маємо:

$$\int_0^t K(t-s)y(s)ds \Leftarrow K(p)Y(p).$$

Тепер рівняння (4.6) можна записати у вигляді:

$$Y(p) = \lambda K(p)Y(p) + F(p), \quad (4.7)$$

звідки

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda K(p)}. \quad (4.8)$$

Залишилося перейти до оригіналу $y(t)$. Це робиться або за допомогою таблиць (див. напр., п.1.15), або за формулою обернення (2.4).

Завдання до розділу 4

Знайти розв'язки інтегральних рівнянь:

$$89. f(t) = \sin(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Відповідь:

$$f(t) = \frac{e^t}{6} + \frac{\sin(t) + \cos(t)}{2} - \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

$$90. f(t) + \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) f(\tau) d\tau = \cos(t).$$

Відповідь:

$$f(t) = 2\cos(t) - 1.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. В.А.Диткин, А.П.Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: Наука, 1974. – 542 с.
2. А.С.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. – Москва: Наука, 1970. – 304 с.
3. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
4. Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1976. – 407 с.
5. А. Свідзинський. Математичні методи теоретичної фізики. – Київ: Вид. ім. Олени Теліги, 1998. – 442 с.
6. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер. Математические методы физики. - Москва: Атомиздат, 1972. – 397 с.
7. М.А. Евграфов, К.А. Бежанов, Ю.В. Сидорюк, М.В.Федорюк, М.И. Шабунин. Сборник задач по теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1972. – 416 с.
8. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Т.3., Ч.2. - Москва: Наука, 1974. – 672 с.

Карбованець М.І., Лазур В.Ю. Методи операційного числення та його застосування: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. – 56 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник
відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Посібник створено на базі лекційних курсів “Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення”, “Спеціальні розділи математики” та “Методи математичної фізики”, що читаються студентам фізичного факультету УжНУ спеціальностей “Телекомунікації та радіотехніка”, “Середня освіта. Фізика”, “Фізика та астрономія”, “Прикладна фізика і наноматеріали” та “Кібербезпека” (ОПП “Системи технічного захисту інформації”). Він містить ряд основних ідей і методів операційного числення в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах та спецкурсах із загальної та теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із теоретичної механіки, електродинаміки, теорії коливань тощо.

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей університетів.

*Рекомендовано до друку науково-методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 6 від 19 лютого 2019 року).*

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 3,26. Зам. № 79. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ "Говерла". м. Ужгород, вул. Капітульна, 18. Тел.: 3-32-48.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року*