УДК 512.53+512.64
DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).19-26

В. М. Бондаренко[1], **О. В. Зубарук**[2]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

КОМБІНАТОРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАТЕГОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ НАПІВГРУПИ $S^0_{(22)}$

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура, а згодом, у 1955 р., за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайт (в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані першим автором разом з Я. В. Заціхою (2013 р.). Це дало їм змогу, використовуючи методи Київської школи з теорії матричних задач, описати матричні зображення всіх напівгруп третього порядку над довільним полем (2018 р.). Вони також описали зображувальний тип напівгруп третього порядку (серед них немає диких) і вказали канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень).

Автори цієї статті продовжили дослідження в даному напрямку, детально вивчаючи природні наднапівгрупи напівгруп третього порядку (тобто таких, які мають фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі третього порядку), особливу увагу приділячи їхнім матричним зображенням. Описується зображувальний тип нових напівгруп (серед яких вже зустрічаються і дикі), досліджуються алгебри Ауслендера (як одна із форм задання категорій зображень) та ідейно пов'язані з ними Σ-функції, тощо.
Зокрема, автори описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи третього порядку, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, тобто комутативної напівгрупи

$$(0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$$

(в круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках — мінімальну систему твірних; потім вказано визначальні співвідношення). Серед таких наднапівгруп виділяється напівгрупа $S^0_{(22)}$ як найменша серед напівгруп

$$S^0_{(mn)} := (0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^m = 0, c^n = c, bc = 0.$$

де $m, n \geq 2$. Напівгрупа $S^0_{(22)}$ є "проміжною" між вказаною вище комутативною напівгрупою та ручною напівгрупою, породженою 2-нільпотентним і 2-потентним елементами без додаткових визначальних співвідношень.

Напівгрупа $S^0_{(22)}$ має скінченний зображувальний тип і її нерозкладні зображення описані авторами раніше. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості її категорії матричних зображень.

Ключові слова: поле, розмірність, напівгрупа і наднапівгрупа, визначальні співвідношення, 2-кільпотентний і 2-потентний елементи, матричні зображення, еквівалентність, категорія, ендоморфізм, стабілізатор, зображувальний тип, алгебра Ауслендера, Σ-функція.

1. Вступ. Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура [1], а згодом, у 1955 р. за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайт [2] (в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані першим автором разом з Я. В. Заціхою [3]. Це дало їм змогу, використовуючи методи Київської школи з теорії матричних задач, описати матричні зображення всіх напівгруп третього порядку над довільним полем [4] (відносно методів Київської школи див., зокрема, роботи [5]– [17]). У роботі [4] також описано зображувальний тип напівгруп третього порядку (серед них немає диких) і вказано канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень).

Автори цієї статті продовжили дослідження в даному напрямку, детально вивчаючи природні наднапівгрупи напівгруп третього порядку (тобто таких, які мають фактор-напівгрупи, ізоморфні напівгрупи третього порядку), особливу увагу приділячи їхнім матричним зображенням. Описується зображувальний тип нових напівгруп (серед яких вже зстрічаються і дикі), досліджуються алгебри Ауслендера (як одна із форм задання категорій зображень), тощо (див. [18]– [21]). Зокрема, в [20] автори описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи третього порядку, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, тобто комутативної напівгрупи з твірними b, c і визначальними співвідношеннями $b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$. Серед таких наднапівгруп виділяється напівгрупа $S^0_{(22)}$ як найменша серед напівгруп з твірними b, c і визначальними співвідношеннями $b^m = 0, c^n = c, bc = 0$, де $m, n \geq 2$. Напівгрупа $S^0_{(22)}$ є “проміжною” між вказною вище комутативною напівгрупою та ручною напівгрупою, породженою 2-нільпотентним і 2-потентним елементами без додаткових визначальних співвідношень.

Напівгрупа $S^0_{(22)}$ має скінченний зображувальний тип і її нерозкладні зображення описані авторами раніше. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості її категорії матричних зображень.

2. Формулювання основного результату. Нехай $T : s \to T(s)$ — матричне зображення над полем K (скінченно-породженої в нашому випадку) напівгрупи S. Позначимо через $p(T)$ максимальне число незалежних параметрів матриці X, що задовольняє систему лінійних матричних рівнянь $T(s)X = XT(s)$, де s пробігає S. Більш формально, $p(T)$ — розмірність векторного простору, утвореного всіма такими X. Очевидно, що $p(T)$ не змінюється при заміні T на еквівалентне йому зображення. Якщо S — напівгрупа скінченного зображувального типу над K (тобто, за означенням, має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), а $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ — повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, то для $n \in [1, m] =: \{1, 2, \ldots, m\}$ покладемо

$$p_n(T) =: \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \ldots \oplus T_{i_n}), \qquad \Sigma_S(n) =: p_n(T).$$

Введена функція $\Sigma_S : [1, m] \to \mathbb{N}$ називається Σ-*функцією напівгрупи* S [22]. Відносно цих означень на категорній мові див. параграф 3.

У цій статті обчислюється Σ-функція напівгрупи $S^0_{(22)}$ (див. вступ).

Теорема 1. *Напівгрупа $S = S^0_{(22)}$ має 5 класів еквівалентності нерозкладних зображень і*

$$\Sigma_S(n) = \begin{cases} 7, & \textit{якщо} \quad n = 1, \\ 41, & \textit{якщо} \quad n = 2. \\ 81, & \textit{якщо} \quad n = 3, \\ 53, & \textit{якщо} \quad n = 4. \\ 20, & \textit{якщо} \quad n = 5. \end{cases}$$

3. Алгебра Ауслендепра напівгрупи $\boldsymbol{S^0_{(22)}}$. Для довільних матриць A і B над полем K позначимо через $St(A, B)$ множину (векторний простір) всіх матриць X таких, що $AX = XB$. У випадку, коли A квадратна, алгебру $St(A) := St(A, A)$ називатимемо стабілізатором матриці A. Множина всіх матриць над (довільним фіксованим) полем K є категорією, якщо множиною морфізмів із A в B вважати $St(A, B)$. Тоді стабілізатор $St(A)$ є множиною всіх ендоморфізмів матриці A. Категорія матричних зображень будь-якої напівгрупи індукується категорією матриць. Зокрема, алгеброю ендоморфізмів матричного зображення $T : s \to T(s)$ напівгрупи S є алгебра $\cap_{s\in S} St(T(s))$ (очевидно, достатньо розглядати s із довільної фіксованої системи твірних елементів).

Згідно загального означення алгеброю Ауслендера $\mathcal{A}(S)$ напівгрупи скінченного зображувального типу S називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (по одному представнику із кожного класу еквівалентності). Якщо зображення розглядаються в матричному вигляді (як і в нашій статті), то алгебра Ауслендера називається матричною алгеброю Ауслендера. Вона не залежить від вибору представників у класах еквівалентності; а саме всі отримані таким чином алгебри будуть ізоморфними і навіть спряженими у відповідній повній матричній алгебрі. Взагалі кажучи, замість вказаної прямої суми зображень можна брати довільне еквівалентне їй зображення.

Переходимо до опису алгебри Ауслендhра напівгрупи $S^0_{(22)}$.

Нерозкладні зображення $T = \{T(b) = B, T(c) = C\}$ напівгрупи $S^0_{(22)}$ вичерпуються (з точністю до еквівалентності) наступними зображеннями T_1 – T_5 (див. [20]):

1) $B_1 = (0), \quad C_1 = (1);$

2) $B_2 = (0), \quad C_2 = (0);$

3) $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Теорема 2. *Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}(S^0_{(22)})$ напівгрупи $S^0_{(22)}$ над полем K (відносно $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$) складається з усіх матриць вигляду*

$$\overline{X} = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc|ccc}
x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & x_{99} & 0 & x_{98} & 0 & x_{97} & 0 & 0 & x_{96} \\ \hline
x_{13} & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \hline
0 & x_{59} & 0 & x_{58} & x_{55} & x_{57} & 0 & x_{54} & x_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{54} \\ \hline
x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 \\
0 & x_{49} & 0 & x_{48} & 0 & x_{47} & 0 & x_{22} & x_{46} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22}
\end{array}\right),$$

де x_{ij} — елементи поля K.

Доведення. У роботі [21] пряма сума $T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$ цих зображень записана з точністю до переставної подібності, а саме у вигляді зображення $T_0 = \{T(b) = B_0, T_c = C_0\}$, де

$$B_0 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

і доведено, що в цьому випадку матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}'(S^0_{(22)})$ складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\
0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99}
\end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K.

Зображення T отримується із зображення T_0 наступною перестановкою рядків та стовпців: $3, 9, 1, 8, 5, 7, 2, 4, 6$. Значить (параметрична) матриця $\overline{X}$, що задає алгебру Ауслендера відносно T, отримується із матриці X, яка задає алгебру Ауслендера відносно T_0, також зп допомогою такої перестановки. Легко бачити, що матриця ;lX має вигляд, вказаний в умові теореми.

4. Доведення теореми 1. Для доведення теореми потрібно обчислити алгебри ендоморфізмів прямих сум різних комбінацій матричних зображень T_1–T_5, а потім їх розмірності.

Але цей процес можна спростити, якщо скористатися наступним твердженням, яке випливає із правила множення блокових матриць.

Лема 1. *Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — квадратні матриці над полем K і A — їх пряма сума. Зафіксуємо послідовність натуральних чисел $I = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, де $1 \leq s < m$, таку, що $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s)$, і позначимо через A_I пряму суму матриць $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}$. Параметричні матриці $St(A)$ і $St(A_I)$ будемо вважати, як і матриці A та A_I, блочними (розміри блоків визначаються розмірностями матриць $A_1, A_2, \ldots, A_m$). Тоді $St(A_I)$ — блокова підматриця матриці $St(A)$, яка стоїть на перетині горизонтальних і вертикальних смуг з номерами із I.*

Нами ця лема використовується наступним чином. Спочатку обчислюємо алгебру Ауслендера (див теорему 2), а решту потрібних стабілізаторів отримуємо із параметричної матриці, якп задає цю алгебру, викреслюванням тих чи інших горизонтальних і вертикальних смуг (а саме, в кожному конкретному випадку, тих. які відповідають зображенням T_i, які не входять в пряму суму). Підрахунок же параметрів є простою задачею. В результаті маємо наступні рівності:

1) $p(T_1) = p(T_2) = p(T_3) = 1$, $p(T_4) = p(T_5) = 2$;

2($p(T_1 \oplus T_2) = 2$, $p(T_1 \oplus T_3) = 3$, $p(T_1 \oplus T_4) = 3$, $p(T_1 \oplus T_5) = 4$, $p(T_2 \oplus T_3) = 3$, $p(T_2 \oplus T_4) = 5$, $p(T_2 \oplus T_5) = 5$, $p(T_3 \oplus T_4) = 4$, $p(T_3 \oplus T_5) = 5$, $p(T_4 \oplus T_5) = 7$;

3) $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = 5$, $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) = 6$, $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_5) = 7$, $p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) = 6$, $p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_5) = 8$, $p(T_1 \oplus T_4 \oplus T_5) = 9$, $p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 8$, $p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_5) = 9$, $p(T_2 \oplus T_4 \oplus T_5) = 12$, $p(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 11$,

4) $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 10$, $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_5) = 12$, $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4 \oplus T_5) = 14$, $p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 17$,

і 5) $p_5(T) = p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 20$.

Отже, $p_1(T) = 7$ $p_2(T) = 41$, $p_3(T) = 81$, $p_4(T) = 53$, $p_5(T) = 20$, що і треба було довести.

5. Висновки. У роботі вивчаються комбінаторні властивості категорії матричних зображень наднапівгрупи спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами. Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні категорій зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1953. 3. P. 1–11.
2. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. 6. P. 443–447.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки).* 2013. № 14. С. 62–67.
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2018. Вип. 32, № 1. С. 36–49.
5. Бондаренко В. М. Связки полуцепных множеств и их представления.*(Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.60).* Киев, 1988. 32 с.
6. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Записки науч. семинаров ЛОМИ.* 1977. 71. С. 24–41.
7. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2018. Т. 33, № 2. С. 19–26.
8. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. Представления и квадратичные формы. *Ин-т математики АН УССР.* Киев, 1979. С. 75–105.
9. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. *Ин-т математики АН УССР.* Киев, 1977. С. 104–114.
10. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу. *Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки).* 2016. 178. С. 23–26.
11. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.* 1990. 183. С. 149–159.
12. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1972. 28. С. 5–31.
13. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications.* 2003. 365. P. 45–90.
14. Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V. Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications.* 2009. 430. P. 86–105.
15. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2013. Vol. 16. No. 1. P. 16–19.
16. Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2008. № 4. P. 15–22.
17. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the si mplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2016. Vol. 21. No. 1. P. 18–23.
18. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2020. Т. 36. № 1. С. 7–15.
19. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера однієї комутативної напівгрупи скінченного зображувального типу. *Прикладні проблеми механіки і математики.* 2020. 18. С. 43–47.
20. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами.*Вісник Київського національного університету. Сер. фіз.-мат. науки.* 2020. № 3. С. 110–114.
21. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика.* 2021. Т. 38. № 1. С. 48–54.
22. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2015. Т. 12. № 3. С. 56–64.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. Combinatorial characteristics of the category of representations of the semigroup $S^0_{(22)}$.

Semigroups of the third order were first described in 1953 by T. Tamura, and later, in 1955, with the help of a computer program by G. E. Forsythe (in terms of Kelly tables, up to isomorphism and antiisomorphism). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups were constructed by the first author together with Ja. V. Zaciha (2013). This allowed them, using the methods of the Kyiv school on the theory of matrix problems, to describe matrix representations of all semigroups of the third order over an arbitrary field (2018). They also described the representation type of third-order semigroups (there are no wild ones among them) and indicated the canonical form of matrix representations for semi-groups of finite representation type (i.e. those that have, up to equivalence, a finite number of indecomposable representations).

The authors of this article continued research in this direction, studying in detail the natural oversemigroups of semigroups of the third order (i.e, those that have a factor semigroup, isomorphic to a semigroup of the third order), paying special attention to their matrix representations. They also described the representation type of new semigroups (among which there are already wild), and investigated the Auslander algebras (as one of the forms of defining the categories of representations) and ideologically related Σ-functions, etc. In particular, the authors described the representation type of standard oversemigroups of semigroups of the third order, generated by two mutually annihilating 2-nilpotent and 2-potent (idempotent) elements, i.e. commutative semigroup

$$(0, b, c) = \langle b, c\rangle : b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$$

(all the elements of the semigroup are indicated in parentheses, and in the angle brackets the minimal system of generators is indicated; then specified the defining relations). Among such oversemigroups the semigroup stands out $S^0_{(22)}$ as the smallest among semigroups

$$S^0_{(mn)} := (0, b, c) = \langle b, c\rangle : b^m = 0, c^n = c, bc = 0.$$

where $m, n \geq 2$. The semigroup $S^0_{(22)}$ is "intermediate" between specified above the commutative semigroup and the tame semigroup generated 2-nilpotent and 2-potent elements without additional defining relations.

Semigroup $S^0_{(22)}$ has a finite representation type and its indecomposable representations are described by the authors earlier. This article studies the combinatorial properties of its category of matrix representations.

Keywords: field, dimension, semigroup and oversemigroup, defining relations, 2-nilpotent and 2-potent elements, matrix representations, equivalence, category, endomorphism, stabilizer, representation type, Auslander algebra, Σ-function.

References

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ., 3,* 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc., 6,* 443–447.
3. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2013). Pro vyznachal'ni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tret'oho poryadku [On defining relations for minimal generator systems of three-order semigroups]. *Science Journal of National Pedagogical Dragomanov University, Series 1: Physics and Mathematics, 14,* 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen' napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 32*(1), 36–49 [in Ukrainian].
5. Bondarenko, V. M. (1988). Svyazki polutsepnykh mnozhestv i ikh predstavleniya [Bundles of semichained sets and their representations]. *(Prepr. / AN USSR. In-t matematiki; 88.60).* Kiev [in Russian].

6. Bondarenko, V. M., & Drozd, Ju. A. (1977). Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp [The representation type of finite groups]. *Modules and representations. Zap. Nauch. Sem. LOMI, 71,* 24–41 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Pro matrychni zobrazhennya monoyidiv chetvertoho poryadku [On matrix representations of monoids of the fourth order. On matrix representations of monoids of the fourth order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics 33*(2), 19–26 [in Ukrainian].
8. Bondarenko, V. M, Nazarova, L. A., & Zavadskii, A. G. (1979). O predstavleniyakh ruchnykh chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of tame partially ordered sets]. *Representations and quadratic forms. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat.,* Kiev, 75–106 [in Russian].
9. Drozd, Ju. A. (1977). O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh [Tame and wild matrix problems]. *Matrix problems, Akad. NaukUkrain. SSR Inst. Mat.,* Kiev, 104–114 [in Russian].
10. Dyachenko, S. M.(2016). Napivhrupy Rissa nad tsyklichnoyu hrupoyu prostoho poryadku skinchennoho zobrazhuval'noho typu [Riss semigroups over a cyclic group of simple order of finite representation type]. *Scientific Notes of NaUKMA (Physical and Mathematical Sciences), 178,* 23–26 [in Ukrainian].
11. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Ruchnyye chastichno uporyadochennyye mnozhestva s involyutsiyey [Tame partially ordered sets with involution]. *Trudy Mat. Inst. Steklov, 183* 149–159 [in Russian].
12. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Predstavleniya chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of partially ordered sets]. *Zap. Nauch. Sem. LOMI, 28,* 5–31 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications 365,* 45–90.
14. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications, 430*(1), 86–105.
15. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn E. M. (2013). On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra Discrete Math., 16*(1) 16–19.
16. Bondarenko, V. M., & Tertychna, O. M. (2008). On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra Discrete Math.,* 4, 15–22.
17. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math., 21*(1), 18–23.
18. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzhenoyi dvoma vzayemno anul'ovnymy idempotentamy [On matrix representations of oversemigroups of a semigroup generated by two mutually annihilating idempotents]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 36*(1), 7–15 [in Ukrainian].
19. Zubaruk, O. V. (2020). Pro alhebru Auslendera odniyeyi komutatyvnoyi napivhrupy skinchennoho zobrazhuval'noho typu [On the Auslander algebra of a commutative semigroup of finite representation type]. *Applied problems of mech. and math., 18*, 43–47 [in Ukrainian].
20. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzhenoyi vzayemno anul'ovnymy 2-potentnym i 2-nil'potentnym elementamy [On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, 3*, 110–114 [in Ukrainian].
21. Zubaruk, O. V. (2021). Pro alhebru Auslendera napivhrupy, porodzhenoyi dvoma anul'ovnymy 2-nil'potentnym i 2-potentnym elementamy [On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 38*(1), 48–54 [in Ukrainian].
22. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2015). Σ-funktsiya chysla parametriv dlya systemy matrychnykh zobrazhen' [Σ-function of the number of parameters for the matrix representations system]. *Proc. Inst. math. NAS of Ukraine, 12*(3), 56–64 [in Russian].

Одержано 15.04.2022