УДК 517.18
DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).51-59

М. В. Качайкін

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
студент,
kachaikinmarko.sci@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5158-9116

НАВКОЛО СТАЛОЇ ЕЙЛЕРА

За аналогією зі сталою Ейлера побудована однопараметрична сім'я сталих, яка визначається як границя різниці послідовності часткових сум узагальненого гармонічного ряду та відповідного інтеграла залежного від параметра. Доведена нескінченна диференційовність по параметру на додатній півосі, виявлена розривність в нулі та знайдена границя при прямуванні параметра до нескінченності.

Ключові слова: узагальнений гармонічний ряд, стала Ейлера, узагальнення сталої Ейлера.

1. Вступ. Вперше стала Ейлера була відкрита швейцарським математиком Леонардом Ейлером при дослідженні асимптотичної поведінки часткових сум гармонічного ряду. Пізніше вона виникла у дослідженнях італійського математика Лоренцо Маскероні при розкладі первісних функцій $g(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$ та $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ у функціональні ряди і була порахована ним до 32 знаку після коми.

Стала Ейлера визначається як границя різниці часткових сум гармонічного ряду і натурального логарифма:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577215\ldots$$

Записавши натуральний логарифм за допомогою інтегралу, отримаємо:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} \right).$$

Відмитимо, що кожна з послідовностей $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \geq 1 \right\}$, $\left\{ \int_{1}^{n} \frac{1}{t} dt, n \geq 1 \right\}$ розбіжна. Але для існування границі вигляду:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(t)dt \right), \tag{1}$$

де функція $f : [1, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ локально інтегровна за Ріманом на $[1, +\infty)$, взагалі кажучи, збіжність кожної з послідовностей $\left\{ \sum_{k=1}^{n} f(k),\ n \geq 1 \right\}$, $\left\{ \int_{1}^{n} f(t)dt,\ n \geq 1 \right\}$ не є обов'язковою. А тому, цікаво визначити для якого класу функцій $f : [1, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ існує границя вигляду (1).

У статті [1] показано, що клас функцій для яких існує границя вигляду (1) містить в собі клас монотонних, неперервних і збіжних до нуля функцій.

У статті [2] результат був покращений. В теоремі 1 цієї статті було показано, що границя вигляду (1) існує для всіх монотонних і обмежених функцій, що не обов'язково неперервні. В теоремі 3 — що для функції $f \in C^{\infty}((0,+\infty))$, що для кожного натурального n розкладна в степеневий ряд на інтервалі $(n-1-\varepsilon_n, n+1+\varepsilon_n)$, для деякого $\varepsilon_n > 0$, границя (1) існує тоді і лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, де $b_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f^{(k)}(n)}{(k+1)!}$, $n \geq 1$. А в теоремі 5 було доведено, що для функції $f \in C^1\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n,n+1)\right)$, що неперервна зліва і має границю справа в натуральних точках, границя (1) існує тоді і лише тоді, коли існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f'(x)\{x\}dx$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x.

Ґрунтуючись на результатах статей [1] та [2], ми побудували однопараметричну сім'ю сталих, яка для кожного фіксованого значення параметра є границею різниці часткових сум узагальненого гармонічного ряду та відповідного інтегралу:

$$\nu(\alpha) := \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} - \int\limits_1^n \frac{dt}{t^{\alpha}}\right],\ \alpha \geq 0. \tag{2}$$

Цю параметричну сім'ю сталих можна розглядати як функцію дійсної змінної α. Для цієї функції $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$, розглянемо питання неперервності та диференційовності на $[0,+\infty)$, обмеженості для всіх $\alpha \in [0,+\infty)$, знайдемо границю $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\nu(\alpha)$.

2. Основний результат. В прикладі 2 до теореми 1 статті [1] доведено існування границі наступної послідовності, для кожного значення параметра $\alpha > 0$:

$$\nu_n(\alpha) := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} - \int\limits_1^n \frac{dt}{t^{\alpha}}, n \geq 1. \tag{3}$$

А в точці $\alpha = 0$ безпосередньо отримуємо рівність:

$$\nu_n(0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^0} - \int\limits_1^n \frac{dt}{t^0} = \sum_{k=1}^{n} 1 - \int\limits_1^n dt = n-(n-1) = 1, n \geq 1.$$

Таким чином, функція $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$, що задана рівністю (2) – визначена коректно.

Основним результатом статті є теореми в яких доведена нескінченна диференційовність функції $\nu(\cdot)$ на $(0,+\infty)$, з'ясована розривність в нулі та обмеженість для всіх $\alpha \in [0,+\infty)$, знайдено $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\nu(\alpha)$.

Теорема 1. *Для функції $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ справедливі наступні твердження:*

(i) *Для довільного $\alpha \in [0,+\infty) : 0 \leq \nu(\alpha) \leq 1$;*
(ii) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\nu(\alpha) = 1$.

Доведення. Відмітимо, що $\nu(0) = 1$, а тому нехай далі $\alpha > 0$. В теоремі 1 з статті [2] показано, що для кожного фіксованого значення параметра $\alpha > 0$, для числових послідовностей $\{a_n(\alpha), n \geq 1\}, \{b_n(\alpha), n \geq 1\}$, визначених рівностями:

$$b_n(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \nu_n(\alpha), a_n(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha},\ \alpha > 0,\ n \geq 1.$$

Виконується наступний ланцюжок нерівностей:

$$a_1(\alpha) < a_2(\alpha) < \ldots < a_n(\alpha) < b_n(\alpha) < \ldots < b_2(\alpha) < b_1(\alpha),\ n \geq 1, \alpha > 0.$$

При цьому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n(\alpha) = \nu(\alpha), \alpha \geq 0$. Звідси випливає, що має місце нерівність для кожного $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$a_1(\alpha) < b_n(\alpha) < b_1(\alpha),\ n \geq 1.$$

Перейшовши в отриманій нерівності до границі при $n \to \infty$, маємо, що для всіх $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$0 \leq a_1(\alpha) = 1 - \int_1^2 t^{-\alpha} dt \leq \nu(\alpha) \leq b_1(\alpha) = 1.$$

Отримали твердження (i). Далі, так як:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \left[1 - \int_1^2 t^{-\alpha} dt\right] = 1,$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} b_1(\alpha) = 1,$$

то існує границя

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \nu(\alpha) = 1.$$

Теорему доведено.

Для дослідження властивостей функції $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ зобразимо її у вигляді суми функціонального ряду, щоб застосувати теорему про диференційовність суми ряду.

Лема 1. *Функція $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ є сумою функціонального ряду:*

$$\nu(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha),$$

де $u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha},\ k \geq 1,\ \alpha \geq 0.$

Доведення. В точці $\alpha = 0$ це перевіряється безпосередньо. Для кожних $\alpha \in (0, +\infty)\,, n \geq 1$ має місце рівність:

$$\nu_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \right] =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k^\alpha} - \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \right] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right] := 1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha),$$

де $u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha},\ k \geq 1,\ \alpha \geq 0.$

Тоді має місце рівність:

$$\nu(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha) \right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha),\ \alpha \geq 0.$$

Лему доведено.

Зауваження 1. *Для кожного фіксованого* $\alpha \in [0, +\infty),\ u_k(\alpha) \leq 0, k \geq 1.$ *Дійсно,*

$$u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = - \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) dt \leq 0,\ k \geq 1.$$

Для дослідження функції на нескінченну диференційовність нам знадобляться похідні всіх порядків доданків суми функціонального ряду. Відмітимо, що послідовність функцій $u_k(\alpha), k \geq 1$ є послідовностю нескінченно диференційовних функцій на інтервалі $(0, +\infty)$ і для всіх $m \geq 1;\ k \geq 1;\ \alpha > 0$ має місце наступна рівність:

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \left(u_k(\alpha) \right) = \frac{(-1)^m (\ln(1+k))^m}{(1+k)^\alpha} - \int_k^{k+1} (-1)^m (\ln t)^m \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Теорема 2. *Функція* $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ *нескінченно диференційовна на інтервалі* $(0, +\infty)$. *При цьому, для кожного фіксованого* $m \geq 1$ *має місце наступна рівність:*

$$\frac{d^m \nu}{d\alpha^m}(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(u_k(\alpha) \right),\ \alpha > 0.$$

Доведення. Доведемо рівномірну збіжність кожного з функціональних рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} \left(u_k(\alpha) \right)$ для всіх $m \geq 1$ на кожній з множин $[\delta, L]$, для всіх $0 < \delta < L$. Для всіх $m \geq 1;\ k \geq 1;\ \alpha > 0$ застосуємо теорему про середнє у інтегралі Рімана, тоді, для деякого $\mu = \mu(k, \alpha) : k < \mu < k+1 :$

$$\int_k^{k+1} (-1)^m (\ln t)^m \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(-1)^m \left(\ln \mu(k, \alpha) \right)^m}{\left(\mu(k, \alpha) \right)^\alpha}.$$

Далі, для всіх фіксованих $m \geq 1, \alpha > 0$, для диференційовної на $[1, +\infty)$ функції $h(t) := \frac{(\ln t)^m}{t^\alpha}$, можемо застосувати теорему Лагранжа на кожному з відрізків $[\mu(k,\alpha), k+1]$, тоді існує $\xi = \xi(k,\alpha) : k < \mu < \xi < k+1$, таке що:

$$\frac{(\ln(k+1))^m}{(k+1)^\alpha} - \frac{(\ln \mu(k,\alpha))^m}{(\mu(k,\alpha))^\alpha} = (k+1-\mu(k,\alpha)) \frac{d}{dt}\left(\frac{(\ln t)^m}{t^\alpha}\right)\Bigg|_{t=\xi} =$$

$$= (k+1-\mu(k,\alpha)) \frac{m(\ln \xi(k,\alpha))^{m-1} - \alpha(\ln \xi(k,\alpha))^m}{(\xi(k,\alpha))^{1+\alpha}}.$$

Далі, для всіх $m \geq 1, k \geq 1, L > \delta > 0, \alpha \in [\delta, L]$ маємо:

$$\left|\frac{d^m}{d\alpha^m}(u_k(\alpha))\right| = \left|(k+1-\mu(k,\alpha)) \frac{m(\ln \xi(k,\alpha))^{m-1} - \alpha(\ln \xi(k,\alpha))^m}{(\xi(k,\alpha))^{1+\alpha}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{m(\ln \xi(k,\alpha))^{m-1} + L(\ln \xi(k,\alpha))^m}{(\xi(k,\alpha))^{1+\alpha}} \leq \frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}}.$$

При чому, для всіх $m \geq 1$ числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}},$$

збіжний за ознакою порівняння, оскільки:

$$\frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}} = o\left(\frac{1}{k^{1+\frac{\delta}{2}}}\right), k \to \infty.$$

А тому, кожен з рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m}(u_k(\alpha)), m \geq 1$ рівномірно збігається на кожному з відрізків $[\delta, L], 0 < \delta < L$ за ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності. Далі, послідовно застосовуючи теорему про диференційовність суми функціонального ряду, врахувавши довільність вибору m, δ, L, отримаємо твердження теореми. При цьому, для кожного фіксованого $m \geq 1$ має місце наступна рівність:

$$\frac{d^m \nu}{d\alpha^m}(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m}(u_k(\alpha)), \alpha > 0.$$

Теорему доведено.

Для доведення розривності в точці $\alpha = 0$ нам знадобиться наступна лема.

Лема 2. *Має місце рівність:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} - \frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Доведення. Шукану границю позначимо символом L. Вираз під знаком границі приведемо до спільного знаменника, так як:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 2,$$

тоді

$$L = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)(n+1)^{1-\frac{1}{n}} - (n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}}\right).$$

Далі, за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), x \to 0.$$

Враховуючи, що $\frac{\ln(n+1)}{n}, \frac{\ln(n)}{n} \to 0, n \to \infty$, отримуємо, що:

$$(n+1)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} - \frac{\ln^3(n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3}\right), n \to \infty.$$

При цьому

$$-\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty.$$

А тому

$$(n+1)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty,$$

і аналогічно

$$n^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty.$$

Таким чином

$$L = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)(n+1)\left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) -\right.$$

$$-(n+1)^2\left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) -$$

$$\left.-n^2\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$

Після спрощення виразу під знаком границі отримаємо, що:

$$L = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 4\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{\ln^2(n) - \ln^2(n+1)}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Лему доведено.

Теорема 3. *Функція $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ є розривною в точці $\alpha = 0$.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що функція

$$\nu(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha),$$

є неперервною на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тоді вона задовольняє умови теореми Діні з [3: 431], адже члени ряду $u_k(\alpha), k \geq 1$ неперервні, та внаслідок зауваження до леми 1 — недодатні на всьому відрізку $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Тоді функціональна послідовність часткових сум $S_n(\alpha) := 1+\sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha), \alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ рівномірно збігається до функції $\nu = \nu(\alpha)$ на відрізку $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, а тому для супремуму залишку ряду справедливо:

$$\sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |\nu(\alpha) - S_n(\alpha)| = \sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(\alpha)\right| \to 0, n \to \infty. \tag{5}$$

З іншого боку, функція $p_\alpha(s) := -\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int\limits_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha}$ така, що для всіх $k \geq 1$: $p_\alpha(k) = -\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = u_k(\alpha)$, для кожного фіксованого $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ монотонна незростаюча на $[1,+\infty)$. Бо, за формулою Лейбніца з [4: 202] маємо, що:

$$\frac{dp_\alpha}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha}\right) = \frac{\alpha}{(s+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(s+1)^\alpha} - \frac{1}{s^\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{(s+1)^{\alpha+1}} - \alpha\int_s^{s+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \alpha\int_s^{s+1}\left[\frac{1}{(s+1)^{1+\alpha}} - \frac{1}{t^{1+\alpha}}\right] dt \leq 0,$$

для кожного фіксованого параметра $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ та будь-якого $s \in [1,+\infty)$. А для випадку коли $\alpha = 0$, монотонність очевидна, бо $p_\alpha(s) = 0, s \geq 1$.

А тому, супремум залишку ряду можна корректно оцінити за допомогою нерівності 10а з [3: 284]:

$$\sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(\alpha)\right| = \sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\right)\right| =$$

$$\sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \sum_{k=n}^{\infty}\left(-\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\right) \geq \sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \int_n^{+\infty}\left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1}\frac{dt}{t^\alpha}\right) ds$$

Далі, за властивістю супремуму, отримаємо:

$$\sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left[\int_n^{+\infty}\left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1}\frac{dt}{t^\alpha}\right) ds\right] \geq$$

$$\geq \sup_{\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]} \left[\int_n^{+\infty}\left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \frac{(s+1)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) ds\right] \geq$$

$$\geq \sup_{\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]} \left(\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right]\Bigg|_n^{+\infty}\right).$$

Далі, доведемо що

$$\lim_{s\to+\infty}\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(s+1)^{2-\alpha}-s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right]=0, \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right].$$

Дійсно, позначимо шукану границю через A, тоді

$$A=\lim_{s\to+\infty}\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(s+1)^{2-\alpha}-s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\lim_{s\to+\infty}\left[(s+1)^{2-\alpha}-s^{2-\alpha}-(2-\alpha)\left(s+1\right)^{1-\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\lim_{s\to+\infty}s^{2-\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^{2-\alpha}-1-\frac{(2-\alpha)}{s}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{1-\alpha}\right].$$

Далі, за формулою Маклорена:

$$(1+t)^{\alpha}=1+\alpha t+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}t^2+o\left(t^2\right), t\to 0.$$

Для $t=\frac{1}{s}$ отримаємо:

$$A=\frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\lim_{s\to+\infty}s^{2-\alpha}\left[1+\frac{2-\alpha}{s}+\frac{(2-\alpha)\left(1-\alpha\right)}{2s^2}+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{s^2}\right)-1-\frac{2-\alpha}{s}\left(1+\frac{1-\alpha}{s}+o\left(\frac{1}{s}\right)\right)\right]=0.$$

А тому

$$\sup_{\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]}\left(\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(s+1)^{2-\alpha}-s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\right]\Bigg|_n^{+\infty}\right)\geq$$

$$\geq\frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}-\frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}}-n^{2-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}.$$

Тоді згідно з (4), остаточно отримаємо, що:

$$\sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left|\nu(\alpha)-S_n(\alpha)\right|\geq\frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}-\frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}}-n^{2-\frac{1}{n}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{2}, n\to\infty.$$

Це суперечить рівності (5). Отже, методом від супротивного $\nu(\alpha), \alpha\geq 0$ — розривна в нулі.

Теорему доведено.

Цікаво буде дослідити характер точки розриву та знайти границю функції $\nu(\alpha)$ в нулі справа.

Гіпотеза. $\nu\left(\alpha\right)\to\frac{1}{2}, \alpha\to 0^{+}$.

3. Висновки. У статті, для побудованої однопараметричної сім'ї сталих, яка є аналогом сталої Ейлера на випадок узагальненого гармонічного ряду, показана нескінченна диференційовність за параметром, обмеженість для всіх значень параметра. Отримано значення границі при прямуванні параметра до нескінченності. Сформульовано гіпотезу щодо значення границі в нулі справа.

Список використаної літератури

1. Курченко О. О. Аналог сталої Ейлера для монотонної, збіжної до нуля функції. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, сер. фізико-математичні науки.* 2011. Вип. 4. С. 26–29.
2. Скуратовський Р. Узагальнення сталої Ейлера. *Мат. Вісник НТШ.* 2013. Т. 10. С. 163–168.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. II. Москва: Наука, 1969. 800 с.
4. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Частина 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.

Kachaikin M. V. Around the Euler's.

By analogy to Euler's constant, we constructed one-parameter family of constants, which defined as a limit of a difference of sequence of partial sums of the generalized harmonic series and related integral which depends on parameter. Proved that it is infinitely differentiable at all positive points, discovered that it discontinuous at zero and found a limit as parameter approaches to infinity.

Keywords: generalized harmonic series, Euler's constant, generalization of Euler's constant.

References

1. Kurchenko, O. O. (2011). Analoh staloi Oilera dlia monotonnoi, zbizhnoi do nulia funktsii [Analogy of Euler's constant for monotone function, which converges to zero]. *Scientific Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics*, (Vol. 4), 26–29. [in Ukrainian].
2. Skuratowskiy, R. (2013). A generalization of the Euler constant. *Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc*, (Vol. 10), 163–168. [in Ukrainian].
3. Fikhtengolts, G. M. (1969). *Differential and integral calculus course. In 3 volumes.* (Vol. II). Moscow: Nauka [in Russian].
4. Dorogovtsev, A. Ya. (1993). *Mathematichniy analiz: Pidruchnyk u dvokh chastynakh. Chastyna 1* [Mathematical analysis: Textbook in two parts. Part 1]. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].

Одержано 28.02.2022