УДК 517.95
DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).60-68

В. В. Кириченко[1], Є. В. Лесіна[2]

[1] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського",
доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів,
кандидат фізико-математичних наук
v.kyrychenko@kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2387-2261

[2] Донецький національний технічний університет,
доцент кафедри вищої математики і фізики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
eugenia.lesina@donntu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9803-6727

ПРО ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В БАГАТОКУТНИКУ

В роботі одержано критерій однозначної розв'язності однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипового диференціального рівняння в багатокутнику. Порядок рівняння збігається з кількістю сторін багатокутника. Доведення результату базується на принципі двоїстості рівняння-область. Схему побудови нетривіального розв'язку проілюстровано на прикладі задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

Ключові слова: багатокутник, нетривіальний розв'язок, двоїстість рівняння-область, диференціальний оператор, однорідний символ.

1. Вступ. Дослідженню загальних крайових задач в областях з кутовими точками присвячено роботи багатьох відомих авторів [1, 2, 3, 4]. Так, Г. І. Ескін [1] довів нормальну розв'язність задачі в пласкій області з даними, що задовольняють умову Лопатинського. В роботі В. В. Фуфаєва [2] розглядається перша крайова задача, і вивчаються диференціальні властивості гармонічної на площині функції. В. О. Кондратьєв [4] довів, що функції, похідні яких сумовні з певною вагою, є розв'язками загальної крайової задачі в області з конічними точками. В роботі [5] доведено необхідну умову існування нетривіального розв'язку «майже задачі Коші» в багатокутнику для рівняння високого порядку з однорідним за порядком диференціювання символом.

В даній роботі, за допомогою схеми, наведеної в [5], та методу двоїстості рівняння-область [6], доведено критерій однозначної розв'язності задачі з однією крайовою умовою в багатокутнику. Побудовано приклад нетривіального розв'язку задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

2. Основний результат. Нехай

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : H^1 \cdot x + d_1 > 0,\ H^2 \cdot x + d_2 > 0,\ \ldots, H^n \cdot x + d_n > 0\right\}$$

— деякий багатокутник на площині, обмежений прямими $H^j \cdot x + d_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, з нормальними векторами $H^j = \left(H_1^j, H_2^j\right)$ (див. рис. 1).

Для рівняння

$$Lu \equiv \left(a^1 \cdot \nabla\right) \cdot \left(a^2 \cdot \nabla\right) \cdot \ldots \cdot \left(a^n \cdot \nabla\right) u = 0, \qquad (1)$$

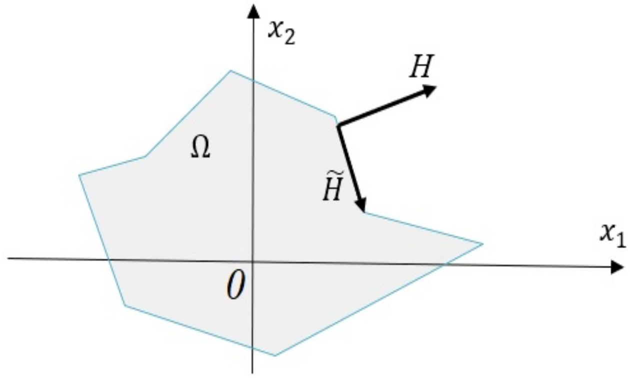

Рис. 1. Багатокутник

де

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad a^k = \left(a_1^k,\ a_2^k\right) \in \mathbb{C}^2,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad u = \left(u_1\left(x_1, x_2\right), \quad u_2\left(x_1, x_2\right)\right),$$

розглянемо наступну крайову задачу:

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Відзначимо, що порядок розглянутого рівняння повинен збігатися з кількістю сторін багатокутника Ω.

Виникає питання щодо порушення єдиності розв'язку задачі (1), (2), відповідь на яке дає наступна теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб задача* (1), (2) *мала нетривіальний розв'язок в просторі* $C^n\left(\bar{\Omega}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб послідовність визначників* $\{\Delta_M\}$, $M \geq n$, *де*

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} \left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^1\right)^M & \left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^1\right)^M & \cdots & \left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^1\right)^M \\ \left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^2\right)^M & \left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^2\right)^M & \cdots & \left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^2\right)^M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^n\right)^M & \left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^n\right)^M & \cdots & \left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^n\right)^M \end{vmatrix}, \tag{3}$$

мала хоча б один нуль. При цьому, якщо деякий визначник $\Delta_M = 0$, *то* M — *мінімальне число, для якого виконується рівність* (3), *тобто:*

$$\Delta_n \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{M-1} \neq 0, \quad \Delta_M = 0.$$

Тут $\tilde{H}^j$ *і* $\tilde{a}^k$ *- вектори, ортогональні векторам* H^j *і* a^k *відповідно.*

Доведення. Необхідність. Нехай $u \in C^n\left(\bar{\Omega}\right)$ — нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), $\tilde{u} \in C^n\left(\mathbb{R}^2\right)$ — довільне продовження функції $u\left(x\right)$ на простір. Позначимо через θ_Ω характеристичну функцію області:

$$\theta_\Omega = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \bar{\in} \Omega. \end{cases}$$

Подіємо оператором L на добуток $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$:

$$L\left(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega\right) = -l\left(\upsilon\right) \tilde{u}_\upsilon^{'} \delta_{\partial\Omega}. \tag{4}$$

Тут υ — зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$ багатокутника, $\delta_{\partial\Omega}$ — міра, зосереджена на межі $\partial\Omega$ багатокутника, $l\left(\upsilon\right) = \left(a^1 \cdot \upsilon\right)\left(a^2 \cdot \upsilon\right) \ldots \left(a^n \cdot \upsilon\right)$ — однорідний символ диференціального оператора, $\delta_{\partial\Omega}, \varphi \ = \int\limits_{\partial\Omega} \bar{\varphi} ds$, $\forall \ \varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\upsilon} = -\delta_{\partial\Omega}$.

Помножимо рівність (4) на добуток поліномів, що визначають межу області; одержимо:

$$\left(H^1 x + d_1\right)\left(H^2 x + d_2\right) \ldots \left(H^n x + d_n\right) L\left[\left(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega\right)(x)\right] = 0. \tag{5}$$

Застосуємо до рівності (5) перетворення Фур'є:

$$\left(H^1 \cdot i\frac{\partial}{\partial\xi} + d_1\right)\left(H^2 \cdot i\frac{\partial}{\partial\xi} + d_2\right) \ldots \left(H^n \cdot i\frac{\partial}{\partial\xi} + d_n\right) l\left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}\right)(\xi) = 0. \tag{6}$$

Оскільки добуток $\left(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega\right)(x)$ — узагальнена функція з компактним носієм, то, за теоремою Пелі-Вінера [7], перетворення Фур'є $\left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}\right)(\xi)$ є цілою функцією, яка може бути представлена у вигляді:

$$\left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}\right)(\xi) = \upsilon_0 + \upsilon_1(\xi) + \upsilon_2(\xi) \ldots + \upsilon_m(\xi) \ldots .$$

Тоді із рівності (6) для молодшої однорідної частини $\upsilon_m(\xi)$ випливає:

$$\left(H^1 \cdot \nabla\right)\left(H^2 \cdot \nabla\right) \ldots \left(H^n \cdot \nabla\right)\left[l(\xi)\, \upsilon_m(\xi)\right] = 0. \tag{7}$$

Позначимо через $w(\xi) = l(\xi)\, \upsilon_m(\xi)$ довільний поліноміальний розв'язок рівняння (7), який є однорідним поліномом степеня $M = m + n$:

$$w(\xi) = \sum_{k=1}^{n} w_k\left(\tilde{H}^k \cdot \xi\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \left(\tilde{H}^k \cdot \xi\right)^M. \tag{8}$$

Очевидно, що $w(\xi) = 0$, коли символ $l(\xi) = 0$, тобто коли ξ дорівнює $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^n$. Отже, рівність (8), за умови $w(\xi) = 0$, перетворюється на систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $c_1, \ \ldots \ , c_n$, причому визначник системи співпадає з визначником (3):

$$\begin{cases} c_1\left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^1\right)^M + c_2\left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^1\right)^M + \ldots + c_n\left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^1\right)^M = 0; \\ c_1\left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^2\right)^M + c_2\left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^2\right)^M + \ldots + c_n\left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^2\right)^M = 0; \\ \ldots \\ c_1\left(\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^n\right)^M + c_2\left(\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^n\right)^M + \ldots + c_n\left(\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^n\right)^M = 0. \end{cases}$$

Оскільки, за припущенням, існує нетривіальний розв'язок $u \in C^n\left(\bar{\Omega}\right)$ задачі (1), (2), то, згідно з методом двоїстості [6], поряд із тим існує нетривіальний розв'язок рівняння (7). Нагадаємо, що твердження двоїстості полягає в наступному: *для кожного нетривіального розв'язку задачі* (1), (2) *існує єдиний* *нетривіальний розв'язок рівняння (7), що належить деякому класу $\mathbb{Z}$ цілих функцій, і навпаки. Клас $\mathbb{Z}$ визначається як простір образів Фур'є функцій виду $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$.*

Вищесказане означає, що існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) призводить до наявності нетривіального розв'язання останньої системи, а, отже, до рівності нулю її визначника. Що і потрібно довести в необхідності.

Достатність. Покажемо, що для існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) достатньо виконання рівності

$$\Delta_M = 0. \tag{9}$$

Для доведення достатності при виконанні рівності (9) побудуємо нетривіальний поліноміальний розв'язок $u(x)$ задачі (1), (2) в явному вигляді. З урахуванням того, що будь-який поліном степеня M можна представити у вигляді суми однорідних поліномів, степінь яких не перевищує M, а також в силу ортогональності векторів a_k і $\tilde{a}_k$ при кожному $k = 1, 2, \ldots, n$, — будь-який поліноміальний розв'язок рівняння (1) можна записати в наступній формі:

$$u(x) = \sum_{l=1}^{M} u_l(x) + u_0 = \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} c_k^l \left(\tilde{a}^k \cdot x\right)^l + u_0. \tag{10}$$

Тут c_k^l — константи, $k = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots, M$. Зауважимо, що для побудови нетривіального розв'язку задачі (1), (2) необхідно так підібрати функції u_l, щоб функція (10) задовольняла, крім того, граничні умови (2) при деякому ненульовому наборі сталих $\left\{c_k^l\right\}$.

Виходячи з того, що на межі багатокутника мають місце рівності

$$H^j \cdot x + d_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

в якості x візьмемо $x = \tilde{H}^j t + e^j$, де $\tilde{H}^j$ — вектори, ортогональні нормальним векторам H^j прямих, які обмежують багатокутник Ω. При цьому вектори e^j повинні мати координати:

$$e^j = \left(e_1^j; \ -\frac{H_1^j e_1^j + d_j}{H_2^j}\right).$$

Підставимо у вираз (10) $x = \tilde{H}^j t + e^j$:

$$u(t) = \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} c_k^l \left(\tilde{a}^k \tilde{H}^j t + \tilde{a}^k e^j\right)^l + u_0. \tag{11}$$

Після зведення у степінь у виразі (11), з урахуванням граничних умов (2), приходимо до рівності:

$$\sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{l} \frac{c_k^l l!}{i!\,(l-i)!} \left(\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j t\right)^{l-i} \left(\tilde{a}^k \cdot e^j\right)^i + u_0 = 0. \tag{12}$$

В рівності (12) спрямуємо t до нуля, після чого отримаємо співвідношення, яке пов'язує сталі c_k^l, де $k=1,2,\ldots,n$, $l=1,2,\ldots,M$:

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} c_k^l \left(\tilde{a}^k e^j\right)^l + u_0 = 0.$$

Очевидно, що це співвідношення призводить до обертання в нуль вільного члену в рівності (12). Отже,

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{l-1} \frac{c_k^l l!}{i!\,(l-i)!}\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j t\right)^{l-i}\left(\tilde{a}^k\cdot e^j\right)^i = 0. \tag{13}$$

Розділимо рівність (13) на t, після чого перейдемо до границі при $t\to 0$. Зрозуміло, що в результаті одержимо співвідношення, яке зв'язує коефіцієнти при перших степенях t в (12):

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} c_k^l l\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j\right)\left(\tilde{a}^k e^j\right)^{l-1} = 0.$$

З урахуванням цього співвідношення, в (13) анулюються лінійні за t доданки. Таким чином,

$$\sum_{l=2}^{M}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{l-2} \frac{c_k^l l!}{i!\,(l-i)!}\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j\right)^{l-i} t^{l-i-1}\left(\tilde{a}^k\cdot e^j\right)^i = 0. \tag{14}$$

Далі, виконавши в (14) ділення на t і знову спрямувавши t до нуля, отримаємо співвідношення, яке зв'язує коефіцієнти при других степенях t в (12). Повторюючи цю процедуру скінченну кількість разів, на останньому кроці отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^M\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j\right)^M = 0. \tag{15}$$

Система (15) є однорідною системою з n невідомими $c_1^M,\ldots,c_n^M$. Визначник системи співпадає з визначником, який знаходиться в лівій частині рівності (9), якщо в ньому переставити місцями рядки і стовпці з відповідними номерами. Оскільки такий визначник дорівнює нулю, система (15) має ненульовий розв'язок $c_1^M,\ldots,c_n^M$.

Тепер повернемось до співвідношення, отриманого раніше співвідношення (15), а саме:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{M-1}\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j\right)^{M-1} = -\sum_{k=1}^{n} c_k^M M\left(\tilde{a}^k\cdot\tilde{H}^j\right)^{M-1}\left(\tilde{a}^k\cdot e^j\right). \tag{16}$$

Оскільки визначник в лівій частині (16)

$$|A| = \begin{vmatrix} \left(\tilde{a}^1\cdot\tilde{H}^1\right)^{M-1} & \left(\tilde{a}^2\cdot\tilde{H}^1\right)^{M-1} & \cdots & \left(\tilde{a}^n\cdot\tilde{H}^1\right)^{M-1} \\ \left(\tilde{a}^1\cdot\tilde{H}^2\right)^{M-1} & \left(\tilde{a}^2\cdot\tilde{H}^2\right)^{M-1} & \cdots & \left(\tilde{a}^n\cdot\tilde{H}^2\right)^{M-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\tilde{a}^1\cdot\tilde{H}^n\right)^{M-1} & \left(\tilde{a}^2\cdot\tilde{H}^n\right)^{M-1} & \cdots & \left(\tilde{a}^n\cdot\tilde{H}^n\right)^{M-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу твердження теореми, то матриця A є невиродженою, і розв'язок $c_1^{M-1}, \dots, c_n^{M-1}$ системи (16) однозначно визначається за вже знайденими $c_1^M, \dots, c_n^M$. Аналогічно обчислюються інші коефіцієнти $c_1^{M-2}, \dots, c_n^{M-2}, \dots, c_1^1, \dots, c_n^1$ функції $u(x)$. Таким чином, в результаті буде побудовано шуканий нетривіальний розв'язок задачі (1), (2).

3. Приклад (задача у трикутнику). Розглянемо наступну крайову задачу

$$u|_{\partial T} = 0$$

для рівняння третього порядку

$$Lu \equiv \left(a^1 \cdot \nabla\right) \cdot \left(a^2 \cdot \nabla\right) \cdot \left(a^3 \cdot \nabla\right) u = 0$$

з векторами $a^1 = (1, i)$, $a^2 = (1, -i)$, $a^3 = (1, 0)$ в рівносторонньому трикутнику T. Довжина сторони трикутника дорівнює 2, а вершини розташовані в точках $A(-1, 0)$, $B\left(0, \sqrt{3}\right)$, $C(1, 0)$ (див. рис. 2).

За побудовою нормальні вектори H^j, $j = 1, 2, 3$, до прямих, на яких лежать сторони трикутника T, мають компоненти:

$$H^1 = \left(\sqrt{3}, -1\right), \quad H^2 = \left(\sqrt{3}, 1\right), \quad H^3 = (0, 1).$$

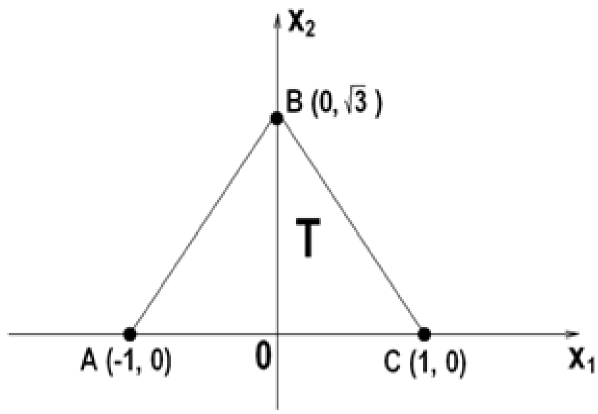

Рис. 2. Трикутник

Тоді відповідні ортогональні вектори $\tilde{H}^j$, $j = 1, 2, 3$, такі:

$$\tilde{H}^1 = \left(1, \sqrt{3}\right), \quad \tilde{H}^2 = \left(-1, \sqrt{3}\right), \quad \tilde{H}^3 = (-1, 0).$$

Зауважимо також, що

$$\tilde{a}^1 = (-i, 1), \quad \tilde{a}^2 = (i, 1), \quad \tilde{a}^3 = (0, 1).$$

Звертаючись до теореми, складемо визначник

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} \left(\sqrt{3} - i\right)^M & \left(\sqrt{3} + i\right)^M & i^M \\ \left(\sqrt{3} + i\right)^M & \left(\sqrt{3} - i\right)^M & (-i)^M \\ \left(\sqrt{3}\right)^M & \left(\sqrt{3}\right)^M & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(i\sqrt{3}\right)^M \cdot \left(1 + (-1)^M\right) \cdot \left(\left(\sqrt{3}+i\right)^M - \left(\sqrt{3}-i\right)^M\right).$$

Ясно, що $\Delta_M = 0$ при непарних M. З урахуванням обмеження на M, що приводиться в умові теореми, в даній ситуації $M \geq 3$.

Тепер побудуємо в явному вигляді поліноміальний розв'язок $u(x)$ третього степеня задачі $u|_{\partial T} = 0$ для рівняння третього порядку:

$$u(x) = c_1 \left(\tilde{a}^1 \cdot x\right)^3 + c_2 \left(\tilde{a}^2 \cdot x\right)^3 + c_3 \left(\tilde{a}^3 \cdot x\right)^3 + c_4 \left(\tilde{a}^1 \cdot x\right)^2 + c_5 \left(\tilde{a}^2 \cdot x\right)^2 +$$

$$+ c_6 \left(\tilde{a}^3 \cdot x\right)^2 + c_7 \left(\tilde{a}^1 \cdot x\right) + c_8 \left(\tilde{a}^2 \cdot x\right) + c_9 \left(\tilde{a}^3 \cdot x\right) + c_{10}.$$

Використовуємо алгоритм, описаний при доведенні достатності. Система (15) в нашому випадку набуває вигляду:

$$\begin{cases} c_1 \left(\sqrt{3}-i\right)^3 + c_2 \left(\sqrt{3}+i\right)^3 + c_3\sqrt{27} = 0, \\ c_1 \left(\sqrt{3}+i\right)^3 + c_2 \left(\sqrt{3}-i\right)^3 + c_3\sqrt{27} = 0, \\ \qquad -c_1 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Визначник Δ_3 лінійної однорідної системи (17) алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $c_1,\ c_2,\ c_3$ дорівнює нулю внаслідок приведених вище міркувань, тому система (17) має нескінченну кількість ненульових розв'язків. Наведемо один з нетривіальних наборів: $(c_1,\ c_2,\ c_3) = (1, 1, 0)$.

Далі, скористаємося співвідношенням (16) і отримаємо:

$$c_4 \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j\right)^2 + c_5 \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j\right)^2 + c_6 \left(\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j\right)^2 =$$

$$= -3 \left[\left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j\right)^2 \left(\tilde{a}^1 \cdot e^j\right) + \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j\right)^2 \left(\tilde{a}^2 \cdot e^j\right)\right].$$

Оскільки $e^j = \left(e_1^j;\ -\frac{H_1^j e_1^j + d_j}{H_2^j}\right)$, то, поклавши $e^1 = \left(1,\ 2\sqrt{3}\right)$, $e^2 = (1, 0)$, $e^3 = (-1, 0)$, запишемо систему для знаходження коефіцієнтів $c_4,\ c_5,\ c_6$:

$$\begin{cases} c_4 \cdot \left(\sqrt{3}-i\right)^2 + c_5 \cdot \left(\sqrt{3}+i\right)^2 + 3c_6 = \\ \qquad = -3\left(\left(\sqrt{3}-i\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{3}-i\right) + \left(\sqrt{3}+i\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{3}+i\right)\right), \\ c_4 \cdot \left(\sqrt{3}+i\right)^2 + c_5 \cdot \left(\sqrt{3}-i\right)^2 + 3c_6 = \\ \qquad = -3\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^2 \cdot (-i) + \left(\sqrt{3}-i\right)^2 \cdot i\right), \\ -c_4 - c_5 = 3\left(-i + i\right). \end{cases} \tag{18}$$

Неважко переконатися, що розв'язком системи (18) є набір $(c_4,\ c_5,\ c_6) = \left(0, 0, -4\sqrt{3}\right)$.

Наступну трійку коефіцієнтів $(c_7,\ c_8,\ c_9)$ визначимо із співвідношення

$$3c_1 \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^1 \cdot e^j\right)^2 + 3c_2 \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^2 \cdot e^j\right)^2 + 3c_3 \left(\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^3 \cdot e^j\right)^2 +$$

$$+2c_4 \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^1 \cdot e^j\right) + 2c_5 \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^2 \cdot e^j\right) + 2c_6 \left(\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j\right) \left(\tilde{a}^3 \cdot e^j\right) +$$

$$+c_7\left(\tilde{a}^1\cdot\tilde{H}^j\right)+c_8\left(\tilde{a}^2\cdot\tilde{H}^j\right)+c_9\left(\tilde{a}^3\cdot\tilde{H}^j\right)=0,\qquad j=1,2,3,$$

яке після підстановки знайдених скалярних добутків і значень коефіцієнтів $c_1,c_2,c_3,c_4,\ c_5,\ c_6$ перетвориться на лінійну однорідну систему:

$$\begin{cases} 3\left(\sqrt{3}-i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)^2+3\left(\sqrt{3}+i\right)\left(2\sqrt{3}+i\right)^2-48\sqrt{3}= \\ \qquad =-\left(c_7\left(\sqrt{3}-i\right)+c_8\left(\sqrt{3}+i\right)+c_9\sqrt{3}\right), \\ 3\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-i\right)^2+3\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot i^2= \\ \qquad =-\left(c_7\left(\sqrt{3}+i\right)+c_8\left(\sqrt{3}-i\right)+c_9\sqrt{3}\right), \\ -3i+3i=-\left(ic_7-ic_8\right). \end{cases}$$

Розв'язком отриманої системи є трійка $(c_7,\ c_7,\ 6-2c_7)$, де c_7 довільне, тому, поклавши для визначеності $c_7=1$, матимемо один з розв'язків наступного вигляду: $(c_7,\ c_8,\ c_9)=(1,1,4)$.

Нарешті, виходячи з рівності

$$c_1\left(\tilde{a}^1\cdot e^j\right)^3+c_2\left(\tilde{a}^2\cdot e^j\right)^3+c_3\left(\tilde{a}^3\cdot e^j\right)^3+c_4\left(\tilde{a}^1\cdot e^j\right)^2+c_5\left(\tilde{a}^2\cdot e^j\right)^2+$$

$$+c_6\left(\tilde{a}^3\cdot e^j\right)^2+c_7\left(\tilde{a}^1\cdot e^j\right)+c_8\left(\tilde{a}^2\cdot e^j\right)+c_9\left(\tilde{a}^3\cdot e^j\right)+c_{10}=0,$$

робимо висновок, що $c_{10}=0$.

Таким чином, отримано ненульовий набір коефіцієнтів

$$(c_1,c_2,c_3,\ c_4,c_5,c_6,c_7,c_8,c_9,c_{10})=\left(1,1,0,0,0,-4\sqrt{3},\ 1,1,4,0\right),$$

і побудовано нетривіальний поліноміальний розв'язок третього степеня задачі

$$Lu\equiv\left(a_1\cdot\nabla\right)\left(a_2\cdot\nabla\right)\left(a_3\cdot\nabla\right)u=0,\qquad u|_{\partial T}=0.$$

Запишемо побудований розв'язок $u\left(x\right)$ в остаточному вигляді:

$$u\left(x\right)=\left(-ix_1+x_2\right)^3+\left(ix_1+x_2\right)^3-4\sqrt{3}\left(-x_1\right)^2+\left(-ix_1+x_2\right)+$$

$$+\left(ix_1+x_2\right)-4x_1=2x_2^3-6x_1^2x_2-4\sqrt{3}x_1^2-4x_1+2x_2.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі одержано критерій порушення єдиності розв'язку однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипового диференціального рівняння в багатокутнику. Порядок рівняння співпадає з кількістю сторін багатокутника. Доведення результату базується на принципі двоїстості рівняння-область. В якості прикладу побудовано нетривіальний розв'язок задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

Список використаної літератури

1. Эскин Г. И. Общие краевые задачи для уравнений главного типа в плоскости с угловыми точками. *Успехи математических наук.* 1963. Т. 18, вып. 3. С. 241–242.
2. Фуфаев В. В. К задаче Дирихле для областей с углами. *Доклады академии наук.* 1960. Т. 131, № 1. С. 37–39.
3. Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике. *Доклады академии наук.* 1963. Т. 147, № 1. С. 13–16.
4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. *Труды Московского мат. общества.* 1967. Т. 16. С. 209–292.

5. Кириченко Е. В. О решении одной краевой задачи в многоугольнике. *Труды ИПММ.* 2007. Т. 13. С. 103–109.
6. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка. 2002. 316 с.
7. Винер И., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. Москва: Наука. 1964. 268 с.

Kyrychenko V. V., Lesina E. V. On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon.

The criterion of unique solvability of a homogeneous boundary value problem with one condition for an atypical differential equation in a polygon is obtained. The order of the equation coincides with the number of sides of the polygon. Proof of the result is based on the principle of duality equation-domain. The scheme for constructing a nontrivial solution is illustrated by the example of a problem in a triangle for a third-order differential equation.

Keywords: polygon, non-trivial solution, duality equation-domain, differential operator, homogeneous symbol.

References

1. Eskin, G. I. (1963). General boundary value problems for equations of the main type in a plane with corner points. *Advances in Mathematical Sciences, 18*(3), 241–242. [in Russian].
2. Fufayev, V. V. (1960). On the Dirichlet problem for domains with angles. *Reports of the Academy of Sciences, 131*(1), 37–39. [in Russian].
3. Volkov, E. A. (1963). On the solution of boundary value problems for the Poisson equation in a rectangle. *Reports of the Academy of Sciences, 147*(1), 13–16. [in Russian].
4. Kondratiev, V. A. (1967). Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angle points. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 16, 209–292. [in Russian].
5. Kirichenko, E. V. (2007). On the solution of a boundary value problem in a polygon. *Proceedings of the Istitute of Applied Mathematics and Mechanics*, 13, 103–109. [in Russian].
6. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations.* Kyiv: Naukova dumka. [in Russian].
7. Paley, R., & Wiener, N. (1964) *Fourier transforms in the complex domain.* Moscow: Nauka. [in Russian].

Одержано 27.01.2022