УДК 517.92
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90

**В. В. Собчук[1], І. О. Зеленська[2]**

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор технічних наук, доцент
v.v.sobchuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4002-8206

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант,
Kopchuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7784-1030

# ПОБУДОВА АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ СЗДР 4-ГО ПОРЯДКУ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ МЕТОДОМ ІСТОТНО ОСОБЛИВИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено конструктивні умови існування асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальною точкою звороту та запропоновано алгоритм побудови відповідного розв'язку. Методом істотно особливих функцій побудовано асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальною точкою звороту. Досліджено випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні елементи та елементи тотожно рівні нулеві.

**Ключові слова:** сингулярно збурені диференціальні рівняння, малий параметр, диференціальна точка звороту, функція Ейрі.

**1. Вступ.** Стрімкий розвиток природознавства вимагає постійного вдосконалення підходів до моделювання реальних фізичних процесів та явищ. Багато задач астрономії, квантової механіки описуються системами диференціальних рівнянь спеціального класу, які можна віднести до групи так званих сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Найвідомішими задачами такого роду є дослідження еволюції квантової системи в часі, що описується основним рівнянням руху нерелятивістської квантової механіки — рівнянням Шредінгера, задач механіки суцільного середовища, задач гідродинамічної стійкості, задач з класичним осцилятором тощо.

Математичні моделі цих процесів містять малий параметр біля старших похідних і саме наявність цього малого множника привело до створення великої теорії [1]. Підхід, за якого формально покласти малий параметр рівним нулю є неприйнятним, оскільки таке спрощення математичної моделі призведе до дослідження математичної конструкції, яка абсолютно не характеризує тонкі властивості початкової системи. Відтак виникає необхідність розвитку методів побудови розв'язків таких систем, які досить повно враховують особливості поведінки реальної еволюційної системи математичний опис якої містить малий параметр. Слід зауважити, що для таких систем часто характерними є хвильові явища, де одночасно в певній точці відбувається дія налітаючої та відбитої хвилі — такі точки називають точками звороту. Власне, дослідженння поведінки розв'язків диференціальних рівнянь в околі точок звороту викликають окремий інтерес. Дослідженню такого виду задач присвячений широкий спектр наукових праць [1–7].

Відомо, що починаючи з диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами, їх інтегрування в квадратурах, майже неможливе. Тому в більшості існуючих асимптотичних методах було застосовано наступну ідею: розв'язок сингулярно збуреного рівняння, яке досліджується виразити через розв'язок простіших диференціальних рівнянь, які називаються модельними диференціальними рівняннями. При дослідженні рівнянь з простою точкою звороту одним з найбільш вдалих модельних рівнянь є рівняння виду

$$U''(t) \pm tU(t) = 0,$$

які називають рівняннями Ейрі, а їх розв'язки — функціями Ейрі.

Функції Ейрі застосовуються в багатьох розділах як класичної, так і квантової фізики. Це пов'язано з тим, що для рівнянь з точками звороту асимптотичні розв'язки є експоненціальними з одного боку та коливальними з іншого. Функції Ейрі є рівномірними наближеннями, область дії яких включає точку звороту та її околі. У класичній фізиці вони займають важливе місце в оптиці, електромагнетизмі, передачі випромінювання, механіці рідини та нелінійному поширенні хвиль. У гідродинаміці функції Ейрі широко застосовуються при дослідженні стійкості двовимірної в'язкої рідини для якої течія регулюється рівнянням Орра–Зоммерфельда (диференціальне рівняння четвертого порядку). Побудова асимптотичних наближень, які є рівномірно дійсними розв'язками цього рівняння в околі точок звороту, призводить (після вибору розв'язних рівнянь з подібними асимптотичними властивостями) до функцій Ейрі. Також їх застосування має місце при вивченні стійкості потоку Куетта нев'язкої рідини. Зауважимо, що значний інтерес викликають задачі про гідродинамічну стійкість паралельних течій у теорії продовжно-поперечного згину пружної балки та інших схожих прикладних задач. Так, лінійна задача про стійкість паралельної течії приводить до дослідження рівняння

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^4\psi(x) - i\alpha R\left[(\omega(x)-c)\left(\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi(x)\right) - \frac{d^2\omega}{dx^2}\right] = 0, \quad (1)$$

яке називають рівнянням Орра-Зоммерфельда [див. [1]].

**Означення 1.** *Точка $x_0$ в якій множник $\omega(x) - c$ обертається в нуль називається точкою звороту для рівняння (1).*

Теорія та практика вимагають вивчення розв'язку рівняння (1) в околі точки звороту, включаючи і саму точку звороту. Виходячи з фізичних міркувань множник $\alpha R$, де $R$ — число Рейнольдса, є досить великим. Тому ввівши в розгляд малий параметр це рівняння можна звести до сингулярно збуреного диференціального рівняння з точкою звороту біля другої похідної, тобто до рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x,\varepsilon) + a(x)y^{(2)}(x,\varepsilon) + b(x)y'(x,\varepsilon) + c(x)y(x,\varepsilon) = h(x). \quad (2)$$

Розглянемо узагальнену методику побудови рівномірної асимптотики для сингулярно збурених рівнянь певного класу.

**2. Постановка задачі.** Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР):

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{3}$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [-l, 0]$, $Y(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon), y_4(x,\varepsilon))$ — шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0,0,0,h(x))$ — задана вектор-функція,

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

відома матриця, елементи якої $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — нескінченно диференційовні функції на відрізку $[0;\ l]$.

Систему рівнянь (3), яка відповідає скалярному рівнянню (2), будемо досліджувати за умови, що

$$\tilde{a}(x) > 0, \qquad b(x) < 0, \qquad c(x) > 0. \tag{4}$$

У векторному рівнянні (3) покладемо $\varepsilon = 0$, тоді одержимо вироджену систему

$$-A(x,0)Y(x,0) = H(x), \tag{5}$$

де матриця $A(x,0)$ прийме вигляд

$$A(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Вироджене рівняння у скалярному вигляді запишеться так

$$-x\tilde{a}(x)\omega''(x) + b(x)\omega'(x) + c(x)\omega(x) = h(x). \tag{6}$$

Зауважимо, що умови (4) забезпечать існування достатньо гладкого розв'язку (5). Відтак характеристичне рівняння для задачі (3) запишемо у вигляді

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 + a(x)) = 0.$$

Тоді коренями характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

**Означення 2.** *Точка $x_0$, в якій множник $x\tilde{a}(x)$ в диференціальному рівнянні (6) обертається в нуль називається диференціальною точкою звороту для рівння (6).*

Також слід зазначити, що в даній задачі точка звороту знаходиться біля старшої (другої) похідної. Тому, використовуючи цю особливість будемо її відрязняти від тієї, що вивчались в роботах [8]

$$-x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x),$$

для рівнянь третього порядку.

**Означення 3.** *Точка $x_0$, в якій множник $x\tilde{a}(x)$ в диференціальному рівнянні 2-го порядку (6) обертається в нуль називається диференціальною точкою звороту II роду.*

Слід зазначити, що коли маємо справу з виродженими диференціальними рівняннями 1-го порядку, для яких множник перед першою похідною перетворюється в нуль, то точки звороту для таких рівнянь називають точками звороту 1-го роду. Наприклад, це характерно для задач коли замість рівняння (2) вивчаємо рівняння третього порядку.

**3. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь.** Особлива точка $\varepsilon = 0$ в заданій системі породжує певні особливості, які будемо називати істотно особливі функції (ІОФ). З метою виділення всіх ІОФ введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$, де показник $p$ і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Згідно з методом регуляризації істотно особливих функцій [1], задачу будемо вивчати за умови

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{1-p}\cdot\varphi(x)} \equiv y(x,\varepsilon).$$

Підставимо розширену функцію і її похідну у векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi' \frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x). \tag{7}$$

**4. Простір безрезонансних розв'язків.** Опишемо простір функцій, в якому можна буде побудувати рівномірний асимптотичний розв'язок розширеної задачі (3). Розглянемо підпростори функцій

$$R_{1r} = \alpha_{1r}(x)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1r}(x)U_k'(t)),$$

$$R_{2r} = \alpha_{2r}(x)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2r}(x)U_k'(t)),$$

$$R_{3r} = f_r(x)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_r(x)\psi'(t)),$$

$$R_{4r} = \omega_r(x),$$

де $\alpha_{kr}(x), \beta_{kr}(x), f_r(x), g_r(x), \omega_r x \in C^\infty[0,l]$, $k = 1,2$. З цих підпросторів одержимо новий простір як пряму суму

$$R_r = \bigoplus_{k=1}^{4} R_{kr}.$$

Зазначимо, що $(\alpha_j(x,\varepsilon)U_k(t))$ і $(\varepsilon^\gamma \beta_j(x,\varepsilon)U_k'(t))$ є розв'язками однорідного векторного рівняння (7). При цьому, аналітичні функції $\alpha(x,\varepsilon)$ і $\beta(x,\varepsilon)$ залежать від малого параметра $\varepsilon > 0$ і нескінченно диференційовні по змінній

$x \in [0;l]$. Функції $U_k(t)$ — це функції Ейрі-Дородніцина [1]. Функція $\psi(t)$, її похідна та функція $\omega(x,\varepsilon)$ використовуються для побудови асимптотики частинного розв'язку (3).

ІОФ $\psi(t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$U''(t) + tU(t) = 1,$$

тобто

$$\psi(t) = \int\limits_t^{+\infty} [U_2(t) \cdot U_1(\tau) - U_1(t) \cdot U_2(\tau)]d\tau.$$

**5. Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.** Зазначимо, що в [1] описано метод регуляризації істотно особливих функцій для побудови асимптотичного розв'язку рівняння Ліувілля з різними точками звороту. Даний підхід можна модифікувати для побудови асимптотичних розв'язків для рівнянь четвертого порядку типу (2). Відтак, така модифікація методу істотно особливих функцій для визначення регуляризуючої функції дозволяє визначити показник $p$ і функцію $\varphi(x)$. Для цього подієво розширеним оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи простору $R_{1r}$ та $R_{2r}$ і підставимо результат в однорідне розширене рівняння:

$$\tilde{L}_\varepsilon \left(\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\right) = \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_k'(t) -$$

$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_k(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) -$$

$$-\varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon)\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t) + \varepsilon\alpha_k'(x)U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta_k'(x)U_k'(t) = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при ІОФ $U_k(t)$ в отриманій системі ($k = 1, 2$):

$$U_k'(t) : \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^\gamma[A_0(x) + \varepsilon A_1]\beta_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta_k'(x,\varepsilon), \tag{8}$$

$$U_k(t) : \varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1]\alpha_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha_k'(x,\varepsilon). \tag{9}$$

Будемо вимагати, щоб отримані алгебраїчні системи (8) і (9) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для цього, на невизначені до цього $p$ і $\gamma$ накладемо умови:

$$1 - p = \gamma, \qquad 1 + \gamma - 2p = 0.$$

З цих рівнянь однозначно визначимо:

$$p = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}.$$

В результаті отримаємо систему:

$$U_k'(t) : \alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - A_0(x)\beta_k(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_k'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\beta_k(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$U_k(t) : \beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + A_0(x)\alpha_k(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_k'(x,\varepsilon) - \mu^3 A_1\alpha_k(x,\varepsilon), \tag{11}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

Векторні рівняння (10) і (11) запишемо у вигляді такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k2}(x,\varepsilon) - \beta'_{k1}(x,\varepsilon)], \\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k3}(x,\varepsilon) - \beta'_{k2}(x,\varepsilon)], \\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \beta_{k4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{k3}(x,\varepsilon), \\ \alpha_{k4}(x,\varepsilon)\varphi'(x) + c(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon) + \\ \qquad\qquad + a(x)\beta_{k3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{k4}(x,\varepsilon), \\ \beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha'_{k1}(x,\varepsilon) - \alpha_{k2}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha'_{k2}(x,\varepsilon) - \alpha_{k3}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + \alpha_{k4}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{k3}(x,\varepsilon), \\ \beta_{k4}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - c(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon) - b(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon) - \\ \qquad\qquad - a(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{k4}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{12}$$

Відтак, ми отримали регулярно збурену відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ систему алгебраїчних рівнянь (12), що власне ілюструє проведену нами регуляризацію системи (3).

**6. Побудова формальних розв'язків однорідної системи.** Для побудови розв'язку однорідної (3) з однозначно визначеними показниками $p = \frac{2}{3}$ і $\gamma = \frac{1}{3}$ знайдемо всі невідомі системи (12) у вигляді таких рядів вектор-функцій:

$$\alpha_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{kr}(x), \qquad \beta_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{kr}(x). \tag{13}$$

Виконаємо підстановку цих рядів у (12), тоді для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{kr} = colomn(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x)),$$

$$\beta_{kr}(x) = colomn(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)),$$

одержимо такі рекурентні системи:

$$\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0, \qquad r = \overline{0;2}, \qquad \Phi(x)Z_{kr}(x) = FZ_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3, \tag{14}$$

де

$$Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x), \beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)),$$

а $\Phi(x) =$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(x) & c(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

$FZ_{k(r-3)} =$

$$= colomn\begin{pmatrix} (\beta_{k2(r-3)}(x)-\beta'_{k1(r-3)}(x)), & (\beta_{k3(r-3)}(x)-\beta'_{k2(r-3)}(x)), & -\beta'_{k3(r-3)}(x), & -\beta'_{k4(r-3)}(x) \\ (\alpha_{k2(r-3)}(x)-\alpha'_{k1(r-3)}(x)), & (\alpha_{k3(r-3)}(x)-\alpha'_{k2(r-3)}(x)), & -\alpha'_{k3(r-3)}(x), & -\alpha'_{k4(r-3)}(x) \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\det\Phi(x) = \varphi'^2[\varphi(x)\varphi_2'(x)]^2\cdot[\varphi(x)\varphi'^2(x)-a(x)]^2 = 0.$$

До цього часу регуляризуюча функція $\varphi(x)$ не визначена. Тому, визначимо її як розв'язок задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x)\equiv x\tilde{a}, \qquad \varphi(0)=0, \tag{15}$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x)Z_{kr} = 0$, коли $r=\overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0,0,\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k4r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{k3r}(x), 0, 0, \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)\right), \tag{16}$$

де $\beta_{ik0}(x)$, $k=1;2$, $i=\overline{1;4}$ — довільні, достатньо гладкі функції коли $x\in[0;l]$.

На наступному кроці розв'яжемо неоднорідні системи (14). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r=3$. З урахуванням отриманого розв'язку (16), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x)-\beta'_{k10}(x)\equiv\beta_{k20}(x)\equiv 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) = \beta_{k30}(x)-\beta'_{k20}(x)\equiv\beta_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)-\beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x)+c(x)\beta_{k13}(x)+b(x)\beta_{k23}(x)+a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x), \end{cases} \tag{17}$$

і

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = \alpha'_{k10}(x)-\alpha_{k20}(x)\equiv -\alpha_{k20}(x)\equiv 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \alpha'_{k20}(x)-\alpha_{k30}(x)\equiv -\alpha_{k30}(x)\equiv -[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)+\alpha_{k43}(x) = \alpha'_{k30}(x)\equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x)-c(x)\alpha_{k13}(x)-b(x)\alpha_{k23}(x)-a(x)\alpha_{k33}(x) = \alpha'_{k40}, \end{cases} \tag{18}$$

де $\alpha'_{k40}\equiv(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30})'$.

З першого і другого рівнянь систем (17) та (18) визначимо функції $\alpha_{k13}\equiv 0$, $\beta_{k13}\equiv 0$ і $\alpha_{k23}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$ і $\beta_{k23}(x) = -[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)$. Тоді системи (17) і (18) перейдуть в системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)-\beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ -a(x)\alpha_{k33}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x) = \\ \qquad = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x))+b(x)[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}, \end{cases} \tag{19}$$

і

$$\begin{cases} \alpha_{k43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = \alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x) + a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}\beta_{k40}(x). \end{cases} \tag{20}$$

Обчислимо ранги матриць цих систем

$$\left( \begin{array}{cc|c} \varphi'(x) & -1 & -\beta'_{k30}(x) \\ -a(x) & \varphi(x)\varphi'(x) & (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x))' - \frac{b(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k30} \end{array} \right), \tag{21}$$

і

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \varphi(x)\varphi'(x) & [\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)}]' \\ \varphi'(x) & a(x) & -\beta'_{k40}(x) - \frac{b(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}\beta_{k40}(x) \end{array} \right). \tag{22}$$

Дослідимо праві частини (21) і (22). За умови, що

$$-2a(x)\beta'_{k30}(x) + [b(x) - (a(x))']\beta_{k30}(x) = 0,$$

для системи (19) та

$$([\varphi'(x)]^{-1} - 1)\beta'_{k40}(x) + \left[\frac{b(x)}{a(x)} - 1\right]\beta_{k40}(x) = 0, \tag{23}$$

для системи (21) існує нескінченна множина розв'язків.

Для виконання вище вказаних умов використаємо довільність функцій $\beta_{ks0}(x) = \beta^0_{k30} \cdot \beta_{k30}(x)$, $k = 1; 2$, $s = 2; 3$, де $\beta^0_{ks0}(x)$ — довільні сталі, $\widetilde{\beta}_{ks0}(x)$ — частинні достатньо гладкі $x \in [0; l]$, розв'язки однорідних систем (19) і (20). При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем (19) і (20) виду

$$Z_{k3}(x) = \\ = colomn \left( \begin{array}{l} 0; [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x); \frac{\beta_{k43}(x) - \beta'_{k30}(x)}{\varphi'(x)}; (\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)})' - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33} \\ 0; -\beta_{k40}(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]; \beta_{k33}(x); \beta_{k43}(x) \end{array} \right). \tag{24}$$

Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (19) і (20), можна показати, що існують лінійно незалежні розв'язки однорідної системи (3) вигляду

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x, \varepsilon)U'_k(t)], \qquad k = 1; 2, \tag{25}$$

де $\alpha_{kr}$ і $\beta_{kr}(x)$ — відомі вектор-функції вигляду

$$\alpha_{kr} = colomn(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x)),$$

$$\beta_{kr}(x) = colomn(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)).$$

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ для $k = 1; 2$ запишемо так

$$D_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{kr}(x)U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x, \varepsilon)U'_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))\right]. \tag{26}$$

**7. Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи.** Дослідимо дію розширеного оператора (7) на елемент простору $f(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{\gamma} g(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega(x,\varepsilon)$. В результаті отримаємо наступні векторні рівняння:

$$\psi'(t) : \varphi'(x)f(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]g(x,\varepsilon) = -\mu^3 g'(x,\varepsilon), \tag{27}$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x)g(x,\varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1]f(x,\varepsilon) = -\mu^3 f'(x,\varepsilon), \tag{28}$$

$$\mu^3\omega'(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\omega(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x)g(x,\varepsilon) = h(x). \tag{29}$$

Рівняння (27) і (28) структурно аналогічні з (17) і (18). Але скористатися прямими результатами попереднього параграфа ми не можемо, оскільки не отримаємо бажаних результатів для системи (29).

Для побудови гладкого розв'язку системи (29) асимптотику розв'язку (27) і (28) побудуємо у вигляді рядів:

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r f_r(x), \qquad g(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r g_r(x), \qquad \omega(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_r(x). \tag{30}$$

Для визначення вектор-функцій $f_r = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x))$ і $g_r(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x))$ отримаємо рекурентні системи рівнянь

$$\Phi(x)Z_0^{\text{част.}}(x) = 0, \qquad r = 0;1;2, \qquad \Phi(x)Z_r^{\text{част.}}(x) = -Z_{r-3}^{\text{част.}}(x), \qquad r \geq 1. \tag{31}$$

$$Z_r^{\text{част.}}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x)).$$

Дослідженння проведемо схематично, з урахуванням результатів попереднього параграфа. Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$ , існує нетривіальний розв'язок систем (31)

$$Z_{kr}(x) = colomn\left(0, 0, \frac{1}{\varphi'(x)}g_{3r}(x), -\varphi\varphi'(x)g_{4r}(x), 0, 0, g_{3r}(x), g_{4r}(x)\right), \tag{32}$$

де $g_{0i}(x), i = \overline{1;4}$ — достатньо гладкі функції, $x \in [0;l]$.

Повторюючи міркування наведені в пункті 6, отримаємо дві рекурентні системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{33}(x) - g_{43}(x) = -g'_{30}(x), \\ -a(x)f_{33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{43}(x) = \\ \qquad\qquad = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)g_{30}(x)) + b(x)[\varphi'(x)]^{-1}g_{30}(x), \end{cases} \tag{33}$$

і

$$\begin{cases} f_{43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{33}(x) = f'_{30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}g_{40}(x)), \\ \varphi'(x)f_{43}(x) + a(x)g_{k33}(x) = -g'_{40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}g_{40}(x). \end{cases} \tag{34}$$

З огляду на (19) і (20) будемо вимагати виконання умов теореми Кронекера-Капеллі для обчислення рангів матриць для систем (33) і (34). Тобто продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (33) і (34), можемо показати, що ці системи асимптотично коректні в такому сенсі: якщо вимагати існування розв'язків систем (33) і (34) коли $r = \overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0;q-1}$, визначається з точністю до констант $g^0_{3r}(x)$ і $g^0_{4r}(x)$, які утворюють вектор $g^0_r(x) = colomn(0, 0, g^0_{3r}(x), g^0_{4r}(x))$.

Після цього залишається дослідити асимптотику розв'язку системи (29), яку побудуємо у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \tag{35}$$

де

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colomn\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{4r}(x)\right).$$

Підставимо (35) в рівняння (29) отримаємо рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{gathered} -A_0(x)\omega_0(x) = h(x), \qquad -A_0(x)\omega_1(x) = 0, \qquad r = 1, \\ -A_0(x)\omega_2(x) = -\varphi'(x)g_0(x), \qquad r = 2, \\ -A_1\omega_0(x) - A_0(x)\omega_r(x) = -\varphi'(x)g_{r-2}(x) - \omega'_{r-3}(x). \end{gathered} \tag{36}$$

Дослідимо (36) коли $r = 0$. Для цього спочатку обчислимо праву частину:

$$\begin{cases} \omega_{40}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{10}(x) + b(x)\omega_{20}(x) + a(x)\omega_{30}(x) = h(x). \end{cases} \tag{37}$$

Якщо $\omega_{20}(x)$ і $\omega_{30}(x)$ вибрати як довільні множники, то існують достатньо гладкі розв'язки системи (37):

$$\omega_0 = \left(\frac{h(x) - b(x)\omega_{20}(x) - a(x)\omega_{30}(x)}{c(x)}; \omega_{20}(x); \omega_{20}(x); 0\right).$$

Коли $r = 1$ отримаємо систему

$$\begin{cases} \omega_{41}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases} \tag{38}$$

розв'язок якої записується у вигляді

$$\omega_1 = \left(\frac{-b(x)\omega_{21}(x) - a(x)\omega_{31}(x)}{c(x)}; \omega_{21}(x); \omega_{21}(x); 0\right).$$

Коли $r = 2$ отримаємо

$$\begin{cases} \varphi'(x)g_{10}(x) = 0, \\ \varphi'(x)g_{20}(x) = 0, \\ \omega_{41}(x) + \varphi'(x)g_{30}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases} \tag{39}$$

розв'язок якої записується у вигляді

$$\omega_2 = \left( \frac{-b(x)\omega_{22}(x) - a(x)\omega_{32}(x)}{c(x)}; \omega_{22}(x); \omega_{22}(x); -\varphi'(x) g_{30}(x) \right).$$

Тоді при $r \geq 3$ зможемо однозначно визначити функції $\omega_{20}(x)$ та $\omega_{30}(x)$, а це означає, що кожна з функцій $\omega_0$ визначена з точністю до довільних сталих множників $\omega_{20}^0$ і $\omega_{30}^0$.

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ \sum_{k=1}^{2} \left[ \alpha_{kr}(x) U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{kr}(x) \frac{dU_k(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] \right] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ f_r(x) \psi(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x) \frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \qquad (40)$$

є формальним розв'язком системи (3).

Таким способом доведена теорема

**Теорема 1.** *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (3) задовольняє умови:*

*1)* $\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0, \quad c(x) > 0$*;*

*2)* $H(x) \in C^{\infty}[0; l]$*.*

*Тоді на відрізку* $[0; l]$ *методом істотно особливих функцій можно побудувати асимптотику розв'язку системи (3) з диференціальною точкою звороту у вигляді асимптотичного ряда*

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon) + f(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{\gamma} g(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega(x,\varepsilon),$$

*коефіцієнти якого є достатньо гладкими функціями на відрізку* $[0; l]$*.*

**8. Алгоритм побудови асимптотики розв'язку системи.** Побудова асимптотики розв'язку для сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальними точками звороту у відповідності з логікою доведеної теореми 1 може бути записана у вигляді чіткого алгоритму. Цей алгоритм представляє собою чітку поетапну послідовність розв'язання серії задач. Для цього, розвиваючи та поширюючи ідеї методу істотно особливих функцій на дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку у векторній формі з диференціальною точкою звороту, потрібно послідовно виконати низку кроків.

**І крок**. *Розширення сингулярно збуреної задачі.* В сингулярно збуреній системі з точкою звороту поряд із незалежною змінною $x$ вводиться нова векторзмінна $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція" $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y(x,\varepsilon),$$

$p$ і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з одніє змінною, до задачі з двома змінними $t$ і $x$.

**II крок**. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій, цей простір називають *простором безрезонансних розв'язків* і для кожної кокретної задачі цей простір має свою специфіку.

$$\sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon), f_k(x,\varepsilon)\psi(t), \varepsilon^{\gamma} g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \omega_k(x,\varepsilon)$$

**III крок**. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.* Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у яке малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно.

**IV крок**. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно-збуреною відносно малого параметра в ПБР, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\mu) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y(x), \tag{41}$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$ — малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$. Підставивши ряд (41) в систему (7), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь з точковими початковими чи крайовими умовами.

**V крок**. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Отримані в попередньому пункті рекурентні рівняння для визначення коефіцієнтів ряду (41) є рівняннями в частинних похідних з точковими крайовими умовами. Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР $D_k$. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$—матриця системи (7), $Z_{kr}(x)$—вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x,\varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної досліджуваної задачі.

**VI етап**. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* В цьому розділі будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ — матриця системи (7), $Z_{kr}(x)$ — вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x,\varepsilon)$.

**9. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Таким способом в роботі отримано конструктивні умови існування асимптотики розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння четвертого порядку. Використовуючи метод істотно особливих функцій та модифікувавши його для систем четвертого порядку з диференціальною точкою звороту II роду, побудовано асимптотику розв'язку для системи (3) у вигляді асимптотичного ряду (40). Показано, що побудова асимптотичного ряду системи (3) методом істотно особливих функцій може бути записана у вигляді алгоритму. Аналогічний підхід в майбутньому планується для досліджень та побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених рівнянь у векторній формі інших класів.

**Sobchuk V. V., Zelenska I. O.** Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of essentially singular functions.

Constructive conditions for the existence of the asymptotics of the solution of the system of singularly perturbed differential equations of the fourth order with a differential turning point are established and an algorithm for constructing the corresponding solution is proposed. The asymptotics of the solution of the system of singularly perturbed differential equations of the fourth order with a differential turning point is constructed by the method of significantly singular functions. We studied the case when the spectrum of the limit operator contains multiple elements and elements that are identically equal to zero.

**Keywords:** singularly perturbed differential equations, small parameter, differential turning point, Airy function.

## References

1. Bobochko, V. M., & Perestiuk, M. O. (2002). *Asymptotychne intehruvannia rivniannia Liuvillia z tochkamy zvorotu.* [Asymptotic integration of the Liouville equation with inflection points]. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
2. Langer, R. (1955). The solutions of the differential equation: $y''' + \lambda^2 zy' + 3\mu\lambda^2 y = 0$. *Duke. Math. J.,* 23, 525–542. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-55-02259-6
3. Lin, C. C. (1958). *On the Instability of Laminar Flow and its Transition to Turbulence. In: Görtler, H. (eds) Grenzschichtforschung, Boundary Layer Reserch.* Berlin: Springer-Verlag OHG.
4. Nakano, M., & Nishimoto, T. (1971). On an asymptotic expansion of solutions of ORR-sommerfeld type equation. *Lecture Notes in Mathematics,* 243, 315–319. Retrieved from: http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0058749
5. Nishimoto, T. (1968). A Turning Point Problem of an $n^{th}$ Order Differential Equation of Hydrodynamic Type. *Kodai. Math. Sem. Rep.,* 20, 315–319. https://doi.org/10.2996/kmj/1138845646
6. Nijimbere, V. (2019). Asymptotic approximation of the eigenvalues and the eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld on infinite intervals. *Advances in Pure Mathematics,* 9(12), 967–989. https://doi.org/10.4236/apm.2019.912049
7. Wasow, W. (1953). Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containig a transition point. *Ann. Math,* 58, 222–252. https://doi.org/10.2307/1969787
8. Zelenska, I. (2015). The system of singular perturbed differential equations with turning point of the first order.*Izvestiya vuzov. Matematika,* 3, 63–74. Retrieved from: http://www.mathnet.ru/links/543182a9337fbc69be51a352427e50d6/ivm8983.pdf

Одержано 15.10.2022