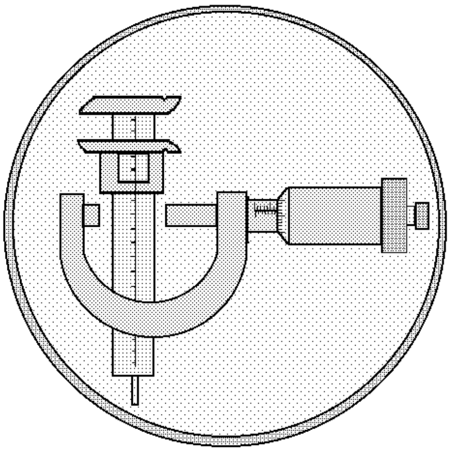
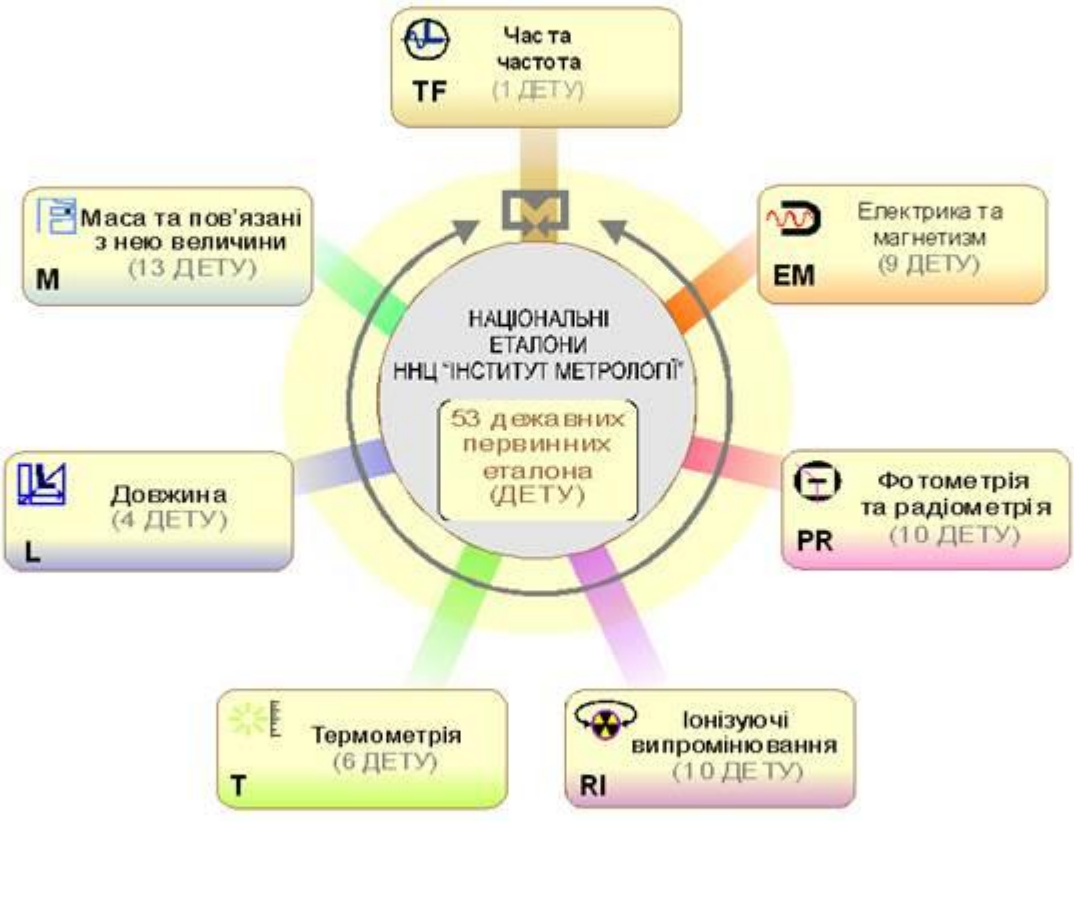


Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Основи метрології та стандартизації

(цикл лекційних і практичних занять)



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Основи метрології та стандартизації

(цикл лекційних і практичних занять)

УЖГОРОД
ТОВ "РІК-У"
2020

УДК 006.91(075.8)
Ж75

Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Ж 75 Основи метрології та стандартизації. Цикл лекційних і практичних занять. Навчально-методичний посібник. – Ужгород: ТОВ “РІК-У“, 2020. – 280 с.
ISBN 978-617-7868-31-5

Навчально-методичний посібник складається з трьох частин. Перша частина, як лекційна, містить 10 тем і присвячена основам метрології. В ній викладено відомості про становлення та розвиток одиниць фізичних величин і метричної системи одиниць, визначення основних одиниць СІ та еталонів цих одиниць у їх історичному уточненні. Розглянуті питання метрологічної класифікації видів і методів вимірювання, засобів вимірювання, їх характеристики та визначення похибок вимірювань, також, елементи теорії ймовірності та основні поняття теорії випадкових похибок, функції розподілів похибок вимірювання фізичних величин. У другій частини, яка є також лекційною, викладено відомості про теоретичні і організаційні основи стандартизації. Третя частина присвячення практичним заняттям на базі лекційного матеріалу і стосується обробки даних вимірювань (прямих і посередніх, рівноточних і нерівноточних, багатократних і одноразових) з метою знаходження результату вимірювання та його похибки. Вона розбита на 9 тем, кожна з яких включає комплекс завдань і задач, розв’язок яких детально пояснюється, та завдання для контролю і самостійного розв’язку.

Для студентів, які навчаються за такими напрямами підготовки фахівців, як “Автоматизація і приладобудування”, “Хімічна та біоінженерія”, іншими технічними та інженерними спеціальностями.

Рецензенти:

Студеняк І.П., доктор фіз.-мат. наук, професор, ДВНЗ “Ужгородський національний університет”, кафедра прикладної фізики;

Тягур Ю.І. кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співробітник, доцент кафедри приладобудування, ДВНЗ “УжНУ”, інженерно-технічний факультет;

Конопльов О.М. кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співробітник, доцент кафедри квантової електроніки, ДВНЗ “УжНУ”, фізичний факультет.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ “Ужгородський національний університет” (протокол № 6 від 17 вересня 2020 року);
редакційно-видавничою радою ДВНЗ “УжНУ” (протокол № 4 від 16.09.20)

ISBN 978-617-7868-31-5

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник написаний відповідно до програм навчальних дисциплін “Метрологія” та “Основи метрології і стандартизації”, що вивчається на 1-му курсі фізичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” у відповідності до освітньо-професійних програм підготовки фахівців за спеціальністю “мікро- та наносистемна техніка” і “біомедична інженерія” інженерно-технічних спеціальностей. Він містить розподілений на 12 тем навчально-методичний матеріал зібраний для проведення лекційних занять і 9 тем практичних занять, які повинні допомогти студентам оволодіти відповідними курсами навчання. Практична частина включає комплекс завдань і задач, розв’язок яких детально пояснюється, та завдання для самостійного розв’язку.

Це навчально-методичне видання має за мету ознайомити студентів з системами одиниць фізичних величин, правилами їх написання та застосування, з основними принципами точних вимірювань фізичних величин, сучасною еталонною базою і системою забезпечення єдності вимірювань та способами досягнення необхідної їх точності; методами обробки результатів вимірів фізичних величин та оцінки їх похибок; ознайомити студентів з видами та об’єктами стандартизації, системами та видами стандартів в Україні. Разом з загальними темами метрології у структуру лекційних і практичних занять включені додаткові питання, які враховують специфіку спеціальності.

Автори сподіваються, що ця тематична збірка лекційних і практичних занять-завдань допоможе студентам – майбутнім інженерам та дослідникам в галузі біомедичної інженерії, новітніх технологій, фізичної та біомедичної електроніки – краще засвоїти програму зазначеної дисципліни та буде сприяти формуванню у них комплексу знань і навичок, необхідних для обґрунтованого вибору методу та засобу вимірювання при вирішенні конкретної вимірної задачі та оцінки їх точності і похибок, що особливо важливо при застосуванні складної сучасної апаратури з використанням мікро- та наноелектроніки.

Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Основи метрології та стандартизації

(цикл лекційних і практичних занять)

Частина 1. Основи метрології. Теми лекційних занять.

Тема 1. Вступ у метрологію. Роль вимірювань у суспільстві і пізнанні світу

Фізична величина. Розмір, числове значення та одиниця вимірювання фізичної величини. Основне рівняння вимірювання. Етапи розвитку мір. Короткий історичний нарис розвитку неметричної системи мір.

Виміри мають давнє походження. Першими вимірами були: вимірювання (вірніше – визначення) часу (для організації сільськогосподарських робіт), площ і відстаней (при обробці землі, місць полювання), виміри об'єму і ваги, кутів різних геометричних тіл і фігур (при будівництві).

Вимірювання були досить примітивні: більше-менше і тому подібне. За одиницю виміру часто приймались розміри та вага власного тіла людини: довжина ліктя, ступні, витягнутими руками, віддаль між кінцями великого і малого пальців руки. Більші віддалі: відстань кинутого спису, пройденого за день (або інший час, виходячи з положення на небі сонця, місяця, зірок) шляху. Ці одиниці відтворювалися предметами (мірами) і використовувалися для відповідних вимірів відстані, ваги, об'єму.

Найбільше розповсюдження одиниці і міри одержали в найстарших культурних країнах: Китаї, Єгипті, Вавилоні. Так, у Вавилоні біло прийнято, що доба містить 24 години, в годині – 60 хвилин, а у хвилині – 60 секунд. Вавилонські міри (була й така, як талант – міра ваги і грошова одиниця) перейшли в стародавні Грецію, Рим, а звідтам, пізніше, з розвитком торгівлі і відносин, грецькі та римські міри починають застосовуватись далі у Європі. До середніх віків виміри обмежувались визначенням часу, геометричних розмірів і ваги.

У XIV-XVI сторіччях почався бурхливий розвиток наук, мистецтва, архітектури. Виникла необхідність (у наукових цілях, будівництві) вимірювати і інші величини. Так, у XVII ст. з'явились барометри, гігрометри, манометри. У XVIII ст. – динамометри, колориметри, почали вимірювати деякі світлові величини. Були побудовані парові двигуни і виникло поняття механічної роботи і потужності, тому виникла необхідність у побудові одиниць для вимірювання цих фізичних величин (пудофунт, кінська сила). В середині XIX ст. почали вимірювати електричні величини. У період кінець XIX початок XX століть були відкриті нові фізичні явища і виникли нові види вимірювань: в області оптичних і рентгенівських явищ, радіоактивності, молекулярної і атомної фізики.

На даний час не існує жодної області знання, де вимірювання не відігравали би величезної ролі як у кількісному, так і в якісному пізнавальному значенні. Вимірювання кількості характеризують оточуючий матеріальний світ, розкриваючи діючі в ньому закономірності. Про це образно висловився засновник російської метрології Д.І. Менделєєв: "Наука починається відтоді, як починають вимірювати", а його сучасник російський вчений В.С. Якобі записав: "Мистецтво вимірювання є могутньою зброєю, яку створив людський розум для проникнення у закони природи і підкорення її сил нашому пануванню". Щодо великої ролі метрології у пізнанні навколишнього світу свідчить і висловлювання засновника англійської метрології Томсона: "Кожна річ відома в тому ступені, в якому її можна виміряти".

Вимірювання служать для пізнання природи: точність вимірів – це шлях до відкриття, збереженню точних знань. З кожним роком роль і значення вимірювань зростає. З розвитком науки і техніки старі вимірювання замінюють новими. Точність вимірювань неодноразово давала можливість зробити фундаментальні відкриття або підтвердити гіпотези. Ось деякі приклади.

1. Інтерференційні вимірювання Майкельсона і Фізо швидкості світла у рухомому і нерухомому середовищах призвели до створення теорії відносності – нового представлення про час і простір.

2. $\Delta E=\Delta mc^2$: в хімічних реакціях відбувається поглинання або виділення енергії, отже, закон збереження речовини (маси), який встановили Ломоносов і Лавуазьє, дещо невірний. За сучасного розвитку вимірної техніки це відхилення вже можливо виявити в ядерних реакціях і підтвердити формулу Ейнштейна.

3. Підвищення точності вимірювання густини води привело у 1932 році до відкриття важкого ізотопу водню – дейтерію, надзвичайно малий вміст якого у воді трохи збільшував її густину.

4. Точність вимірювання орбіт планет Сонячної системи привели до відкриття зовнішньої планети – Плутона.

5. Сучасним уявлення про Всесвіт ми зобов’язані тим вимірам, які роблять в астрономії, їх точності (або неточності): вміння на сучасному етапі вимірної техніки точно виміряти густину матерії у Всесвіті (масу видимого Всесвіту) дасть можливість сказати про характер і час розширення Всесвіту – вічне чи періодичне.

6. Вимірювання, що здійснюються у виробництві і різного роду господарствах:

а) на теплових електростанціях при контролі вологості вугілля: збільшення вологості вугілля на 1 % від номінального понижує теплоту його згорання на (1,2-1,3) % (відповідно, веде до перевитрат вугілля на таку ж кількість, що, наприклад, еквівалентно втратам до 10 млн. тонн (10^9 кг) у рік від усього видобутку його у Радянському Союзі у 1980 році).

б) неточність у виготовлення підшипників (не точно налагоджені станок, інструментарій, вимірні прилади і пристрої) призводить до передчасного зносу і порчі різних механізмів.

в) активний контроль і підтримування температури і вологості (у встановлених межах) у сховищах с/г продукції знижує втрати зерна на (1-3) %, картоплі на (6-16) %, капусти на 20 %.

Таким чином, наука про вимірювання має велике значення і їй притаманні великі резерви, використання яких є одною з вирішальних умов здійснення наукового-технічного прогресу та збереження ресурсів країни. Але й прогрес впливає на метрологічну науку: виникають нові фізичні величини або нові діапазони зміни старих. Галілею приписують вислів: "Вимірювати, що вимірюється, робити вимірним те, що ще не є вимірним".

Число величин, які піддаються кількісному вимірюванню, збільшилося в багато разів у порівнянні навіть з недалеким минулим. З’явилось багато нових дуже складних засобів вимірювання (ІЧ-спектрометри, хроматографи, мас-спектрометри, електронні і тунельні мікроскопи і багато інших). Розширюється діапазон вимірювання всіх фізичних величин. Якщо 40-50 років назад існувала практична необхідність вимірювати температуру до 10000 К, а тиску від 10^{-3} до 10^9 Па, то зараз, з освоєнням космосу, плазми, нових матеріалів, виникла необхідність робити виміри температури до декількох мільйонів градусів і тиску від 10^{-14} до 10^{12} Па. Отже, необхідно винаходити нові засоби вимірювання, розвивати метрологічну базу.

При вирішенні кожної великої наукової або суспільної проблеми об’єднуються і спільно використовуються до декількох мільйонів результатів вимірювань, виконаних в різних місцях, в різний час, різноманітними приладами. Таке сумісне використання результатів множини вимірів можливе лише за умови їх повного зіставлення і відтворення.

Для цього необхідно ввести певні, зрозумілі всім, розміри одиниць фізичних величин і методи вимірювання фізичних величин. Необхідна була система мір, або по сучасному, система одиниць фізичних величин.

Фізична величина (ФВ) – це властивість, якісно спільна для багатьох фізичних об'єктів, але кількісно індивідуальна для кожного із них. Наприклад, фізична величина "довжина" (висота, ширина, відстань) чи "маса" застосовується для опису багатьох об'єктів чи тіл, але вони мають належні тільки їм кількісні характеристики. Кількісна оцінка конкретної ФВ, яка виражена у вигляді деякого числа одиниць даної величини, називається "значенням ФВ". Абстрактне (довільне, але певне) число, що виражає "значення" величини, називається числовим значенням.

Якісну загальну властивість характеризують родом ФВ і об'єднують у групу однорідних ФВ, при цьому в цій групі можуть бути і різні за назвою (різнойменні) ФВ (довжина, висота, глибина; електрична напруга, електричний потенціал, е.р.с; робота, енергія, кількість теплоти). Про такі ФВ говорять, що вони одного роду або однорідні. Відповідно, не одного роду – різнорідні або неоднорідні (енергія і шлях).

Кількісно індивідуальну властивість характеризують розміром ФВ. Розміри будь-яких однорідних фізичних величин можна порівнювати між собою кількісно, якщо вибрано певний розмір, який прийнятий за одиницю розміру однорідної ФВ.

Слід розрізняти такі терміни (поняття), як розмір і значення ФВ. Між *розміром* і *значенням* ФВ є принципова різниця. Розмір величини – це об'єктивна реальність (слон більше зайця – це реально). Виразити цей розмір ми можемо за допомогою числового значення. Числове значення змінюється в залежності від вибору одиниці вимірювання даної фізичної величини (висота зайця 20 см, висота слона 2 м: але число 20 більше за число 2).

Між фізичним розміром $\boldsymbol{Q}$ числовим значенням $\boldsymbol{n}$ і одиницею вимірювання $\boldsymbol{q}$ фізичної величини існує співвідношення: $\boldsymbol{Q = n \cdot q}$, яке називається *основним рівнянням вимірювання* і полягає в тому, що певному, реально існуючому фізичному розміру Q, ставиться у відповідність абстрактне числове значення $\boldsymbol{n}$ фізичної величини у вибраних одиницях вимірювання $\boldsymbol{q}$. Якщо для вимірювання даного розміру Q будуть прийняті різні одиниці, $q_1 \neq q_2$, то і чисельний результат виміру буде різним $n_1 \neq n_2$ ("заєць" більше "слона"). Тому *результат вимірювання обов'язково повинен містити, крім числового значення, значення (позначення) одиниці вимірювання* (так звану *розмірність*).

Вимірювання розміру ФВ полягає в тому, що дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів знаходять числове значення ФВ і оцінюють близькість цього значення до значення, що ідеально відображає розмір цієї ФВ.

В метрології дається більш чітке і ширше визначення поняттю "вимірювання": вимірювання – це процес одержання і перетворення інформації про вимірювану величину з метою визначення кількісного результату при порівнянні її з *одиницею вимірювання* у формі, найбільш зручній для подальшого використання.

Одиницею вимірювання фізичної величини називається прийнята по узгодженню за основу для кількісної оцінки певна фізична величина (*еталон, міра*), однорідна в якісному відношенні з вимірюваною величиною.

Коротка історія розвитку мір

Зробимо коротку історичну довідку про виникнення, розвиток і зміну одиниць вимірювання (мір) фізичних величин довжини, ваги (маси) і об'єму.

Міра – засіб вимірювання у вигляді тіла або пристрою, призначений для відтворення величини одного або декількох розмірів, значення яких відомі з необхідною для вимірювання точністю. Міра – носій одиниці фізичної величини.

Історія розвитку та становлення метрології, як науки, висвітлювалась у багатьох дослідженнях. Вагомий внесок у розвиток метрології своїми працями зробили вчені Б.С.Якобі, А.Я.Купфер, В.С.Глухов, Д.І.Менделєєв, Н.Г.Єгоров, Л.В.Залуцький, В.В.Бойцов, інші.

Відмічають три етапи розвитку мір.

1) одиниці ФВ були безпосередньо зв'язані з мірами, а міри – з частинами тіла людини (на ранньому етапі), або (пізніше) з природними об'єктами;
2) відказ від одиниць величин, відтворюваних природою, і закріплення їх в "речових" зразках (див. історію створення метричних мір).
3) третій етап – як розвиток бурхливого розвитку науки і зростаючих вимог до точності вимірювань. Знову повернення до природних

джерел, але якісно на іншому рівні. Для відтворення, наприклад, метра використовувався не еталон, а довжина хвилі світла.

4) у наш час, можливо, здійснюється перехід на новий етап розвитку мір – створення обчислювально-вимірних комплексів і математичних моделей вимірювання.

Здавна людям досить часто доводилось мати справу з різними вимірюваннями: при будівництві споруд, при визначенні напрямку руху по морю з використанням астрономії, у торгівлі, при визначенні пропорцій людського тіла. У стародавні часи частини людського тіла використовувались як міра довжини.

Різні народи нашої планети перебували на неоднакових стадіях розвитку, то й міри були різноманітні. Так у XVII ст. у Європі було понад 100 різних *футів*, понад 120 *фунтів,* 46 *миль* та інших одиниць вимірювання.

В Англії у XVII ст. була прийняті одиниці міри довжини: ширина великого пальця – ***дюйм*** (25,4 мм), довжина стопи – ***фут*** (нога, стопа), яка дорівнювала 30,5 см (вболівальники футболу знають, що розміри футбольних воріт становлять 7,22х2,44 м або ж 24х8 футів, оскільки Англія є батьківщиною футболу), ***ярд*** (1 ярд = 91,44 см) – походить від англо-саксонського gyrd, ġierd (прут, палиця, жердина). 1 ярд = 3 фути = 36 дюймів (2 ярди = (ще називають) 1 фатом), а 1760 ярдів = 1 сухопутній милі, тоді як 2025,372 ярдів = 1 морській милі.

Миля – шляхова міра для вимірювання відстані була введена у Древньому Римі (від латинської mille passus – тисяча подвійних кроків римських солдатів у повному одягненні на марші). Величина милі була різна в різних країнах і коливається від 0,58 км (у Єгипті) до 11,3 км (старонорвежська миля). Ще в XVIII столітті в Європі було 46 різних одиниць виміру, що називалися милями.

Миля застосовувалася у ряді країн в давнину, а також у багатьох сучасних країнах до введення метричної системи мір. У країнах з не метричною системою мір миля застосовується до теперішнього часу. Але ця одиниця ще широко застосовується і в країнах, що прийняли метричну систему мір. Наприклад, британська і американська так звана статутна миля: 1 миля = 1760 ярдів = 5280 футів = 1609,34 метра. Ця одиниця довжини повсюдно використовується у США для виміру довжини шляху і швидкості (її ще називають стандартною сухопутною милею).

У застосуванні були раніше, або ще є, наступні милі:

Морська миля: 1 миля = довжині дуги 1/60° (тобто 1 кутової хвилини земного меридіана = 1852 м. Інколи її називають стандартною морською милею.

Географічна миля: 1 миля = довжині дуги 1/60° (тобто 1 кутової хвилини земного екватора = 1855,3 м.

Французька сухопутна миля (сухопутне льє): = довжині дуги 1/25° земного меридіана = 4,17 російських верст = 4444,4 м.

Французька морська миля (морське льє) = довжині дуги 1/20° земного меридіана = 3 морських милі = 5555,5 м

Давньоримська миля (міліарій: 1 миля = 1482 м

Німецька, італійська або географічна миля = 1/15° екватора = 7420 м

Данська миля = 7532,48 м

Норвезька миля = 10 км. (з 1889 року; раніше - 11,298 км.)

Шведська миля = 10 км. (з 1889 року; раніше - 10,688 км.)

Шотландська миля: використовувалася в Шотландії до об'єднання з Англією (1707 рік). Довжина шотландської милі варіювалася залежно від регіону, але була приблизно на 200 м довше британською (1809–1814 м)

Російська миля = 7 верст (1 верста = 1066,8 м) = 7 467,6 м.

У Київській Русі найпоширенішими мірами довжини були: *верста*, *сажень*, *лікоть*, *аршин*, *ступня*, *долоня*, *вершок*, *палець*; мірами ваги – *пуд*, *гривна*, *гривенка*, *золотник*, існували і такі найменування мір, як *почка* і *пиріг*.

Вершок – ширина вказівного і середнього пальців руки, ≈4,4 см.

П'ядь – між вказівним і великим пальцями долоні, 17-18 см.

Долоня – 8-10 см.

Лікоть – від ліктя до кінця середнього пальця долоні, ≈44,5 см.

Аршин – з'явився у XVI ст. і спочатку дорівнював 27 англійським дюймів, але у XVII ст. законодавчо було прийнято, що 1 аршин = 28 дюймів = 71,12 см.

Сажень – до XVII ст. 1 сажень = 3 ліктя (≈133 см), але після 1 сажень став дорівнювати 3 аршина (≈2,13 м).

Верста – набула використання для великих відстаней у XI ст.: 1 верста = 750 сажень, тобто ≈1,5 км (але були і такі, що дорівнювали 600, 650 і 1000 сажень). У XVIII ст. було прийнято, що 1 верста дорівнює 500 сажень.

Одиницями для вимірювання земельної площі були *десятина* і *чверть*, які вперше згадуються у XV столітті.

Десятина дорівнювала 50x50 = 2500 кв.сажень (50 сажень = 1/10 версти – звідси і назва). Пізніше, у XVII ст., з'явились інші десятини:

сорокова або господарська десятина – 40х80= 3200 кв.сажень, тридцятка або казенна десятина дорівнювала 30х80 = 2400 кв.сажень.

Чверть (або четь) – відповідала вдвічі меншим лінійним розмірам порівняно з такими розмірами десятини, тобто 1/4 десятини за площею и становила 625 квадратних сажень.

Міри ваги (маси) гривна і золотник. До XII століття плата за товар здійснювалася кусочками срібла певної ваги (гривнами), на яких робились надруби, щоб їх легко ламати, – гривенки (якщо навпіл, то їх називали малі гривни на відміну від цілої – великої гривни; від відломлених – рублених – кусочків гривни згодом утворилася назва грошової одиниці – рубль). Звісно, що вага гривни була не зовсім однакова і могла досить сильно відрізнятися в різних містах, тому до гриви додавалася ще назва міста. Наприклад, новгородська гривна дорівнювала 96 золотникам і тому важила приблизно 400 грам, оскільки золотник дістав назву від візантійського золотого червонця (динара), вагою трохи більше за 4 грама (звідси пішло прислів'я: "малий золотник – та дорогий").

Пізніше (мабуть, починаючи з XIII ст.) замість гривни стали вживати термін фунт, а також пуд, що важив 40 фунтів, тобто 1 пуд = 40 фунтів = 400 г (х) 40 ≈ 16 кг (якщо староруський фунт дорівнював ≈ 409 г, то англійський фунт ≈ 454 г). Тоді ж ввійшли у вживання такі міри рідких і сипучих речовин (міри об'єму), як *бочка, відро, штоф*.

У XVIII ст. було встановлено, що 1 бочка = 40 відер; 1 відро = 8 штофам = 10 кружкам = 20 бутилкам (тепер 1 кружка =1 літр, 1 пляшка =0,5 л) = 100 чаркам (1 чарка ≈ 100 мл).

Одиницями виміру часу на Русі були рік, місяць, тиждень, доба, година. Але відлік нового року починався і з березня (22 березня – день весняного рівнодення, а після 988 р. – Хрещення Русі – з 1 березня), і з вересня (22 вересня – день осіннього рівнодення, а з 1348 року – 1 вересня). Указом Петра І у 1699 році введено початком нового року вважати 1 січня 1700 рік (при цьому він відмінив старе літочислення, за яким тоді йшов 7208 рік, ввівши новий відлік – від Різдва Христова, як вже було у більшості європейських країн).

Заснування у 1725 році Російської Академії сприяло розвитку наукової думки, вдосконаленню мір та упорядкуванню їх точності. Розширювалися межі впровадження одноманітних російських мір. У 1736 р. була заснована Комісія мір і ваг, яка займалася створенням зразків російських мір. Її очолив головний директор монетного двору граф М.Г.Головін.

Для організації *повірочних* робіт (робіт по перевірці номінально встановленої точності приладів) було утворено спеціальний комітет, який у 1747 році розробив еталонний російський фунт (400 г) і визначив за норму довжини аршин (0,7112 м). Відтоді фунт і аршин використовувалися до впровадження метричної системи.

У 1797 р. був виданий закон "Об учреждении повсеместно в Российской империи верных весов, питейных и хлебных мер", а у 1827 р. була створена комісія по розробці системи російських зразкових мір і ваг. 11 жовтня 1835 року вийшов указ "Про систему российских мер и весов", яким було закладено основу російської системи вимірювання і встановлювалися наступні основні російські міри:

одиниця довжини – сажень = 7 англ. футам (≈ 2 м 13 см);

одиниця маси – фунт = масі води в об'ємі 25,02 кубічних дюймів (410 см^3)

одиниця ваги – фунт (409,5 г ≈ 0,41 кг);

міра рідких тіл (об'єму) – відро = 30 фунтам води (≈ 12,3 л);

міра сипучих тіл – четверик = 64 фунтам води (≈ 26,24 л).

В Санкт-Петербурзькій фортеці в одному з особливих приміщень зберігалося нове зібрання еталонних мір довжини, місткості рідких і крихких тіл та вагових одиниць. За цими еталонами було виготовлено і розіслано в губернії Росії вивірені копії аршина, відра, четверика, фунта. Практичним застосуванням російських мір і ваги займалося засноване у 1842 р. Депо еталонних мір та ваги. Організація Депо і встановлення правил повірки робочих мір стали тією основою, яка забезпечувала єдність вимірювання у Росії і одноманітність мір. Першим хранителем Депо еталонних мір і ваги був призначений академік А.Я. Купфер, відомий учений і метролог, який очолював Депо у 1842-1865 роки. З 1865 р. по 1892 р. керуючим Депо еталонних мір і ваги був В.С. Глухов, який поповнив обладнання Депо удосконаленою вимірювальною апаратурою і розробив проекти відновлення російських еталонів мір довжини і ваги та запровадження метричної системи мір у Росії (у факультативному порядку).

Подальше уточнення розмірів російських мір було здійснено Д.І.Менделєєвим. З 1893 по 1899 роки він займався цією проблемою.

Для збереження одноманітності, точності і взаємовідповідності мір і ваги на базі Депо у 1893 році було створено Головну палату мір і ваги, президентом якої і став Д.І. Менделєєв. При палаті було організовано ряд лабораторій, обладнаних першокласною вимірювальною технікою. 4 червня 1899 р. було затверджено "Положення про міри і ваги". В основу цієї системи одиниць покладено:

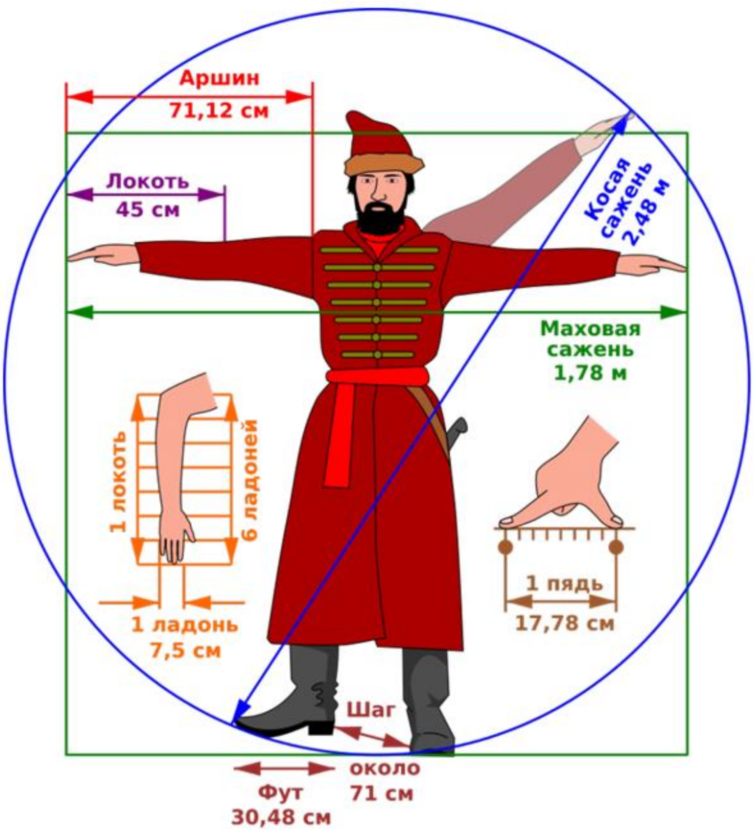
одиниця маси – фунт, що дорівнює 0,40951241 кг;

одиниця довжини – аршин, що дорівнює 0,711200 м.

На той час Росією вже була підписана Метрична конвенція (1875 р.), тому згодом на базі Депо і Палати була проведена робота по зіставленню російських і метричних мір.

Співвідношення між російськими і метричними мірами.

1 аршин =16 вершків = 28 дюймів = 0,71120 м. (1 дюйм = 25,4 мм)
1 сажень = 3 аршина = 7 футів = 2,1336 м
1 верста = 500 сажень = 1066,8 м = 1,0668 км
1 десятина = 2400 кв. сажень = 10925 м^2 (1,0925 га)
1 фунт = 409,5 г = 0,4095 кг
1 пуд 40 фунтів = 16,38 кг
1 золотник = 4,266 г
1 четверик = 64 фунтам води = 26,24 дм^3 (26,24 л).
1 четвертина = 8 четвериків = 209,92 дм^3 (209,92 л)



Тема 2. Становлення метричної системи мір

У другій полов ині XVIII ст. в Європі вже нараховувалось до сотні футів різної довжини, до 50 різних миль, 120 різних фунтів. Наприклад, у Франції, траплялось, кожний феодал встановлював свої міри. Тому, саме у Франції, в 1790 році Національними зборами було прийнято рішення (декрет) про створення системи мір, "основаних на незмінному прототипі, взятому з природи, з тим, щоб її могли прийняти всі нації". Паризькій академії наук доручили провести підготовчу роботу. Створена під керівництвом Лагранжа (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813 рр, математик, фізик, астроном) комісія запропонувала десяткову систему числення з кратними і дольовими частинами, а комісія під керівництвом Лапласа (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 рр, математик, астроном) – одиницю довжини, *метр* (1791 р.), як 1/10000000 частину чверті (довжини) меридіана, що проходить через Париж. З 1792 до 1799 рр. під керівництвом астрономів Делямбра (*Jean-Baptiste Joseph Delambre*, 1749-1822 рр.) і Мешена (1744-1804 рр., Pierre François André Méchain, у фр. Академії Наук з 1782 р. по 1788 р. займався виміром часу, геодезист) між містами Дюнкерк на півночі Франції і Барселона у Іспанії проводились виміри та обробка результатів.

За одиницю маси була запропонована і прийнята маса чистої води об'ємом 0,001 $м^3$ (1 кубічний дециметр) за температури 4 ^oC (найбільшої її густини), яку назвали *кілограм*.

7 квітня 1795 року Національними зборами Франції була законодавчо прийнята метрична система мір, у якій одиниці довжини, площі, об'єму і маси були чітко пов'язані між собою. Це, а також єдина (сучасна) десяткова система числення – є одними із найважливіших її переваг. До 22 червня 1799 року роботи над метричною системою були завершені, виготовлені із платини прототипи одиниці довжини у вигляді лінійки довжиною 1 метр, товщиною 4 мм і шириною 25 мм, а також одиниці маси – 1 кілограм у вигляді платинового циліндра висотою і діаметром 39 мм. Платинові прототипи метра і кілограма згодом передали на збереження до Національного Архіву у Франції (у м. Севр біля Парижа).

У наступні десятиліття (до 1870 р.) більш точні вимірювання показали, що в 1/4 меридіана міститься не 10^7 м, а 10000856 метрів (тобто ця відстань виявилася трохи більшою, ніж виміряна раніше, але й це могло бути уточненим наступними вимірами). (Крім того, точні вимірювання маси копій прототипу також виявили їх зміну з часом – рис.2)

Таблиця кратних і частинних(дольових) одиниць

Префікси кратних одиниць (множник 10^n, $+n$ – ціле число)					
Крат-ність	**Українське**		**Міжнародне**		**Приклад**
	префікс	**позначення**	**префікс**	**позначення**	
10^1	дека	да	deca	da	дал – декалітр
10^2	гекто	г	hector	h	га – гектар
10^3	кіло	к	kilo	k	кг – кілограм
10^6	мега	М	mega	M	МДж – мегаджоуль
10^9	гіга	Г	giga	G	ГГц – гігагерц
10^{12}	тера	Т	tera	T	ТВ – теравольт
10^{15}	пета	П	peta	P	Пфлопс*–петафлопс
10^{18}	екса	Е	exa	E	
10^{21}	зета	З	zetta	Z	
10^{24}	йота	Й	yotta	Y	

*** *флопс* – FLOPS** (*FLoating-point Operations Per Second*) – позасистемна одиниця для вимірювання продуктивності комп'ютерів, вказує скільки операцій з плаваючою комою за секунду виконує дана обчислювальна система.

Префікси частинних одиниць (множник 10^{-n}, n – ціле число)					
Частка	**Українське**		**Міжнародне**		**Приклад**
	префікс	**позначення**	**префікс**	**позначення**	
10^{-1}	деци	д	deci	d	дм – дециметр
10^{-2}	санти	с	centi	c	см – сантиметр
10^{-3}	мілі	м	milli	m	мм – міліметр
10^{-6}	мікро	мк	micro	μ	мкм – мікрометр
10^{-9}	нано	н	nano	n	нм – нанометр
10^{-12}	піко	п	pico	p	пФ – пікофарад
10^{-15}	фемто	ф	femto	f	фс – фемтосекунда
10^{-18}	ато	а	atto	a	
10^{-21}	зепто	з	zepto	z	
10^{-24}	йокто	й	yocto	y	

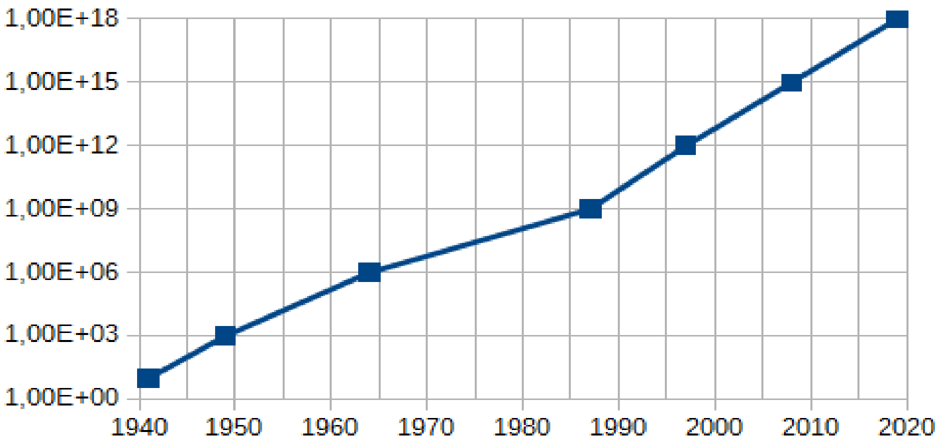


Рис. 1. Зростання продуктивності суперкомп'ютерів у флопсах

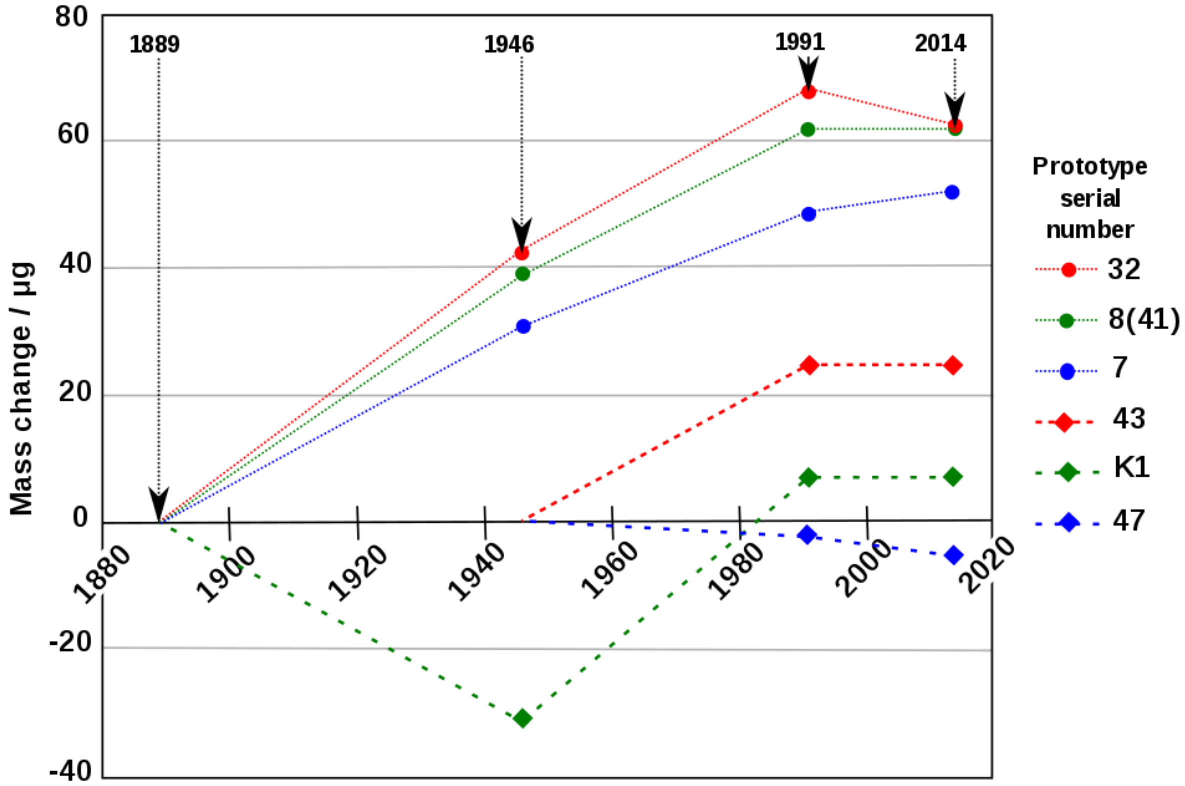


Рис. 2. Дрейф маси копій еталона по відношенню до "архівного" [1]
(Автор: Martinvl – власна робота, CC BY-SA 4.0)
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=71532172

Еталон маси 1кг (№12)

За пропозицією Петербурзької Академії Наук було проведено міжнародну нараду (1870 р), на якій було утворено Міжнародну комісію з прототипів метричної системи. У 1872 році комісія прийняла рішення *перейти від одиниць довжини і маси, основаних на природних еталонах, до одиниць, основаних на умовних матеріальних еталонах (прототипах)* (2-й етап розвитку мір – еталонів); також прийнято рішення про виготовлення платино-іридієвих (сплав із 90% платини і 10% іридію) прототипів метра та кілограма. Відповідно до рішення комісії було виготовлено 43 прототипу кілограма у вигляді циліндра 39x39 мм і 34 прототипу метра у вигляді штрихової міри на бруску довжиною 102 см і поперечним перерізом форми Х (рис.3). Із них прототип №6 при 0 °С був найточнішим прототипом метра Архіву і в 1889 році на I Генеральній конференції з мір і ваги його прийняли за міжнародний еталон метра.

Рис. 3. Креслення платино-іридієвого еталона метра

Метрична конвенція

Метрична конвенція (фр. Convention du Mètre) – міжнародний договір, що служить для забезпечення єдності метрологічних стандартів в різних країнах. Договір був підписаний в 1875 році в Парижі 17-а країнами (із 20 присутніх), в тому числі Росією. У 1921 р. у договір були внесені незначні зміни. У відповідності з цією конвенцією:

а) встановлювались міжнародні прототипи метра і кілограма;

б) створювалось Міжнародне бюро мір і ваги – наукова установа, кошти на утримання якої зобов'язалися виділяти держави, що підписали конвенцію;

в) утворювався Міжнародний комітет мір і ваги, який складався з вчених різних країн (18 чоловік), однією з функцій якого було керівництво діяльністю Міжнародного бюро мір і ваги;

г) встановлювалося скликання один раз у 6 років Генеральних конференцій по мірам і вагам (починаючи з кінця XX ст. вони скликаються 1 раз у 4 роки); встановлювалося скликання МКМВ не менше одного разу у два роки.

Утворювані згідно договору міжнародні організації покликані вирішувати питання стандартизації в галузі метрології, створення нових одиниць вимірювання на ґрунті метричної системи мір та розповсюдження метричної системи мір та одиниць серед інших країн.

На I Генеральній конференції у 1889 році відбувся розподіл прототипів між країнами-підписантами. Згідно жеребкування Росії випали зразки метра №11 і №28 та кілограма №12 і №26. Номери 28 і 12 затверджені як Державні еталони Росії.

Діяльність і завдання МБМВ і МКМВ.

<u>Міжнародне бюро мір і ваги</u> – постійно діюча організація зі штаб-квартирою у місті Севр, біля Парижа. Основне завдання Бюро

полягає у зберіганні міжнародних прототипів метра і кілограма та забезпеченні існування єдиної системи вимірювань у всіх країнах-учасницях метричної конвенції. Для цього здійснюється порівняння національних еталонів одиниць вимірювання і проводяться дослідження в галузі метрології, спрямовані на збільшення точності вимірювань. Діяльність МБМВ розширена і розповсюджена на еталони електричних одиниць (вольта і ома) та на дослідження в області іонізуючих випромінювань. Бюро фінансується країнами-учасницями метричної конвенції.

Міжнародний комітет мір і ваги складається з 18 осіб, кожен з яких представляє одну країну-учасницю. Комітет збирається щорічно в штаб-квартирі Міжнародного бюро мір і ваги. Комітет спостерігає за роботою МБМВ, координує метрологічні дослідження в країнах-учасницях і виробляє рекомендації для Генеральних конференцій з мір та ваги.

Генеральні конференції з мір і ваги скликаються раз на чотири роки. У них беруть участь представники всіх країн-учасниць метричної конвенції та спостерігачі від асоційованих членів. Конференція заслуховує доповідь Міжнародного комітету мір і ваги, обговорює і пропонує заходи та приймає рішення спрямовані на поліпшення і поширення міжнародної системи одиниць (СІ), затверджує результати метрологічних досліджень. Також, затверджується бюджет Міжнародного бюро мір і ваги на наступні чотири роки та оновлюється склад (половина) МКМВ.

Україна 7 серпня 2018 року одержала повноправне членство в Метричної конвенції і стала однією з 60 країн-членів. До цього протягом 16 років Україна перебувала в статусі асоційованого члена. Ось що повідомляла прес-служба Міністерства економічного розвитку і торгівлі України: "Повноправне членство в Метричній конвенції забезпечить визнання метрологічної системи України, яка відповідає європейським вимогам і дозволить проводити звірку національних еталонів України з національними еталонами 59 країн-членів Метричної конвенції, що є обов'язковою умовою для міжнародного визнання результатів вимірювань і випробувань української продукції для її просування на міжнародний ринок". Там же зазначалося, що членство України в Метричній конвенції також сприятиме укладанню Угоди про оцінку відповідності та прийнятності промислових товарів (Угода АСАА) з Європейським Союзом.

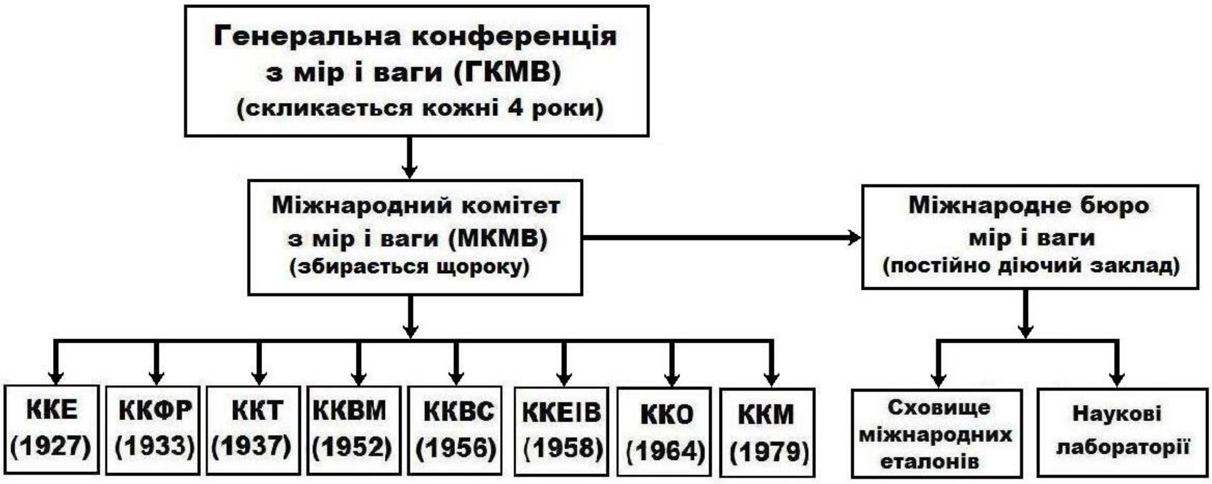


Рис. 4. Структурна схема органів міжнародної метричної конвенції.

При МКМВ поступово створювалися консультативні комітети (КК). На даний час існує 8 таких комітетів (рис.4):
1) по електриці (з 1927 р); 2) по фотометрії і радіометрії (з 1933р); 3) по термометрії (з 1937 р); 4) по визначенню метра (з 1952 р.); 5) по визначенню секунди (з 1956 р); 6) по еталонам для вимірювань в області іонізуючих випромінювань (з 1958 р); 7) по одиницям (з 1964 р); 8) по вимірюванню маси і зв'язаних з нею величин (з 1979 р).

Комітети скликаються на свої засідання по необхідності (зазвичай кожні 3-4 роки) і складаються з представників національних метрологічних лабораторій і найбільших науково-дослідних інститутів, які спеціалізуються по відповідним видам вимірювань. В обов'язки КК входить обговорення результатів нових досліджень, визначення напряму подальших робіт і підготовка питань для обговорення на чергових Генеральних конференціях.

Історія підписання та розвитку метричної системи одиниць

За станом на 23 березня 2018 року до конвенції приєдналися 60 держав в якості повноправних членів і 42 держави і організації на правах асоційованих членів (табл.1).

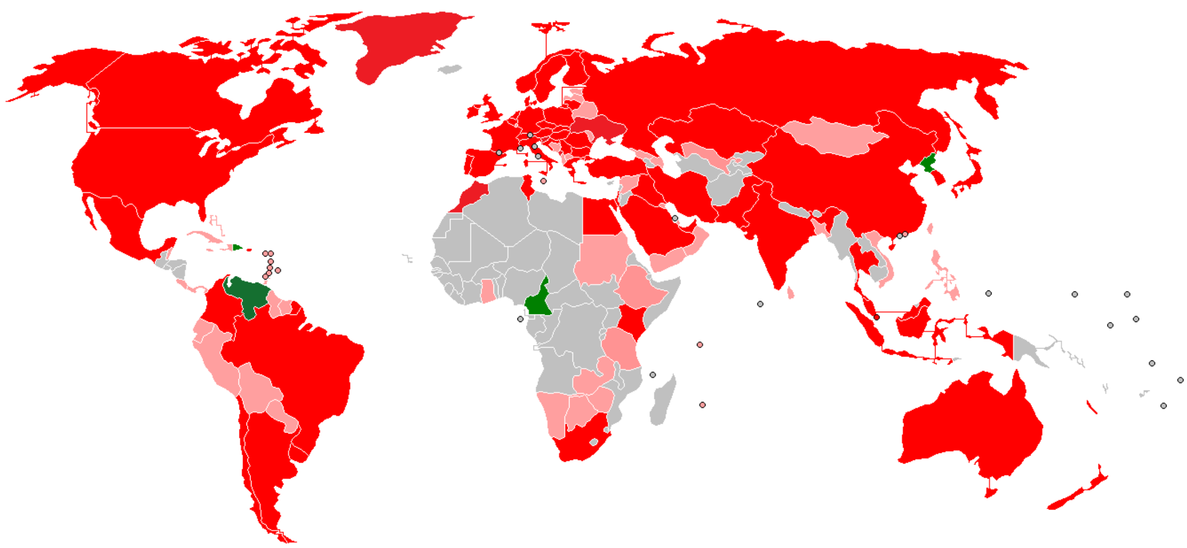
Членами конвенції є всі промислово розвинені країни [2,3]. Метрична конвенція була підписана 20 травня 1875 року в Залі Годинників будівлі Міністерства закордонних справ Франції [4]. Підписанню передувало півторагодинне засідання, яке розпочалося о другій годині дня [5]. Конвенція була підписана повноважними представниками 17 країн від імені глав відповідних держав. З боку Росії Конвенцію підписав радник посольства Григорій Окунєв від імені імператора Олександра II [6,7].

Таблиця. 1. **Список держав-учасників**

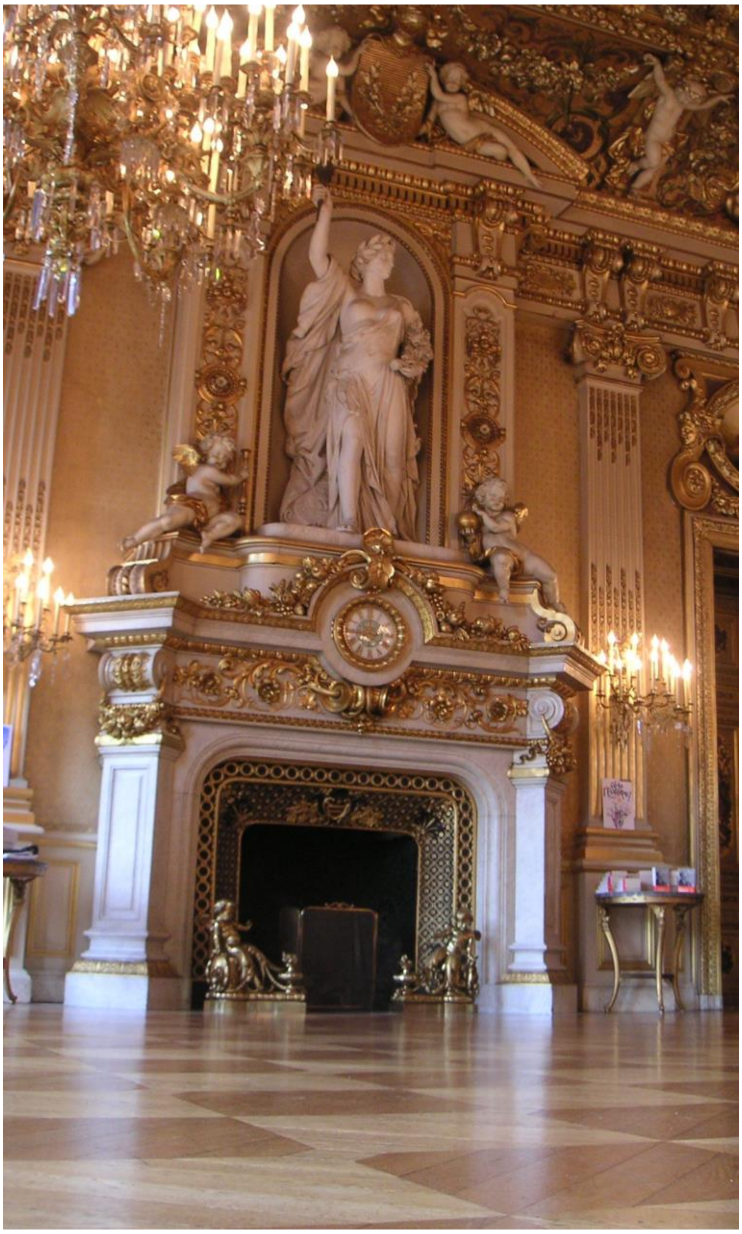
Австралія	Індонезія	Литва	Респуб. Корея	Угорщина
Австрія	Індія	Малайзія	Росія	**Україна**
Аргентина	Ірак	Мексика	Румунія	Уругвай
Бельгія	Іран	Нідерланди	Саудів.Аравія	Фінляндія
Болгарія	Ірландія	Німеччина	Сербія	Франція
Бразилія	Іспанія	Нова Зеландія	Сінгапур	Хорватія
Великобританія	Італія	Норвегія	Словаччина	Чехія
Венесуела	Казахстан	ОАЕ	Словенія	Чилі
Греція	Канада	Пакистан	США	Чорногорія
Данія	Кенія	ПАР	Таїланд	Швейцарія
Єгипет	Китай	Польща	Туніс	Швеція
Ізраїль	Колумбія	Португалія	Туреччина	Японія

Асоційовані учасники

Азербайджан	Гонконг	Китайська Республіка	Монголія	Судан
Албанія	Грузія	Коста-Ріка	Намібія	Танзанія
Бангладеш	Еквадор	Куба	Оман	Узбекистан
Білорусія	Естонія	Кувейт	Панама	Філіппіни
Болівія	Ефіопія	Латвія	Парагвай	Шрі-Ланка
Боснія і Герцеговина	Замбія	Люксембург	Північна Македонія	Ямайка
Ботсвана	Зімбабве	Маврикій	Перу	
В'єтнам	Карибське співтовариство	Мальта	Сейшельські Острови	
Гана	Катар	Молдова	Сірія	



Країни, що підписали метричну конвенцію (станом на 2019 р.) [8]: червоний – країни-члени; рожевий – асоційовані країни; темно зелений – колишні країни-члени.



Зала Годинників

(Зал Часов. Автор: User:EU – собственная работа, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2118598)

Росія після підписання в 1875 році Метричної конвенції тим не менше зберегла свою традиційну російську систему мір. Лише після Жовтневої революції був прийнятий декрет від 14 вересня 1918 року "Про введення Міжнародної метричної системи мір і ваг", який в якості еталона метра і еталона маси затверджував, відповідно, зразок копії міжнародного метра №28 і зразок копії міжнародного кілограма №12, а також зобов'язував всі радянські установи та організації на поступове введення метричної системи, починаючи з 1 січня 1919 року, а з 1 січня 1924 року – "заборонити застосування будь-яких мір і ваг, крім метричних". Але у зв'язку з громадянською війною Метрична реформа була в основному завершена в 1927 році. В цьому велу роль відіграла Головна палата мір і ваг (нині це "Російський НДІ Мір ім.. Д.І.Менделєєва").

Коли в 1790 році в Парижі було прийнято рішення про створення метричної системи, вона почала застосовуватися для створення системи фізичних одиниць. Так, в 1832 р. німецький математик Карл Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) запропонував метод створення магнітних одиниць. Як основні він взяв міліметр, міліграм і секунду. У 1851 р. фізик В.Вебер (нім. Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891 рр.) розповсюдив систему Гауса на електричні величини. Це, можливо, було доцільним теоретично, але для практики розміри довжини і маси виявилися незручними.

В 1861-1870 роки Комітет по електричним еталонам Британської асоціації розвитку наук розробив систему одиниць СГС (сантиметр, грам, секунда). Для похідних одиниць сили і роботи було запропоновано найменування *дина* і *ерг*. Цей же комітет встановив дві системи електричних одиниць: абсолютну електростатичну (СГСЕ) і абсолютну електромагнітну (СГСМ). Незабаром для електричних і магнітних величин існувало вже сім різних систем одиниць, побудованих на основі системи СГС.

Тоді ж, в кінці XIX століття, з'явилася система МКГСС, основними одиницями якої були метр, кілограм-сила, секунда. Ця система одержала найбільше розповсюдження в механіці, теплотехніці і споріднених з ними областях.

В 1919 році у Франції була прийнята система МТС (метр, тонна, секунда). Ця система була рекомендована також першим радянським стандартом на механічні одиниці, прийнятим у 1929 році.

В 1901 році італійських фізик і інженер-електрик Д.Джорджі (Giovanni Giorgi, 1971-1950 рр.) запропонував систему механічних одиниць МКС (*метр*, *кілограм*, *секунда*). Її переваги у порівнянні з іншими системами механічних одиниць були в тому, що її легко можна було зв'язати з абсолютною системою електричних і магнітних одиниць, оскільки одиниці роботи (джоуль) і потужності (ват) в цих двох системах співпадали (систему МКГСС неможливо було зв'язати з практичними електричними одиницями, а одиниці СГС, що застосовувалися фізиками, виявилися незручними для використання в різних областях техніки). І так виявилося, що система МКС Джорджі стала попередником Міжнародної системи одиниць.

Отже, на початку XX століття знову виникає ситуація з багатьма системами одиниць. Ще в 1919 році в МБМВ і вченими-метрологами Франції розроблялась на основі МКС система одиниць, яку мали на увазі рекомендувати як міжнародну. Знову постало питання уніфікації фізичних одиниць.

У 1948 році IX ГКМВ розглянула питання про встановлення міжнародної практичної системи одиниць. Крім того, французький уряд представив проект уніфікації одиниць. ГКМВ доручила МКМВ провести офіційне опитування наукових,технічних і педагогічних кіл різних країн про доцільність встановлення єдиної практичної системи одиниць, котру могли б прийняти всі країни, що підписали Метричну конвенцію (угоду). Всі 21 країна підтримали цей проект на базі МКС. X Генеральна конференція з мір і ваг (1954 р) прийняла по цьому питанню наступну резолюцію: "В якості основних одиниць практичної системи одиниць для міжнародних відносин прийняти:

1 – одиницю довжини – *метр*,
2 – одиницю маси – *кілограм*,
3 – одиницю часу – *секунду*,
4 – одиниці сили струму – *ампер*,
5 – одиницю термодинамічної температури – *градус Кельвіна*,
6 – одиницю сили світла – *свічу*.

Згодом додалася 7-а основна одиниця – кількість речовини – *моль*.

У жовтні 1960 року XI ГКМВ остаточно прийняла нову систему і присвоїла їй найменування System International (SI). Згодом в неї вносилися зміни і доповнення. На даний час СІ складається з 7 основних одиниць (а одиницею сили світла є *кандела*) і двох допоміжних одиниць – це плоский кут (одиниця вимірювання – *радіан* (рад, rad)) і тілесний кут (одиниця вимірювання – *стерадіан* (ср, sr)).

Переваги системи СІ над попередніми системами одиниць ФВ.

1. Система СІ – це універсальна система одиниць, яка охоплює всі види вимірювань в усіх областях науки і техніки.
2. Уніфікація одиниць для всіх областей і видів вимірювань (механічних, теплових, електричних і магнітних, акустичних, світлових, інших).

   Наприклад, замість декількох одиниць роботи і енергії, що застосовувалися раніше (КГс·м, ерг, кал, Вт·с і інші) в СІ передбачена одна системна одиниця – джоуль (Дж) – як одиниця роботи, енергії, кількості теплоти; замість декількох одиниць тиску (ат, атм, кгс/см^2, мм рт.ст., мм вод.ст., бар, дин/см^2, торр і інші) введена одна одиниця – паскаль (Па) як універсальна одиниця тиску, механічної напруженості, модуля пружності.

3. Когерентність похідних одиниць – всі похідні одиниці СІ одержують із рівнянь зв'язків між основними одиницями, в яких коефіцієнти дорівнюють 1.
4. Можливість відтворення одиниць з великою точністю у відповідності з їх визначенням.
5. Спрощений запис рівнянь і формул у фізиці, хімії, інших наук, у технічних розрахунках (у зв'язку з відсутністю перевідних коефіцієнтів).
6. Зменшена кількість допустимих одиниць.
7. Єдина система утворення кратних і частинних (дольних) одиниць для одиниць, що мають власні найменування.
8. Спрощення науково-технічного співробітництва країн.
9. Полегшення процесу навчання в різних країнах.

18 листопада1961 року Комітетом стандартів, мір і вимірних приладів при Раді Міністрів СРСР був затверджений Державний стандарт 9867-61 "Міжнародна система одиниць" з строком введення з 1 січня 1963 р, який вказував, що СІ повинна застосовуватися як переважна в усіх областях науки, техніки і народного господарства, а також при викладанні. З метою повного і успішного впровадження СІ постановою №1449 з 1 січня 1982 року Держстандарт ввів у дію стандарт 8.417-81 "ДСІ. Одиниці фізичних величин". З цього часу система СІ є обов'язковою для використання в усіх вимірюваннях.

1. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=71532172 (Автор: Martinvl – власна робота, CC BY-SA 4.0)
2. Список країн-членів метричної конвенції на сайті Міжнародного бюро мір і ваги (BIPM).
3. Список країн-асоційованих членів метричної конвенції на сайті Міжнародного бюро мір і ваги (BIPM).
4. World Metrology Day, 2006 // NCSLI Newsletter. – 2006. – Т.46, №2. – С.14.
5. Terry Quinn. 5. The Diplomatic Conference of the Metre, 1875 // From Artefacts to Atoms – The BIPM and the Search for Ultimate Measurement Standards. – Oxford University Press, 2011. – С.74-87. – 440 с.
6. Международная Метрическая Конвенция, заключенная в Париже 20 мая 1875 года // Собрание Узаконений и распоряжений Правительства, издаваемое при Правительствующем Сенате. 1876. Первое полугодие. – СПб: Типография Правительствующего Сената. Сенатская типография, 1876. – №16.
7. Метрическая конвенция. (Текст договора).
8. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17546189 (BlankMap-World-v3.png. Автор: Vanjagenije (talk): Rokederivative work: CC BY-SA 3.0)

Тема 3. Основні фізичні величини та їх одиниці у системі СІ

Тема 3.1. Визначення основних одиниць та їх подальше уточнення

У жовтні 1960 року XI ГКМВ остаточно прийняла нову систему і присвоїла їй найменування System International (SI). Згодом в неї вносилися зміни і доповнення. На даний час СІ складається з 7 основних одиниць ФВ та двох *безрозмірних* одиниць: *радіан* (рад, rad) – одиниці плоского кута, (XI ГКМВ) і *стерадіан* (ср, sr) – одиниці тілесного кута (прийнята на XX ГКМВ у 1995 році).

Одиниця довжини – метр.

1799 рік – метр дорівнює 1/40000000 частині меридіану, що проходить через Париж. Еталон –лінійка з платини (хімічно інертний метал) довжиною 1 метр, товщиною 4 мм і шириною 25 мм.

1875 рік (1889 р., I ГКМВ) – метр дорівнює довжині міжнародного прототипу метра. Еталон – платино(90 %)-іридієвий(10 %) прототип метра X-подібного перерізу (густина платини 21500 кг/м^3, густина іридію 22400 кг/м^3).

1967 рік (XIII ГКМВ) – метр дорівнює довжині 1650763,73 довжин хвиль у вакуумі випромінювання, що відповідає переходу між рівняти $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптону-86 (це лінія оранжевого спектру). Цей еталон можна відтворити у метрологічних лабораторіях з точністю, яка на порядок вища від його платино-іридієвого прототипу. В Україні еталон метра зберігається у Харківському науково-виробничому об’єднані "Метрологія" (зразок дорівнює частині метра).

1983 рік (жовтень) (XVII ГКМВ) – метр дорівнює відстані, яку проходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за 1/299792458 долю секунди. Нове визначення метра дається з врахуванням сучасних досягнень лазерної техніки і квантової електроніки.

Одиниця маси – кілограм.

1799 рік – кілограм дорівнює масі 0,001 м^3 чистої води за температури +4 $^{\circ}$С. Еталон – циліндр з платини висотою і діаметром 39 мм (зараз має назву "кілограм Архіву").

1875 рік (1889 р., I ГКМВ) – кілограм дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма. Еталон – платино-іридієвий прототип кілограма (циліндр висотою і діаметром 39,17 мм; вміст іридію у сплаві – 10,08-10,09 %; густина сплаву 21548,1 кг/м^3, об’єм еталона при 0 $^{\circ}$С становить 46,408 см^3).

1901 рік (III ГКМВ) – підтвердила визначення одиниці кілограма і розділила терміни "маса" і "вага".

Цікаво, що з часом вага прототипів маси змінюється. Наприклад, у 1899 р. маса прототипу кілограма №12 дорівнювала 1,000.000.68 кг, а у 1950 р. стала дорівнювати 1,000.000.85 кг (зросла на $0{,}85 \cdot 10^{-6}$ кг = 0,85 мкг). Це надзвичайно мала зміна, але вже чітко визначається сучасними засобами вимірювання, тому перед метрологічною наукою знову постає питання про нове, більш точне і *надійне*, визначення кілограма.

Одиниця часу – секунда.

До 1956 року визначення секунди було зв'язано з обертанням Землі навколо своєї осі. 1 секунда дорівнювала 1/86400 частини середньої сонячної доби ("сонячна секунда" [1]). Але підвищення точності вимірювання часу, в тому числі досягнуте в результаті застосування кварцових годинників, змусило у 1956 р. значення секунди замінили новим, зв'язаним з обертанням Землі навколо Сонця, і вона стала дорівнювати 1/31556925,9747 частини тропічного року (тропічний рік – проміжок часу між двома послідовними проходженнями центра Сонячного диска через середню точку весняного рівнодення) на 12 годину 31 грудня 1899 року ефемеридного (рівномірного) часу (в астрономії – це дата 0 січня 1900 року в 12 годин). Вибір конкретного року пояснюється тим, що тропічний рік (період обертання Землі навколо Сонця) зменшується приблизно на 0,5 секунди за кожні 100 років. Таке визначення секунди дозволило більш точно користуватися природнім еталоном, який визначався з сукупності видимих рухів небесних тіл. Однак відтворення секунди за цим визначенням за астрономічними спостереженнями досить важке і довготривале.

До середини XX століття стало зрозумілим, що точність кращих годинників перевершила точність нашого природного еталону часу – доби. Можливості астрономічних методів вимірювання часу виявилися вичерпаними. Принципово нові й точніші методи вимірювання часу прийшли з радіоспектроскопії та квантової електроніки. У 1965 році на XII Генеральної конференції з мір та ваг, а також МКМВ, було прийнято тимчасове визначення секунди, що ґрунтувалось на квантових стандартах частоти (на основі інтеграції декількох атомних годинників різних лабораторій світу, що дозволило отримати стабільність секунди з точністю $5 \cdot 10^{-15}$). Тривалість такої *атомної секунди* було покладено рівною тривалості *ефемеридної секунди* (з точністю 2×10^{-9}) [2,3].

Нове визначення секунди, що ґрунтується на атомному еталоні частоти, було прийнято в 1967 р. на XIII ГКМВ. Секунду визначено як 9 192 631 770 періодів випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями (F = 4, M = 0 та F = 3, M = 0) основного стану ($2S_{1/2}$) атома цезію-133, який перебуває у спокої, за нульової температури та відсутності зовнішнього магнітного поля (цезій-133 єдиний стабільний ізотоп, а уточнення щодо температури і магнітного поля було внесено МКМВ у 1997-1999 роках).

Еталон з атомним пучком цезію використовує можливість відбору атомів по енергетичним рівням надтонкої структури за допомогою неоднорідного магнітного поля. Пучок атомів Cs іонізується і послідовно проходить поля двох відхиляючих магнітів, потрапляючи у детектор де фіксується іонний струм. Між магнітами існує високочастотне електричне поле, в якому і відбувається резонансне збудження атомів при частоті поля 9 192 631 770 Гц, що якраз і відповідає енергетичному переходу між визначеними рівнями. Похибка відтворення одиниці на цьому еталоні становить $\sim10^{-11}$.

Годинники, побудовані на принципі атомного еталону секунди (частоти), – атомні годинники – виявилися настільки точні (рис.1), що, по-перше, чітко була зафіксована нерівномірність обертання планети Земля навколо своєї осі (рис.2) і навколо Сонця, по-друге, ці відхилення почали заважати службам точного часу окремих країн і координації часу між країнами. (Так, наприклад, 3 квітня 2014 р. Національний інститут стандартів и технологій США (NIST) ввів у дію новий атомний годинник NIST-F2, який накопичує похибку в 1 секунду протягом 300 мільйонів років. Згідно з повідомленням, новий годинник замінив попередню у тричі менш точну модель NIST-F1 і використовуватиметься як стандарт цивільного часу у США. Раніше дані про NIST-F2 були направлені до МБМВ у Парижі, яке визнало їх найточнішим (на той час) атомним годинником у світі [4]).

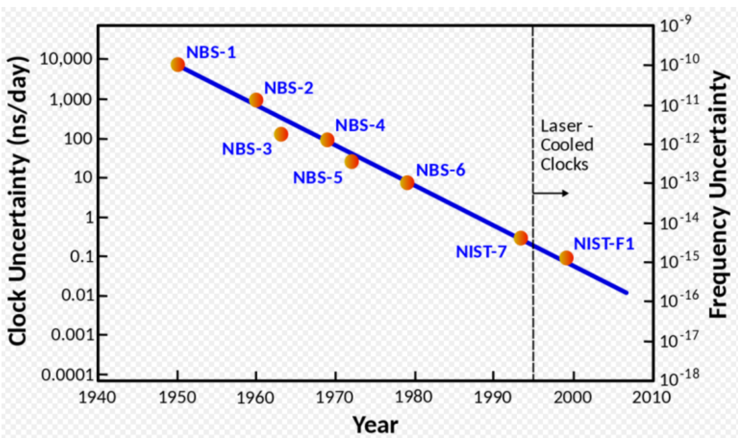


Рис.1. Збільшення точності атомних годинників NIST залежно від року виготовлення; на осях: часова точність (clock uncertainty), частотна точність (frequency uncertainty) [4].

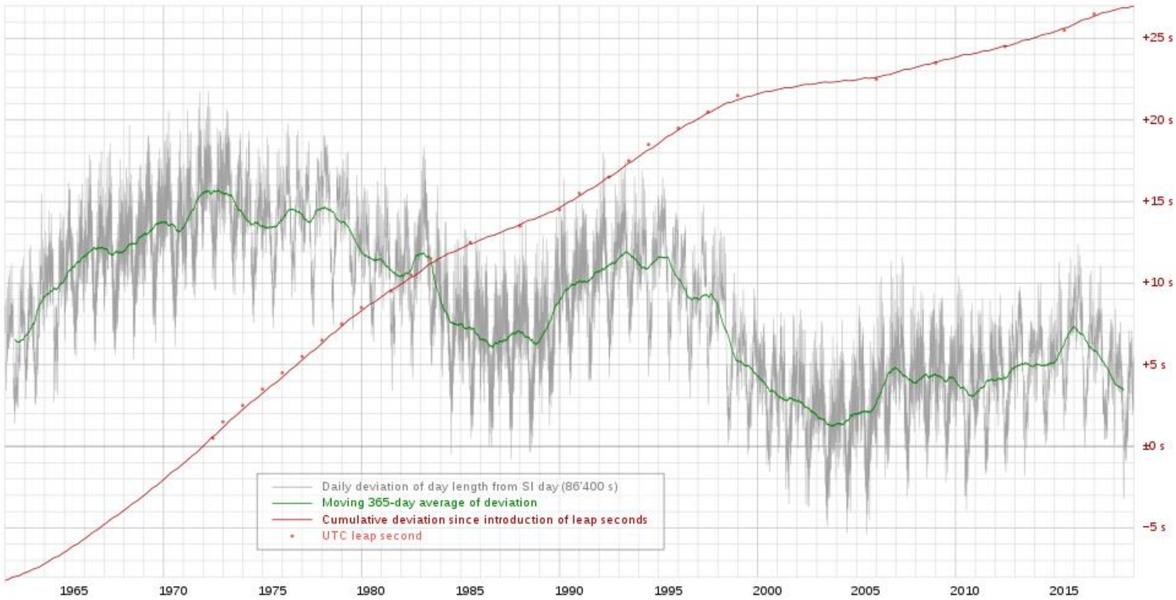


Рис. 2. Відхилення тривалості доби від доби системи СІ (від 86400 с), 1962–2018 рр. [5]

– Щодобове відхилення тривалості доби від доби СІ (86400 с)

– Рух середнього 365-денного відхилення

– Сукупне відхилення з моменту введення високосних секунд

● – UTC високосна (**<u>додаткова</u>**) секунда

Додаткова секунда (високосна, яка стрибає – англ. *leap second*), або секунда координації – секунда, що додається до всесвітнього координованого часу для узгодження його з середнім сонячним часом UT1. Це односекундна корекція, яка застосовується до Всесвітнього координованого часу (UTC – *Coordinated Universal Time*,) для того, аби утримувати тривалість доби за цим часом близькою до середнього сонячного часу (*сонячна доба* – інтервал між двома послідовними верхніми (або нижніми) кульмінаціями Сонця). Без такої корекції час, який визначається обертанням Земної кулі, почне поступово відхилятися від атомного часу (шкала часу, яку визначає МБМВ на основі інтеграції деякої кількості атомних годинників різних лабораторій світу [2]) внаслідок нерегулярностей у швидкості обертання Землі. Відтоді, як така система корекції була застосована у 1972 році, станом на 2017 рік до Всесвітнього координованого часу було додано всього 27 високосних секунд. Останнє таке додавання відбулося 31 грудня 2016 року о 23:59:60 UTC, до цього – 30 червня 2015 року. Наступна високосна секунда, можливо, буде додана 31 грудня 2021 року [6].

Правила приєднання <u>додаткової</u> секунди.

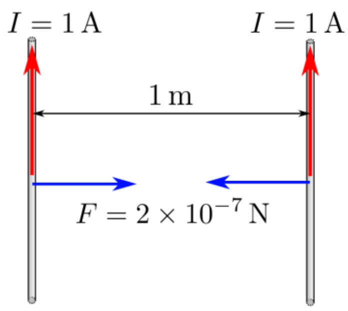
Додаткова секунда додається за астрономічними спостереженнями в кінці доби за всесвітнім часом 30 червня або 31 грудня так, щоб час UTC не відрізнялося від UT1 більш, ніж на ± 0,9 секунди. Вважається, що в такі дні після часу 23:59:59 йде 23:59:60 [7]. Оголошення про додаткову секунду здійснюється Міжнародною службою обертання Землі. Теоретично можливо оголошення негативною додаткової секунди, якщо середня сонячна доба виявляться коротше календарних (при цьому після 23:59:58 наступна секунда буде 00:00:00). На практиці негативні додаткові секунди ніколи не оголошувалися. Оскільки обертання Землі поступово сповільнюється, різниця між середньою сонячною добою і добою в СІ (що має рівно 24 години =86400 с) у середньому зростає [8,9]. Уповільнення через приливне тертя і зміна форми Землі, як основні чинники цієї складної залежності, вимагають вводити додаткові секунди з прискоренням приблизно 64 секунд/вік^2. Як наслідок, в майбутньому додаткові секунди необхідно буде вводити все частіше і частіше, в кожному наступному столітті треба буде вводити приблизно на 64 секунди більше, ніж в попередньому. Так, в XXII столітті вже потрібно буде вводити, в середньому, по дві секунди на рік, а через 2000 років – приблизно раз на місяць [10].

Одиниця сили струму – ампер.

Як відомо, фізична величина сили струму – це кількість заряду, що проходить через переріз провідника за одну секунду. Тому доцільно за одиницю сили струму було б прийняти саме значення цього заряду, який, наприклад, був би кратний заряду електрона. Але це не можна було реалізувати з достатньою точністю.

У 1893 році Міжнародний конгрес електриків у Чикаго затвердив перший еталон сили струму – ампер (на честь французького фізика і інженера, математика, хіміка Андре-Марі Ампера, 1775-1836 рр.), який отримав назву міжнародний ампер, а одиниця ампера визначалася так: "Міжнародний ампер – незмінний струм, який проходячи через водний розчин азотнокислого срібла за дотриманням прикладеної інструкції і специфікації виділяє 0,001118 грама срібла за 1 секунду".

У 1948 році IX ГКМВ ухвалила визначення одиниці ампера, *в основу якого покладено закон взаємодії струмів*.



Ампер дорівнює силі незмінного струму, який проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і занадто малої площі круглого поперечного перерізу розташованих у вакуумі на відстані 1 м один від одного, викликав би на кожній ділянці провідника довжиною 1 м силу взаємодії, що дорівнює $2\cdot10^{-7}$ Н.

Число $2\cdot10^{-7}$ Н взяте тому, що спочатку ампер визначався для системи одиниць СГС, і сила взаємодії між провідниками повинна була дорівнювати 2 дини на сантиметр довжини, якщо вони розташовані на віддалі 1 см. Державний первинний еталон ампера дозволяє відтворювати розмір одиниці з похибкою, що не перевищує $1\cdot10^{-3}$ %.

Історична довідка.

З моменту введення ампера як одиниці вимірювання сили електричного струму, його визначення набуло декількох змін. Спочатку визначення ампера повністю базувалось на законі Ома, а саме, як сила струму, що протікає в провіднику з опором 1 Ом при різниці потенціалів 1 В. Труднощі практичного відтворення встановленої так одиниці призвели до введення міжнародних електричних одиниць, які базувались на речовинних еталонах, та нового визначення ампера – як незмінний струм, що виділяє з розчину азотнокислого срібла ($AgNO_3$) за 1 секунду 1,118 мг срібла. Згодом, вдосконалення електричних вимірювань дозволило з 1948 р. відмовитись від речовинного еталону ампера.

Пропозиція перевизначення ампера

Замість того, щоб визначати ампер через силу взаємодії двох провідників, існує пропозиція визначити його через потік елементарних електричних зарядів. Оскільки кулон приблизно дорівнює $6{,}2415093\times10^{18}$ елементарних зарядів, один ампер приблизно дорівнює $6{,}2415093\times10^{18}$ зарядів, що рухаються через перетин провідника за секунду. Якщо відмовитися від слів «приблизно», то елементарний електричний заряд як фундаментальна фізична стала буде визначений точно. Міжнародний комітет мір і ваг на своїй конференції 2005 року погодився вивчити цю пропозицію, що і було зроблено на 25-й ГКМВ 2014 року, але за результатами обговорення визначення ампера і кулона залишилося незмінним [11,12].

У наш час найточніше визначення ампера знову зводиться до використання закону Ома, оскільки необхідні для цього величини: вольт і ом можна з великою точністю визначити, використовуючи ефект Джозефсона і квантовий ефект Хола.

Рис. 3. Термометр Галілея [13]

Одиниця температури – кельвін.

Кількісне вимірювання температури з моменту винаходу термометра Галілеєм (рис.3) у 1598 р. (Ґалілéо ді Вінчéнцо Бонаю́ті де Ґалілéй, італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei, 1564-1642 рр.) ґрунтувалося на використанні властивостей термометричної речовини (газу, рідини) і пов’язано, у першу чергу, з іменами таких вчених, як Фаренгейт, Реомюр, Цельсій, Томсон (Кельвін). Відповідно їх іменам існували і різні шкали для кількісного визначення значення температури, що зумовлено відсутністю еталону її вимірювання.

У шкалі Фаренгейта (Daniel Gabriel Fahrenheit, 1686-1736 рр., німецький вчений, інженер і склодув), який використовував ртутний термометр (1724 р.), реперами були три точки: стабільна температура суміші (1:1:1) лід-вода-нашатир(хлорид амонію NH_4Cl) прийнята за 0, танення льоду, якому вже пізніше поклали 32 °F, і температура людського тіла 96 °F, (після чого температура кипіння води виявилася рівною 212 °F – це значення теж було приписано пізніше). З нею корелює шкала (градус) Ренкіна (°Ra) 1°Ra = 1 °F = 5/9 °C. Розмір градуса Ренкіна дорівнює розміру градуса Фаренгейта, але відлік температурної шкали Ренкіна починається з абсолютного нуля температури: t_{Ra}=5/9t_F – 273,15. Температурні шкали Фаренгейта та Ренкіна досі застосовуються в англомовних країнах, зокрема у Великобританії та США. У шкалі Реомюра (Рене Антуан Фершо де Реомюр, 1683-1757 рр., французький вчений, відомий дослідженнями з біології і металургії), запропонованій ним у 1730 р., один градус (°R) дорівнює 1/80 частині температурного інтервалу між двома реперними точками – температурою танення льоду (0 R) і кипіння води (80 R), тому 1°R = 1,25 °C (така шкала була пов'язана з тим, що об'єм спирту, у винайденому ним спиртовому термометрі, при нагрівання від 0 R до температури кипіння води розширюється на 8 %, а тому нагрівання на 1 R приведе до збільшення об'єму спирту на 0,001 частину). У 1742 р. Цельсій (Anders Celsius, 1701-1744 рр., шведський астроном, геолог та метеоролог) на підставі ідеї температурного інтервалу Реомюра (танення льоду – кипіння води) представив нову 100-градусну температурну шкалу, в якій точці танення льоду присвоєно значення 100 (пізніше змінено на 0), а точці кипіння води – 0 (пізніше змінено на 100). У шкалі Кельвіна (William Thomson, Baron Kelvin) реперними точками є точка, що відповідає абсолютному нулю (коли поступальний рух молекул припиняється), і потрійна точка води, коли вона одночасно перебуває в рідкому, твердому й газоподібному станах.

Вільям Томсон (лорд Кельвін) 26.06.1824 – 17.12.1907, британський (шотландско-ірландський) фізик і механік, відомий своїми роботами в області термодинаміки, механіки, електродинаміки; є автором (співавтором) 25 книг, 660 наукових статей і 70 винаходів. За великий внесок у науку в 1865 році був зведений у дворянське достоїнство, а в 1892 році королева Вікторія надала Томсону спадкове перство з титулом "барон Кельвін", а за видатні наукові заслуги йому було присвоєно титул лорда Кельвіна (за назвою річки, що протікає поблизу університету, де він працював довгі роки) з правом засідати у палаті Лордів, в результаті чого він став відомий як «лорд Кельвін». У 1896 році Томсон був обраний почесним членом Санкт-Петербурзької Академії наук. На його честь названа одиниця вимірювання абсолютної температури – кельвін. (Цікавий факт: Вільям Томсон був критиком теорії еволюції в біології. Вік Землі оцінювався ним в 20-40 мільйонів років, оскільки його ж оцінка розрахунків віку Сонця, в якому, на його думку, проходять хімічні процеси горіння, що і є джерелом сонячної енергії, вказувала на недостатність історичного часу для того, щоб еволюція тваринного світу призвела до сучасного стану.) [14]

В середині XVIII ст. У.Томсон (Кельвін) показав, що можна встановити термодинамічну температурну шкалу, яка б не залежала від термометричної речовини. Це ґрунтується на II-му принципі термодинаміки: при здійснені тепловим двигуном циклу Карно випливає, що відношення абсолютних температур T_1/T_2 (нагрівача і холодильника) дорівнює відношенню кількостей теплоти Q_1/Q_2 (що поглинає і віддає робоче тіло) і це відношення не залежить від властивостей робочого тіла (речовини). Тому вимірюючи з достатньою точністю Q_1 і Q_2, можна визначити температуру об'єкта, а встановлена так термодинамічна температурна шкала не буде залежати від властивостей термометричної речовини. Ця шкала дістала назву шкала абсолютних температур (Т) або шкала Кельвіна (К), а її інтервал у 1 градус (ΔT=1 К) прийнятий рівним 1 ^{o}C (тобто інтервалу градуса Цельсія).

У.Томсон і незалежно від нього Д. І. Мендєлєєв довели доцільність побудови шкали кельвіна за однією реперною точкою – потрійною точкою води, оскільки це дозволяє визначити абсолютну температуру точніше, ніж шкала з двома реперними точками. Так, похибка відтворення точки кипіння води становить 0,002-0,01 ^{o}C, точки танення льоду – 0,0002-0,001 ^{o}C, потрійної точки води – 0,0001 ^{o}C.

У 1954 р. X ГКМВ ухвалила рішення про термодинамічну шкалу температур з однією реперною точкою – потрійною точкою води ($T_{п.т.в.}$= 273,16 К, вища за точку танення льоду на 0,01 ^{o}C; взагалі то є і друга точка – точка абсолютного нуля, 0 К), і прийняла таке визначення одиниці температури:

Кельвін – дорівнює 1/273,16 частини термодинамічної температури потрійної точки води.

Вимірювання температури за термодинамічною шкалою реалізується за допомогою газових термометрів, а це пов'язано із серйозними труднощами. Тому було запропоновано побудувати та прийняти до використання Міжнародну практичну температурну шкалу.

Визначальна ознака МПТШ – сукупність реперних точок якнайширшого діапазону температури, що відповідають рівноважним станам деяких чистих речовин, за яких температура є завжди стабільною. МПТШ кілька разів вдосконалювалася. Уперше її було прийнято 1928 на основі 6 реперних точок, що визначали процеси випаровування, плавлення і затвердіння речовин у діапазоні від -182,19 °C (кипіння кисню) до +1063 °C (затвердіння золота). Наступними були міжнародна шкала прийнята у 1948 р. (IX ГКМВ), Тимчасова температурна шкала 1976 р. (ТТШ-76), а потім у 1968 р. МПТШ-68, яка мала вже 11 основних реперних точок, що відтворювали рівноважні стани чистих речовин водню, неону, кисню, води, цинку, срібла, золота (табл.1) та ряд вторинних (постійних) реперних точок, деякі з них (для металів) також вказані в табл.1 [15].

Таблиця 1.
Реперні точки Міжнародної практичної температурної шкали (1968)[15]

Стан рівноваги	Привласнене значення температури	
	T_{68}, К	t_{68} °С
Потрійна точка рівноважного водню (H_2)	13,81	-259,34
Рівновага між рідкою і газоподібною фазами рівноважного водню за тиску 33330,6 Н/м (25/76 норм. атм.)	17,042	-256,108
Точка кипіння рівноважного водню (H_2)	20,28	-252,87
Точка кипіння неону (Ne)	27,102	-246,048
Потрійна точка кисню (O_2)	54,361	-218,789
Точка кипіння кисню (O_2)	90,188	-182,962
Потрійна точка води (H_2O)	273,16	0,01
Точка кипіння води (H_2O)	373,15	100
Точка твердіння цинку (Zn)	692,73	419,58
Точка твердіння срібла (Ag)	1235,08	961,93
Точка твердіння золота (Au)	1337,58	1064,43
Вторинні (постійні) реперні точки (метали)		
Точка твердіння ртуті (Hg)	234,288	-38,862
Точка твердіння індію (In)	429,784	156,634
Точка твердіння олова (Sn)	505,118	231,9681
Точка твердіння вісмуту (Bi)	544,592	271,442
Точка твердіння кадмію (Cd)	594,258	321,108
Точка твердіння свинцю (Pb)	600,652	327,502
Точка твердіння сурми (Sb)	903,89	630,74
За винятком потрійних точок і точки 17,042 К рівноважного водню, значення *T* дійсні для станів рівноваги за тиску 101325 Па.		

Для відтворення будь-якого значення температури від 630,74 °С до 13,81 К по МПТШ-68 використовують платиновий термометр опору (точність ~ 0,001 К); у діапазоні 630,74–1064,43 °С – термопару з електродами платино-родійовий сплав(Rh 10 %)–платина; вище 1337,58 К (1064,43 °С) визначають за законом випромінювання Планка. Температура вище 13,8 К за МПТШ-68 відрізняється від достеменного термодинамічного значення не більше ніж на 0,01 К.

Нині чинна МТШ-90, яку ККТ ухвалив у 1990 р. (Державним стандартом України введена з 30.03.2001), нараховує 17 основних реперних точок (табл.2) [16].

МТШ-90 базується на ряді відтворюваних рівноважних станів речовин – основних реперних точках, яким положенням про МТШ-90 приписані певні значення температури, та на еталонних термометрах, градуйованих за цих температур. В інтервалах між температурами реперних точок інтерполяцією здійснюють за формулами, які встановлюють зв'язок між показами еталонних термометрів і значеннями температури. Основні реперні точки реалізуються як певні стани фазових рівноваг (дво- або трифазних) ряду чистих речовин, які характеризуються високою відтворюваністю і стабільністю температури. До двофазних рівноважних станів належать точки кипіння, плавлення і тверднення, до трифазних – потрійна точка речовини. Основні реперні точки МТШ-90 і вторинні (постійні) наведено в табл.2 і 3 [17].

Таблиця 2.
Реперні точки Міжнародної температурної шкали МТШ-90 [16,17]

№ точки	Речовина	Тип точки (стан речовини)	T_{90}, K	t_{90}, °C
1	He	$P_{н.с.}$	від 3 до 5	від -270,15 до -268,15
2	p-H_2	ПТ	13,8033	–259,3467
3	p-H_2 (або He)	$P_{н.с.}$ (або ГТV)	≈17	≈ –256,15
4	p-H_2 (або He)	$P_{н.с.}$ (або ГТV)	≈20,3	≈ –252,85
5	Ne	ПТ	24,5561	–248,5939
6	O_2	ПТ	54,3584	–218,7916
7	Ar	ПТ	83,8058	–189,3442
8	Hg	ПТ	234,3156	–38,8344
9	H_2O	ПТ	273,16	0,01
10	Ga	ТП	302,9146	29,7646
11	In	ТТ	429,7485	156,5985
12	Sn	ТТ	505,078	231,928
13	Zn	ТТ	692,677	419,527
14	Al	ТТ	933,473	660,323
15	Ag	ТТ	1234,93	961,78
16	Au	ТТ	1337,33	1064,18
17	Cu	ТТ	1357,77	1084,62

символ **p-H_2** означає рівноважний склад молекулярних модифікацій орто- і параводню; **ТП** – точка плавлення і **ТТ** – точка тверднення (температура рівноваги рідкої і твердої фаз за тиску 101325 Па); **$P_{н.с.}$** – тиск насиченої пари; **ПТ** – потрійна точка (температура рівноваги між трьома фазами речовини); **ГТV** – газовий термометр постійного об'єму.

Таблиця 3.

Вторинні (постійні) реперні точки МТШ-90 [17]

№ п/п	Реперная точка	Темпера-тура, °С	Відтворю-ваність, °С
1	Точка кипіння азоту	-195,798	0,002
2	Точка сублімації двоокису вуглецю	-78,464	0,003
3	Точка плавлення евтектики Ga/20.5%In	15,650	0,001
4	Точка плавлення евтектики Ga/8%Sn	20,476	0,002
5	Точка затвердіння натрію	97,794	0,005
6	Точка кипіння води	99,974	0,001
7	Точка затвердіння бензойної кислоти	122,352	0,007
8	Точка затвердіння вісмуті	271,402	0,001
9	Точка затвердіння кадмію	321,069	0,001
10	Точка затвердіння свинцю	327,462	0,001
11	Точка кипіння сірки	444,614	0,002
12	Точка затвердіння сурми	630,628	0,001
13	Точка плавлення евтектики Cu/71.9%Ag	779,63	0,05
14	Точка кипіння натрію	882,940	0,005
15	Точка затвердіння нікелю	1455	1
16	Точка затвердіння кобальту	1495	3
17	Точка затвердіння паладію	1554,8	0,1
18	Точка затвердіння платини	1768,2	0,4
19	Точка затвердіння родію	1963	3
20	Точка плавлення оксиду алюмінію	2053	2
21	Точка затвердіння іридію	2446	6
22	Точка плавлення молібдену	2622	4
23	Точка плавлення вольфраму	3414	7

Положенням про МТШ-90 встановлено таке визначення цієї шкалі:

– у діапазоні від 0,65 до 5,0 К температуру T_{90} визначено залежністю тиску p насиченої пара ізотопів гелію ^{3}He і ^{4}He від температури ($T_{90} = A_0 + \sum_{i=1}^{9} A_i (\frac{\ln p - B}{C})^i$, де A_0, A_i, B, C – коефіцієнти);

– у діапазоні від 3,0 К до потрійної точки неону (24,5561 К) T_{90} визначають за допомогою гелієвого газового термометра (градуйованого в трьох реперних точках) і встановлених інтерполяційних формул;

– у діапазоні від потрійної точки рівноважного водню (13,8033 К) до точки тверднення срібла (961,78 °С) T_{90} визначають за допомогою платинових термометрів опору, які градуйовано у певних наборах основних реперних точок, із застосуванням установлених інтерполяційних формул;

– вище T=961,78 °C температуру T_{90} визначають відповідно до закону випромінювання Планка за допомогою одної з трьох реперних точок: тверднення срібла, золота або міді.

В Україні принципи побудови температурних шкал та методи їх здійснення регламентує Держстандарт ДСТУ 4017-2001 «Метрологія. Шкали температурні» (2001), в основі якого – положення МКМВ про МПТШ. Вивченням температурних шкал займається галузь прикладної фізики – термометрія (розділ метрології). МТШ-90 є результатом досліджень у галузі акустичної термометрії, пірометрії (радіаційної термометрії), шумової термометрії тощо. Нині вона – найточніша апроксимація термодинамічної температурної шкали [18].

На даний час визначення одиниці температури, кельвіна, прив'язано до стану конкретної речовини – води, а саме до температури потрійної точки води. Але її властивості залежить від її ізотопного складу атомів молекули води, наявністю домішок тощо і тому характеризується істотною невизначеністю. Та вже починаючи з початку 2000-х років внаслідок досліджень у сфері нанотехнологій шість (м, А, кг, с, моль, кд) із семи основних одиниць системи СІ були виражені через фундаментальні фізичні сталі, а первинні еталони часу, електричного опору, напруги і зв'язаних з ними ФВ реалізуються на фундаментальних квантових ефектах (див. Тему 5). Тому на часі питання про можливість реалізації квантового еталона одиниці температури на основі існуючих квантових еталонів і такі дослідження вже ведуться в Україні [19].

Одиниця сили світла – кандела (від латинського: candela - свіча)

Рис. 4.
Лампа Хефнера – еталон «свічки Хефнера» [20]

Сила світла – характеризує величину світлової енергії, що переноситься в деякому напрямку за одиницю часу. У 1881 році на Міжнародному конгресі електриків був прийнятий еталон світла – одиниця Віоля. Одиниця Віоля – це сила світла, яка випромінюється з 1 см^2 поверхні платини, що перебуває у стані тверднення, у напрямку нормалі до цієї поверхні. Пізніше, у 1889 р., за практичну одиницю світла була прийнята 1/20 одиниці Віоля.

Однак практична реалізація еталона одиниці Віоля викликала значні труднощі. Тому у 1893 р. Міжнародний конгрес електриків приймає за еталон лампу Хефнера-Альтенека, а пізніше – керамічні трубки та інші джерела світла, зокрема, електродугові. Цей еталон і джерела на його ґрунті – "свічка Хефнера" була прийнята спочатку в Німеччині, а потім в Австрії, Швейцарії та скандинавських країнах. Широко використовувалася в Росії. Свічка Хефнера становила приблизно 0,903 від сучасної одиниці кандели.

У 1884 р. німецький інженер-електротехнік Фрідріх фон Хефнер-Альтенек (1845-1904, Friedrich von Hefner-Alteneck), запропонував еталон «лампа Хефнера» (рис.4) і, відповідно до нього, одиницю сили світла <u>«свічка Хефнера»</u>. Еталон – це ґнотова лампа спеціальної конструкції, в якій як пальне використовувався амілацетат (аміловий ефір оцтової кислоти, пентілацетат, $C_7H_{14}O_2$ – структурна формула $CH_3(CH_2)_4OCOCH_3$ – застосовується як розчинник багатьох органічних сполук, у виробництві лаків, штучного шовку, фруктових есенцій). Горіння такої лампи було рівномірним і усестороннє вивченим у різних країнах[20].

На IX ГКМВ у 1948 р. було прийняте нове найменування одиниці – "свічка" – і її визначення: <u>свічка</u> – 1/60 частина сили світла, що випромінюється 1 см^2 повного випромінювача ("чорним тілом") за температури тверднення платини (2046,6 К) у напрямку нормалі до випромінюючої поверхні.

На XII ГКМВ у 1967 р. для одиниці сили світла прийняли назву "кандела" і таке її визначення: <u>кандела</u> – сила світла, яке випромінюється з площі 1/600000 м^2 повного випромінювача в перпендикулярному до цієї площі напрямку за температури тверднення платини і тиску 101325 Па. (Повний випромінювач – це тонкостінна трубка з окису торію, занурена у платину за температури тверднення (плавлення). Нагрівання платини відбувається у високочастотній індукційній печі, а вимірювання сили світла фіксується фотоелектричним фотометром.).

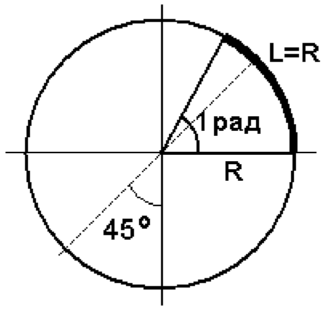
У жовтні 1979 р. на XVI ГКМВ було прийнято нове визначення кандели, яке дозволяло реалізувати еталон одиниці сили світла без створення "чорного тіла" і, відповідно, можливість підвищити точність визначення і відтворення одиниці: <u>**кандела** дорівнює силі світла</u> у заданому напрямку джерела, що висилає монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц, енергетична сила світла якого у цьому напрямку становить 1/683 Вт/ср. (Обрана частота відповідає довжині хвилі 555,016 нм у повітрі при стандартних умовах і знаходиться поблизу максимуму чутливості людського ока – 555 нм.).

<u>Одиниця речовини – моль.</u>

<u>Моль</u> (XIV ГКМВ, 1971 р.) дорівнює кількості речовини системи, що містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у вуглиці-12 масою 0,012 кг.

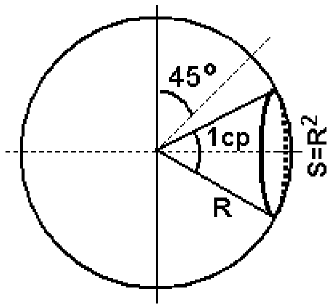
При застосуванні моля структурні елементи повинні бути специфіковані і можуть бути атомами, молекулами, іонами, електронами і іншими частинками або специфікованими групами частинок.

Додаткові одиниці СІ.



Одиниця плоского кута – радіан (rad, рад) дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу (і у 2π=6,28 раз менша за довжину кола; L(1 рад) = = R =$L_{кола}/2\pi$ = 360°/2π = 57,29578° ≈ 57,17′45″).

Одиниця тілесного кута – стерадіан (sr, ср) дорівнює тілесному куту з вершиною в центрі сфери, що вирізає на поверхні сфери площу рівну площі квадрату зі стороною, що дорівнює радіусу сфери ($S_{сфери}=4\pi R$; S(1 ср) = R^2 = $S_{сфери}/4\pi$, тобто ця площа приблизно у 12,56 разів менша площі всієї сфери; кут "розгортки" конуса 1 ср приблизно дорівнює 2·0,572 рад або ≈2·32,77° = 65,54° = = 65°32'28").



Використана література та джерела інформації

1. ДСТУ 2870-94. Вимірювання часу та частоти. Терміни та визначення.
2. Міжнародний атомний час // Астрономічний енциклопедичний словник / за заг. ред. І. А. Климишина та А. О. Корсунь. – Львів : Голов. астроном. обсерваторія НАН України : Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, 2003. – С. 292. (ISBN 966-613-263-X).
3. Корсунь А.О. Вимір часу від давніх-давен до сучасності. – К.: Техніка, 2009. –176 с. (с.65). (ISBN 978-966-575-164-9)]
4. Public Domain: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1233186 (https://uk.wikipedia.org/wiki/секунда).
5. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Deviation of day length from SI day.svg
6. IERS Bulletin A - latest issue (en). IERS. 2020-07-09. (https://uk.wikipedia.org/wiki/високосна_секунда)
7. ГОСТ ИСО 8601-2001 СИБИД. Представление дат и времени. Общие требования. (https://ru.wikipedia.org/wiki/дополнительная секунда/)

8. Morrison, L. and Stephenson, F. R. Historical Values of the Earth's Clock Error ΔT and the Calculation of Eclipses (англ.) // J. Hist. Astron. – 2004.– August (Vol. 35 Part 3, no. 120). – P. 327—336. (https://ru.wikipedia.org/wiki/дополнительная секунда/)
9. Delta T values. IERS Rapid Service/Prediction Center (7 июля 2018). (https://ru.wikipedia.org/wiki/дополнительная секунда/).
10. Maxwell F.X. Paláu. Coordinated Universal Time (UTC). StarDude Astronomy. (Дата 9 января 2016). (https://ru.wikipedia.org/wiki/дополнительная секунда/)
11. Наказ Міністерства економічного розвитку та торгівлі України від 25.08.2015 № 914. Про затвердження визначень основних одиниць SI, назв та визначень похідних одиниць SI, десяткових кратних і частинних від одиниць SI, дозволених позасистемних одиниць, а також їх позначень та Правил застосування одиниць вимірювання і написання назв та позначень одиниць вимірювання і символів величин.
12. ДСТУ 3651.0-97 Метрологія. Основні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та позначення.
13. Автор: Ali@gwc.org.uk - Власна робота, CC BY-SA 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=369907).
14. https://younglibzp.com.ua/vilyam-tomson-lord-kelvin-do-195-richchya-vid-dnya-narodzhennya-vidatnogo-fizika-odnogo-z-osnovopolozhnikiv-termodinamiki/ .
15. ГОСТ 8.157-75 ГСИ: Шкалы температурные практические. (http://www.gosthelp.ru/text/GOST815775Gosudarstvennay.html).
16. ДСТУ 4017-2001 Метрологія. Шкали температурні (видання офіційне). Київ. Держстандарт України. 2001.
17. http://temperatures.ru/pages/repernye_tochki_mtsh_90 .
18. стаття А.М. Негрійко: http://esu.com.ua/search_articles.php?id=67466 H. Preston-Thomas. The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90) // Metrologia. 1990. Vol. 27; Кунець І., Микитин І. Аналітичний огляд реперних точок температури // Вимірювал. техніка та метрологія: Зб. наук. пр. Л., 2015.)
19. Стадник Б.І, Яцишин С.П. Подальший розвиток підходів кельвіна у створенні абсолютної шкали температур. Термоелектрика №1, 2017 с.91-102. (ISSN 1726-7714).
20. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3676596 .

Тема 3.2. Похідні одиниці системи SI та позасистемні одиниці

Крім 7 основних одиниць і 2 додаткових одиниць для вимірювання плоского і тілесного кутів – *радіан* і *стерадіан* відповідно, система СІ включає також велику кількість *похідних* одиниць простору і часу, механічних величин, електричних і магнітних величин, теплових, світлових та акустичних величин, одиниці вимірювання іонізуючих випромінювань. Крім того, СІ допускає до застосування ряд *позасистемних* одиниць, що були застосовні і раніше та набули широкого використання у практичних вимірюваннях.

Нотатки щодо побудови одиниць і систем одиниць ФВ.

Якщо раніше одиниці вимірювання фізичних величин (ФВ) встановлювалися незалежно одна від одної (за винятком одиниць довжини, площі та об'єму), то особливістю сучасних одиниць є встановлення зв'язку між одиницями. При цьому, взагалі кажучи, довільно вибирають декілька основних одиниць ФВ, а інші, похідні, одержують за допомогою залежностей (законів і визначень), що зв'язують різні ФВ. Відповідно і фізичні величини поділяють на основні і похідні ФВ. Сукупність одиниць ФВ, які охоплюють всі або деякі області фізики, називають *системою одиниць* фізичних величин. Відповідно сукупність одиниць системи називають системними одиницями, а ту що не входять в дану систему – позасистемними одиницями.

Нехай вибрано декілька основних фізичних величин, A, B, C, D, одиниці яких [a], [b], [c], [d]. Тоді встановлення похідної одиниці $[x]$ зводиться до вибору деякого визначального рівняння, що зв'язує величину X з іншими (основними і похідними) ФВ, і приведення цього рівняння до вигляду: $X = k_x \cdot A^{na} \cdot B^{nb} \cdot C^{nc} \cdot D^{nd}$,

де na, nb, nc, nd – показники степеня ФВ у формулі [1]. Знаючи, що $A=N_A[\mathrm{a}]$, $B=N_B[\mathrm{b}]$, … (N_A – числове значення фізичної величини A) записуємо формулу (рівняння) для X, беручи значення ФВ та її розмірність у відповідну степінь:

$$X = N_X[x] = k_x(N_A)^{na} \cdot (N_B)^{nb} \cdot (N_C)^{nc} \cdot (N_D)^{nd} \cdot [\mathrm{a}]^{na} \cdot [\mathrm{b}]^{nb} \cdot [\mathrm{c}]^{nc} \cdot [\mathrm{d}]^{nd},$$

тоді одиницю похідної ФВ потрібно записати у вигляді

$$[x] = k_x \cdot [\mathrm{a}]^{na} \cdot [\mathrm{b}]^{nb} \cdot [\mathrm{c}]^{nc} \cdot [\mathrm{d}]^{nd},$$

тобто значення вибраної одиниці ФВ необхідно підносити у той же степінь, що й значення N самої ФВ.

Якщо при встановленні похідної одиниці $[x]$ через основні приймають k_x=1, то така похідна одиниця називається *когерентною одиницею*, а таким чином побудована система одиниць – когерентною системою. Система СІ являється когерентною системою одиниць фізичних величин. У випадку, коли всі степені ni=0, то похідна ФВ називається безрозмірною (немає розмірності).

Запис похідної одиниці $[x]$ через основні записується використовуючи *формулу розмірності* у вигляді

$$\dim x = \cdot[a]^{na}\cdot[b]^{nb}\cdot[c]^{nc}\cdot[d]^{nd} \quad (\textit{dimention } x).$$

Таблиця 1. Метрологічні позначення розмірності основних одиниць СІ.

Фізична Величина	Одиниця вимірю-вання	Скорочене позначення одиниці		Метрологічне позначення розмірності
		Українське	Міжнародне	
Довжина	метр	м	m	L
Маса	кулограм	кг	kg	M
Час	секунда	с	s	T
Сила електричного струму	ампер	А	A	I
Термодинамічна температура	кельвін	К	K	θ
Сила світла	кандела	кд	cd	J
Кількість речовини	моль	моль	mol	N

Похідні одиниці системи СІ, утворені за раціоналізованими (когерентними) рівняннями, за кількістю і складом основних одиниць поділяються на 5 груп.

1. Механічні, акустичні і енергетичні одиниці – 3-х розмірна система одиниць M, L, T.
2. Електричні і магнітні одиниці – 4-х розмірна система одиниць M, L, T, I.
3. Теплові одиниці – 4-х розмірна система одиниць M, L, T, θ.
4. Світлові одиниці – 4-х розмірна система одиниць M, L, T, J.
5. Одиниці молярних величин утворюються від одиниці N (моль).

Розмірність відображає якісну сторону фізичної величини: для них немає дії додавання або віднімання – ці дії не призводять до отримання нової розмірності, на відміну від дій множення та ділення. Однак розмірність не повністю відбиває фізичний зміст даної величини: існує багато величин за фізичним змістом різних, але з однаковою розмірністю. Наприклад, механічна робота ($A=F \cdot L$, Дж) і момент сили ($M_F = F \cdot R$, Н·м) мають розмірність L^2MT^{-2}; частота ν (Гц) і активність нукліда у радіоактивному джерелі (кількість актів розпаду за секунду) – їх розмірність T^{-1}; швидкість і коефіцієнт дифузії – LT^{-1}.

З іншої сторони розмірність – більш загальна характеристика ФВ, ніж рівняння, що її визначає, оскільки одна і та ж розмірність може бути у фізичних величин, що визначаються за допомогою різних рівнянь. Наприклад, механічна робота ($A=F \cdot L$), енергія кінетична ($E=mv^2/2$) або потенціальна ($E=mgh$), кількість теплоти, що виділяється електричним провідником ($Q=I^2Rt$) або передається тілу ($Q=cm(T_1-T_2)$. Отже, однаковість розмірності визначається не фізичним змістом, а лише зв'язком даної величини з основними величинами системи одиниць. Розмірність має корисне застосування при перевірці однорідності фізичних рівнянь, їх правильного формульного запису.

Поряд з основними та похідними одиницями СІ у практиці вимірювань ще вживаються найменування одиниць, які не входять у СІ або навіть не входили до складу жодної із попередніх систем – позасистемні одиниці. Значного поширення набули одиниці тиску: атмосфера, бар, міліметр ртутного стовпа, міліметр водяного стовпа. Позасистемними одиницями є хвилина, година; одиницями довжини – ангстрем, світловий рік, парсек; одиницями площі – ар, гектар; одиницями електричної енергії – електрон-вольт, кіловат-година; одиницями акустичних величин – децибел, фон, октава та ін. Однак при уніфікації одиниць й ухваленні єдиної системи одиниць кількість позасистемних одиниць повинна бути скорочена до мінімуму. До того ж багато позасистемних одиниць є кратними системі СІ і можуть використовуватися для практичних вимірювань (тонна, міліметр, мікрон та ін.) Вони широко застосовуються в повсякденному житті. Крім названих, існують ще позасистемні одиниці тимчасового використання (морська миля, яка дорівнює 1852 м; кабельтов – 182,5 м; гектар – 10000 м^2; ар – 100 м^2, бар – 10^5 Па, карат – 0,2 г; бушель – 36,3687 дм^3 та ін.), а також відносні та логарифмічні величини.

Позасистемні одиниці та їх співвідношення з СІ

Позасистемні одиниці, що допускаються до застосування нарівні з одиницями СІ.

1. Маса – тонна (т, t) – 1 т = 10^3 кг (kg);
   центнер (ц, z) – 1 ц = 100 кг;
   уніфікована атомна одиниця маси (а.о.м., u) – 1 а.о.м. = $1{,}66054\cdot10^{-27}$ кг.
2. Час – хвилина (хв., min), година (год, h), доба (доба, d) = 86400 с (s);
   тиждень, місяць, рік, тощо.
3. Плоский кут – градус (°) – $1^o = \pi/180$ рад (rad) = $1{,}745329\ldots\cdot10^{-2}$ рад (rad);
   мінута (') – $1' = \pi/10800$ рад (rad) = $2{,}908882\ldots\cdot10^{-4}$ рад (rad);
   секунда (") – $1'' = \pi/648000$ рад (rad)=$4{,}848137\ldots\cdot10^{-6}$ рад (rad);
   $1^o = 60'$, $1' = 60''$, $1^o = 3600''$.
4. Об'єм, місткість – літр (л, l) – 1 л = 1 $дм^3$ = 10^{-3} $м^3$ (літр є спеціальною назвою кубічного дециметра)
5. Довжина – астрономічна одиниця (а.о., u.a.) – 1 а.о. ≈ $1{,}45598\cdot10^{11}$ м (m);
   світловий рік (св.рік, ly) – 1 св.рік ≈ $9{,}4605\cdot10^{15}$ м (m);
   парсек (пк, pc) – 1 пк ≈ $3{,}0857\cdot10^{16}$ м (m); 1 пс = 3,26 св.рік.
6. Площа – гектар (га, ha) – 1 га = $100\cdot100$ $м^2$ = 10^4 $м^2$;
7. Оптична сила – діоптрія (дптр або D) – 1 $м^{-1}$ (m^{-1}): $D=1/F$,
   F – фокусна відстань лінзи.
8. Енергія – електрон-вольт (еВ, eV) – 1 еВ ≈ $1{,}60219\cdot10^{-19}$ Дж (J).
9. Потужність струму – вольт-ампер (В·А, V·A) (застосовується в електротехніці.

Співвідношення деяких позасистемних одиниць з одиницями СІ.

1. Довжина – ангстрем (Å, Å) – 10^{-10} м;
   ікс-одиниця (X, ікс.од.) – $1{,}00206\cdot10^{-13}$ м.
   Площа – ар (а, a) – 100 $м^2$;
   барн (б, b) – 10^{-28} $м^2$ [$(10^{-14}$ м$)^2$ – застосовне в ядерній фізиці].
2. Прискорення – гал (Гал, Gal) – 0,01 $м/с^2$.
3. Тиск – міліметр ртутного стовпчика (мм рт.ст., mm Hg) – 133,322 Па.
4. Механічна потужність – кінська сила (к.с.) – 735,499 Дж.
5. В'язкість: динамічна в'язкість – пуаз (П, P) – 0,1 Па·с.
   кінематична в'язкість – стокс (Ст, St) – 10^{-4} $м^2/с$.
6. Магнітна індукція – гаус (Гс, Gs) – 10^{-4} Тл.
7. Напруженість магнітного поля – ерстед (Е, Oe) – $10^3/4\pi$ = 79,5775 А/м.
8. Кількість теплоти – калорія (кал, cal) – 4,1868 Дж.
9. Поглинута доза випромінювання – рад (рад, rad) – 0,01 Гр (Грей).
10. Еквівалентна доза випромінювання – бер (бер, rem) – 0,01 Зв (Зіверт).
11. Експозиційна доза фотонного (гамма і рентгенівського) випромінювання – рентген (Р, R) – $2{,}58\cdot10^{-4}$ Кл/кг.
12. Активність нукліда у радіоактивному джерелі – кюрі (Кі, Ci) – $3{,}7\cdot10^{10}$ Бк (Беккерель).
13. Яскравість – ніт (нт, nt) – 1 $кд/м^2$ (cd/m^2)

Одиниці іонізуючих випромінювань СІ та їх визначення.

<u>Поглинута доза випромінювання D:</u> – **Грей** (Гр, G) – відповідає енергії 1 Дж іонізуючого випромінювання будь-якого виду, *переданій* опроміненій речовині (енергія *передана* речовині, а отже *поглинута* нею) масою 1 кг: $D = W/m$ Гр; 1 Гр = (1 Дж)/(1 кг) = $м^2/с^2$.

<u>Еквівалентна доза іонізуючого випромінювання Н</u> – це добуток *поглинутої* дози D на середній коефіцієнт якості іонізуючого випромінювання k в даному елементі об'єму біологічної тканини *стандартного складу*: $H = D{\cdot}k$. (В якості біологічної тканини стандартного складу приймається рекомендований ККЕІВ такий склад: О – 76,2 %, С – 11,1 %, Н – 10,1 %, N – 2,6 %.)

Зіверт (Зв, Sv) – дорівнює еквівалентній дозі, при якій добуток $D{\cdot}k$ = 1 Дж/кг = $м^2/с^2$. Еквівалентна доза іонізуючого випромінювання є основною величиною, яка визначає рівень радіаційної небезпеки при хронічному опроміненні людини в малих дозах. Дози є допустимими до застосування, якщо їх сумарне значення не перевищують <u>250 мЗв</u> при опроміненні всього тіла людини протягом року.

<u>Потужність еквівалентної дози – Зв/с</u>. На дозиметричних приладах шкала проградуйована у мкЗв/год. Природній фон створює потужність в межах 0,05-0,2 мкЗв/год. Допустима середньорічна потужність еквівалентної дози при опроміненні всього тіла людини дорівнює 28 мкЗв/год при 36-годинному робочому тижні (6 годин в день).

<u>Експозиційна доза фотонного випромінювання Х:</u>
– **Кулон на кілограм** (Кл/кг, C/kg) – дорівнює експозиційній дозі рентгенівського і гамма-випромінювання, при якій спряжена корпускулярна емісія у сухому атмосферному повітрі масою 1 кг виробляє іони, що несуть електричний заряд кожного знаку, який дорівнює 1 Кл: $X = Q/m$ Кл/кг; 1 Кл/кг = (1 Кл)/(1 кг) = А·с/кг.

<u>Активність нукліда А:</u> – **Беккерель** (Бк, Dq) – дорівнює активності нукліда в радіоактивному джерелі, в якому за 1 с відбувається один акт розпаду: А = N(кількість розпадів)/t(час) Бк; 1 Бк = 1/1 $с^{-1}$. Питома активність радіоактивного джерела: $A_m = A/m$ (Бк/кг=$с^{-1}{\cdot}кг^{-1}$).

Правила написання та особливості застосування (використання) кратних і часткових одиниць

Найпрогресивнішим способом утворення кратних і часткових одиниць у метричній системі мір є десяткова кратність між великими і малими одиницям. Десяткові кратні і часткові одиниці від одиниць СІ утворюються шляхом використання множників від 10^{24} до 10^{-24} або відповідних префіксів (Тема-2, табл.1).

- Назви всіх префіксів, якщо вони не починають речення, завжди пишуться з малої букви. Позначення кратних префіксів, крім *кіло, гекто, дека*, пишуться з великої букви, позначення всіх часткових префіксів завжди пишуться з малої букви.
- Префікс пишеться разом з назвою базової одиниці та утворює з нею одне слово. Наприклад, *міліметр, мегават, мікрофарад* – це завжди одне слово.
- Використання двох або більше префіксів підряд не дозволяється. Наприклад, величину 10^{-9} фарад необхідно позначати нанофарад, а не, наприклад, *<u>мікроміліфарад</u>*.
- Приєднанням префіксу до одиниці утворюється *нова нерозривна одиниця*. Ця нова одиниця може бути піднесена до додатного або від'ємного степеня та/або об'єднана з іншими одиницями для утворення складних одиниць.

  Приклад:

  $2{,}54\ см^3 = 2{,}54\ (см)^3 = 2{,}54\ (10^{-2}\ м)^3 = 2{,}54\cdot10^{-6}\ м^3$

  $1\ см^{-1} = 1\ (см)^{-1} = 1\ (10^{-2}\ м)^{-1} = 10^2\ м^{-1} = 100\ м^{-1}$

  $1\ В/см = (1\ В)/(10^{-2}\ м) = 10^2\ В/м = 100\ В/м$
- Якщо одиниця є добутком або відношенням одиниць, префікс або його позначення приєднують, як правило, до найменування або позначення першої одиниці: кПа·с/м (кілопаскаль-секунда на метр). Приєднувати префікс до другого множника добутку або до знаменника допускається лише в обґрунтованих випадках.

<u>Особливості застосування.</u>

Префікси обмежено використовуються з одиницями часу: кратні префікси взагалі не поєднуються з ними (ніхто не використовує «кілосекунду», хоча це формально і не заборонено), а частинні префікси приєднуються тільки до секунди (мілісекунда, мікросекунда і т. д.). Не допускається застосовувати з префіксами найменування і позначення таких одиниць СІ: хвилина, година, доба (одиниці часу), градус, мінута, секунда (одиниці плоского кута), астрономічна одиниця, діоптрія і атомна одиниця маси.

Префікси, відповідні показникам степеня, що не діляться на 3 (гекто-, дека-, деци-, санти-), використовувати не рекомендується. Широко використовуються тільки сантиметр (що була основною одиницею в системі СГС) і децибел, у меншій мірі – дециметр, а також гектар. У деяких країнах *вино* міряють декалітрами.

Телекомунікації

Двійкові префікси

В телекомунікаційній галузі, програмуванні та комп'ютерній індустрії широко використовуються кратні префікси *кіло, мега, гіга, тера* та інші для формування обсягів інформації кратних одиницям **біт** і **байт**. Ці одиниці інформації не є частиною системи СІ.

На початку розвитку інформаційних технологій, у зв'язку з тим, що $2^{10} = 1024$ приблизно дорівнює $10^3 = 1000$, префікси СІ використовувались для позначення степенів двійки. Згодом, з широким поширенням комп'ютерів, ця розбіжність все частіше приводила до непорозумінь. Тому в 1999 р. Міжнародна електротехнічна комісія ввела новий стандарт іменування префіксів, що позначають степінь двійки, та залишила за префіксами СІ значення степенів числа 10 [2,3].

Тепер 1 кілобайт точно дорівнює 1000 байт (10^3), а величина 1024 байт позначається як 1 кібібайт. Префікси СІ, в істинному значені – степеня числа 10, як правило, широко використовуються для позначення швидкості передачі інформації:

10 Мбіт/с позначають швидкість 10 000 000 біт/с,

а не $2^{20} = 1024^2 = 10\,485\,760$ біт/с.

Похибки, до яких може призвести помилкове тлумачення префіксів, наведені в наступній таблиці.

Префікс		Десяткове значення	Двійкове значення	Похибка
k	кіло	$10^3 = 1000$	$2^{10} = 1024$	2,40 %
М	мега	$10^6 = 1000^2$	$2^{20} = 1024^2$	4,86 %
Г	гіга	$10^9 = 1000^3$	$2^{30} = 1024^3$	7,37 %
Т	тера	$10^{12} = 1000^4$	$2^{40} = 1024^4$	9,95 %

Тема 3.3. Становлення та розвиток метрологічної діяльності та стандартизації в Україні

Верховна Рада України Постановою від 12 вересня 1991 р. №1545-12 "Про порядок тимчасової дії на території України окремих актів законодавства СРСР" продовжила чинність постанов Ради Міністрів колишніх СРСР та УРСР з питань організації робіт щодо стандартизації та метрології.

Враховуючи міжнародний характер стандартизації, метрології та сертифікації і необхідність взаємозамінності продукції, вузлів та елементів, а також усвідомлюючи важливість економічного та науково-технічного співробітництва всіх держав, 13 березня 1992 р. держави тодішнього СНД підписали угоду про проведення узгодженої політики в галузі стандартизації, метрології та сертифікації. Відповідно до цієї угоди на території України вважалися чинними стандарти колишнього СРСР.

Угода, укладена державами СНД, передбачає:

– використання і розвиток основних положень чинних систем стандартизації і метрології;
– визнання чинних стандартів ГОСТ як міжнародних;
– збереження абревіатури ГОСТу за повними міжнародними стандартами;
– визнання існуючих державних еталонів одиниць фізичних величин як міжнародних;
– проведення робіт з питань сертифікації на підставі загальних організаційно-методичних положень;
– створення міждержавної ради з проблем стандартизації, метрології та сертифікації.

Міжнародна рада з питань стандартизації, метрології та сертифікації координує і розробляє рішення щодо проведення організаційних, методичних і науково-дослідних робіт з питань стандартизації, метрології та сертифікації. До її складу входять представники держав-учасниць, які від імені держав наділяються правом бути членами ради і уповноваженими представниками держав для виконання функцій, покладених на Раду. Робочим органом Ради є постійно діючий технічний секретаріат, який знаходиться у Мінську.

Законодавчою основою національної метрологічної системи є Закон України "Про метрологію та метрологічну діяльність" від 11 лютого 1998 року №113/98-ВР, який визначає правові основи забезпечення єдності вимірювань у нашій державі, регулює суспільні відносини у сфері метрологічної діяльності та спрямований на захист громадян і національної економіки від наслідків недостовірних результатів вимірювання.

Вищим органом з питань стандартизації, метрології та якості продукції є Державний комітет України з питань стандартизації, метрології та сертифікації (Держстандарт України).

У структурі Держстандарту України нараховується 35 центрів стандартизації, метрології та сертифікації, в тому числі 26 обласних (Український науково-виробничий центр стандартизації, метрології та сертифікації, Білоцерківський, Вінницький, Волинський, Дніпропетровський, Донецький, Житомирський, Закарпатський, Івано-Франківський, Кіровоградський, Кримський, Луганський, Львівський, Миколаївський, Одеський, Полтавський, Рівненський, Тернопільський, Харківський, Херсонський, Хмельницький, Черкаський, Чернігівський, Чернівецький), 8 міських (Горлівський, Дрогобицький, Кременчуцький, Криворізький, Маріупольський, Мелітопольський, Краматорський, Червоноградський). Крім того, до складу Держстандарту України входять декілька науково-дослідних інститутів: Львівський ДНДІ "Система", Харківське науково-виробниче об'єднання "Метрологія", УНДІССІ; два навчальні заклади: вище училище метрології та якості у м. Одесі та український навчально-науковий центр у м. Києві (колишній ВІСМ); заводи "Еталон" (у Києві, Харкові, Донецьку, Умані, Білій Церкві); дослідні заводи "Прилад" (у Вінниці та Полтаві) і магазини стандартів (у Києві та Харкові).

Центри стандартизації і метрології в Україні забезпечують державний метрологічний нагляд, експертизу, контроль за дотриманням метрологічних норм і правил та єдність вимірювання і одноманітність засобів вимірювання в нашій державі.

Держстандарт України здійснює державне управління забезпеченням єдності вимірювань в Україні і організовує проведення фундаментальних досліджень в галузі метрології, створення та функціонування еталонної бази України, проведення повірок засобів вимірювальної техніки та ін. Рішення Держстандарту України з питань метрології є обов’язковими до виконання центральними та місцевими органами виконавчої влади, органами місцевого самоврядування, підприємствами, організаціями, громадянами – суб’єктами підприємницької діяльності та іноземними виробниками.

З початку XXI століття Україна активно реалізує свій державний суверенітет з метою визначення свого місця серед міжнародного товариства і забезпечення миру, стабільності, добробуту українському народу, а також заради активної участі у світовій торгівлі та науковому співробітництві.

Україні є що запропонувати своїм партнерам – від космічних технологій, продукції суднобудування до ліків і продуктів харчування. Якість вітчизняної продукції базується більш ніж на 200-річному досвіді, вона закріплена відповідними стандартами та сертифікатами. Це, зокрема, дало можливість і сприяло тому, що Україна з 2008 року є повноправним членом Всесвітньої організації торгівлі (СОТ).

5 лютого 2008 р. на засіданні Генеральної Ради СОТ прийнято рішення про приєднання України до Марракеської угоди про заснування СОТ і того ж дня Президент України (Віктор Ющенко) та керівники СОТ підписали угоду про вступ України до організації. 10 квітня 2008 року Верховна Рада ратифікувала протокол про вступ України до СОТ і стала офіційним членом СОТ, а з 16 травня 2008 р. Україна набула повноправного членства в цій організації, ставши 153-ім членом СОТ [4,5]. Станом на 2018 рік до СОТ входить 164 держави і 24 країни-спостерігачі, що перебувають у стадії переговорного процесу про вступ до СОТ.

Основними цілями СОТ є:

- підвищення життєвого рівня;
- забезпечення повної зайнятості;
- постійне зростання доходів і ефективного попиту;
- розширення виробництва товарів і послуг та торгівлі ними;
- оптимальне використання світових ресурсів з метою сталого розвитку;
- захист і збереження навколишнього середовища;
- забезпечення для країн, що розвиваються і найменш розвинених країн такої участі в міжнародній торгівлі, яка б відповідала потребам їх економічного розвитку.

Участь України у СОТ дає можливість подальшого розвитку та удосконалення національної системи стандартизації, метрології та сертифікації у напрямку зближення з міжнародними і європейськими стандартами, угодами і підходами. Цьому сприятиме участь України у Міжнародній організації з питань стандартизації (ISO), Міжнародній електротехнічній комісії (IEC), Міжнародній організації законодавчої метрології (OIML) та інших міжнародних організаціях, де її представляє Держстандарт.

Технічною основою національної метрологічної системи є система Державних еталонів одиниць фізичних величин. Очолює еталонну базу України система державних первинних еталонів (ДПЕ), які відтворюють одиниці з найвищою точністю та передають їх підпорядкованим еталонам та засобам вимірювань, що застосовуються у різних галузях економіки, соціальної сфери та оборонному комплексі країни. Станом на 2015 рік еталонна база України нараховує 69 ДПЕ та 71 вторинний еталон (ВЕ) [6]. Основу еталонної бази України становлять ДПЕ основних одиниць системи SI: метра, кілограма, ампера, секунди, кельвіна та кандели, які є фундаментом для відтворення похідних одиниць системи SI.

Еталонна база України охоплює всі види вимірювань. Кількісний розподіл ДПЕ та ВЕ за видами вимірювань наведено на рис.1. Як видно з діаграми, найбільша кількість як ДПЕ, так і ВЕ припадає на вимірювання в галузі електричних та магнітних величин і маси та пов'язаних з нею величин. Значно менша кількість еталонів знаходиться в таких галузях, як акустика, ультразвук та вібрація, час та частота.

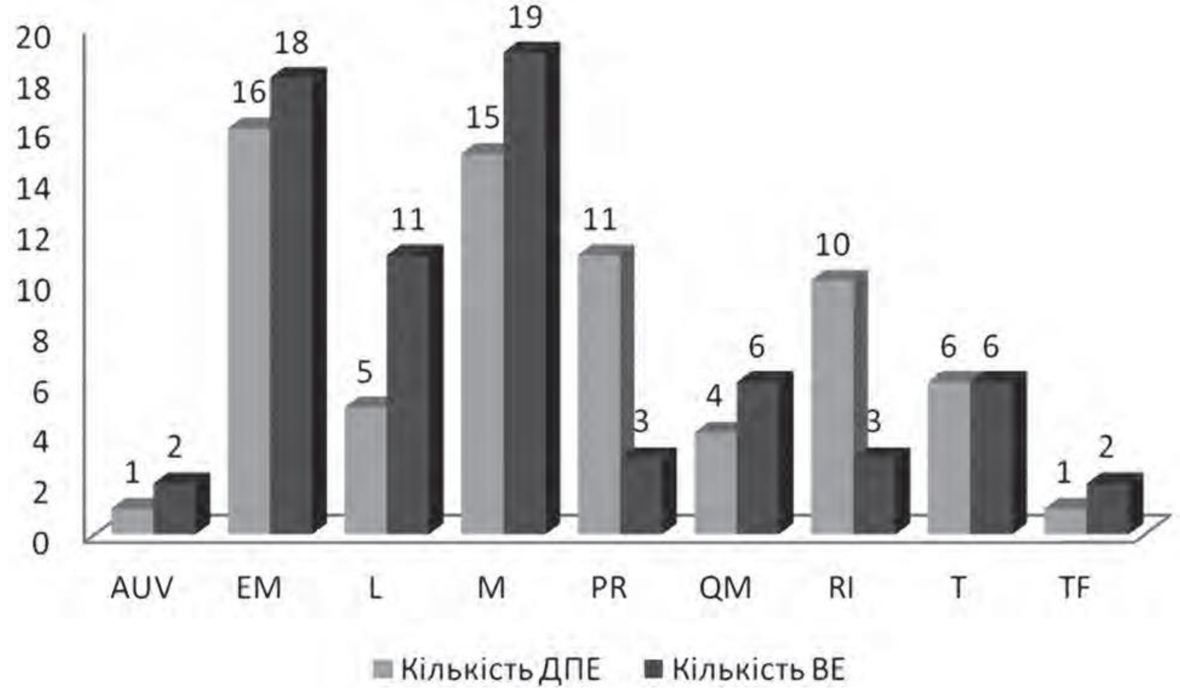


Рис. 1.[6] Розподіл ДПЕ за видами вимірювань: AUV – акустика, ультразвук та вібрація; EM – електрика та магнетизм; L – довжина та кут; M – маса та пов'язані з нею одиниці; PR – фотометрія та радіометрія; QM – фізико-хімія; RI – іонізуючі випромінювання; T – температура та теплофізика; TF – час та частота.

Актуальні проблеми метрології [7]

Науково-технічний прогрес прямо пов'язаний з інтенсивним розвитком метрології і точних вимірювань, необхідних як для розвитку природних і точних наук, так і для створення нових технологій та вдосконалення засобів технічного контролю. Все це ставить перед метрологією низку важливих і невідкладних завдань. У галузі одиниць вимірювань одним із важливих завдань є уніфікація їх на базі широкого впровадження Міжнародної системи одиниць (СІ). Незважаючи на універсальність цієї системи, ще багато одиниць вимірювання є позасистемними і потребують систематизації та уніфікації. Значно підвищуються вимоги до засобів вимірювання найвищого рівня – еталонів. Точність вимірювання у промисловості у багатьох випадках наближається до граничних технічних меж. На черзі використання знань фундаментальних наук, атомних сталих (енергетичних переходів, випромінювань та ін.), які характеризуються високою стабільністю, для розробки нових, більш досконалих і точних еталонів, а також засобів вимірювальної техніки.

Зросли вимоги до самої системи передачі розміру одиниці фізичної величини від еталона зразковим засобам вимірювання, а від них – технічним засобам за умови найменшої втрати точності, особливо у промислових процесах. Сучасні еталони і способи передачі розміру одиниці фізичної величини мають бути бездоганними і відповідати вимогам еталона.

Невідкладним завданням є забезпечення точних вимірювань досить малих і достатньо великих значень тиску, температури, частоти, витрат та інших параметрів.

Розвиток інформаційно-вимірювальних систем на базі електронно-обчислювальних машин потребує розробки нового метрологічного забезпечення таких систем і розробки теорії вимірювання такими системами.

Актуальною сьогодні є проблема розробки інтелектуальних датчиків і на їх базі систем автоматичного контролю, прогнозування та діагностики складних технологічних процесів та наукових досліджень.

Як наукова основа вимірювальних систем метрологія повинна забезпечувати надійність, достовірність і правильність вимірювальної інформації, а також законодавчо регламентувати єдність вимірювань у державі, єдність методів і одноманітність засобів контролю за технологічними процесами і продукцією. Метрологія, узагальнюючи практичний досвід вимірювань, регулює розвиток вимірювальної техніки та методів вимірювань.

Одним із важливих завдань метрології є впровадження методів кваліметрії для контролю за якістю виготовлюваної продукції, особливо продукції харчових виробництв.

Використана література та джерела інформації

1. Широков К.П., Богуславский М.Г. Международная система единиц. – М.: изд-во стандартов, 1984, 112 с.
2. Наказ Міністерства економічного розвитку та торгівлі України від 25.08.2015 № 914. Про затвердження визначень основних одиниць SI, назв та визначень похідних одиниць SI, десяткових кратних і частинних від одиниць SI, дозволених позасистемних одиниць, а також їх позначень та Правил застосування одиниць вимірювання і написання назв та позначень одиниць вимірювання і символів величин.
3. 8-ма редакція брошури СІ Міжнародного бюро з мір та ваг (англ.)
4. https://web.archive.org/web/20130317190810/http://www.president.gov.ua/news/9927.html .
5. http://www.history.org.ua/?termin=Svitova_orhanizatsiia
6. П.І. Неєжмаков, Ю.Ю. Буняєва, Український метрологічний журнал, 2015, № 4 с.3-9.
7. Цюцюра В.Д., Цюцюра С.В. Метрологія та основи вимірювань. Навч. посібн. – К., Знання-Прес, 2003.

Тема 4. Метрологічна класифікація видів і методів вимірювання

Щоб чітко і однозначно розуміти про що йтиме мова в цій лекції, дамо метрологічне визначення необхідних для цього понять і термінів.

Фізична величина – це властивість, в якісному відношенні спільна для багатьох фізичних об'єктів, але індивідуальна в кількісному відношенні для кожного об'єкту.

Наприклад, властивість маса, як фізична величина, характеризує інерційні та гравітаційні властивості матеріальних тіл і застосовується до всіх таких тіл, вона для них спільна (маса каменю, маса води), але її кількісне значення (число m_1, m_2) – різне. Тому для означення фізичної величини (ФВ) обов'язково необхідно відзначати обидві властивості об'єкту дослідження і якісну, і кількісну, тобто записувати: маса дорівнює 2 кг. Іншими словами ФВ характеризується *розміром* – кількісним вмістом в даному матеріальному об'єкті властивості, що відповідає поняттю «фізична величина» (незалежна від вимірювання об'єктивна характеристика: маса слона більше маси зайця) – *і розмірністю* – умовним позначенням, що відображає якісну властивість ФВ.

Значення ФВ – це оцінка розміру ФВ у вигляді деякого числа прийнятих для неї одиниць ("суб'єктивна" характеристика).

Одиницею вимірювання фізичної величини називається прийнята по узгодженню за основу для кількісної оцінки певна ФВ (еталон, міра), однорідна в якісному відношенні з вимірюваною величиною, якій умовно присвоєно числове значення, що дорівнює одиниці.

Фізичні величини поділяють на *однорідні* і *неоднорідні*. Однорідними називаються такі ФВ, що вимірюються у тих самих визначених одиницях. Наприклад, у метрах вимірюється і висота, і пройдений шлях, і відстань (довжина). Отже, фізичні величини висота, шлях, відстань є однорідними. Аналогічно: енергія, кількість теплоти, робота – однорідні ФВ, так як всі вони вимірюються у джоулях. Відповідно, висота і енергія є неоднорідні ФВ. Розміри будь-яких однорідних фізичних величин можна порівнювати між собою кількісно, якщо прийнята (вибрана) однакова одиниця розміру однорідної ФВ.

Між фізичним розміром Q, числовим значенням n і одиницею вимірювання q фізичної величини існує співвідношення:

$$\boldsymbol{Q = n \cdot q},$$

яке називається *основним рівнянням вимірювання* і полягає в тому, що певному, реально існуючому фізичному розміру Q, ставиться у відповідність абстрактне числове значення $\boldsymbol{n}$ фізичної величини у вибраних одиницях вимірювання $\boldsymbol{q}$. Якщо для вимірювання даного розміру Q будуть прийняті різні одиниці, $q_1 \neq q_2$, то і чисельний результат виміру буде різним $n_1 \neq n_2$ ("заєць" більше "слона"). Тому *результат вимірювання обов'язково повинен містити, крім числового значення* n, *позначення одиниці вимірювання* (*розмірність*).

Вимірювання – це знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Поряд із цим визначенням формулюється і таке визначення:

Вимірювання – це процес одержання <u>і перетворення</u> інформації про вимірювану величину з метою визначення кількісного результату при порівнянні її з одиницею вимірювання <u>у формі, найбільш зручній</u> для подальшого використання.

У сучасному стані вимірювань – це більш широкий термін, ніж просте одержання числового значення фізичної величини (ФВ), оскільки завдяки комп'ютерним і цифровим технологіям несе в собі ще й можливу проміжну функцію перетворення інформації (наприклад, з аналогової у цифрову або навпаки; застосування оптичних чи електричних фільтрів;) для подальшого її використання (наприклад, формування електричного, магнітного, електромагнітного інформаційного пакету або сигналу) або представлення у зручній для сприйняття людиною формі (наприклад, графічній, цифровій, візуальній).

Принципом вимірювання називають сукупність фізичних явищ, на яких ґрунтується вимірювання.

Наприклад, для вимірювання температури тіла використовується явище розширення рідини або газу при нагріванні і явище теплообміну між тілами.

Метод вимірювання – спосіб використання принципів і засобів вимірювання.

Наприклад, для вимірювання жорсткості пружини використовується явище пружної деформації (міжатомної взаємодії) і явище притягання тіл (закон всесвітнього тяжіння) та засіб вимірювання деформації тіла (мікрометр, лінійка).

Алгоритм вимірювання – послідовність операцій вимірювання.

Методика вимірювання – поєднання метода і алгоритму вимірювання.

Розрізняють такі **види вимірювань**:

- за кількістю спостережень (вимірювань): *однократні і багатократні*;
  (фізична величина вимірюється один раз або таких спроб є більше одної – обробка результату вимірювання та обчислення його похибки в цих двох випадках суттєво відрізняється)
- за ступенем достатності: *необхідні і надлишкові*;
  (визначаються кількістю спостережень (даних) для отримання результату вимірювання необхідної точності; кількість може бути обмежена складністю, вартістю, тривалістю експерименту);
- за способом одержання результату: *прямі, посередні (непрямі), сукупні і сумісні (спільні)*;
  - а) прямі – цей вид вимірювання поділяється на ряд методів, які описані нижче;
  - б) непрямі (посередні) – вимірювання, при яких шукане значення ФВ знаходять на основі відомої залежності між цією величиною і величинами, до яких застосовні прямі вимірювання, тобто описується певною формулою зв'язку (наприклад, визначення опору $R=U/I$ знаходять за виміряними значеннями напруги і струму);
  - в) сукупні – виконувані послідовно вимірювання двох або декількох <u>однойменних</u> величин, значення яких знаходять розв'язком системи рівнянь, що одержуються при прямих вимірюваннях різних сполучень цих величин;

Наприклад, нехай є важок масою m_0=100 грам і чотири тіла m_1, m_2, m_3, m_4 з невідомими масами; зважування на терезах дало наступні сполучення:

1) $m_3=m_2+100$; 2) $m_4+m_1=m_2+m_3$; 3) $m_4=m_1+m_3$; 4) $m_4=m_1+m_2+100$.

Розв'язавши систему цих 4-х рівнянь, знайдемо масу всіх важків. Хід розв'язку системи можна прискорити (спростити), якщо додати чи відняти деякі пари цих рівнянь або помножити на деяке число.

Або ще приклад: є три відомі важки (m_1=1 г, m_2=2 г і m_3=4 г), два важки Δm_1 і Δm_2 з невідомим номіналом і рівноплечі терези, які фіксують положення тільки в невеликому околі їх рівноваги, що є малим для безпосереднього зчитування значення маси. Рівновага одержана при такому сполученні важків: $m_3+\Delta m_2=m_2+\Delta m_1$ і $m_1+m_2=\Delta m_1+\Delta m_2$. Якщо додамо рівняння, то одержимо: $m_1+m_3=2\Delta m_1$, звідки $\Delta m_1=2{,}5$ г.

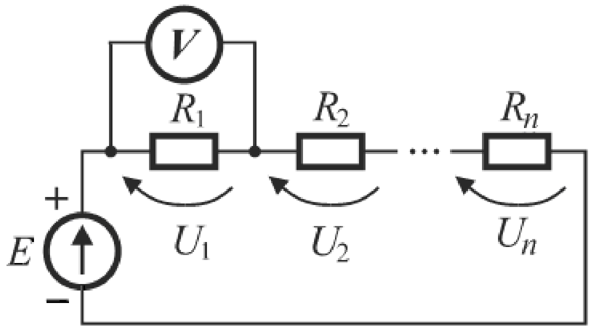


Рис. 1.
Резистивний подільник напруги.

Або, наприклад, для резистивного подільника напруги (див. рис.1) можна визначити спад напруги U_i на опорі R_i (або різних їх комбінацій), вимірюючи спад напруги ($U_{j\neq i}$) на інших опорах: $U_i = E - \sum_{j\neq i} U_j$, а напруга на опорах розраховується за наступними виразами:

$$U_i = \frac{R_1}{R_1+R_2+\ldots+R_n}\cdot E, \quad U_1+U_3 = \frac{R_1+R_3}{\sum R_i}\cdot E \quad \text{і так інші.}$$

г) спільні (сумісні) – це одночасний вимір двох або більше різнойменних величин для знаходження залежності між ними.
Наприклад, електричний опір деяких речовин описується лінійною або більш складною залежністю від температури, $R=R_0(1+\alpha t+\beta t^2)$, тому щоб знайти два коефіцієнти (α,β) необхідно одночасно (спільно) робити вимірювання і опору і температури. У грубому наближенні досить зробити два таких вимірювання: (R_1,t_1) і (R_2,t_2) та розв'язати систему двох рівнянь: $R_1=R_0(1+\alpha t_1+\beta t_1^2)$, $R_2=R_0(1+\alpha t_2+\beta t_2^2)$.

- за методом вимірювань: *абсолютні, відносні, порогові*;
  абсолютні – кінцевий результат отримується в одиницях вимірюваної ФВ;
  відносні – результат вимірювання дається по відношенню до деякого нормуючого значення цієї ж ФВ, тому є *безрозмірною* величиною;
  порогові – прилад фіксує наперед задане значення ФВ (наприклад, максимальне або мінімальне для започаткування наступних дій – так, мінімальна/максимальна напруга фотодатчика включає/виключає освітлення вулиць);
- за умовами вимірювання ФВ: *рівноточні і нерівноточні*;
  рівноточні – проводяться в однакових умовах, що визначають загальну точність вимірювань (кількість спостережень, прилад, оператор, зовнішні умови, інше), всі одержані результати є рівноцінними;

нерівноточні – це вимір однієї і тієї ж величини декількома незалежними приладами або одним приладом в різних умовах і різною випадковою похибкою;

- за характером вимірюваної величини: *динамічні* – ФВ змінює своє значення в процесі вимірювання; *статичні* – вимірювання незмінної у часі ФВ;
- за кількістю спостережень: *статистичні* – багатократне вимірювання декількох параметрів об'єкту для визначення кореляції або залежності між ними; *звичайні* – технічні та експериментальні вимірювання;
- за наявністю електричного струму: *електричні, неелектричні*;
- за формою одержуваного значення вимірюваної величини: *аналогові, цифрові, графічні*.
- за умовами, що визначають точність результатів:
  а) *максимально можливої точності* (при даному рівні техніки) – здійснюється вторинними еталонами для передачі розміру одиниці;
  б) *метрологічні* – вимірювання для одержання метрологічних характеристик засобів вимірювання, що здійснюється зразковими засобами вимірювання (робочими еталонами);
  в) *контрольно-повірочні*, похибка яких не повинна перевищувати деякого наперед заданого значення – здійснюються робочими еталонами (зразковими засобами вимірювання) з метою оцінки точності та інших метрологічних параметрів робочих засобів вимірювання, визначених у їх технічній документації;
  г) *технічні*, в яких похибка результату визначається характеристиками засобів вимірювання;

При дотриманні всіх правил вимірювань і використанні найбільш точних приладів і інструментів ні одне вимірювання не може бути виконаним абсолютно точно. Результати вимірювань завжди будуть різнитися між собою – *результат кожного окремого вимірювання є випадковою величиною*. Задача полягає в тому, щоб кількісно оцінити ступінь достовірності результату вимірювань, тобто визначити міру близькості між виміряним (випадковим) значенням фізичної величини x_i, одержаним в i-вому досліді, та її **істинним** (не випадковим, справжнім) значенням x_0.

Істинним значенням фізичної величини x_0 називається таке її значення, яке б ідеальним чином відображало в якісному і кількісному відношенні певну властивість об'єкту, тобто це значення фізичної величини, яке є вільним від похибок вимірювання.

Дійсне значення ФВ ($x_д$) – значення виміряне експериментально, яке настільки наближається до істинного, що для даної задачі може бути прийняте замість нього.

В якості міри близькості виміряного (дійсного) і істинного (на жаль нам невідомого) значення фізичної величини використовується поняття похибка вимірювання.

Розрізняють такі **види похибок**:

- за формою числового виразу: *абсолютні, відносні, зведені*;
- за закономірністю появи: *випадкові, систематичні (відомі, тобто поправки, і невідомі), грубі, промахи*;
- за можливістю реалізації: *граничні, ймовірні, середньоарифметичні* (*середні*), *середньоквадратичні, інтервальні*;
- за умовами виникнення: *основні* і *додаткові*.

Методи прямих вимірювань

1. Метод безпосередньої оцінки – це метод вимірювання, в якому значення фізичної величини (ФВ) визначають безпосередньо по відліковому пристрою засобу вимірювання прямої дії, завчасно проградуйованого в одиницях вимірюваної ФВ (пружинна вага, лінійка, амперметр або вольтметр, тощо).

2. Метод порівняння з *мірою* – це метод вимірювання, в якому вимірювану ФВ порівнюють з величиною, що відтворюється мірою.

Міра фізичної величини (міра величини, міра) – засіб вимірювання у вигляді деякого тіла, речовини або пристрою, що реалізує відтворення та (або) збереження фізичної величини одного або декількох заданих розмірів, значення яких виражені у встановлених одиницях і відомі з необхідною точністю [1].

Види мір.

- *Однозначна міра* – міра, що відтворює одне значення ФВ (наприклад, гиря масою 1 кг, електричний опір 1 Ом).
- *Багатозначна міра* – міра, що відтворює декілька значень ФВ (наприклад, штрихова міра довжини, електричний конденсатор змінної ємності, змінний електричний опір).

- *Магазин мір* – конструктивно об'єднані в єдине ціле міри із пристроєм для їхнього з'єднання в різних варіантах сполучень (магазин опорів, магазин індуктивностей).
- *Набір мір* – комплект мір різного розміру одної і тої ж ФВ (наприклад, набір кінцевих мір довжини, набір зразків різної твердості, набір котушок індуктивностей).
- *Стандартний зразок* – міра у вигляді речовини, за допомогою якої розмір ФВ відтворюється як *властивість* або як *склад речовини*, з якого виготовлений стандартний зразок (наприклад, зразок властивостей легованої сталі чи матеріалу визначеної марки).

Міри використовують для вимірювання ФВ методом порівняння. Він є більш точний, ніж метод безпосередньої оцінки, але й більш складний. Поділяють наступні різновиди цього методу:

а) <u>метод протиставлення</u> – метод порівняння з мірою, в якому вимірювана величина і міра одночасно діють на прилад порівняння – *компаратор* (наприклад, рівноплечі терези, коли вага міри M врівноважує вагу m, тобто $M = m$), за допомогою якого встановлюється співвідношення між цими величинами.

б) <u>метод заміщення</u> – метод порівняння з мірою, в якому вимірювану ФВ замінюють відомою величиною (мірою). Метод заміщення часто застосовують при вимірюванні параметрів електричних кіл, використовуючи явище резонансу (наприклад, при вимірюванні ємності, опору, індуктивності, частоти електричних і механічних коливань). Цей метод дозволяє виключити вплив "паразитних" параметрів електричних кіл, знайти чисельне значення систематичної похибки.

в) <u>диференціальний метод</u> – метод порівняння з мірою, в якому на вимірний прилад діє різниця вимірюваної і відомої ФВ величини, що відтворюється мірою, тобто відбувається неповне врівноваження. Точність методу зростає із зменшенням різниці між значеннями величин, що порівнюються. Цей метод є *комбінованим методом*, оскільки у вимірюванні беруть безпосередню участь пристрій (засіб) порівняння (*компаратор*), вимірювальний прилад та

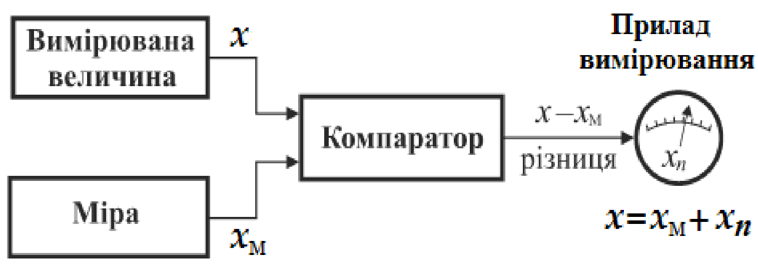


Рис. 2.

міра, а результат вимірювання визначають за показами міри і приладу (рис.2), як алгебраїчну суму показів міри $x_м$ та приладу x_n: $x=x_м+x_n$.

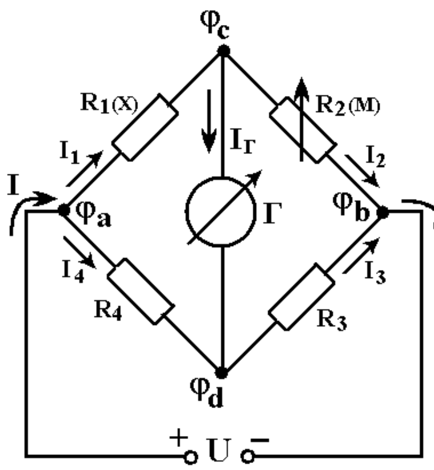


Рис. 3.
Схема одинарного моста постійного струму.

г) <u>нульовий (компенсаційний) метод</u> – це метод (б), але в якому результуючий ефект дії двох величин на прилад порівняння доводять до нуля (компенсують).

Найбільш наочним прикладом такого методу в електричних вимірюваннях є мостикові схеми. Вони відносяться до найбільш точних і простих методів електричних вимірювань, можуть мати одинарну і подвійну електричну схему, для постійного і змінного струму [2]. На рис.3 представлена схема одинарного моста постійного струму для визначення невідомого опору R_x. (подібні мости змінного струму призначені для вимірювання індуктивності, ємності, частоти та інших електричних величин). Шляхом зміни опору R_2, використовуючи, наприклад, магазин опорів або котушку реостата, добиваються того, щоб струм через гальванометр Г дорівнював нулю ($I_Г$=0). В цьому випадку потенціали в точках схеми ***c*** і ***d*** стануть однакові ($\varphi_c=\varphi_d$), однаковими будуть і різниці потенціалів $U_{ac}=\varphi_a-\varphi_c$ та $U_{ad}=\varphi_a-\varphi_d$, тобто спад напруги $U_{ac}=U_{ad}$, або $I_1R_1=I_4R_4$. Теж саме можна записати і для правих пліч моста: $I_2R_2=I_3R_3$. Після ділення першої рівності на другу із отриманого співвідношення опорів знайдемо шуканий опір резистора:

$\frac{I_1R_1}{I_2R_2}=\frac{I_4R_4}{I_3R_3}$, оскільки $I_1=I_2$ а $I_3=I_4$ то $R_1{\cdot}R_3=R_2{\cdot}R_4$, або $R_{1x}=\frac{R_2R_4}{R_3}$.

Одинарний міст застосовується, в основному, для вимірювання великих опорів, тому що при вимірюванні малих опорів виникають похибки зумовлені впливом опорів з’єднувальних провідників і перехідних контактів. Даний недолік відсутній у подвійному мості.

д) метод збіжності (співпадінь) – метод порівняння з мірою, в якому різницю між вимірюваною ФВ і величиною міри вимірюють, використовуючи співпадання відміток шкал або збіг періодичних сигналів (ноніуси, вимірювання частоти за допомогою резонансу або стробоскопічного ефекту, визначення відстані радаром, тощо).

Подану вище класифікацію зручно відобразити відповідною схемою (рис.4), яка з деякими доповненнями наведена в [3].

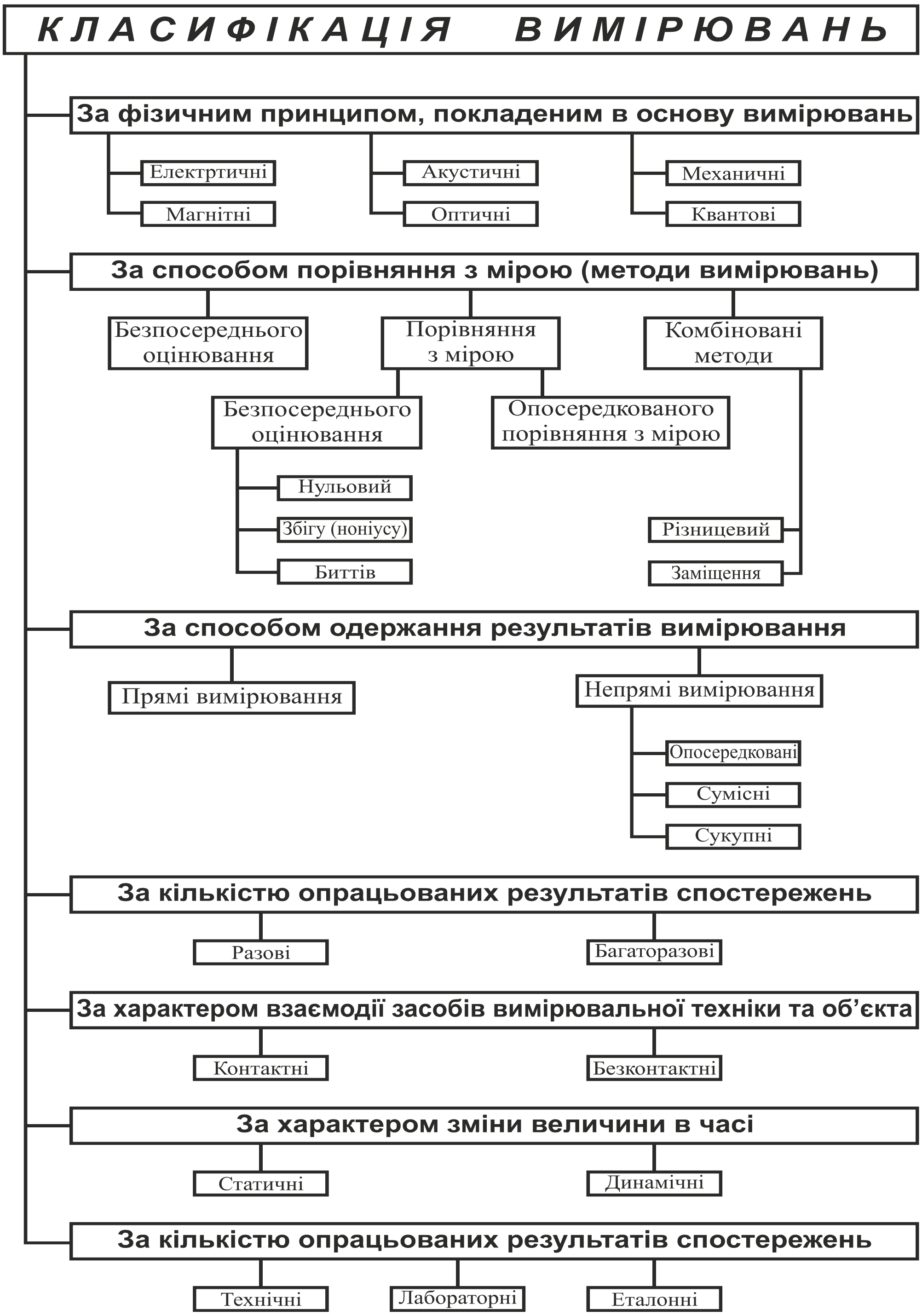


Рис. 4. Класифікація методів вимірювань [3].

Використана література

1. ДСТУ 2681-94 Державна система забезпечення єдності вимірювань. Метрологія. Терміни та визначення.

2. Поджаренко В.О., Кулаков П.І., Ігнатенко О.Г., Войтович О.П. / Основи метрології та вимірювальної техніки. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2006. – 151 с

3. Шовкун І.Д., Семенівська О.В. / Конспект лекцій з дисципліни «Вступ до техніки вимірювань» для студентів факультету електроніки «КПІ», Київ, 2012.

Тема 5. Засоби вимірювань та їх характеристики

Вивчення фізичних явищ та їх закономірностей, а також використання цих закономірностей в практичній діяльності людини, тісно пов'язане з вимірюванням фізичних величин. *Вимірювання* – це фізичний експеримент порівняння даної фізичної величини з деяким її значенням, прийнятим за одиницю порівняння.

Вимірювання, як експериментальні процедури визначення фізичних величин, досить різноманітні, що пояснюється великою кількістю вимірюваних величин, різним характером їх зміни з часом, різними вимогами до точності вимірювання тощо. Усі вимірювання фізичних величин здійснюють за допомогою засобів вимірювання.

Засіб вимірювання – це технічний пристрій, який використовується при вимірюваннях і має нормовані метрологічні властивості. Розрізняють такі види засобів вимірювань:

- міри та еталони;
- вимірювальні перетворювачі;
- вимірювальні прилади;
- вимірювальні установки;
- вимірювальні системи;
- вимірювально-обчислювальні комплекси.

Мірою називається засіб вимірювання, призначений для відтворення фізичної величини заданого розміру. Розрізняють *однозначну міру, багатозначну міру, набір мір і магазин мір*. Однозначна міра відтворює фізичну величину одного розміру. Багатозначна міра відтворює ряд значень однойменних фізичних величин різного розміру. Набір мір – це підібраний комплект мір для відтворення ряду значень однойменних величин різного розміру, причому міри можуть використовуватись як окремо, так і в різних комбінаціях. Прикладом набору мір є шальки терезів, магазин опорів, ємностей тощо. Магазин мір – це набір мір, конструктивно об'єднаних в одне ціле.

Вимірювальними перетворювачами називають засоби вимірювань, призначені для вироблення сигналів вимірюваної інформації у формі, зручній для передачі, подальшого перетворення, обробки і (або) зберігання, але які не піддаються безпосередньому сприйняттю спостерігачем. У значній більшості випадків вони є складовою частиною самих вимірювальних приладів, особливо засобів електричних вимірювань. Залежність між вимірюваною величиною (вхідною) і вихідним сигналом вимірювального перетворювача називається *функцією перетворення*. Вимірювальні перетворювачі поділяються на масштабні, які змінюють вхідну величину у задане число разів (до них відносяться, наприклад, шунти, подільники напруги і струму, трансформатори, електронні підсилювачі) і перетворювачі роду величини.

Перетворювачі роду величин, наприклад, неелектричних в електричні, складають різноманітну групу пристроїв, які використовують у різних галузях вимірювальної техніки, наприклад, при вимірюваннях температури, тиску, освітленості, зміни мікро- і макро- відстані і інше. Прикладом перетворювачів електричної величини у неелектричну можуть бути вимірювальні механізми електромеханічних приладів.

Деякі види вимірювальних перетворювачів інколи називають датчиками, під якими розуміють конструктивну сукупність одного або кількох вимірювальних перетворювачів і супутніх їм конструктивних елементів, розташованих безпосередньо на об'єкті вимірювання і віддалених від місця відображення, реєстрації або опрацювання вимірюваної інформації.

Слід відмітити різноманітну групу аналогово-цифрових перетворювачів (АЦП), які перетворюють вимірювані (електричні) величини у код і які широко використовуються у цифрових вимірювальних приладах.

Вимірювальним приладом називається засіб вимірювання, який служить для вироблення сигналу вимірюваної інформації у формі, доступній для безпосереднього сприймання спостерігачем. Вимірювальні прилади, покази яких є неперервними функціями змін вимірюваних величин, називаються *аналоговими* приладами, а ті, які автоматично виробляють дискретні сигнали вимірювальної інформації і покази яких подані в цифровій формі, називаються *цифровими* приладами.

Також, вимірювальні прилади поділяються на *показуючі*, які допускають безпосереднє зчитування показів (тільки) оператором, та *реєструючі*, в яких передбачена реєстрація і зберігання інформації. Останні поділяються на *самописні* – з записом показів у формі діаграми, на якій може бути відтворена неперервна функція вимірюваної величини, і *незчитуємі*, в яких передбачено друк показів у цифровій формі. У приладах з вмонтованими міні-ЕОМ можлива реєстрація і зберігання інформації в оперативній пам'яті міні-ЕОМ, або, наприклад, на магнітних носіях інформації.

Для одержання результату вимірювань фізичної величини в прийнятих одиницях у процесі вимірювань обов'язково повинна брати участь міра. Вимірювальний *прилад прямої дії* може бути попередньо проградуйований в одиницях вимірюваної величини, тобто міра попередньо використовується в процесі виготовлення приладу. Існують прилади, які призначені для безпосереднього порівняння вимірюваної величини з величиною, значення якої відоме. Такі електровимірювальні прилади називаються *приладами порівняння*.

Вимірювальною установкою називають сукупність функціонально об'єднаних засобів вимірювання (мір, вимірювальних приладів і перетворювачів) та допоміжних пристроїв, розміщених в одному місці і призначених для вироблення сигналів вимірюваної інформації у формі, зручній для безпосереднього сприймання спостерігачем або її автоматичної реєстрації. Вимірювальну установку з включеними неї зразковими ЗВ називають *повірочною установкою*, а з еталоном – еталонною.

Вимірювальна система – сукупність функціонально об'єднаних мір, вимірювальних приладів і перетворювачів та інших допоміжних технічний засобів, розміщених в різних точках досліджуваного простору (середовища, об'єкту і таке інше), об'єднаних каналами зв'язку, з метою вимірювання однієї або декількох фізичних величин, властивих цьому простору (середовищу,об'єкту – наприклад, тепло-, гідро- або атомна електростанція). Вимірювальні системи можуть розділятися на: *вимірювально-інформаційні системи*, вимірювально-контролюючі системи, вимірювально-управляючі та інші подібні.

Вимірювально-обчислювальний комплекс – функціонально об'єднана сукупність засобів вимірювань, обчислювальних та інших допоміжних технічних засобів і пристроїв призначених для виконання в складі вимірювально-інформаційних систем конкретної вимірювальної задачі або інформації, її перетворення та опрацювання з метою подання споживачу (в тому числі в автоматизованій системі управління (АСУ)) у необхідному вигляді або автоматичного здійснення логічних функцій контролю, діагностування, ідентифікації.

Еталони – це особливий клас засобів вимірювання (або комплекс засобів вимірювання). Еталони забезпечують відтворення і (або) зберігання *одиниці фізичної величини* з метою передавання її розміру нижчим за перевірочною схемою засобам вимірювання (рис.1).

Класифікація еталонів фізичних величин

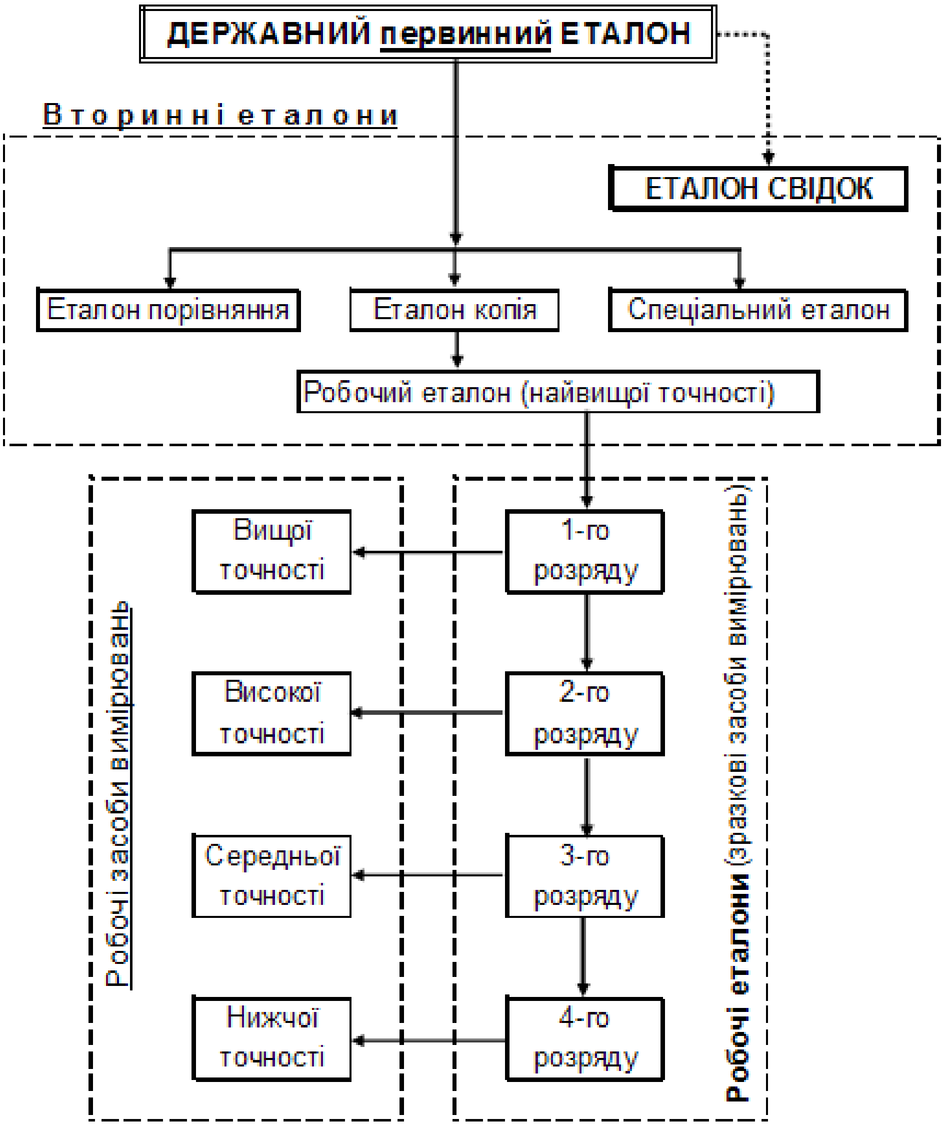


Рис. 1. Класифікація еталонів і робочих еталонів (зразкових ЗВ). Схема передавання розміру одиниці фізичної величини від еталона до робочих засобів вимірювання.

Для виконання операцій, які безпосередньо відносяться до знаходження метрологічних характеристик засобів вимірювання (які встановлюються під час *метрологічної атестації* приладів або перевіряються та підтверджуються чи уточнюються під час їх *метрологічної повірки* в центрах метрології), необхідні більш точні за дані засоби вимірювання (ЗВ). Знаходження (підтвердження) метрологічних характеристик ЗВ, що підлягають атестації або повірці за допомогою більш точного ЗВ називається *передачею розмірів фізичної величини* (ФВ). Такі високоточні засоби вимірювання називаються *зразковими або робочими еталонами* – це міри або вимірювальні прилади, які призначені для перевірки за ними інших ЗВ. Разом з тим вони можуть бути також безпосередньо використані для точних вимірювань.

Найбільш точний при даному рівні розвитку техніки засіб вимірювання не "одержує" розмір ФВ, а *зберігає* (здійснює) значення ФВ у відповідності з *теоретичним визначенням одиниці ФВ*. Такий ЗВ дістав назву еталон. Еталони – особливий клас ЗВ вищої точності, за допомогою яких відтворюється і зберігається одиниця ФВ з метою передачі розміру одиниці іншим засобам вимірювань. **Еталони поділяють на первинні і вторинні** (рис.1). Шляхом спеціальних методик та засобів порівняння розмір одиниці ФВ передається менш точним ЗВ – робочим еталонам (їх ще називають зразковими ЗВ) і далі робочим засобам вимірювання, якими власне і здійснюються технічні вимірювання (типова схема передавання розміру одиниці також відображена на рис.1). Ця схема може бути конкретизована доповненням найменувань засобів вимірювання з вказуванням методів, діапазонів і похибок передавання розмірів ФВ. Тоді така схема називається *державною схемою повірки* для ЗВ даної фізичної величини.

В країні може бути тільки один первинний еталон даної (кожної) фізичної величини: офіційна назва – державний первинний еталон.

Для того щоб розгрузити первинні еталони від робіт по передачі розмірів ФВ і зменшити їх знос іноді створюють еталон-копію, який передає розмір ФВ робочому еталону вищого ґатунку. Еталон-копія не обов’язково має бути точною копією первинного еталону. Наприклад, еталон-копії довжини суттєво різняться по довжині як від первинного еталону, так і між собою. Робочих еталоні вищого ґатунку може бути багато – саме вони безпосередньо передають розмір фізичних величин засобам вимірювання більш низької точності.

Якщо первинний еталон невідновлюваний, створюють еталон-свідок – він призначений для перевірки цілісності первинного, або для заміни його у випадку зруйнування або втрати (наприклад, еталон маси – кілограм).

В метрологічній практиці часто виникає потреба у здійсненні значень ФВ в особливих умовах (високі або низькі температури, тиски, частоти, вологість), коли користуватися первинним еталоном неможливо або недоцільно внаслідок втрати точності. Тоді створюється спеціальний еталон, він замінює первинний в цих особливих умовах.

Еталон-порівняння необхідний для порівняння з іншими еталонами, якщо вони не можуть бути порівняні один з одним безпосередньо (наприклад, еталони електрорушійної сили).

Міри та еталони електричних величин

У відповідності до поділу фізичних величин системи СІ створені еталони основних і похідних одиниць. Насамперед розглянемо зразкові міри електричних величин, тому що вони можуть бути і частиною групових еталонів електричних одиниць [1].

Міри електрорушійної сили (ЕРС). Як взірцеві і робочі міри ЕРС використовують *нормальні елементи*. Широкого застосування в лабораторній практиці набув кадмієвий нормальний елемент Вестона, який відрізняється від інших гальванічних елементів тим, що його ЕРС з часом не змінюється. Цей елемент використовують не як джерело струму, а як міру ЕРС при точних вимірюваннях невеликих різниць потенціалів, зокрема компенсаційним методом. Розрізняють нормальні елементи з *ненасиченим* і *насиченим* розчином сірчанокислого кадмію ($CdSO_4$), причому в останніх ЕРС значно стабільніша.

Взаємодіючі речовини, які входять до складу нормального елемента, поміщені в скляну оболонку, яка герметично запаяна. В основному конструкція скляних оболонок насичених нормальних елементів має Н-подібну форму – це дві сполучені посудини, в нижній частині яких впаяно два електроди з молібденового дроту (рис.2). Позитивним електродом служить чиста ртуть 1, яка заповнює нижню частину лівої посудини. Зверху над ртуттю розташований деполяризатор 2 – шар пасти із суміші сульфату ртуті (Hg_2SO_4) (сполука, яка дуже погано розчиняється у

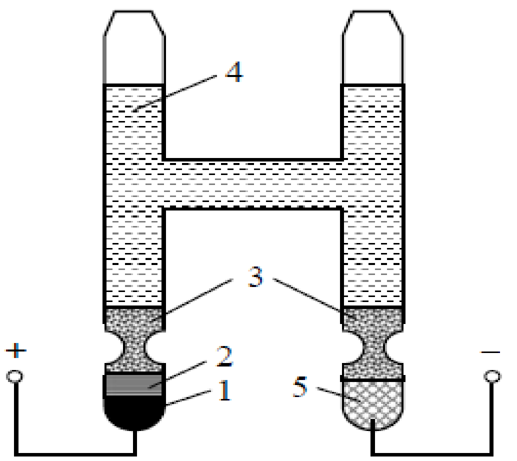


Рис. 2. Структура нормального елемента.

воді) і сульфату кадмію ($CdSO_4$).

Негативним електродом 5 служить 12,5 %-на амальгама кадмію (в ртуті розчиняється кілька різних металів; такий розчин або сплав металів з ртуттю називають амальгамою), над яким міститься кілька кристаликів сульфату кадмію. Простір над електродами заповнено насиченим водним розчином сульфату кадмію 4. Насичення розчину забезпечується кристалами $CdSO_4$ 3, які містяться над електродами.

Як працює такий елемент? На негативному електроді частина іонів кадмію Cd^{++} переходить з амальгами в розчин $CdSO_4$, кожен з яких залишає після себе в амальгамі по два електрони. Так виникає негативний заряд катода. З часом цей перехід припиняється, оскільки сили притягання іонів Cd^{++} до негативного електрода зростають і досягають величини, достатньої для утримання іонів кадмію в амальгамі. Цьому моменту відповідає певне значення ЕРС між електродами нормального елемента. Якщо тепер створити зовнішній провідний контур, з'єднавши кінці елемента опором, то електрони перетікатимуть від негативного електрода до позитивного. Це дозволить новій порції іонів Cd^{++} перейти в розчин, а залишені ними електрони просто поповнюють від'ємний заряд цього електрода. У колі буде протікати стаціонарний струм, який супроводжується міграцією іонів, що замикають коло всередині водного розчину.

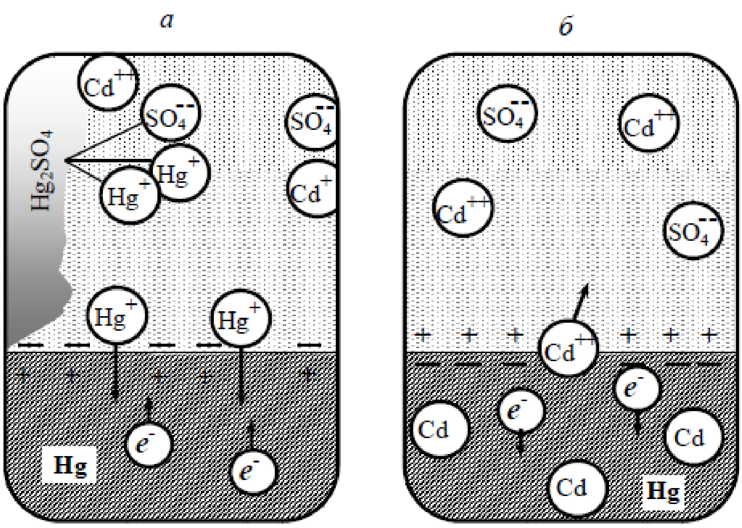


Рис. 3. Схематичне зображення процесів, які протікають на поверхнях позитивного (*а*) і негативного (*б*) електродів, при з'єднанні нормального елемента із зовнішнім навантаженням.

На рис.3. схематично показані процеси, які відбуваються при проходженні струму на кожній із двох поверхонь розділу між електродами і розчином (електролітом). Іони ртуті Hg^+ (рис.3, *а*) покидають розчин і зустрічаються з електронами, які приходять зовні, і стають нейтральними атомами ртуті. Внаслідок розчинення Hg_2SO_4 у воді утворюються нові іони Hg^+ та сульфатні іони SO_4^{2-}. На поверхні негативного електрода (рис.3, *б*) неперервно відбувається іонізація атомів кадмію, які потрапляють в електроліт у вигляді іонів Cd^{++} –відбувається вилучення електронів із атомів кадмію і приєднання їх до ртуті. З точки зору хімії, кадмій окислюється, а ртуть відновлюється. Елемент працює тому, що цей обмін енергетично вигідний. Відносна сила зв'язку електронів у структурі атома кадмію і атома ртуті така, що прагнення атомів ртуті приєднати електрони переважає бажання атомів кадмію утримати їх. Зауважимо, що на кожній із поверхонь розділу іони рухаються проти електричного поля.

Насичені нормальні елементи бувають трьох класів точності: 0,001, 0,002 і 0,005. Наприклад, для елементів класу точності 0,005 за температури 293 К електрорушійна сила повинна знаходитись у межах 1,0181÷1,0187 В. Виготовлений із хімічно чистих матеріалів нормальний елемент має надзвичайно постійну ЕРС, яка при 293 К становить 1,0183 В. Залежність ЕРС від температури визначається формулою:

$E_T = E_{293} - 0{,}0000406\,(T - 293)$ В, де E_{293} – ЕРС при T=293 К.

Використання нормальних елементів вимагає таких правил: їх не можна струшувати і перевертати, вони повинні бути захищені від сонячних променів, від дії сильних джерел світла і тепла. Струми, навіть у кілька міліампер, можуть вивести нормальний елемент з ладу. У зв'язку з цим нормальний елемент не використовують як джерело струму, його використовують тільки в компенсаційних схемах, які практично не споживають струму.

<u>Робочими мірами ЕРС</u> є міри, створені на основі *кремнієвих стабілітронів* – діодів, які працюють в режимі пробою. Вони забезпечують стабілізацію напруги від одиниць до сотень вольт при струмах споживання від міліампер до кількох ампер. Їх відносна стабільність вихідної напруги ~0,001 %, а температурна стабільність краща за 0,001 % K^{-1}, що перевищує параметри нормальних елементів.

Міри електричного опору (ом). Зразкові та робочі міри опору виконують у вигляді котушок опору, опір яких повинен задовольняти умові $R = 10^n$ Ом, де n ціле число: –5, –4, ... 0, ... 10.

Котушки опору від 10^{-5} до 10^{-1} Ом виготовляють зі стрічки або пластинок манганіну, а з більшим опором – з манганінового дроту. *Манганін* – це сплав Cu (83–84 %), Mn (11–12 %), Ni (3–4 %), решта – алюміній і залізо (десяті долі процента): має питомий опір $46{\cdot}10^{-6}$

Ом/см, малий температурний коефіцієнт опору (ТКО) $\pm15\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$, термо-ЕРС на контакті з міддю ≤ 1 мкВ/К), високу стабільність у часі, що дозволяє використовувати його в колах з дуже низькою напругою без врахування похибок термо-ЕРС. Для великих значень опору іноді використовується сплав Evanohm (Ni – 74,5 %, Cr – 20 %, решта Al, Fe або Cu). Він має питомий опір $133\cdot10^{-6}$ Ом/см, ТКО $\pm20\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$ і термо-ЕРС з міддю ≤ 2 мкВ/К. Мірам опору присвоюють один з наступних класів точності: 0,0005; 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05 і 0,1. Клас точності позначає найбільшу допустиму відносну похибку, виражену в процентах.

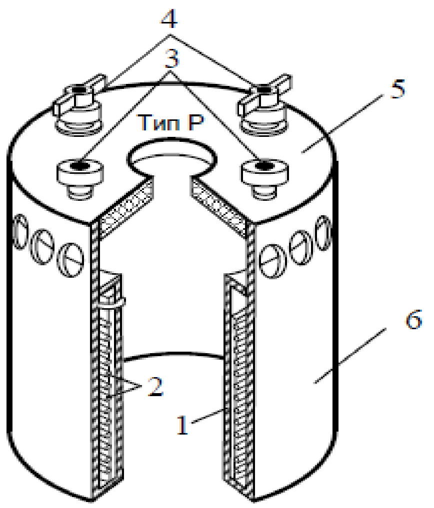


Рис. 4. Конструкція зразкових мір (котушок) опору.

Конструктивно взірцеві котушки опору виконані у вигляді коаксіальних металевих циліндрів (рис.4). На металевий або фарфоровий каркас 1 зроблена біфілярна обмотка 2 з ізольованої манганінової дротини. Кінці дротини виведені через ізолятори до затискачів 3 і 4, які закріплені на пластмасовій кришці 5. Каркас котушки прикріплюють до корпусу 6, в якому є отвори для кращого охолодження обмотки. Котушка забезпечується чотирма затискачами, два з яких називаються *струмовими* (затискачі 4) і призначені для вмикання взірцевої котушки в коло струму, два інших називаються *потенціальними* (затискачі 3). Потенціальні затискачі призначені для вимірювання спаду напруги на опорі котушки. Набори різних котушок опору можуть бути змонтовані в одному корпусі (магазин опорів). Спеціальні перемикачі дозволяють набирати з котушок, які є в магазині, різні значення опору. Високоточна, на рівні еталону, котушка опору для температурної стабілізації поміщена у масло в запаяному, захищеному від вологи контейнері.

Міри ємності (фарада). *Зразковими та робочими мірами ємності є конденсатори* постійної або змінної ємності. Вони повинні задовольняти таким вимогам: мати малі втрати у діелектрику, слабу залежність від частоти і форми кривої струму, малий температурний коефіцієнт ємності та значний опір ізоляції. У більшій мірі цим вимогам відповідають повітряні конденсатори постійної і змінної ємності, але завдяки малій діелектричній проникності повітря вони є громіздкими. У зв'язку з цим номінальні значення ємності повітряних конденсаторів сталої ємності 50 – 4000 пФ, змінної ємності 15 – 1100 пФ, клас точності 0,005 – 0,05. Допускається їх використання на частотах до 100 Гц у колах з напругою не більше 200 В.

Вимірювальні конденсатори з твердим діелектриком (частіше всього слюдою) компактні, стабільні у часі, але характеризуються великим кутом втрат $(1\div2)\cdot10^{-4}$ рад. Виготовляють міри ємності з номінальним значенням від 1 пФ до 1 мкФ, класів точності від 0,05 до 0,2 і допустимих частотах використання від 40 до10^5 Гц (у залежності від номіналу міри). Міри випускаються у вигляді слюдяних конденсаторів сталої ємності і магазинів ємностей з конденсаторами постійної ємності. На відміну від магазинів опорів, де окремі резистори з'єднані послідовно, у магазинах ємностей для одержання сумарної ємності кількох конденсаторів їх з'єднують між собою паралельно. Штепсельні магазини призначені для ступінчатої зміни великої ємності – від однієї до сотень мікрофарад. Важільні магазини частіше виготовляють тридекадними.

Межі допустимої відносної похибки визначають за формулами:

$\delta = \pm\eta$ – для мір постійної ємності і однодекадних магазинів;

$\delta = \pm\,\eta + 0{,}8\cdot n\cdot(C_Д/C)$ – для багато декадних магазинів,

$\delta = \pm\,\eta\cdot(C_{max}/C)$ – для конденсаторів змінної ємності;

де η – клас точності; C – номінальне значення увімкненої ємності; C_{max} – максимальне значення змінної ємності; n – число увімкнених декад; і $C_Д$ – дискретність магазина.

Міри індуктивності та взаємної індуктивності (генрі). Зразкова котушка індуктивності (рис.5, *а*) – це пластмасовий або фарфоровий каркас з намотаною на нього обмоткою з мідного ізольованого дроту, кінці якого закріплені на затискачах. Такі котушки повинні зберігати сталість індуктивності з плином часу і мати малий опір, незалежність індуктивності від струму і якомога малу залежність індуктивності від частоти і температури. Якраз використання каркасу з немагнітного матеріалу забезпечує незалежність величини індуктивності від струму в котушці. Для зменшення впливу зовнішніх магнітних полів котушки споряджають екранами. Зразкові котушки взаємної індуктивності відрізняються від котушок індуктивності наявністю двох обмоток, жорстко закріплених на загальному каркасі (рис. 5, *б*).

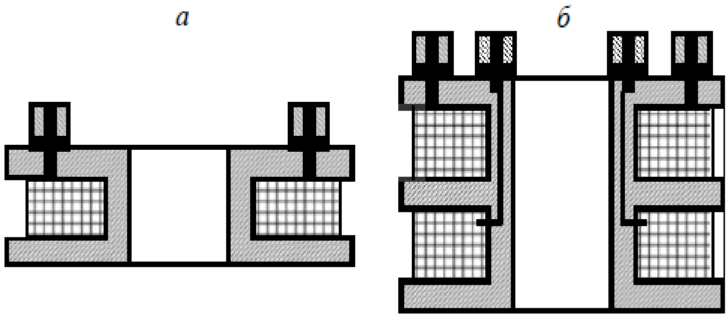


Рис. 5.
Будова зразкових котушок індуктивності (*а*) та взаємної індуктивності (*б*).

Найбільш розповсюджені котушки і магазини індуктивностей мають номінальні значення від 1 мкГн до 1 Гн з максимальним значенням струму до 10 мА, опором постійному струмові від 0,1 до 800 Ом і класом точності від 0,5 до 0,05.

Змінними мірами індуктивності і взаємної індуктивності служать варіометри. *Варіометр* складається з двох котушок, одна з яких рухома. Плавна зміна індуктивності або взаємоіндуктивності забезпечується завдяки зміні положення рухомої котушки (ротора) відносно нерухомої (статора). У варіометрі індуктивності ротор і статор з’єднанні послідовно в одне коло, а у варіометрі взаємоіндуктивності – у різні кола. Точність варіометрів нижча точності зразкових котушок індуктивності.

Межі допустимої відносної похибки визначають за формулою:

$\delta = \pm\eta$ – для окремих котушок індуктивності;

$\delta = \pm\, \eta\cdot(L_{max}/L)$ і $\delta = \pm\, \eta\cdot(M_{max}/M)$ – для варіометрів;

$\delta = \pm\, (\eta + n\cdot L_{min}/L)$ і $\delta = \pm\, (\eta + n\cdot M_{min}/M)$ – для магазинів,

де η – клас точності міри; L – номінальне значення увімкненої індуктивності; L_{max}, M_{max} – найбільші номінальні значення індуктивності та взаємоіндуктивності варіометрів; L_{min}, M_{min} – номінальні значення індуктивності та взаємоіндуктивності одного ступеня наймолодшої декади магазина (його дискретність); n – число декад магазина.

Еталони похідних електричних величин

Еталон одиниці індуктивності.

До складу ***еталона генрі*** входять чотири котушки і місткова установка. Індуктивність котушок залежить від числа витків і геометричних розмірів котушки, тобто може бути визначена вимірюванням цих розмірів. Це рівносильне порівнянню еталона індуктивності з метром, який є еталоном основної величини – довжини.

Еталон одиниці електричної напруги.

До складу е***талона вольта*** входять: міра напруги на основі нестаціонарного ефекту Джозефсона (відкритий англійським вченим Б.Джосефсоном у 1962 році), група у складі 20 насичених нормальних елементів (це необхідно тому, що ЕРС кожного нормального елемента може з часом дещо змінюватися, але її середнє значення у групі досить стабільне, крім того, вони розташовані у термостаті) і компаратори – пристрої для порівняння нормальних елементів між собою. Таку сукупність засобів вимірювання називають *груповим еталоном*. Вторинним еталоном, якому передається розмір одиниці вольта також є група термостабілізованих нормальних елементів. Ефект Джозефсона полягає у виникненні постійного спаду напруги U на ділянці кола, що складається з двох надпровідників, розділених тонким шаром (d~10^{-9} м) діелектрика (конденсатор), поміщеній у (високочастотне) електромагнітне поле частотою ν в результаті проходження через діелектрик (тунельний перехід) змінного електричного струму $I=I_0\sin(2\pi\nu t)$ (це явище називається *обернений нестаціонарний ефект Джосефсона*; прямий НЕД – прикладання постійної напруги U, вище критичної, викликає на контакті – тунельному переході – генерацію високочастотних коливань струму і такого ж НВЧ випромінювання: $I=I_0\sin(\omega t)$, $\omega=(2e/\hbar)U$). Із збільшенням струму або частоти напруга на елементі Джозефсона змінюється стрибками, які визначаються квантом магнітного потоку $h/2e$ $=2{,}06783461\cdot10^{-15}$ Вб (h – стала Планка, e – заряд електрона) і частотою ν зовнішнього поля: $U = n\cdot h\nu/(2e)$, де n – число таких стрибків (рис.6). Величина, обернена до кванту магнітного потоку, називається сталою Джосефсона $C_J=2e/h$ = 483597,9 ГГц/В. висота кожної сходинки кантується значенням $U_1=\nu/C_J$. Наприклад, при опроміненні джосефсонівського тунельного контакту НВЧ-хвилею з частотою 70 ГГц (λ≈0,5 см) значення U_1≈145 мкВ.

Оскільки частота в даний час може бути створена дуже стабільною і точно виміряна, теоретично досяжна точність відтворення напруги за допомогою ефекту Джозефсона при коректній апаратурній реалізації обмежується похибкою визначення сталої $h/2e$.

Український державний первинний еталон одиниці електрорушійної сили і постійної напруги – вольта (ДЕТУ 08-03-07) побудований на багатоелементній матриці контактів Джозефсона та включає кріогенний комплекс, що працює при температурі рідкого гелію; НВЧ-генератор, стабілізований за частотою державного первинного еталона одиниць часу та частоти; групу нормальних елементів. За своїми характеристиками еталон відповідає сучасному світовому рівню [2]:

частота НВЧ випромінювання	70-90 ГГц;
діапазон вихідної напруги	від 0,01 В до 10,0 В;
випадкова похибка (СКВ)	$5 \cdot 10^{-9}$;
невиключена систематична похибка	$1 \cdot 10^{-8}$.

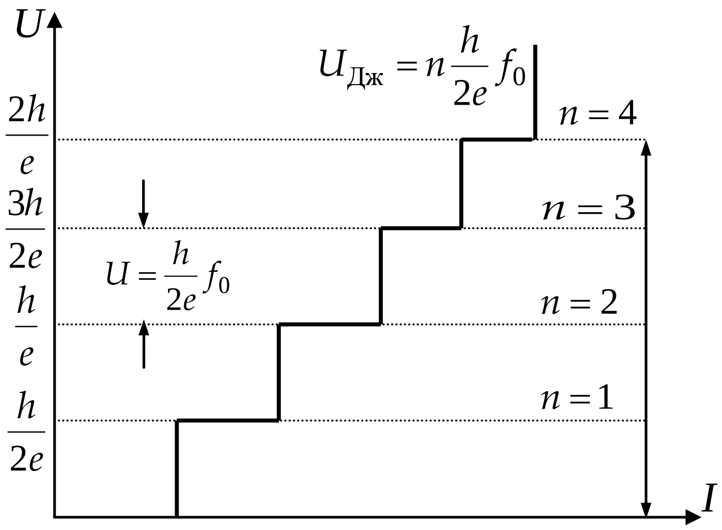


Рис. 6. Вольт-амперна характеристика джозефсонівського переходу

Рис.7. Зовнішній вигляд еталона вольта (Україна)

Подібне квантування відбувається і по струму, якщо збільшувати постійну напругу прикладену до надпровідного тунельного переходу [3]. Тому <u>одиниця електричної напруги постійного струму</u> може бути відтворена із застосуванням еталонів, заснованих на ефекті Джозефсона, – протіканні струму між двома надпровідниками, розділеними тонким бар’єром діелектрика. Під дією електромагнітного випромінювання НВЧ-діапазону на вольт-амперних характеристиках (ВАХ) переходів з’являються сходинки струму при напругах, які визначаються частотою випромінювання і номером сходинки. Отримані квантовані значення напруги підкоряються співвідношенню: $U_n = n\nu/C_J$, де ν – частота НВЧ-випромінювання, яка контролюється системою фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ) з відносною похибкою 10^{-10}; n – ціле число; C_J – фундаментальна константа Джозефсона. Сходинки на ВАХ поширюються аж до напруги ~1 мВ. Тому для <u>одиночного</u> переходу відтворювана квантована напруга визначається співвідношенням $nU_1 \approx 1$ мВ, де n – номер сходинки, а напруга першої сходинки U_1 при частоті 70 ГГц приблизно дорівнює 145 мкВ.

Для отримання більш високих рівнів (струму) створюють багато переходів, які з’єднують послідовно по постійному струму і послідовно-паралельно по змінному. Щоб відтворити значення 1 В, потрібно близько 2000-3000 переходів, а 10 В – понад 10000. Для цього для еталона одиниці напруги з виходом більше 1 В на основі тунельних переходів Джозефсона (ТПД) створені надпровідникові інтегральні схеми (НПІС). На рис.8 показаний фрагмент і плата НПІС з 2400 ТПД на основі структури $Nb/Al/AlO_x/Nb$ для еталона одиниці вольта з виходом напруги більше 1 В [3], а вже у 2013 році була опублікована інформація про НПІС, на базі яких створили програмований еталон постійного і змінного струму з напругою 10 вольт, чіп якого містив біля 300000 надпровідних ТПД, розташованих вздовж горизонтальних хвилеводів (розміри пристрою – 12х17 мм) [4].

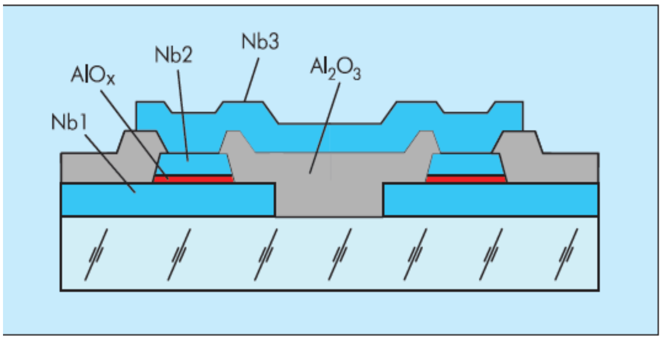


Рис.8а. Фрагмент структури ланцюжка $Nb/Al/AlO_x/Nb$ (показано тільки два ТПД із 2400); верхній контакт (Nb3) об'єднує такі пари у суцільну смужку, а нижній контакт Nb1 також з'єднує пару ТПД суцільною нижньою смужкою (фрагмент-1 на рис.9б).

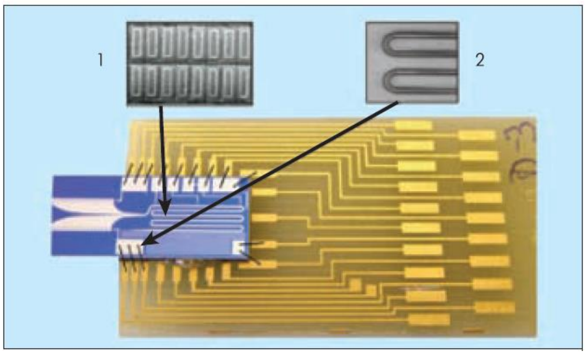


Рис.8б. НПІС для еталона напруги (15х6 мм), розпаяний на печатній платі розміром 33х16 мм: 1 – фрагмент ланцюжка тунельних переходів $Nb/Al/AlO_x/Nb$; 2 – фрагмент надпровідної лінії навантаження.

Еталон електричного опору

Державний ***еталон ома*** до 1990-го року був тільки *груповий еталон*, який складається з 10 високоточних (еталонних) манганінових котушок електричного опору з номінальним значенням 1 Ом, поміщених у подвійні герметичні корпуси, заповнені стиснутим повітрям (див. міри опору).

З 1990-х років починають створюватися набагато точніші еталони ома, які ґрунтуються на квантовому ефекті Холла. Ефект відкритий у 1980 р. німецьким вченим Клаусом фон-Клітцингом (у 1985 р. він за це одержав Нобелівську премію), а вже у 1987 році на 18-й сесії Генеральної конференції по мірам і ваги були прийняті рекомендації про перехід з 01.01.1990 р. на новий спосіб представлення одиниці електричного опору – шляхом реалізації *квантового ефекту Холла* (КЕХ) і константу фон-Клітцинга (K_X) [5]. Еталон на КЕХ признаний природнім еталоном одиниці електричного опору, розмір якої незмінний у часі і прив'язаний до відношення фундаментальних констант:

$$R_X = \frac{h}{n \cdot e^2} = \frac{K_X}{n} = \frac{25812{,}8056}{n} \text{ Ом, (або } R_X = \frac{\mu_0 c}{n \cdot 2\alpha}\text{)} \qquad (1)$$

де h=6,62607544·10^{-34} Дж·с – стала Планка, e=1,60217733·10^{-19} Кл – заряд електрона, α=7,2973525693·10^{-3} (з 2018 року, 1/α=137,035999) – стала тонкої структури, c=299792458±1,2 м/с (1975 р., але з 1983 року з новим визначенням метра як 1 м = $c \cdot t$ = c·(1/299792458), c=299792458 м/с точно) – швидкість світла, μ_0=1,25663706212·10^{-6} Н/А^2 (або Гн/м) (з 2019 року) – магнітна стала вакууму, n – ціле число (число квантування). Для чисел n = 2 і 4 отримуються (експериментально) найбільш стійкі сходинки квантування, що відповідає значенням квантового опору Холла R_X = 12906,403 Ом і 6453,20 Ом з точністю 1·10^{-8} і покращує точність передавання розміру одиниці опору мірам опору і еталонам традиційного типу. Перехід на природні квантові еталони дозволяє відтворювати одиниці фізичних величин незалежно від часу, місця і зовнішніх умов. Принципова можливість такого відтворення базується на нерозрізненості тотожних частинок, універсальності і простоті законів, що керують елементарними квантовими явищами.

Еталон на КЕХ, наприклад, вже з 2010 року експлуатується в еталонному центрі м. Астана (Казахстанський ін-т метрології) [5]. До його складу входять: автоматичний міст-компаратор постійного струму, 10-канальний матричний сканер, посудина Дьюара з надпровідним магнітом (температура рідкого гелію), датчиком і монітором рівня гелію, кріозонд з гетероструктурою, вакуумний насос з вакуумметром, джерело живлення надпровідного магніту, комп'ютер (системний блок, монітор, клавіатура).

Метрологічні характеристики еталону:

відтворювана величина електричного опору: 12906,4035 Ом;
оцінка СКВ результату вимірювань
(при 35 незалежних спостереженнях): ≤ 2·10^{-8};
невиключена систематична похибка: ≤ 5·10^{-8};
розширена невизначеність з рівнем довіри p=0,95: 5·10^{-8} Ом.

Розглянемо детальніше **фізичну суть квантового ефекту Холла** [6,7]. Він виникає в спеціальних структурах метал-діелектрик-напівпровідник (рис.9) при температурі ≤4,2 К (рідкий гелій) у сильному магнітному полі (6-12 Тл).

Якщо на електроди "витік-стік" подати напругу, то між ними у напівпровіднику (Si) потече струм I. Якщо тепер прикласти магнітне поле B перпендикулярно напрямку струму ("зверху вниз"), то під дією сили Лоренца $F_L = evB$ носії заряду (нехай це будуть тільки електрони e, хоча у напівпровіднику носіями заряду можуть бути ще й дірки або тільки дірки) почнуть рухатися перпендикулярно до напрямку їх руху в потоці струму I (де їх швидкість v) і до напряму вектора магнітної індукції B, тобто до бічної сторони структури (на рис.9б – до контактів X), створюючи там надлишок одного із зарядів (електронів), отже, і різницю потенціалів U_X.

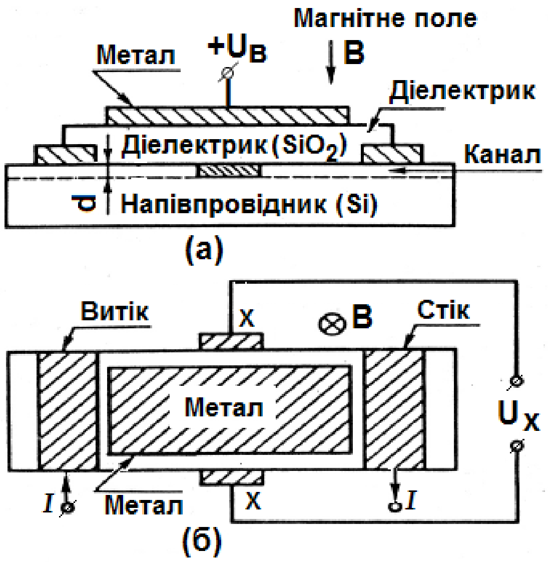


Рис. 9. Холлівська структура типу метал–діелектрик–напівпровідник[6]

Накопичення електронів припиняється при рівності сил $F_E=F_L$ → $eE_X=evB$ → $E_X=vB$ → $U_X=bE_X=bvB$ (b – відстань між холлівськими контактами X). Запишемо замість сили струму I його густину $\rho_I=nev$ (n – концентрація носіїв заряду), тоді для поперечної напруги отримаємо вираз $U_X = \frac{1}{ne} b\rho_I B$ або $U_X = K_X b\rho_I B$, де $K_X=1/ne$ – коефіцієнт (постійна) Холла (він різний для різних металів і напівпровідників). Поява цієї напруги є <u>класичний ефект Холла</u> (відкритий Едвіном Гербертом Холлом у 1879 р. на тонких пластинах золота), який, також, характеризується опором $R_X=U_X/I_X$ у колі холлівських контактів.

Відмітимо, що величини U_X і R_X, через коефіцієнт K_X, залежать обернено пропорційно від концентрації вільних носіїв заряду (електронів або густини заряду $\rho_e=ne$) (рис.10, крива "а").

Якщо зверху Si буде ще нанесений діелектрик (SiO_2) і потім металевий контакт (пластинка) та разом з полем B підключене електричне поле (напруга, $+U_B$ на цей контакт), тоді частина електронів із Si-напівпровідника підтягнеться до границі діелектрика SiO_2 і збереться в тонкому шарі (каналі, обмеженому на рис.9а пунктиром), оскільки діелектрик для електронів є непроникливим. Звісно, що концентрація електронів у цьому шарі (каналі) стане значно більшою і залежатиме від прикладеної напруги $+U_B$.

Відповідно до законів квантової механіки, замкнені в каналі товщиною d електрони будуть розташовуватися на дискретних енергетичних рівнях, заповнювати їх, починаючи з найнижчих можливих, і в певній мірі енергетично "застрягати" на них. Таке відбудеться при дуже низькій температурі (декілька кельвінів), коли $\kappa T<\sim 5\cdot 10^{-4}$ еВ, тобто менше відстані між рівнями. Тому це приведе до значного зменшення руху носіїв заряду поперек каналу, тобто в напрямку поля E_B (до контакту $+U_B$), і в той же час не впливає на рух електронів в (горизонтальній) площині каналу (та й всього напівпровідника). Виникає ситуація двомірності простору для руху електронів. Щоб електрон перейшов з рівня E_1 на вищий рівень E_2 необхідно надати йому додаткову енергію $\Delta E_B=\Delta E_{21}$. Наявність постійного магнітного поля також приводить до квантування енергії електронів, але вже вздовж напрямку холлівських контактів (X):

$$E_X = (n+\frac{1}{2})hc\frac{e}{m_e}B. \quad (2)$$

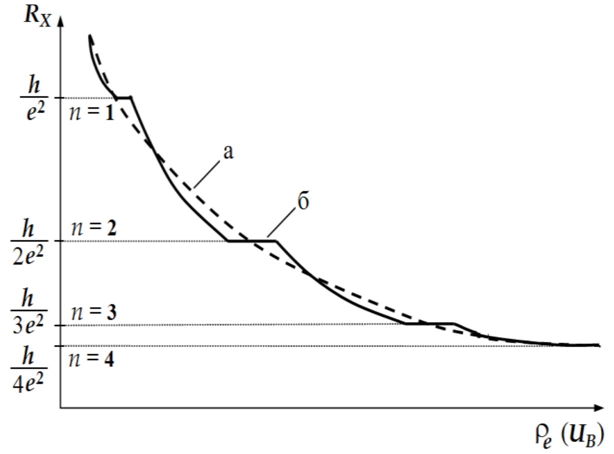


Рис. 10. Залежність холлівського опору від густини електронів (ρ_e) у каналі [8]

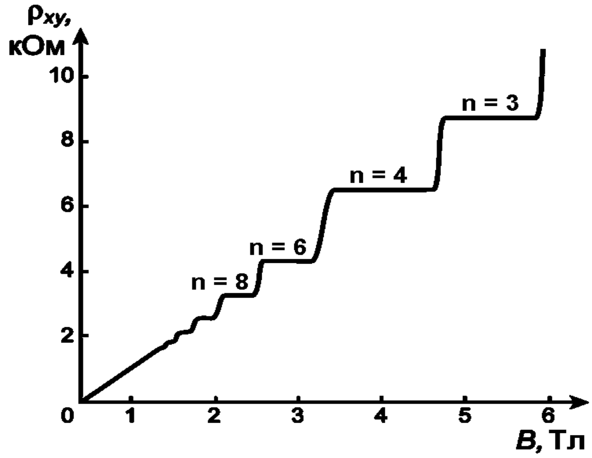


Рис. 11. Залежність холлівського опору від магнітного поля [9,10]

Отже, зростаюче електричне поле E_B (або U_B), досягнувши певних значень, приводить до вивільнення електронів з відповідних енергетичних рівнів і підтягування все більшу їх кількість у шар каналу струму, збільшуючи густину ρ_e. Наслідком цього є наявність на залежності R_X від ρ_e (рис.10,кр.б) плоских ділянок – плато з квантованими значеннями R_X відповідно до наведеної вище формули (1). Це і є квантовий ефект Холла. З метрологічних міркувань, як відмічалося вище, номер плато (сходинки) вибирається парним (2 або 4).

Подібні стрибки опору і плато спостерігаються і на залежності R_X від величини магнітної індукції B у відповідності до формули (2) (рис.11) [9,10]. Що стосується класичного ефекту Холла, то залежність $U_X=K_X b \rho_I B$ широко використовується у датчиках Холла для вимірювання величин B і напруженості магнітного H ($B=\mu H$ для ізотропного середовища), а також для визначення концентрації та знаку носіїв заряду у легованих напівпровідниках.

Структурна схема еталона [8]

Установка для відтворення ефекту Холла містить у собі кріостат з рідким гелієм, у якому в спеціальному кріозонді знаходиться холлівська структура, а також надпровідний соленоїд, що створює сильне магнітне поле (рис.12).

Важливим питанням є здійснення передачі розміру опору холлівської структури реальній еталонній мірі опору R_e, що знаходиться за нормальної температуру, як правило, в окремому термостаті. В технічній реалізації – це вторинний робочий еталон, що складається з групи прецизійних мір електричного опору, в яких прийнято ряд конструктивних і технологічних заходів для забезпечення високої стабільності зберігання розміру одиниці ома. Номінальне значення опору дорівнює холлівському $(R_X)_{n=2}$ або $(R_X)_{n=4}$. Вимірювальна схема містить два контури з одним джерелом стабільного струму. У перший контур включено холлівську структуру, у другий – міра R_e (див. рис.12). Для порівняння R_e і R_X застосовується, як правило, потенціометрична схема з високочутливим нуль-індикатором. Керування, контроль і обробка інформації здійснюються з застосуванням ЕОМ.

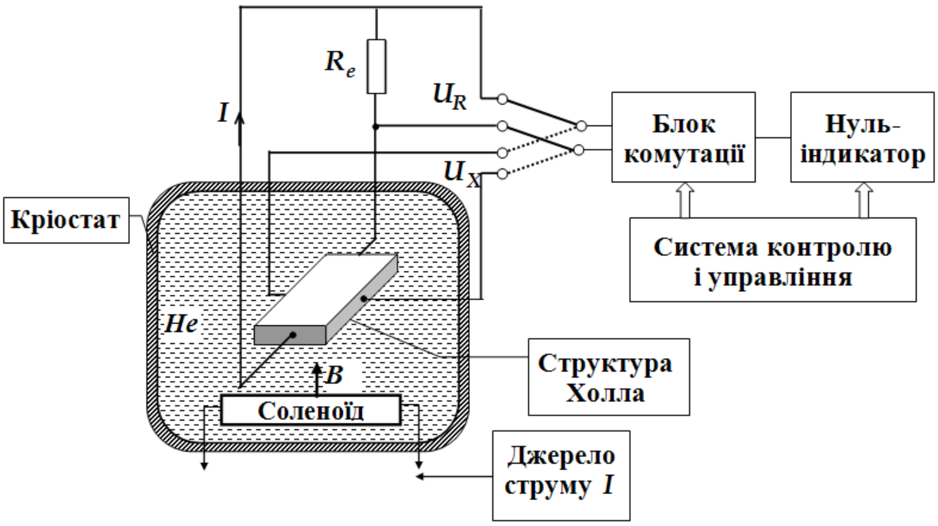


Рис. 12. Структурна схема установки для реалізації квантового ефекту Холла

Рис. 13. Структурна схема первинного еталона електричного опору та передачі розміру одиниці

Крім установки для відтворення квантового ефекту Холла первинний еталон одиниці електричного опору містить у собі (рис.13):

- апаратуру для зберігання одиниці електричного опору, яка складається з групи прецизійних мір електричного опору одного чи декількох номіналів і перехідних мір, що дозволяють проводити взаємні звірення мір різних номіналів;
- міст-компаратор для передачі розміру одиниці між пристроями первинного еталона і підпорядкованим еталоном;
- набір перехідних мір для передачі розміру одиниці в діапазоні від 10^{-3} до 10^{9} Ом.

Типові метрологічні характеристики еталона опору на квантовому ефекті Холла (на прикладі еталона Росії):

номінальне значення відтвореного опору:	12906,4035 Ом;
	6453,20175 Ом;
діапазон, у якому передається розмір одиниці:	$1\cdot10^{-3}$ – $1\cdot10^{9}$ Ом;
СКВ випадкової похибки:	$2{,}5\cdot10^{-8}$;
невиправлена систематична похибка ($\boldsymbol{p}$=0,99):	$4{,}5\cdot10^{-8}$ Ом.

Окремо слід сказати про еталонні міри електричного опору, призначені для кіл змінного струму. Оскільки еквівалентна схема резистора включає до себе паразитну ємність та індуктивність, діючий опір залежить від частоти. В метрологічних розрахунках і наукових дослідженнях часто необхідно знати точне значення опору на робочих частотах. Такі вимірювання можуть бути проведені з використанням еталонної ємності, синтезатора частоти і квадратурного моста-компаратора, що і було відображено на рис.14 структурної схеми еталону ома.

Резистори, призначені для кіл змінного струму, для зниження залежності від частоти повинні мати малий поверхневий ефект і мінімальну реактивність (постійну часу). Для цього використовують дріт з тонких жил (літцендрат) і спеціальні види намотки, наприклад, біфілярну спіраль. Існують також безкорпусні високочастотні резистори, виготовлені за спеціальною технологією, які можна вважати практично нереактивними до частот в кілька гігагерц.

Про можливості атестації мір опору за допомогою еталонної ємності [8]

Оскільки створення еталона на квантовому ефекті Холла – задача складна, існує можливість калібрування (атестації) мір електричного опору за допомогою еталонної ємності. Для цього необхідно мати вимірювальну апаратуру, за допомогою якої можна було б реалізувати рівняння вимірювань

$$R = K\frac{1}{f_e C_\text{e}}, \qquad (3)$$

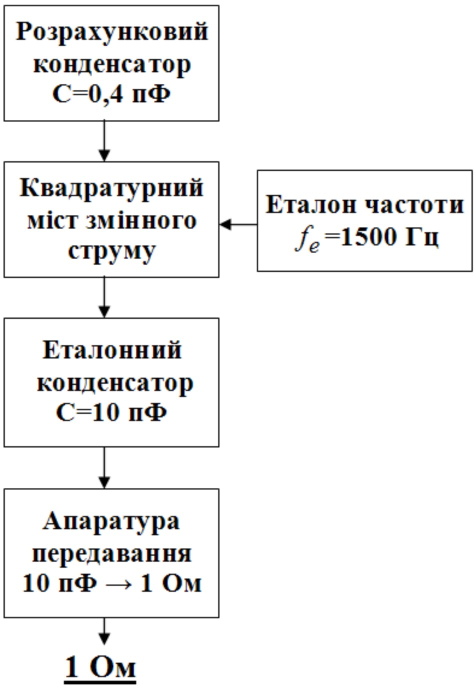


Рис. 14. Схема калібрування еталонного резистора 1 Ом за допомогою еталонного розрахункового конденсатора

де R − реактивний опір досліджуваного резистора; f_e − еталонна частота; C_e − ємність еталонного конденсатора; K − безрозмірний коефіцієнт пропорційності (стала моста-компаратора). Такою апаратурою є так звані квадратурні мости змінного струму, які дозволяють порівнювати або вимірювати відношення двох незалежних напруг, що знаходяться в квадратурі (зсунуті за фазою на 90^0).

Апаратуру калібрування еталонного резистора 1 Ом наведено на рис.14. Усі відомі розрахункові конденсатори типу «Томпсона-Лампарда-Клотье» відтворюють ємність у діапазоні 0,2 – 0,6 пФ, за допомогою якої з використанням еталонної частоти ≈1500 Гц і моста змінного струму проводиться калібрування конденсатора 10 пФ. Далі, за допомогою досить складної системи передавання, що включає до себе квадратурний, ємнісний та резисторний мости, подільник та перехідні міри, калібрується опір 1 Ом, який є основою апаратури зберігання одиниці електричного опору. Первинні еталони передових країн включають до свого складу як апаратуру для відтворення одиниці опору за допомогою ефекту Холла, так і апаратуру порівняння з розрахунковим конденсатором.

Еталон одиниць електричної ємності.

До складу ***еталона фаради*** входять: розрахунковий конденсатор, в якому зміна ємності, яка визначає розмір одиниці, здійснюється шляхом електричної комутації і механічного переміщення електродів; інтерферометр, який використовується для вимірювання відстані між пластинами конденсатора та її зміни (конденсатор з інтерферометром та супутніми пристроями розміщені у вакуумі), а також мостикова вимірювальна установка. Вихідним параметром еталона є зміна ємності при переміщенні рухомої частини конденсатора, яка визначається за допомогою розрахунків з врахуванням геометричних розмірів електродів, швидкості світла у вакуумі і магнітної сталої.

Як відомо ємність плоского конденсатора $C=\varepsilon\varepsilon_0 S/d$, а швидкість світла у середовищі $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$. Для вакууму $\varepsilon=1$, $\mu=1$, тоді $\varepsilon_0=\mu_0 c^2$. Магнітна стала

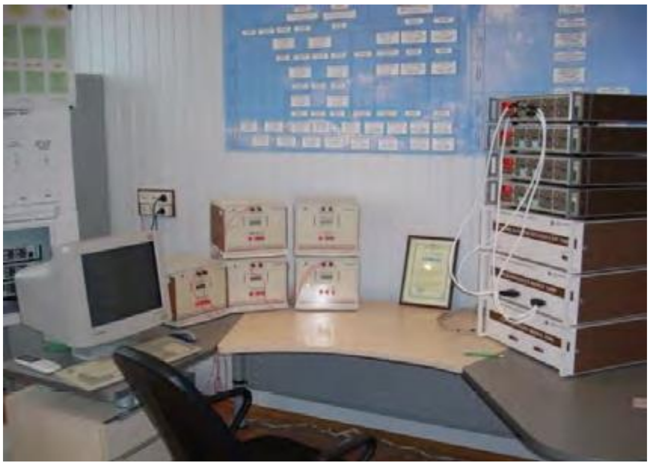
$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\approx1,2566\cdot10^{-6}$ (Гн/м=м·кг·с$^{-2}$А^{2}), $\mu_0c^2\approx1,131\cdot10^{11}$ (м^3·кг·А^2·с$^{-4}$).Отже, для зміни ємності отримуємо формулу: $\Delta C=\frac{S}{\mu_0c^2}(\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d})$ або

$$\Delta C=\frac{S}{\mu_0c^2}(\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d_0+\Delta d})=\frac{S}{\mu_0c^2d_0}(1-\frac{1}{1+\Delta d/d_0})=B\cdot(1-\frac{1}{1+\Delta d/d_0}),$$

де d_0 – початкова відстань між пластинами, Δd – зміна відстані, B – технічна константа установки. Наприклад, для параметрів плоского конденсатора S~10x10 (см), d_0~10 мкм, $\Delta d/d_0$=0,1-1, зміна ємності становитиме ~10^{-9}–10^{-11} Ф.

Отже, такий розрахунковий еталон зберігає і передає значення ємності у розмірі від ~ пікофарад до нанофарад. Згідно ДЕТУ 08-06-01 "Державний еталон одиниць електричної ємності і фактора втрат" має такі метрологічні характеристики (його зовнішній вигляд відображений на рис.15):

діапазон: 10 пФ, 100 пФ: СКВ вимірювання: $1\cdot10^{-6}$;
$1\cdot10^{-3}$ пФ ÷ 100 мкФ; СКВ вимірювання: $1\cdot10^{-6}$ – $5\cdot10^{-5}$;
невиключена систематична похибка (НСП): $\leq2,5\cdot10^{-6}$;
діапазон для фактора втрат $1\cdot10^{-5}$–1,0; НСП: $1\cdot10^{-5}$ – $5\cdot10^{-4}$.



(а)

(б)

Рис. 15. (а) Зовнішній вигляд Державного еталона одиниць електричної ємності та фактора втрат (ДЕТУ 08-06-01, ГП "Укрметртестстандарт" рік створення 2001). (б) Зовнішній вигляд групової двономінальної міри із чотирьох мір Andeen-Hagerling типу AH11A.

Державний еталон забезпечує відтворення одиниць вимірювань на частоті 1000 Гц і складається з комплексу засобів вимірювальної техніки [11]:

– комплекту термостатованих еталонних мір електричної ємності Andeen-Hagerling типу AH11A номіналом 10 пФ (4 од.);
– комплекту термостатованих еталонних мір електричної ємності Andeen-Hagerling типу AH11A номіналом 100 пФ (4 од.);

– комплекту еталонних перехідних мір електричної ємності номіналом від 1 пФ до 1 мкФ (6 од.);
– комплекту еталонних мір активного електричного опору номіналом від 0,1 Ом до 1 МОм (8 од.);
– еталонного компаратора з ПЕОМ;
– стандарту частоти та часу СЧВ-74;
– електронно-лічільного частотоміра Ч3-54.

Розглянемо ще один Державний еталон одиниці електричної ємності розроблений і створений в 2006 році у «ВНДІМ ім. Д.І. Менделєєва», м.Санкт-Петербург, Росія і досліджений у співпраці з РГП «Казахстанський інститут метрології», розташований у Еталонному центрі, м.Астана (рис.18) [12].

Принцип дії цього еталону наступний. Одиниця електричної ємності відтворюється за допомогою перехресного тороїдального конденсатора VTCC-06, що реалізує основні принципи теореми електростатики Томпсона-Лемпарда. Теорема встановлює взаємозв'язок між одиницями довжини і електричної ємності для спеціального класу прямолінійних замкнутих провідних оболонок, поверхні яких розділені ізолюючими зазорами на ряд ділянок – електродів. Ємність між протилежними електродами визначається тільки довжиною електродів уздовж осі системи і електричною постійною системи СІ ε_0 незалежно від форми і розмірів поперечного перерізу оболонки (розраховується).

До складу (російського) державного еталона одиниці електричної ємності входить:
– еталон електричної ємності вихідний – перехресний тороїдальний конденсатор (у вакуумі) VTCC-06 з номінальним значенням 0,5 пФ;
– міст цифровий автоматичний типу AH 2700A для вимірювання параметрів еталонів електричної ємності і для передачі розміру одиниці ємності в діапазоні номінальних значень від $1 \cdot 10^{-3}$ пФ до 1 мкФ при частоті 1 кГц, а також в розширеному діапазоні частот від 50 Гц до 20 кГц;
– вторинний еталон електричної ємності ЭЕТ-1 – конденсатори з номінальноїними значеннями 1 нФ і 10 нФ, що розміщені у повітряному термостаті.

Рис. 18. Еталон ємності (м.Астана) [https://kazinmetr.kz/standards/ge/57902/]

Метрологічні характеристики [12].

Діапазон вимірювань ємності 10^{-3}–10^{-6} пФ при частоті 1 кГц. Номінальне значення при відтворенні одиниці ємності – 0,5 пФ. Еталон забезпечує відтворення одиниці із СКВ результату вимірювань $\leq 5 \cdot 10^{-7}$ при 10 незалежних вимірах. Невиключена систематична похибка (відносне значення) $\leq 1 \cdot 10^{-6}$. Короткочасна нестабільність (відносне значення) термостатованих мір ємності 1 нФ і 10 нФ, що здійснюють зберігання одиниці при температурі (28±0,05) °С, $\leq 6 \cdot 10^{-7}$ за добу. Відносна невизначеність результату вимірювань мір ємності 1 нФ, 10 нФ при частоті 1 кГц становить $2 \cdot 10^{-6}$, абсолютна невизначеність для 1 нФ становить $2 \cdot 10^{-6}$, а для 10 нФ – $4 \cdot 10^{-6}$.

Метод відтворення електричної ємності на підставі квантового ефекту Холла [13].

Даний метод є найточнішим методом відтворення одиниці електричної ємності (обернений до схеми на рис.14). Унікальність застосування для метрології квантового ефекту Холла і фундаментальних фізичних констант полягає в тому, що при коректної реалізації він дозволяє відтворювати значення електричного опору з дуже великою точністю. Після того як в ході міжнародних звірень Міжнародне бюро мір і ваг (МБМВ) продемонструвало точність зв'язку на основі квантового опору Холла з ємністю 10 пФ і 100 пФ, цей метод був запропонований для створення еталонів. Це вимагає проведення вимірювань квантового опору Холла при частоті 1,6 кГц з використанням співвідношення між опором і ємністю (2). Метод є дорогим. Реалізація ефекту Холла – це складна інфраструктура кріогенної техніки для отримання рідкого азоту і гелію, спеціальні холлівських структури метал-діелектрик-напівпровідник, це сильні і високостабільні магнітні поля, спеціально обладнані приміщення, складна електрична і електронна техніка.

Еталон одиниці магнітної індукції

Еталон тесли створено на **ефекті ядерного магнітного резонансу** відкритого у 1946 році Блохом і Парселем, суть його полягає в наступному [8]. Ядро атома, володіючи механічним і магнітним моментом, здійснює у магнітному полі прецесійний рух, аналогічний руху "вовчка" у полі тяжіння Землі. Частота прецесії f атомного ядра робочої речовини визначається магнітно-механічними властивостями ядра і значенням напруженості магнітного поля H, у якому воно знаходиться $\boldsymbol{2\pi f=\mu_0\gamma H=\gamma B}$, оскільки $\boldsymbol{\mu_0 H=B}$, де – B магнітна індукція; μ_0 – магнітна проникність вакууму; γ – ***гіромагнітне відношення ядра*** – атомна стала – відношення магнітного моменту ядра до його механічного моменту. Якщо частота прецесії збігається з частотою зовнішнього електромагнітного поля, має місце явище ядерного магнітного резонансу (ЯМР), яке супроводжується резонансним поглинанням або випромінюванням енергії внаслідок переходу атома з одного енергетичного рівня на інший.

Отже виходить, що $\boldsymbol{B=2\pi f/\gamma}$, тобто якщо відомо γ (гіромагнітне відношення ядра даної речовини), то вимірювання значення магнітної індукції або напруженості магнітного поля зводиться до вимірювання частоти прецесії цього ядра.

Найбільш потужний сигнал ЯМР має місце при використанні ядра атома водню, протона, гіромагнітне відношення якого γ_p *є однією із фундаментальних фізичних сталих*. На підставі обробки даних вимірювань ряду країн міжнародною організацією КОДАТА його значення встановлено рівним $(26752{,}2128 \pm 0{,}0081)\cdot 10^4$ с$^{-1}$Тл$^{-1}$.

Принцип побудови еталона в діапазоні від 0,05 до 2 Тл (область найбільшого поширення засобів вимірювань магнітної індукції) пояснюється за допомогою спрощеної структурної схеми, наведеної на рис.19 [8].

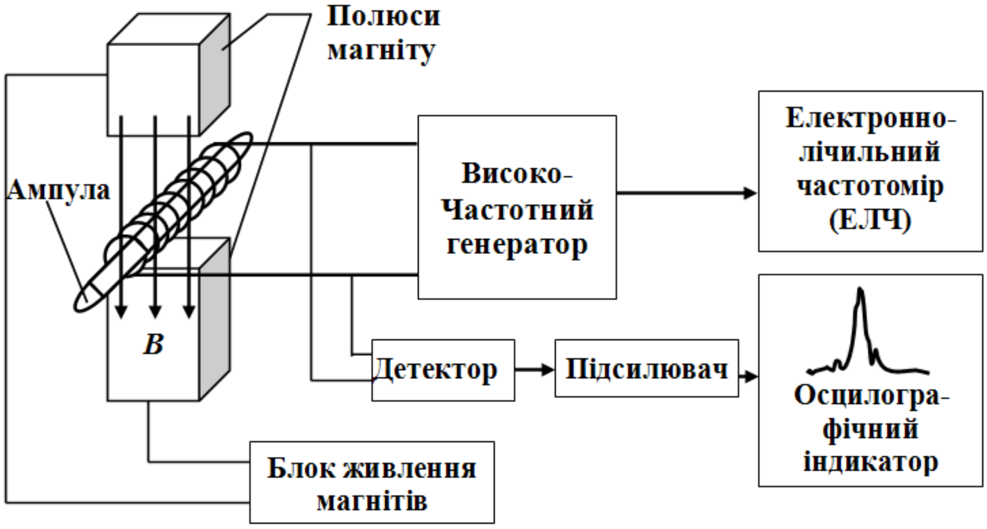


Рис. 19. Структурна схема еталона магнітної індукції

Використовується резонанс протонів у воді (водяному розчині $FeCl_3$). Розчин знаходиться в ампулі, на якій намотані ВЧ котушки. Ампула поміщається в постійне магнітне поле між полюсами електромагніта (у робочому зазорі). Вісь котушки повинна бути перпендикулярна вектору ***B*** вимірюваного магнітного поля. На котушку подається напруга від ВЧ-генератора, внаслідок чого навколо зразка створюється змінне магнітне поле. При збігу частоти ВЧ-генератора з частотою прецесії протонів (в ампулі) має місце ЯМР, який супроводжується поглинанням енергії. При цьому ВЧ-напруга на котушці падає, що фіксується через детектор осцилографічним індикатором. Частота ВЧ-генератора в момент ЯМР вимірюється електронно-лічильним частотоміром (ЕЛЧ), а відтворене значення магнітної індукції визначається із співвідношення $B=2\pi f/\gamma_p$. Регулювання величини магнітного поля здійснюється за допомогою блока живлення шляхом зміни напруги на електромагнітах. При відтворенні значень магнітної індукції від 0,05 Тл до 2 Тл частота ВЧ-генератора повинна регулюватися у діапазоні (2,2 ÷ 86) МГц.

Реальна схема еталона значно складніше. Для забезпечення необхідних метрологічних характеристик еталон містить у собі ряд систем:

- систему забезпечення однорідного стабільного магнітного поля в робочому зазорі магніта;
- систему стабілізації частоти ВЧ-генератора;
- систему керування роботою еталона й обробки результатів вимірювань.

Основними складовими невиключеної систематичної похибки еталона є:

- вплив форми зразка і парамагнітних домішок у зразку;
- вплив деталей зонда на поле в ампулі;
- відхилення вимірюваної частоти від частоти ЯМР.

Метрологічні характеристики українського державного еталона [8]:

діапазон значень B: від 0,05 до 2 Тл; СКВ $< 1\cdot10^{-6}$;
нестабільність (f): $\sim 0{,}5\cdot10^{-6}$; НСП $< 3\cdot10^{-6}$;
похибка передачі одиниці: $< 3\cdot10^{-6}$.

Еталон сили електричного струму.

У систему СІ як основна одиниця входить *одиниця сили електричного струму – ампер.*

Для визначення одиниці сили струму можна було б скористатися будь-якою дією електричного струму – тепловою, хімічною, силовою. Для метрологічних цілей використовують силову дію струму, оскільки сила взаємодії струмів за законом Ампера:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{\vec{r}_{12}^{\,3}}\left[\Delta l_1 \times (\Delta l_2 \times \vec{r}_{12})\right],$$

дає змогу встановити одиницю сили струму точніше, ніж теплова і хімічна дії струму. Поклавши $I_1=I_2=1$ А, $\Delta l_{1,2}=r_{12}=1$ м ($\Delta l_{1,2} \perp \boldsymbol{r}_{12}$), одержимо значення сили у вакуумі ($\mu = 1$) $F = 2\cdot10^{-7}$ Н.

Отже, *ампер – це така сила незмінного (постійного) струму, який при проходженні двома паралельними прямолінійними провідниками нескінченої довжини та дуже малої площі перерізу, розміщеними у вакуумі на відстані 1 м один від одного, спричинив би виникнення на ділянці провідника довжиною 1 м силу взаємодії $2\cdot10^{-7}$ Н.*

На практиці для відтворення одиниці сили струму – ампера – вимірюють силу взаємодії провідників скінчених розмірів. Для цього використовуються провідники такої форми, для якої можна з достатньою точністю розрахувати силу взаємодії за законом Ампера.

Первинний еталон, призначений для відтворення, зберігання і передачі розміру одиниці *ампер* – це комплекс засобів вимірювань, до складу якого входять струмові терези з дистанційним управлінням і міри електричного опору, які використовують при передачі розміру одиниці.

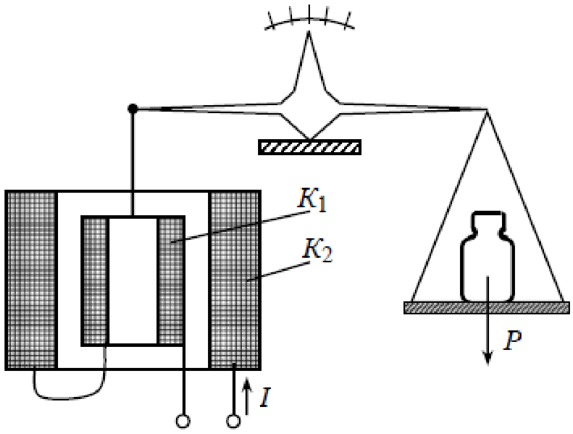


Рис. 20. Струмові терези.

Струмові терези – це точні рівноплечі ваги, до одного із пліч яких підвішена рухома довга циліндрична котушка K_1, розташована всередині нерухомої котушки K_2, яка не зв'язана з вагами (рис.20). Котушки K_1 і K_2 з'єднані між собою послідовно. До другого плеча терези підвішена шалька для важків. Якщо котушку K_1 зрівноважити відповідним важком на шальці ваг, а потім по колу пропустити струм, то котушка K_1 буде втягуватися у котушку K_2 і для відновлення рівноваги на шальку необхідно покласти додатковий важок масою m. Сила ваги цієї маси $\boldsymbol{P = m \cdot g}$ дорівнює силі взаємодії струмів, які протікають через котушки (закон Ампера), $\boldsymbol{F = k \cdot I^2}$. Коефіцієнт пропорційності k залежить від форми провідників із струмами (форми і розмірів котушки, діаметра провідників), їх взаємного розташування, середовища, в якому знаходяться струми і т.д. Але для струмових терезів k є сталим параметром установки. Прирівнявши праві частини рівностей для P і F, одержимо: $I = \sqrt{mg/k}$. Отже, знаючи силу F=$2 \cdot 10^{-7}$ Н (з визначення *одиниці ампера*), розраховують масу важка (m=F/g) і для врівноваження терезів пропускають через котушки необхідний струм, який і буде дорівнювати 1 ампер – одиниці вимірювання цієї ФВ.

Отже, ампер відтворюється через основні одиниці – метр, кілограм і секунда. Еталон відтворює розмір ампера з відносним СКВ, що не перевищує $4 \cdot 10^{-6}$, при відносній систематичній похибці $8 \cdot 10^{-6}$.

Еталон ампера на основі квантових ефектів.

З 2019 року набули чинності зміни в СІ, що включають, зокрема, перевизначення ампера на основі фіксації чисельного значення елементарного заряду. Тому розглядається можливість створення еталона ампера на ефекті, наприклад, одноелектронного тунелювання.

Ефект одноелектронного тунелювання або "ефект Ліхарєва" було теоретично передбачено і експериментально перевірено ще у 80-і роки минулого століття. Цей ефект виявляється у виникненні сходинок на осі струму вольтамперних характеристик надпровідних джозефсонівских переходів малої ємності при їх опроміненні НВЧ-полем (у відмінності від класичного джозефсонівского ефекту, де ці сходинки мають місце на осі напруги). При цьому відстань між сходинками (тобто значення сили струму *I*) залежить лише від частоти проходження електронів *f* і сталої – заряду електрона *e*: $I=ef$. Це відкриває шлях до побудови квантового еталона ампера на основі цього ефекту, але практична реалізація відповідної апаратури поки далека від свого завершення. Оскільки квантові еталони вольта й ома вже існують, створення квантового еталона ампера дозволить замкнути так званий "трикутник квантових еталонів" (рис.21), тобто незалежне відтворення трьох базових електричних одиниць на основі квантових ефектів може стати серйозним імпульсом до подальшого розвитку метрології в електриці.

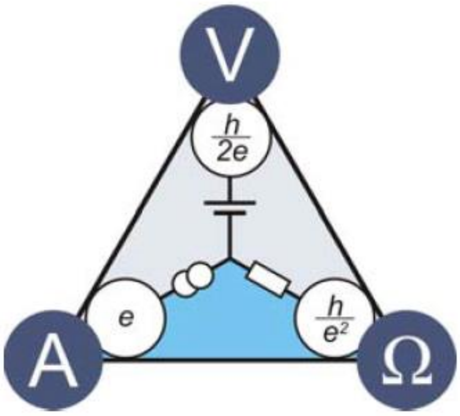


Рис. 21. "Трикутник" квантових еталонів [8,14]

Але існує можливість відтворення ампера на основі квантового вольта, квантового ома і закону Ома. Кілька країн створили відповідну апаратуру, в тому числі Росія.

У спрощеному вигляді схему відтворення "квантового ампера" подано на рис.22 [14]. Комплекс складається з міри напруги на базі ефекту Джозефсона, набору кріогенних рівнономінальних резисторів, що комутуються надпровідним перемикачем, чотирьох еталонних мір електричного опору 1 Ом, відкаліброваних за допомогою еталона на квантовому ефекті Холла, прецизійного (за стабільністю) джерела струму і кріогенного струмового компаратора з нуль-індикатором на НКВІД (НКВІД – надпровідний квантовий інтерференційний детектор – високочутливий прилад на одному з різновидів ефекту Джозефсона). За допомогою останнього розмір одиниці сили струму, "народжений" у колі 1, передається у коло 2. Комплекс являє собою багатозначну міру постійного струму з номінальними значеннями 1 мА і 1 А.

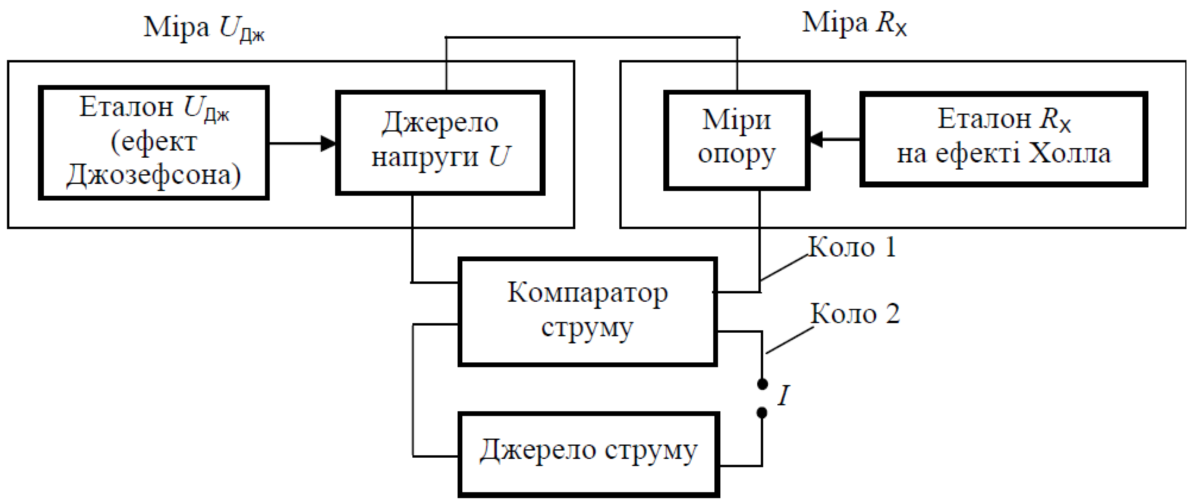


Рис. 22 Схема опосередкованого відтворення "квантового" ампера

Сила струму знаходиться за виразом $I=U_{Дж}/R_X$ де $U_{Дж}$, R_X – електричні напруга і опір, визначені шляхом порівняння з мірами на квантових ефектах Джозефсона і Холла: $U_{Дж}=n\dfrac{h}{2e}f$; $R_X=\dfrac{h}{me^2}$.

Тоді сила струму дорівнює $I=\dfrac{ef}{2}nm$, де n, m – цілі числа (номери сходинок відповідних квантових ефектів); f – частота опромінення.

Таким чином, ампер відтворюється через частоту і елементарний заряд. На цьому принципі створено еталони у ряді країн, зокрема, в Росії. У цьому еталоні невиключена систематична похибка відтворення сили струму в діапазоні від $1\cdot10^{-3}$ до 1 А становить $2\cdot10^{-7}$ при СКВ випадкової похибки $5\cdot10^{-8}$. Неважко бачити, що в такій реалізації ампер втрачає ознаки основної одиниці і стає похідною, простежується до елементарного заряду e.

Еталон одиниці часу.

Одиниця часу – секунда є основною одиницею системи СІ.

Як зазначалося у попередніх лекціях, XIII Генеральна конференція з мір і ваги (1967 р.) ухвалила визначення секунди як інтервал часу, що дорівнює 9192631770 періодів коливань електромагнітної хвилі, яка відповідає переходу між двома *вибраними* енергетичними рівнями надтонкої структури основного стану атомів *цезію*-133 *за відсутності збурень зовнішніми полями*. (Атом цезію-133 (ізотоп $^{133}_{55}Cs$) був обраний тому, що він – єдиний стабільний ізотоп, а його розповсюдженість в природі ≈100%. Протягом 1970-х років було виявлено, що гравітаційне сповільнення часу впливає на протяжність секунди, що відраховуються атомними годинниками, в залежності від їх розташування над поверхнею Землі. Пізніші дослідження виявили, що тепловий рух атомів цезію, їх рух у пучку, приводить до появи ефекту Допплера і відповідно до розширення резонансної лінії до 100 Гц. Це зменшувало точність настройки еталона секунди на необхідну частоту. Тому у 1997 році Міжнародне бюро мір і ваги ввело уточнення у визначення секунди: *атоми цезію повинні покоїтися при температурі близькій до 0 К*, а у 1999 році додалося уточнення щодо відсутності магнітного поля з навколишнього середовища).

Цезієвий репер частоти (ВНИИФТРИ)

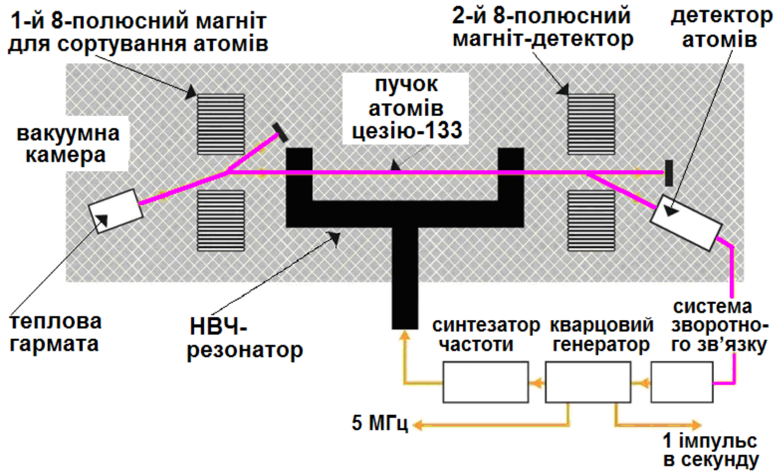


Рис. 23. Схема цезієвого атомно-променевого еталона секунди та частоти

Розглянемо схематичну конструкцію (рис.23) цезієвого атомно-променевого еталона секунди та частоти (першого покоління). У камері з високим вакуумом знаходиться довга труба, в яку за допомогою теплової гармати (за температури 100-150 °С) спрямовується пучок атомів цезію-133. Вони можуть перебувати у двох енергетичних станах (F=3, M=0 і F=0, M=0) основного стану $2S_{1/2}$. Спеціальний 8-полюсний магніт на вході у трубу відсіює атоми із станом F=0, M=0. Далі пучок пролітає через резонатор Ремсі, в якому за допомогою надточного кварцового генератора (репера) створюється надвисокочастотне поле частотою $\approx 9{,}2 \cdot 10^9$ Гц, завдяки якому частина атомів із стану F=3, M=0 переходить у стан F=4, M=0. Енергетична відстань між цими *надтонкими* рівнями $E=h\nu$ ~10^{-5} еВ. На виході з труби інший 8-полюсний магніт відсіює атоми, які не змінили свого стану, а решту направляє на детектор. Змінюючи генератором частоту мікрохвиль, можна домогтися того, щоб якомога більше атомів, потрапляючи у резонанс з зовнішнім полем, змінювало свій стан при прольоті резонатора. В момент досягнення максимуму показів детектора ця частота буде в точності відповідати частоті ν=9192631770 Гц переходу надтонкого стану в атомі цезію (цей процес схожий на налаштування радіоприймача, коли ви крутите ручку, домагаючись максимальної гучності і чистоти сигналу). Цезієвий еталон частоти забезпечує можливість відтворення, одиниці часу – секунди та одиниці частоти – герца з відносною похибкою щонайбільше $\pm1\cdot10^{-11}$, а годинник на його основі при своїй неперервній роботі накопичить похибку в 1 секунду за 700 років.

Державний первинний еталон України побудовано на базі п’яти квантових стандартів часу і частоти (3 водневих мазери та 2 цезієвих стандарти), які за допомогою спеціального програмно-апаратного комплексу формують групову шкалу часу еталона та національну шкалу координованого часу України UTC(UA).

Також до складу еталона входить система зовнішніх звірень, за допомогою якої Україна бере участь у формуванні шкали Міжнародного атомного часу TAI та шкали Міжнародного координованого часу UTC. Результати обробки даних щодобово відсилаються до Міжнар. бюро мір та ваг BIPM (Франція).

Метрологічні характеристики Українського еталону секунди (часу) і частоти
(за даними ДЕТУ 07-01-97)

Діапазон: інтервали часу	від $1\cdot10^{-10}$ с до $1\cdot10^{8}$ с
частота	від 1 Гц до $7\cdot10^{10}$ Гц
Відносне СКВ при 20 незалежних спостереженнях за три місяці	$5\cdot10^{-14}$
Відносна невиключена систематична похибка	$1\cdot10^{-14}$
Відносна нестабільність частоти за інтервали від 1000 с до 1 доби	$2\cdot10^{-14}$
Різниця між шкалою координованого часу України UTC (UA) і Міжнародною шкалою координованого часу UTC	±1 мс
Розширена невизначеність (U): за частотою	$1\cdot10^{-13}$
за різницею шкал часу	2 нс

З інформаційної сторінки ННЦ "Інституту метрології"

Вимірювання часу та частоти – не тільки надзвичайно поширений, але й найточніший вид вимірювань. Достатньо сказати, що відносна похибка відтворення одиниці часу – секунди – за допомогою точних установок складає ~10^{-14}…10^{-15}, що майже на шість порядків краще, ніж, наприклад, найбільш близька за значенням відносна похибка відтворення одиниці маси кілограма (10^{-9}). Прогрес продовжується, і вже прогнозується зниження відносної похибки відтворення секунди до ~10^{-17}…10^{-18} завдяки використанню квантових стандартів в оптичному діапазоні та розробці нових технологій вимірювань частоти.

Одиниці часу та частоти відтворюються і зберігаються еталонами. Створений в ННЦ «Інститут метрології» державний первинний еталон одиниць часу та частоти є сукупністю основних і допоміжних комплексів, що діють безперервно. Основу еталона складає група квантових зберігачів часу та частоти у складі одного цезієвого і трьох водневих стандартів частоти. Атомна секунда визначається як інтервал часу, протягом якого здійснюється 9 192 631 770 коливань цезієвого стандарту. За наслідками роботи групи хранителів формується національна шкала координованого часу України UTC (UA). Розбіжність між національною шкалою координованого часу UTC (UA), відтворюваною державним первинним еталоном, і Міжнародною шкалою координованого часу UTC складає ±0,1 мкс.

Комплекс еталона розташовано в спеціально обладнаних приміщеннях, в яких підтримується температура в межах ±1°С. Для безперервного живлення апаратури еталона електроенергією призначено окремий підкомплекс, що включає відповідні системи автоматичного перемикання джерел живлення.

Для підтвердження метрологічних характеристик еталона проводяться зовнішні звірення з еталонами інших країн, зокрема Росії та Німеччині, з використанням сигналів глобальних навігаційних супутникових систем. Безперервні звірення еталона з еталонами інших країн показують, що він має відносну нестабільність частоти ~$(2\text{-}3)\cdot10^{-14}$ на добовому інтервалі часу. Державний первинний еталон одиниці часу та частоти є основою державної служби єдиного часу та еталонних частот в Україні.

Використана література

1. Блецкан Д.І., Горват А.А., Кабацій В.М. // Електричні вимірювання: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / За редакцією професора Д.І. Блецкана. – Ужгород.: ВАТ “Видавництво “Закарпаття”, 2008. – 400 с. іл. – 202. ISBN 966-347-047-X.
2. http://www.metrology.kharkov.ua/index.php?id=308 (Національний науковий центр "Інститут метрології")
3. А.Гудков, А.Гогин, А.Козлов, А.Самусь, И.Красноролин // Эталон напряжения постоянного тока: сверхпроводниковая ИС на основе переходов Джосефсона // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2007, №6, с.90-93. (6/2007)
4. https: www.novotest.ru/news/world/pervichnyy-etalon-napryazheniya-dlya-vsego-mira/
5. https://kazinmetr.kz/standards/ge/126/
6. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология: Учебник для вузов. – М.: Изд-во стандартов, 1991.
7. Э.И. Медякова. Физические основы измерений. Письменные лекции (Северо-западный государственный заочный технический университет). Санкт-Петербург, 2005.
8. Забезпечення єдності електрорадіовимірювань : підручник / Ю.Ф. Павленко, І.П. Захаров, С.І. Кондрашов, В.К. Гусельніков; за ред. Ю.Ф. Павленка. – Харків: вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2014. – 236 с. ISBN 978-617-687-009-8.
9. К. фон Клитцинг «Квантовый эффект Холла: Нобелевские лекции по физике – 1985 г.» УФН 150, 107 (1986).
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантовый_эффект_Холла
11. О.М. Величко, М.М. Сурду, С.М. Шевкун, М.Г. Домбровський, М.В. Добролюбова // Оцінка невизначеності результатів калібрування рівнономінальних мір електричної ємності на державному еталоні одиниць електричної ємності та фактора втрат // Системи обробки інформації, 2013, випуск 3 (110), с.161-163.
12. https://kazinmetr.kz/standards/ge/57902/
13. Коломиец Т.А., Казакова Е.А., Сосновская Т.Г. // Создание и исследование национального эталона единицы электрической емкости // Приборы и методы измерений, 2012, № 1 (4), с. 69-74.
14. П.І. Неєжмаков, Ю.Ф. Павленко, Н.М. Маслова // Реформа SI та перебудова системи еталонів електричних одиниць // *Український метрологічний журнал,* 2013, № 1 с.3-13.

Тема 6. Похибки вимірювань фізичних величин

Тема 6.1. Види вимірювань. Випадкові похибки вимірювання фізичних величин та їх визначення

Вимірювання – це процес одержання і перетворення інформації про вимірювану величину з метою визначення кількісного результату при порівнянні її з одиницею вимірювання у формі, найбільш зручній для подальшого використання.

Фізична величина – це властивість, в якісному відношенні спільна для багатьох фізичних об'єктів, але індивідуальна в кількісному відношенні для кожного об'єкту.

Одиницею вимірювання фізичної величини називається прийнята по узгодженню за основу для кількісної оцінки певна фізична величина (еталон, міра), однорідна в якісному відношенні з вимірюваною величиною.

Принципом вимірювання називають сукупність фізичних явищ, на яких ґрунтується вимірювання.

Метод вимірювання – спосіб використання принципів і засобів вимірювання.

Алгоритм вимірювання – послідовність операцій вимірювання.

Методика вимірювання – поєднання метода і алгоритму вимірювання.

Види вимірювань розрізняють:

- за ступенем достатності: *необхідні і надлишкові*;
- за способом одержання результату: *прямі, посередні (непрямі), сукупні і сумісні (спільні)*;
- за методом вимірювання: *абсолютні, порогові*;
- за умовами вимірювання: *рівноточні і нерівноточні*;
- за характером вимірюваної величини: *динамічні і статичні*;
- за кількістю спостережень: *статистичні і звичайні*;
- за принципом вимірювання: *магнітні, електричні (неелектричні), оптичні* і тому подібне;
- за формою одержуваного значення вимірюваної величини: *аналогові, цифрові, графічні*.

При дотриманні всіх правил вимірювань і використанні найбільш точних приладів і інструментів ні одне вимірювання не може бути виконаним абсолютно точно. Результати вимірювань завжди будуть різнитися між собою – *результат кожного окремого вимірювання є випадковою величиною*. Задача полягає в тому, щоб кількісно оцінити ступінь достовірності результату вимірювань, тобто визначити міру близькості між виміряним (випадковим) значенням фізичної величини $\boldsymbol{x_i}$, одержаним в $\boldsymbol{i}$-вому досліді, та її ***істинним*** (не випадковим, справжнім,) значенням $\boldsymbol{x_{\text{іст}}}$.

Істинним значенням фізичної величини $\boldsymbol{x_{\text{іст}}}$ називається таке її значення, яке б об’єктивно відображало в якісному і кількісному відношенні певну властивість об’єкту вимірювання, тобто – це значення фізичної величини, *яке є вільним від похибок вимірювання*.

В якості міри близькості виміряного і істинного (на жаль нам невідомого) значення фізичної величини використовується поняття похибка вимірювання.

Похибки можна класифікувати:

- за формою числового виразу: *абсолютні, відносні і зведені*;
- за закономірністю їх появи: *випадкові*, *систематичні* (точно відомі і одного знаку – це *поправки*, вони вносяться у кінцевий результат вимірювання (виключені); визначені за певним алгоритмом і відомі тільки за абсолютним значенням (модулем) – це *невиключені* (інструментальні); *невідомі*, але можуть бути оцінені), *грубі*, *промахи*;
- за можливістю реалізації: *граничні, ймовірні, середньоквадратичні, середні, середньоарифметичні*;
- за умовами виникнення: *основні і додаткові*.

Абсолютна похибка окремого (*i-вого*) вимірювання дорівнює
$\delta x_i = x_i - x_{\text{іст}}$ і виражається в одиницях вимірюваної величини x.

Відносна похибка i-вого вимірювання визначається відношенням $\varepsilon_i = \dfrac{\delta x_i}{x_i}$ – є безрозмірною величиною і визначає частку від виміряного значення або формулою $\varepsilon_i = \dfrac{\delta x_i}{x_i} \cdot 100\%$ – у відсотках до нього.

Оскільки істинне значення вимірюваної величини $x_{\text{іст}}$ експериментатору невідоме, то він не може визначити і δx. Тому в його задачу входить знаходження верхньої межі абсолютного значення можливої похибки Δx: $|\boldsymbol{\delta x}| \le |\boldsymbol{\Delta x}|$. Це *граничне значення* $\boldsymbol{\Delta x}$ ми будемо називати *похибкою вимірювання* або похибкою виміряного значення *величини* $\boldsymbol{X}$.

Випадкові похибки – похибки, які змінюються випадково (без будь-якої очевидної закономірності) при повторних вимірюваннях тієї самої величини. Вони проявляються нерегулярно і з нерегулярною інтенсивністю. Випадкові похибки виникають внаслідок одночасної дії багатьох невідомих, залежних та незалежних причин. Зокрема вони можуть бути зумовлені як об'єктивними причинами (дією навколишнього середовища), так і суб'єктивними, тобто похибками оператора (людини, що проводить вимірювання) – його фізичним, фізіологічним, психологічним станом. Випадкові похибки не є сталими за абсолютним значенням та за знаком і через це їх не можна усунути введенням спеціальних сталих *поправок*. *Випадкові похибки вимірювання підлягають статистичним закономірностям і тому їхнє значення можна оцінити*.

Розглянемо **деякі поняття і постулати випадкових похибок**.

В основу теорії похибок покладені уявлення про повну випадковість величини і знаку похибки вимірювання в будь-якому досліді. Не дивлячись на відміну результатів окремих дослідів, при повторних вимірюваннях в них спостерігається певна закономірність, яка проявляється в тому, що середній результат великого числа спостережень є вже невипадковою величиною, її значення не залежить від впливу окремих випадково діючих факторів.

Для повної статистичної обробки експериментальних даних в класичній теорії похибок вводиться **ряд постулатів**: *постулат про середнє арифметичне* як найбільш імовірне значення вимірюваної величини, *про залежність імовірності окремих похибок тільки від їх величини*, про те, що найкращим наближенням до істинних параметрів плавно змінної функціональної залежності буде те, при якому сума квадратів відхилень спостережуваних і обчислених значень функції – мінімальна. Доповнивши ці постулати допущенням, що похибки експериментів підкоряються нормальному розподілу випадкових величин (дивись тему "Розподіл Гауса"), вдалося розробити досить струнку і відносно просту математичну схему знаходження дійсних значень вимірюваних величин, параметрів, які визначають функціональні зв'язки між досліджуваними величинами, величини випадкових похибок вимірювань, а також побудувати теорію перевірки статистичних гіпотез, теорію планування експерименту і т.п.

Елементарна похибка – похибка, яка не піддається подальшому розщепленню на складові.

Вибірка і генеральна сукупність. Практично число дослідів (вимірювань) завжди обмежене, а це означає, що одержаний набір значень випадкової величини невеликий: x_1, x_2, x_3, ... , x_n в більшості експериментів n<100. Сукупність обмеженої кількості значень випадкової величини називається *вибіркою із генеральної сукупності*, а кожне конкретне значення x_i, що належить до вибірки, – *елементом вибірки*. *Генеральна сукупність* – повний набір всіх значень, які може в принципі приймати дана випадкова величина.

Оскільки вибірка обмежена невеликим числом елементів, то ми маємо можливість зробити тільки оцінку параметрів розподілу і істинного значення виміряної величини. Для *нормального розподілу* (*розподілу Гуса*) елементів у вибірці нам необхідно вміти знаходити оцінку *математичного сподівання* $\boldsymbol{\mu}$ (істинного значення $\boldsymbol{x_{іст}}$), оцінку *дисперсії* $\boldsymbol{D}$ і *середньоквадратичного відхилення* (СКВ) $\boldsymbol{\sigma}$.

Постулат про середнє арифметичне. Нехай виконано послідовно n вимірювань деякої фізичної величини (ФВ) x, істинне значення якої $x_{іст}$ невідоме, і одержана вибірка: x_1, x_2, x_3, ... , x_n. Постулат про середнє арифметичне стверджує, що *найкращою* ***оцінкою*** *істинного значення* $x_{іст}$ виміряної величини *є середнє арифметичне* вибірки, яке являється (визнається) результатом вимірювання: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Постулат про середню квадратичну похибку. Генеральна сукупність характеризується дисперсією D фізичної величини x або $\sigma(x)$ – середнім квадратичним відхиленням (СКВ) окремого вимірювання x_i від істинного значення $x_{іст}$ цієї ФВ:

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{зñð})^2}{n}, \qquad \sigma(x) = +\sqrt{D(x)}, \tag{1}$$

а для величини середнього арифметичного $\bar{x}$ в якості міри випадкової похибки береться величина $\sigma(\bar{x})$:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \text{ – СКВ середнього арифметичного} \tag{2}$$

Для вибірки абсолютна похибка i-вого вимірювання визначається різницею: $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$. (3)

Постулат: ***оцінкою*** *дисперсії окремого вимірювання* $D=\sigma^2(x)$ *є середньоквадратична похибка окремого вимірювання* S_n^2

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2, \qquad \sigma(x) = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{4}$$

а ***оцінкою*** *середньоквадратичної похибки середнього значення є*

$$\sigma^2(\bar{x}) \Rightarrow S_{n\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2,$$

$$S_{n\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \quad \text{або} \quad S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

Отже, в практиці вимірювань <u>істинне значення ФВ замінюють</u> середньоарифметичною величиною $\bar{x}$ для значень окремих вимірювань x_i, що входять в даний ряд виміряних значень (тобто вибірки при багатократних вимірюваннях), яке також дістало назву *дійсне значення* $\boldsymbol{x}_д$ фізичної величини, або значенням, отриманим з допомогою зразкового засобу вимірювань (при однократному вимірюванні).

Розмах результатів вимірювань R_n – різниця найбільшого $x_{\max}$ і найменшого $x_{\min}$ результатів окремих вимірювань, що утворюють ряд (або вибірку) із n вимірювань: $R_n = x_{\max} - x_{\min}$.

Середня арифметична похибка ***r*** *окремого вимірювання в серії n* <u>рівноточних</u> вимірювань – узагальнена характеристика розсіювання (внаслідок випадкових причин) окремих результатів вимірювань x_i (одної і тої ж величини x), що обраховується за формулою:

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|. \tag{6}$$

При числі вимірювань n>30 між значеннями (похибками) r і S_n існує співвідношення $\boldsymbol{S_n = 1{,}25\, r}$.

<u>При нерівноточних</u> вимірюваннях СКВ середнього арифметичного в серії з n вимірювань визначають за формулою:

$$S(X)_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - X_p)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i}}, \quad \text{де} \quad X_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{7}$$

$\boldsymbol{p_i}$ – *статистична вага* i-го вимірювання в серії нерівноточних вимірювань (див. тему "Нерівноточні вимірювання" даного посібника).

СКВ результату <u>непрямих вимірювань</u> величини $\boldsymbol{y}$, яка є функцією $\boldsymbol{y=f(x_1,x_2,...x_n)}$ прямих вимірювань ФВ $x_1, x_2, ... x_n$, обчислюють за формулою

$$S_n = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 S_{n1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 S_{n2}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 S_{nn}^2}, \tag{8}$$

де S_{n1}, S_{n2}, ... S_{nn} – СКВ результатів вимірювань величин x_1, x_2, ... x_n.

Якщо для більшої надійності одержання задовільного результату проводять декілька серій вимірювань, СКВ (похибку) окремого вимірювання із ***m*** серій находять по формулі

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik} - \overline{x}_k)^2}{N - m}}\,, \qquad (9)$$

де чисельник – сума сум квадратів відхилення від середніх значень в кожній із ***m*** серій; $\boldsymbol{n_k}$ – число вимірювань в k-тій серії; ***N*** – загальне число вимірювань в усіх серіях; ***m*** – число серій.

Похибка визначення середнього квадратичного відхилення S_n і S_m може бути визначена, використовуючи відповідні вирази:

$$\Delta S_n = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{S_n}{\sqrt{2(n-1)}}\,, \qquad \Delta S_m = \frac{S_m}{\sqrt{2(N-m)}}\,. \qquad (10)$$

Тепер, знаючи основні формули для обчислення випадкових похибок рівноточних, нерівноточних і непрямих вимірювань та формули обчислення дисперсій і СКВ (які також можуть бути мірою відповідних випадкових похибок), запишемо формулу для визначення похибки результату вимірювання, тобто дійсного значення.

Таблиця 1. Коефіцієнти (квантілі) Стьюдента t_{np}
(*f* – число ступенів вільності, *n* – кількість даних вимірів)

f=n-1	p=0,90	p=0,95	p=0,98	p=0,99	f=n-1	p=0,90	p=0,95	p=0,98	p=0,99
2	2,920	4,303	6,965	9,920	18	1,734	2,101	2,552	2,878
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	22	1,717	2,074	2,508	2,819
5	2,015	2,571	3,365	4,032	24	1,711	2,064	2,492	2,797
6	1,943	2,447	3,143	3,707	26	1,706	2,056	2,479	2,779
7	1,895	2,365	2,998	3,499	28	1,701	2,048	2,467	2,763
8	1,860	2,306	2,896	3,355	30	1,697	2,043	2,457	2,750
9	1,833	2,262	2,821	3,250	40	1,680	2,020	2,420	2,700
10	1,812	2,228	2,764	3,169	60	1,670	2,000	2,390	2,660
12	1,782	2,179	2,681	3,055	80	1,665	1,990	2,370	2,640
14	1,761	2,145	2,624	2,977	120	1,660	1,980	2,356	2,620
16	1,746	2,120	2,583	2,921	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Похибка визначення середнього арифметичного – це абсолютна похибка, яка обчислюється за формулою

$$\Delta\bar{x} = t_{np} \cdot S_{n\bar{x}} \ , \qquad (11)$$

де t_{np} – коефіцієнт (коефіцієнт Стьюдента), який залежить від кількості даних n та ймовірності p (коефіцієнт надійності або коефіцієнт довіри) не перевищити дану похибку (табл.1). Інтервал $\pm\Delta\bar{x}$ ще має визначення, як *довірчий (або надійний) інтервал*, тобто інтервал, в якому з ймовірністю (з довірою) p знаходиться істинне значення вимірюваної фізичної величини.

Гранична похибка вимірювання – максимальна похибка вимірювання (плюс, мінус), імовірність p не перевищити яку має значення, близьке до одиниці. При нормальному законі розподілу випадкових похибок за граничну похибку приймають значення $\mathbf{\Delta_{гр}(p) = \pm\, 3S_n}$.

Похибки заокруглення. Часто табличні значення математичних або фізичних постійних, а також розраховані результати непрямих вимірювань і їх похибок, в записі кінцевого результату необхідно представляти наближеним числом з певною кількістю значущих цифр. Значущими числами довільного числа називаються всі правильні і перша сумнівна цифри 1,2,3,...,9, що входять в число, а також 0 (нуль, якщо він стоїть всередині або справа). *К*-та цифра наближеного числа правильна, якщо абсолютна похибка не перевищує половини одиниці *к*-го розряду (якщо це розряд одиниць, то при $\Delta \leq 0{,}5$; якщо це розряд десяткових, то при $\Delta \leq 0{,}05$ і т.д.). В противному випадку цифру *k*-го порядку називають сумнівною (якщо $\Delta > 0{,}5\cdot10^k$). Це накладає обмеження на вибір числа значущих цифр при запису величини похибки Δx. **Число вимірювань 3<*n*<10**: при запису величини Δx необхідно *зберегти **дві значущі цифри**, якщо перша 1 або 2*, і достатньо записати ***одну значущу цифру**, якщо перша 3 і більше* (в цьому випадку похибка заокруглення і відкидання другої значущої цифри буде менша, ніж похибка обчислення середньої квадратичної похибки – див. задачу 1.3). **Число вимірювань *n*>10**: потрібно *зберегти **дві значущі** цифри якщо перша 1, 2 або 3 достатньо записати **одну (першу) значущу** цифру, якщо вона дорівнює 4 і більше*.

Для задоволення цього способу визначення числа правильних знаків проводять заокруглення чисел. Нехай після заокруглення в числі повинно залишитись k значущих цифр, тоді користуються такими **правилами**:

- якщо k+1 цифра менше 5, то цифра k не змінюється;

- якщо k+1 цифра більше 5, то цифра k збільшується на 1;
- якщо k+1 цифра дорівнює 5, то можливі два випадки:

  а) якщо серед цифр, що відкидаються, крім цифри 5, є відмінні від 0, то k-та цифра збільшується на 1,

  б) але якщо ці цифри дорівнюють 0, то: k-ту цифру збільшують на 1, якщо вона непарна, і не змінюють, якщо вона парна.

Якщо з наближеними числами ще будуть проводитись обчислення, то в них необхідно зберігати не більше двох сумнівних цифр. Також, виконуючи математичні операції з наближеними числами, необхідно дотримуватися **правила**: після виконання математичних операцій у кінцевому результаті необхідно залишити стільки значущих цифр, скільки їх було в числі з найменшою кількістю значущих цифр.

Тема 6. Похибки вимірювань фізичних величин

Тема 6.2. Засоби вимірювань, їх характеристики та похибки. Клас точності приладів.

До засобів вимірювання відносяться міри, вимірювальні перетворювачі, прилади, установки, системи.

Міра – засіб вимірювання, який призначений для відтворення певної, заданої фізичної величини. Розрізняють міри однозначні і багатозначні. Однозначні міри мають одне певне значення вимірюваної величини. Міра, яка має властивість відтворення декількох різних значень вимірюваної величини, називається багатозначною.

Поряд із багатозначними мірами розрізняють набори або магазини однозначних мір.

Вимірювальний перетворювач – це вимірювальний засіб, призначений для перетворення інформації, отриманої в результаті взаємодії з певною фізичною величиною, в зручну для подальшої обробки, зберігання або передачі форму, але яка ще не піддається безпосередньому спостереженню і відліку.

Вимірювальний прилад – це сукупність деталей і механізмів, призначених для формування вихідної інформації про вимірювану величину у формі, зручній для безпосереднього спостереження і відліку.

Вимірювальна установка – це сукупність вимірювальних приладів, перетворювачів та інших пристроїв, функціонально об’єднаних між собою і призначених для формування інформації про вимірювану фізичну величину у формі, зручній для безпосереднього спостереження.

Якщо інформація про вимірювану величину, що поступає від окремих блоків установки, виробляється у формі, зручній для автоматичної передачі і обробки, то такий вимірювальний засіб називається *вимірювальною системою*.

Засоби вимірювання (ЗВ) характеризуються такими *метрологічними параметрами*: класом точності, чутливістю, порогом чутливості, роздільною здатністю, діапазоном вимірювання, ціною поділки, варіацією показів (та ряд інших).

Значення фізичної величини, одержане в результаті вимірювань, яке містить в собі похибку вимірювання, називається *дійсним*.

Основна похибка обумовлена неідеальністю власних властивостей засобу вимірювання при його використанні в оптимальних (номінальних) умовах і визначається за класом точності приладів.

Додаткова похибка вимірювання обумовлена реакцією ЗВ на зміну зовнішніх впливаючих факторів і відхиленням від номінальних або нормальних умов експлуатації приладу.

Нормальні умови експлуатації засобів вимірювання: температура оточуючого повітря – (20±5) ^{0}С, відносна вологість – 30-80 %, атмосферний тиск – (0,8–1,05)·10^5 Па, напруга мережі – (220±4,4) В, частота напруги в мережі – (50,0±0,5) Гц.

Зовнішні фактори, що можуть вплинути на результат вимірювання, поділяють на такі групи:

а) кліматичні (температура, вологість, тиск);

б) стаціонарні електричні і магнітні поля, електромагнітні поля;

в) механічні навантаження (вібрації, удари, дотики деталей ЗВ);

г) іонізуюче випромінювання;

д) газовий склад атмосфери та робочого середовища.

Похибка, обумовлена взаємодією засобів вимірювання і об'єкту виміру, в багатьох випадках полягає в тому, що підключення засобу вимірювання до об'єкту виміру призводить до зміни значення вимірюваної величини відносно її значення до підключення засобу вимірювання.

Динамічна похибка приладу обумовлена реакцією засобу вимірювання на швидкість (частоту) зміни вхідного сигналу.

За способом чисельного представлення **розрізняють абсолютну, відносну і зведену похибку**. *Абсолютна похибка приладу* $\boldsymbol{\Delta x}$ – це різниця між показами приладу $\boldsymbol{x}$ і істинним значенням $\boldsymbol{x_{ іст}}$ вимірюваної величини. Абсолютна похибка, взята з оберненим знаком, називається *поправкою*: **П= -$\boldsymbol{\Delta x}$**. *Відносна похибка ЗВ* (%) – відношення абсолютної похибки приладу до істинного значення виміряної ним величини (яке наближено може бути знайдено усередненням багатьох рівноточних вимірювань, $\overline{x} \approx x_{іст}$): $\delta = [(x-x_{іст})/x_{іст}]\cdot 100=(\Delta x/x_{іст})\cdot 100 \approx$ $\approx [(x-\overline{x})/\overline{x}]\cdot 100$. Під *зведеною похибкою* розуміють відношення абсолютної похибки засобу вимірювання Δx до деякого *нормуючого значення* вимірюваної величини $\boldsymbol{X_N}$:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{X_N} \cdot 100\% . \qquad (2.1)$$

З нормуюче значення X_N приймається:

1) кінцеве значення шкали приладу X_K, якщо нульова відмітка знаходиться на краю шкали або поза нею;
2) сума кінцевих значень шкали приладу (без врахування знаків), якщо нульова відмітка знаходиться між цими значеннями шкали;
3) номінальне значення вимірюваної величини, якщо таке встановлено (наприклад, у частотомірів з діапазоном вимірювання 45-55 Гц і номінальною частотою 50 Гц, нормуюче значення $X_N = 50$ Гц);
4) для вимірювальних приладів з суттєво нерівномірною шкалою X_N приймають рівним всій довжині шкали або її частині, яка відповідає діапазону вимірювань – в цьому випадку похибку і довжину шкали виражають в одних одиницях, наприклад, в одиницях довжини;
5) діапазон вимірювань для багато шкальних приладів, або якщо шкала приладу проградуйована в одиницях величини, для якої прийнята шкала з умовним нулем (наприклад, температура в ^{0}C).

У засобів вимірювання **виділяють адитивні** і **мультиплікативні похибки**. Якщо величина похибки не залежить від значення вимірюваної величини (рівня вхідного сигналу), то вона називається *адитивною*. *Мультиплікативними* називаються похибки, значення яких пропорційні значенню вимірюваної величини x.

Основною характеристикою вимірювання є його точність. Під *точністю вимірювання* розуміють якість вимірювань, яка вказує на близькість їх результатів до істинного значення вимірюваної величини. Вимірювання вважається тим більш точним, чим менша його похибка.

Клас точності засобу вимірювання – узагальнена характеристика, що визначається межами допустимих основних і додаткових похибок, а також іншими властивостями, які впливають на точність, значення яких встановлюються в стандартах на окремі види засобів вимірювання. Клас точності характеризує властивості приладів у відношенні точності, але не є безпосереднім показником точності і похибки вимірювань, тому що ці параметри залежать ще й від метода вимірювань та умов, при яких вони були виконані.

Різновидність засобів вимірювання ускладнює можливість єдиного підходу до вибору критерію для їх групування на класи по точності вимірювання. **В основу всіх класифікацій покладено значення гранично допустимої основної похибки: абсолютної, відносної і зведеної.** Найбільш обґрунтованою і широко вживаною є класифікація засобів вимірювання не по граничній абсолютній, а по відносній або зведеній основній похибці.

В загальному випадку залежність абсолютної похибки Δx від вхідної величини x може бути представлена рівнянням

$\boldsymbol{\Delta x = \pm(a + b \cdot x + ...)}$ (для більшості приладів $\underline{\Delta x = \pm(a + b \cdot x)}$) (2.2)

a – називають адитивною похибкою, ***bx*** – мультиплікативною похибкою. <u>Адитивна похибка</u>, крім того, обмежує найменше значення ФВ, яке можна виміряти даним приладом. Вона обумовлена неточністю відліку, тертям в опорах, дрейфом нуля відліку, новодками, вібраціями і т.п. <u>Причини мультиплікативної похибки</u> – вплив вимірюваної величини або факторів, через які вона визначається, на параметри деяких елементів і вузлів засобу вимірювання, а також зміну неінформативних параметрів вхідного сигналу.

У приладів, для яких адитивна складова похибки значно переважає над мультиплікативною, основна зведена похибка приймається сталою у будь-якій точці шкали (діапазону вимірювань), її граничному значенню присвоюється *клас точності засобів вимірювання*, який визначається за формулою

$$\gamma = \frac{\Delta x}{X_N} \cdot 100 \le \eta. \qquad (2.3)$$

В цьому випадку *клас точності виражається одним числом* $\boldsymbol{\eta}$, яке вибирається із ряду: $1 \cdot 10^n$; $1{,}5 \cdot 10^n$; $2 \cdot 10^n$; $2{,}5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$, де $\mathbf{n}$ = 1,0,-1,-2 і т.д., як число, що стоїть найближче до $\boldsymbol{\gamma}$ у нерівності $\boldsymbol{\eta \ge |\gamma|}$. Тоді максимальна похибка приладу дорівнює

$$\Delta x_{\max} = \frac{\eta \cdot X_N}{100}. \qquad (2.4)$$

У тому випадку, коли адитивна і мультиплікативна складові похибки одного порядку, *клас точності приладу позначається двома числами*, розділеними косою рискою, наприклад: 0,1/0,05. Граничне значення основної відносної похибки, <u>виражене у процентах</u>, в цьому випадку можна визначити за формулою, приведеною в Держстандарті 8.401-80 і одержаній з використанням (2.2)

$$\delta = \frac{\Delta x_{\max}}{x} \cdot 100 = \frac{a + b \cdot x}{x} \cdot 100 = \left[\frac{a}{x} + b + \frac{a}{X_N} - \frac{a}{X_N}\right] \cdot 100 =$$

$$=\left[\left(b+\frac{a}{X_N}\right)+\frac{a}{X_N}\left(\left|\frac{X_N}{x}\right|-1\right)\right]\cdot 100=\left[c+d\cdot\left(\left|\frac{X_N}{x}\right|-1\right)\right], \qquad (2.5)$$

де $\mathbf{X_N}$ – нормуюче значення засобу вимірювання. Як випливає з введених у формулі позначень, $\boldsymbol{d}=\frac{a}{X_N}\cdot 100$, $\boldsymbol{c}=\left(b+\frac{a}{X_N}\right)\cdot 100=(b\cdot 100+d)$;

c і *d* – сталі додатні числа, виражені в процентах. *Клас точності позначається* ***c/d***, числа ***c*** і ***d*** нормуються з того ж ряду, що й **η**. Із (2.5) видно, що абсолютна гранична похибка приладу в цьому випадку визначається за формулою

$$\Delta x_{\max}=\pm\frac{x\cdot\delta}{100}=\pm\frac{d\cdot X_N+(c-d)\cdot x}{100} \qquad (2.6)$$

Крім того, при значеннях $x=X_K/2$ і $x=X_K$ (середина шкали і кінець шкали) відносна похибка $\boldsymbol{\delta=c+d}$ і $\boldsymbol{\delta=\pm c}$ відповідно.

Отже, знаючи ***d*** – зведену адитивну похибку – можна визначити абсолютну адитивну похибку приладу $\boldsymbol{a = d\cdot X_N/100}$, а за числом ***c*** – значення коефіцієнта $\boldsymbol{b=(c-d)/100}$ (коефіцієнт мультиплікативної похибки) і побудувати графік залежності абсолютної похибки приладу $\Delta x_{\max}=\pm(a+b\cdot x)$ від значення вимірюваної величини *X* (рис.2.1). Після вимірювань, знаючи $\bar{x}$, знаходять сумарну максимальну похибку приладу

$$\boldsymbol{\Delta x_{\max}=\pm(a+b\cdot\bar{x})}. \qquad (2.6а)$$

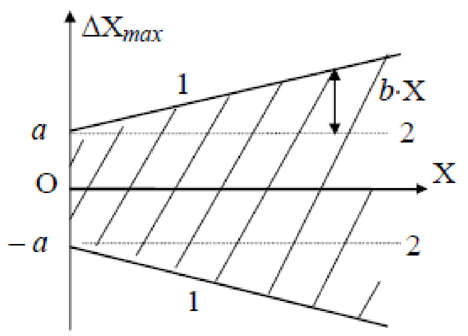


Рис. 2.1. Залежність похибки ЗВ від значення вимірюваної ФВ.

Зауважимо, що визначене згідно (2.4) чи (2.6а) за класом точності значення $\boldsymbol{\Delta x_{\max}}$ виражає максимальну основну похибку приладу. Гранична межа додаткової похибки ЗВ вказується тільки в технічній документації.

Межі допустимої додаткової похибки можна виражати у формі, відмінній від форми вираження граничнодопустимої основної похибки [1]. Як правило, їх встановлюють у вигляді частки або кратного значення границі допустимої основної похибки. Тому позначення класів точності в технічній документації і на засобах вимірювання можуть дещо відрізнятися. Засобам вимірювань кількома діапазонами вимірювань допускається присвоювати кілька класів точності. Наприклад, амперметру з трьома діапазонами вимірювання струму 0–10, 0–20 і 0–50 ампера можуть бути присвоєні різні класи точності для окремих діапазонів. Засобам вимірювання, призначеним для вимірювання кількох фізичних величин, допускається присвоювати різні класи точності для кожної вимірюваної величини. Наприклад, приладу, який призначений для вимірювання електричної напруги і струму, може бути присвоєно два класи точності: один – як вольтметру, другий – як амперметру [1].

Перелічимо ряд метрологічних і технічних характеристик ЗВ.

Діапазоном вимірювання – значення, обмежені початковим і кінцевим значеннями шкали (вказується на приладі або перетворювачі).

Чутливість вимірювального приладу – це інтервал переміщення покажчика приладу по шкалі при зміні значення вимірюваної величини x на одиницю (Δx=1). Якщо чутливість постійна в діапазоні всієї шкали, то вона чисельно дорівнює відношенню лінійного переміщення покажчика приладу ΔL (стрілки, світлового зайчика, стовпчика ртуті термометра), вираженого в поділках шкали, до всього інтервалу виміряних значень: $S_b=\Delta L/\Delta x$. При нерівномірній шкалі чутливість S_b в певній точці шкали ($x=x_i$) визначається похідною від переміщення покажчика $L(x)$ по вимірюваній величині x в даній точці шкали

$S_b = \left(\frac{dL}{dx}\right)_{x=x_i}$. Одиницею вимірювання чутливості – *розмірністю* – є відношення розмірності чисельника до розмірності знаменника $[S_b]=[L]/[x]$. Наприклад, для медичного термометра $[S_b]$=поділки/^{o}C.

Ціна поділки приладу $C_{под}$ – відношення максимального значення величини, яке можна виміряти за допомогою даного приладу x_{max}, до повного числа поділок шкали N: $C_{под}=x_{max}/N$, тобто це є значення (розмір) ФВ, яку має одна поділка шкали. Із порівняння формул легко бачити, що значення (число) $C_{под}$ обернене до чутливості – $C_{под}=1/S_b$ (і навпаки), а розмірність $[C_{под}]=[x]$.

Поріг чутливості – найменше значення вимірюваної величини, здатне викликати помітне оператору відхилення індикатора приладу.

Роздільна здатність – це мінімальна зміна вимірюваної величини, яка може бути зафіксована показами приладу чи оператором (спостерігачем).

Варіація показів – найбільша різниця показів приладу при повторних вимірюваннях одного і того ж значення ФВ у незмінних зовнішніх умовах, що характеризує ступінь стійкості показів приладу.

Швидкодія – число вимірювань (перетворень), які виконуються в одиницю часу. Ця характеристика особливо важлива для цифрових приладів і перетворювачів, а також для самописців і вимірювальних систем, коли одним приладом з допомогою комутуючого пристрою необхідно виміряти кілька величин, які повільно змінюються.

Час встановлення показів (час заспокоєння) – це проміжок часу, який проходить від моменту зміни вимірюваної величини до моменту, коли покажчик займе положення, яке відповідає новому значенню вимірюваної величини. Проте усім приладам властива певна похибка, тому під часом встановлення показів засобів вимірювання розуміють інтервал часу, який пройшов з моменту зміни вимірюваної величини до моменту, коли відхилення покажчика від майже усталеного (заспокоєного) значення не перевищує похибки ЗВ. Цей час для більшості електровимірних та інших типів аналогових приладів не перевищує 4 с (хоча, наприклад, для тих же рідинних термометрів він може тривати декілька хвилин).

Надійність засобів вимірювань – здатність зберігати технічні та нормативні (встановлені при метрологічній атестації ЗВ) характеристики протягом заданого часу за певних умов роботи. З метрологічної точки зору ця характеристика визначає якість вимірювання, а саме, точність. Тому всі ЗВ через встановлений період часу роботи (часу напрацювання) повинні проходити *повірку* – процедуру встановлення відповідності метрологічних характеристик.

Знання всіх цих похибок, вміння їх врахувати, а при можливості зменшити або виключити, значно покращують таку характеристику, як якість вимірювань. Під *якістю вимірювань* слід розуміти сукупність властивостей стану вимірювань, які забезпечують одержання результатів вимірювань з потрібними характеристиками точності, в необхідному вигляді і у встановлений строк.

До основних властивостей стану вимірювань, що відбивають його якість, відносяться:

точність результатів вимірювань – характеризується похибками засобів і методів вимірювань та похибками, спричиненими випадковими зовнішніми діями на процес вимірювання, і відбиває близькість до нуля похибки результату вимірювання ($\Delta_{рез} \to 0$), що означає максимальну його наближеність до істинного значення вимірюваної величини;

правильність вимірювання – відбиває близькість до нуля систематичної похибки в результатах вимірів (малі значення систематичної похибки є свідченням правильності вимірювань $\Delta_{сис} \to 0$);

збіжність вимірювань – відбиває близькість один до одного результатів повторних вимірювань одної і тої ж фізичної величини, які виконуються в однакових умовах, одними і тими же засобами і методами (малі значення випадкових похибок є свідченням високого збігу результатів повторних вимірювань $\Delta_{вип} \to 0$);

відтворюваність – відбиває близькість один одному результатів вимірювань одної і тої ж ФВ, виконаних в різних місцях, різними методиками і засобами, в різний час і різними операторами, але приведеними до одних і тих же умов (характеризується близькістю середньоквадратичних похибок порівнюваних груп вимірювань $S_{n1}(x_1) \approx S_{n2}(x_2)$);

швидкість одержання результатів – ця властивість вимірювань залежить від раціонального складання методики вимірювань, рівня автоматизації вимірів та обробки одержаних даних.

Єдність вимірювань – ця властивість стану вимірювань визначається рівністю (однаковістю) розмірів одиниць ФВ, що зберігаються різними ЗВ в межах встановлених похибок, застосуванням узаконених одиниць фізичних величин, стандартизованих і атестованих засобів і методик вимірювань, рівнем їх уніфікації; значення фізичної величини виражені у прийнятих одиницях, а межі похибок вимірювань прийняті із заданою ймовірністю.

Визначення довірчої границі невиключеної систематичної похибки групи засобів вимірювання та оцінок математичного сподівання і СКВ.

Якщо відома функція густини розподілу фізичної величини або її похибок *f(x)*, то

інтеграл виду $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називається <u>математичним сподіванням</u> або *моментом першого порядку*;

інтеграл виду $D \equiv \sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$ – дисперсією або *моментом другого порядку*.

Для *вибірки* даних з їх генеральної сукупності, тобто для неповного числа даних *n*, оцінкою μ є середнє арифметичне даних $\bar{x}$, оцінкою дисперсії $\sigma^2=D$ є середнє квадратичне відхилення (СКВ) даних $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Статистичний зміст величини σ – розсіювання сукупності виміряних даних навколо $\bar{x}$.

Для нормального розподілу (розподілу Гауса) оцінкою границь випадкових похибок (довірчого інтервалу) є значення $\Delta_{вип}(p)=t_{np}S_{n\bar{x}}$, де t_{np} – коефіцієнт Стьюдента для *n* даних і довірчій ймовірності *p*, а $S_{n\bar{x}} = S_n / \sqrt{n}$ – СКВ середнього арифметичного; зміст цієї величини – розсіювання значень середнього арифметичного (як результату вимірювання) навколо істинного значення ФВ: інтервал $\Delta_{вип}(p)$ якраз і обмежує значення, серед яких з ймовірністю *p* міститься істинне значення фізичної величини, що вимірюється.

На відміну від випадкових похибок, параметри розподілу і межі яких розраховуються статистичними методами, оцінки границь невиключених систематичних похибок дослідник встановлює, керуючись досвідом і інтуїцією. Оцінювання накладання (сумарної дії) цих похибок пов’язано з побудовою композиції їх розподілів. Будувати їх важко через невідомі у більшості випадків розподіли, тому, *вважаючи рівномірність розподілів всередині заданих меж* θ_j, для знаходження довірчого інтервалу (границь) невиключеної систематичної похибки $\theta(p)$ застосовують формулу $\theta(p) = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2}$, де ***k*** – коефіцієнт, що відповідає вибраній довірчій ймовірності ***p*** і залежить від кількості ***m*** складових θ_j (довірчих інтервалів) та їх відношення, тобто $k=f(p,m,\theta_j/\theta_i)$. Для ймовірностей $p=0,90$ і $p=0,95$ значення поправочного коефіцієнта *k* мало чутливі до зміни числа *m*, тому приймають:

$$\boldsymbol{k(p=0,90) = 0,95; \quad k(p=0,95) = 1,1}.$$

Для ***p*=0,99** коефіцієнт ***k*** вже складним чином залежить від *m* та інших параметрів функції і змінюється в межах від 1 до 1,49. Але і в цьому випадку, якщо $m \geq 5$, то достатня точність забезпечується, прийнявши $k=1,45$; при $m \leq 4$ – можна прийняти $k=1,4$. Більш точне значення k можна знайти за допомогою графіка $k=f(m,l)$ (рис.2.2), де l – параметр, що залежить від відношення меж складових θ_j . Це робиться наступним чином. Наприклад, значення θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 розташовують в порядку зростання, знаходять відношення $l_1=\theta_2/\theta_1$ та $l_2=\theta_4/\theta_3$ і за графіком визначають k_1 і k_2, приймаючи за коефіцієнт k більше із них. В числах це буде так. Нехай $\theta_{1\text{-}4}$ дорівнюють 1, 2, 3, 4; тоді l_1=2/1, l_2=4/3, і за кривою 3 знаходимо: $k(l_1)$=1,36; $k(l_2)$=1,40 – отже беремо значення k_2=1,40.

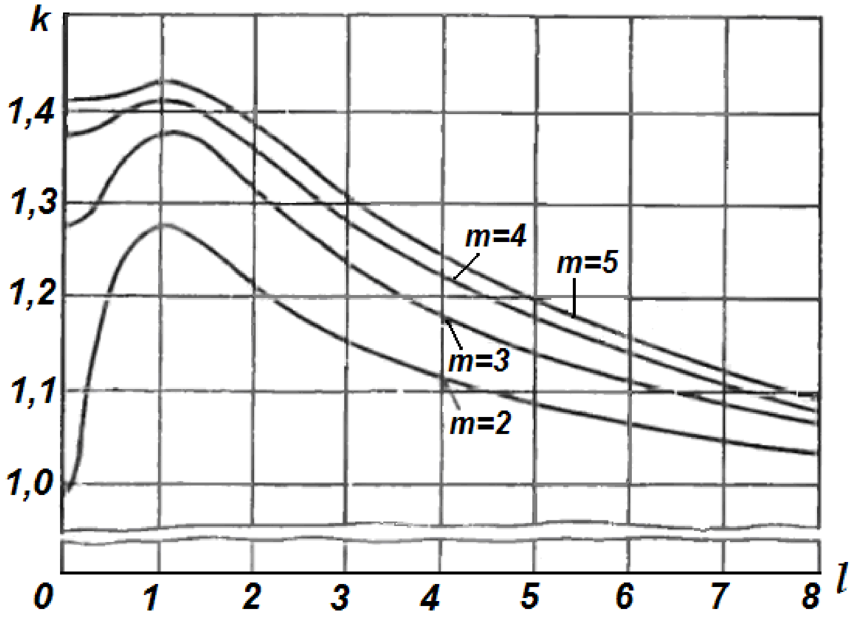


Рис. 2.2. Залежності *k=f(m,l)* для довірчої ймовірності *p*=0,99 і кількостей похибок: *m* = (2÷5) [2,3,4].

Результуюча похибка (довірчий інтервал $\Delta(p)$), з врахуванням довірчих інтервалів випадкової $\Delta(p)_{\text{вип}}$ і систематичної $\theta(p)$ похибок, визначається за формулою, яку можна записати по аналогії з інтервалом випадкових похибок:

$$\Delta(p) = t_{sum}S_{sum},\ \text{де}\ S_{sum} = \sqrt{S_{n\bar{x}}^2 + \frac{\theta^2}{3}},\quad t_{sum} = \frac{\Delta(p)_{\text{вип}} + \theta(p)}{S_{n\bar{x}} + \theta/\sqrt{3}} \qquad (2.7)$$

або
$$\Delta(p) = \frac{\sqrt{S_{n\bar{x}}^2 + \theta^2/3}}{S_{n\bar{x}} + \theta/\sqrt{3}} \cdot [\Delta(p)_{\text{вип}} + \theta(p)] \longrightarrow$$

$$\mathbf{\Delta(p)=K[\Delta(p)_{вип}+\theta(p)]}. \qquad (2.7a)$$

Тобто результуючий довірчий інтервал (похибка) не є простою сумою двох цих похибок, а є помноженим на певний коефіцієнт ***K***, який залежить від довірчої ймовірності ***p*** (коефіцієнт надійності в таблиці 1 коефіцієнтів Стьюдента) і відношення $\theta/S_{n\bar{x}}$. Ці значення K наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Значення коефіцієнта K в залежності від p і відношення $\theta/S_{n\bar{x}}$

$\theta/S_{n\bar{x}}$	0,50	0,75	0,80	1	2	3	4	5	6	7	8
p=0,95	**0,81**	**0,77**	**0,76**	**0,74**	**0,71**	**0,73**	**0,76**	**0,78**	**0,79**	**0,80**	**0,85**
p=0,99	**0,87**	**0,85**	**0,84**	**0,82**	**0,80**	**0,81**	**0,82**	**0,83**	**0,83**	**0,84**	**0,85**

Приклад.

При багатократних вимірюваннях внутрішнього об’єму довгої трубки одержали такі значення: 1014; 1017; 1048; 1025; 1032; 1027; 1038; 1053; 1029; 1071; 1055; 1072; 1057; 1067; 1058; 1074; 1073; 1051; 1064; 1069; 1076; 1061; 1046; 1064; 1057 (мм^3). Вважаючи, що вони відповідають нормальному розподілу, знайти результат вимірювання та його похибку при довірчій імовірності p=95%. В процесі вимірювання виявлено три невиключені систематичні похибки $\theta_1 = \pm 2$, $\theta_2 = \pm 5$ і $\theta_3 = \pm 8$.

Розв’язок.

Знаходимо середнє значення $\bar{x}$=1051,92 і СКВ середнього арифметичного $S_{n\bar{x}}$=14,07. Коефіцієнт Стьюдента для n=25 і p=0,99 дорівнює 2,79; тоді довірчий інтервал випадкових похибок **$\Delta(p)_{вип.}$**$= t_{пр} S_{n\bar{x}}$ =2,79·14,07=**±39,26** мм^3.

Визначаємо довірчий інтервал (p=0,99) сумарної систематичної похибки $\theta(p)$: спочатку знаходимо параметри $l_1 = \theta_2/\theta_1 = 5/2 = 2,5$ і $l_2 = 8/5 = 1,6$. За графіком для m=3 (рис.2.2) робимо оцінку значення коефіцієнта $\boldsymbol{k}$: $k_1 \approx 1,27$; $k_2 \approx 1,35$ – отже беремо більше значення – $\boldsymbol{k_1}$**=1,35**. Тоді

$$\theta(p) = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2} = 1{,}35\cdot\sqrt{4+25+64} \approx 1{,}35\cdot 9{,}64 \approx \mathbf{\pm 13{,}02}\ \text{мм}^3.$$

Тепер за формулою (2.7а) знаходимо довірчий інтервал сумарної (об’єднаної) похибки вимірювання ФВ (об’єму). Відношення похибок $\theta/S_{n\bar{x}}$=13,02/14,07=0,93 і тоді $K(p=0,99) \approx 0,83$, отже

$$\Delta(p) = 0{,}83\cdot(39{,}26+13{,}02) = \mathbf{\pm 43{,}392}\ \text{мм}^3.$$

Кінцевий результат вимірювання: V = 1052 ±43 мм^3, p=0,99.

Використана література

1. Блецкан Д.І., Горват А.А., Кабацій В.М. // Електричні вимірювання: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / За редакцією професора Д.І. Блецкана. – Ужгород.: ВАТ “Видавництво “Закарпаття”, 2008. – 400 с.; ISBN 966-347-047-X.
2. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.Ф. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. – Л.: Лениздат, 1987. – 295 с.
3. ДСТУ (ГОСТ) 8.207-76. Державна система забезпечення єдності вимірювань. Прямі вимірювання з багатократними спостереженнями. Методи обробки результатів спостережень. Основні положення.
4. ГОСТ Р 8.736-2011. ("ИЗМЕРЕНИЯ ПРЯМЫЕ МНОГОКРАТНЫЕ. Методы обработки результатов измерений. Основные положения". Дата введения: 2013-01-01. Дата переиздания: март 2019 г.).

Тема 7. Основні поняття теорії випадкових похибок

а) Елементи теорії ймовірності

Подія називається **випадковою**, якщо її появу неможливо передбачити незалежно від рівня наших знань про фізичний світ і технічні можливості. Так, яким би точним прилад не був, виміряні ним послідовно декілька разів значення фізичної величини (ФВ), внаслідок непередбачуваних за знаком і величиною (і часто невідомих нам) впливів на прилад різних зовнішніх факторів, будуть обов'язково відрізнятися один від одного і від істинного значення, притаманного об'єктивно кожній ФВ. Отже, окреме виміряне значення (спостереження) є випадковою подією. Закономірності, пов'язані з випадковими подіями (величинами, значеннями, явищами), вивчаються **теорією ймовірності** і математичною статистикою. Завдання теорії – певним чином передбачити появу випадкових подій, знайти кількісні характеристики можливості їх появи.

Події називаються **незалежними**, якщо настання однієї з них не залежить від того, здійснилась чи ні інша подія. Події є **взаємовиключні**, якщо настання однієї події робить неможливим здійснення другої.

Введемо деякі основні поняття теорії ймовірності. Розглянемо процес вимірювання ФВ при незмінних зовнішніх умовах і подію появи випадкового числа $\boldsymbol{A}$ із множини всіх можливих чисел. Нехай $\boldsymbol{N}$ – загальна кількість спостережень (вимірювань), $\boldsymbol{N_A}$ – кількість подій, коли спостерігалось число $\boldsymbol{A}$.

1. Ймовірність настання події *A* визначається формулою

$$P_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} \quad \text{(відзначимо, що } P<1\text{).} \qquad (1)$$

Дві (або більше) події є **рівноймовірними** або **рівноможливими**, якщо ймовірність їх настання однакова. Подія називається **достовірною**, якщо P=1.

2. Додавання ймовірностей: є дві незалежні і взаємовиключні події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, імовірності настання яких $\boldsymbol{P_A}$ і $\boldsymbol{P_B}$ відповідно. Яка ймовірність того, що відбудеться ***або** подія A **або** подія B* (нам все рівно яка з них)?

$N_{(A+B)}=N_A+N_B$; $\quad P_{(A+B)} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P_A + P_B$, отже:

$$P_{(A+B)} = P_A + P_B. \qquad (2а)$$

Формула (2) визначає **додавання ймовірностей**. Якщо відомі ймовірності ***n*** різних подій і вони складають повний набір в даній системі з N спостережень ($\sum N_i = N$), то з (2) легко бачити (якщо N_A+N_B=N), що

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \quad \text{(сума всіх ймовірностей повинна = 1)} \qquad (3)$$

– це є умова нормування ймовірностей незалежних взаємовиключних подій. Якщо події не є взаємовиключні, тобто виникнення одної події (A) не виключає при цьому появу другої (B) і вони можуть відбуватися разом, то $P_{(A+B)} = P_A + P_B - P_{AB}$, (2б)

де P_{AB} ймовірність того, що відбулися обидві події.

3. Множення ймовірностей (незалежних подій). Розглянемо випадок, коли подія ***A*** відбувається тільки за умови, що відбулася подія ***B*** – так звана умовна ймовірність (і подія A є залежною). Її можна представити формулою:

$$P_{A/B} = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}}{N} : \frac{N_B}{N} = \frac{P_{AB}}{P_B} \quad \rightarrow \quad \underline{P_{AB} = P_B \cdot P_{A/B}}\ ,$$

P_{AB} – імовірність здійснення двох очікуваних подій: **і *A*, і *B***, оскільки N_{AB} і є кількість таких випадків. Якщо події A і B незалежні, то $\underline{P_{A/B}=P_A}$, тому що кількість спостережень події A вже не залежить від того чи відбулася подія B чи ні, тому N_A=N_{AB}. Отже, отримуємо формулу множення ймовірностей:

$$\boldsymbol{P_{AB} = P_A \cdot P_B}\ . \qquad (4)$$

Множенням ймовірностей незалежних подій визначається ймовірність того, що відбудеться ***і*** *подія A* ***і*** *подія B* (тобто відбудуться обидві події, а одночасно це буде чи одна за одною – немає значення).

4. Середнє значення дискретної випадкової величини. Дискретна величина це така, значення якої може змінюватися тільки стрибками з певним кроком. Якщо така випадкова величина x приймає ряд значень x_1, x_2, ..., x_n, серед яких є групи $\boldsymbol{n_j}$ однакових, то її середнє значення можна обчислити за наступною формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_j \frac{n_j x_j}{n} = \sum_j \frac{n_j}{n} x_j = \sum_j p_j x_j\ , \qquad (5)$$

де $\boldsymbol{p_j}$ – ймовірність появи значення n_j. При $\boldsymbol{n \to \infty}$ ця формула визначає *математичне сподівання* (X_m) *випадкової величини*, а також (оскільки проведено ∞ кількість вимірювань) $\bar{x}$ дорівнює істинному значенню ФВ $x_{іст}$ (тобто, X_m= $x_{іст}$).

5. Дисперсія – “розкид” випадкової величини навколо середнього значення (математичного сподівання) характеризується *дисперсією* і визначається середнім значенням квадрату відхилення від $\bar{x}$:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \qquad (6)$$

Корінь квадратний із дисперсії називається **середньоквадратичним або стандартним відхиленням (СКВ):** $\sigma = +\sqrt{D}$. При $\boldsymbol{n\to\infty}$ середнє значення, як результат вимірювання, прямує до $x_{icm} \equiv X_m$. З врахуванням ймовірності (див. (5)) формулу (6) можна записати так:

$$\sigma^2 = \sum_j (x_j - \bar{x})^2 p_j \quad \text{або} \quad \underline{\sigma^2} = \sum_j (x_j - x_{зñò})^2 p_j \ = \underline{\sum_j \Delta x_j^2 p_j} , \qquad (7)$$

де $\Delta x_j = x_j - x_{icm}$ – похибка кожного вимірювання. Формулу для дисперсії можна представити і в іншому вигляді, якщо розкрити дужки в (6) і провести групування з врахуванням того, що середні значення є вже незмінні числа:

$$D = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)} = \overline{x^2} - \overline{2x\bar{x}} + \overline{\bar{x}^2} = \overline{x^2} - 2(\bar{x}\cdot\bar{x}) + \bar{x}^2; \quad \underline{D = \overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Для обмеженої кількості дослідів (n) замість стандартного відхилення σ використовується його оцінка $\boldsymbol{S_n \to \sigma}$ (див. тему 6).

б) Закони розподілу випадкових величин (похибок)

Якщо випадкова величина змінюється <u>неперервно</u>, то формула (1) непридатна для оцінки ймовірності її появи. Наприклад, яка ймовірність, що на відрізку (0÷1) я попаду точно-точно-точно в точку із значенням 0,5? Таке питання немає змісту, тому що точок (чисел) від 0 до 1 є нескінченна кількість (N=∞), в тому числі і в околі точки 0,5 (а значення 0,5 – єдине), отже, p=1/∞=0! Похибки вимірювань (Δx) або числові значення ФВ, які вимірюються приладами (x), якраз і являють собою неперервно змінні випадкові величини.

Математичний вираз, який дає зв’язок між можливими значеннями випадкової величини x і відповідними ймовірностями їх появи p, називається *законом розподілу випадкових величин*. Для дискретних змінних, знаючи N і N_x, цей закон представляється рядом пари чисел, наприклад, у вигляді таблиці

x_1	x_2	x_3	… x_i …	x_n
p_1	p_2	p_2	… p_i …	p_n

Якщо випадкова величина може набувати неперервний ряд значень (при цьому в принципі неможливо занумерувати всі можливі значення x), то і тоді існує закон розподілу випадкових величин.

Часто нас цікавить не ймовірність появи конкретного значення $\boldsymbol{x_i}$, а ймовірність такої події, коли вимірювана фізична величина буде приймати значення менші за наперед задане значення $\boldsymbol{x}$ – $\boldsymbol{p(x_i<x)}$.

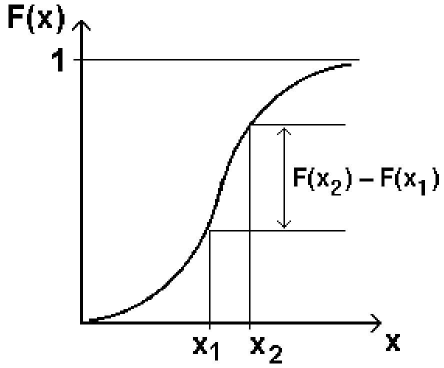


Рис. 1. Інтегральна функція розподілу неперервно змінної випадкової величини.

Звісно, така ймовірність є деякою функцією від значення $\boldsymbol{x}$, що нами задається:

$$\boldsymbol{p(x_i<x) = F(x)}, \text{ або}$$

$$\boldsymbol{F(x) = p(-\infty<x_i<x)}. \qquad (8)$$

Функція $\boldsymbol{F(x)}$ *називається функцією розподілу імовірності* випадкової величини або *інтегральною функцією розподілу*.

На рис.1 приведений графік однієї із можливих інтегральних функцій розподілу $F(x)$ для неперервно змінної випадкової величини. Основні властивості функції $F(x)$:

1. $F(x)\geq 0$, тобто $F(x)$ не може приймати від'ємні значення (як і будь-яка імовірність).
2. Якщо $x_2>x_1$, то $F(x_2)>F(x_1)$, тобто $F(x)$ є неспадна функція свого аргументу. 3. $F(-\infty)=0$; 4. $F(+\infty)=1$.

Виходячи із властивостей функції $F(x)$, знайдемо ймовірність того, що вимірювана величина прийме значення в інтервалі від x_1 до x_2 ($x_1<x_2$). Із теореми про додавання ймовірностей незалежних подій випливає: $p(x<x_2) = p(x\leq x_1) + p(x_1<x<x_2)$. Звідки, з врахуванням (8),

одержуємо: $p(x_1<x<x_2) = p(x<x_2) – p(x\leq x_1) = \underline{F(x_2) – F(x_1)}$, (9)

тобто, ймовірність знайти значення випадкової величини в заданому інтервалі дорівнює приросту функції розподілу імовірності. Далі знайдемо ймовірність того, що вимірювана величина прийме конкретне значення, наприклад x_1, тобто визначимо $p(x=x_1)$. Для цього скористуємося граничним значенням (9)

$$\lim_{x_2\to x_1} p(x_1<x<x_2) = \lim_{x_2\to x_1}[F(x_2)-F(x_1)] = p(x=x_1) \qquad (10)$$

Якщо $F(x)$ в точці $x=x_1$ не терпить скачка і є неперервною диференційованою функцією, що є характерним для функцій розподілу неперервних випадкових величин, то із (10) випливає $p(x=x_1)=0$. Отже, ймовірність появи при вимірюванні будь-якого цілком певного значення неперервно змінної випадкової величини дорівнює нулю. Тому має зміст говорити про імовірність знаходження значення вимірюваної ФВ <u>тільки в деякому інтервалі значень $\boldsymbol{x}$</u> (наприклад, від x_1 до x_2).

Для характеристики розподілу значень випадкової величини x поряд із $F(x)$ вводиться функція $\boldsymbol{f(x)}$, яка характеризує швидкість зміни $F(x)$ із зміною аргументу x і визначається як похідна від функції розподілу імовірності, тобто

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{p(x_i \le x \le x_i + \Delta x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x}\right) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (11)$$

<u>Функція $\boldsymbol{f(x)}$ – функція розподілу густини ймовірності</u> або <u>диференціальна функція розподілу імовірності</u>. Вона застосовна для опису розподілу імовірності тільки неперервних випадкових величин. Використовуючи (9), запишемо (11) трохи в іншому варіанті:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{p(x_i \le x \le x_i + dx)}{dx} = \frac{dp}{dx}. \quad (11а)$$

Звідси випливає *зміст цієї функції – вона чисельно дорівнює ймовірності* виявити випадкову ФВ в інтервалі $(x,\ x+1)$ (якщо $\Delta x=1$, то $f(x)=p(x,\ x+1)$).

Похибка вимірювання $\Delta x = x - x_{іст} \approx x - \bar{x}$ в загальному випадку містить дві складові – випадкову і систематичну: $\boldsymbol{\Delta x = \Delta x_в + \Delta x_{сис}}$. Дані вимірювань, що містять систематичну похибку, називаються *невиправленими*: $x' = x + \Delta x_{сис}$. Якщо $\Delta x_{сис}$ стала, то крива залежності $F(x)$ (рис.1) буде зміщена по осі x на значення цієї величини без зміни характеру залежності, адже всі точки $F(x')$ просто перемістяться по осі іксів з точки x на точку $x+\Delta x_{сис}$. Тому буде зміщений на $\Delta x_{сис}$ і максимум функції $f(x')$, що проілюстровано на рис.2.

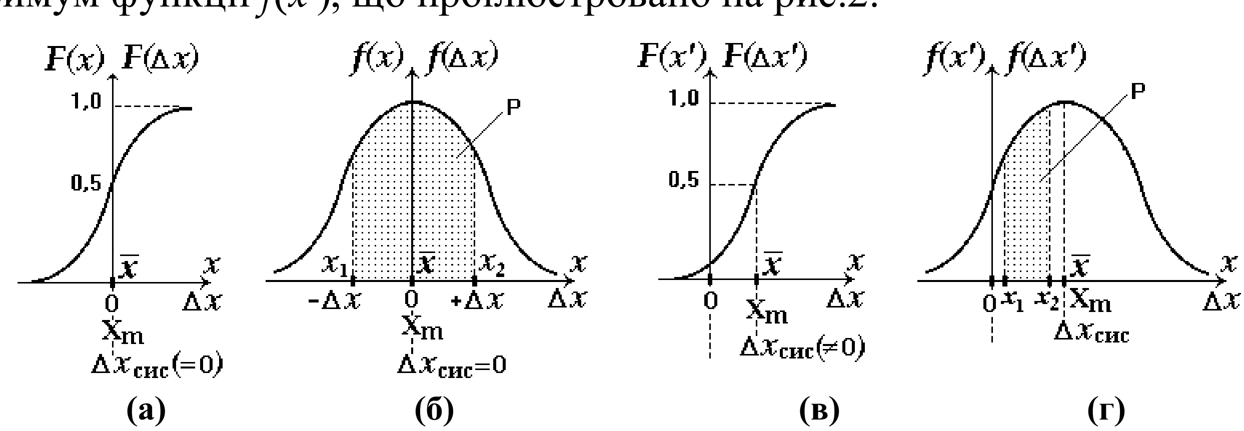


Рис. 2. Графіки функції розподілу імовірності (а і в) і густини ймовірності (б і г) випадкової величини: а,б – $\Delta x_{сис}=0$; в,г – $\Delta x_{сис}\neq 0$ (невиправлені дані)

У випадку *однакової ймовірності появи випадкових похибок протилежних знаків* ($\pm\Delta x$), графік залежності $f(x)$ має вигляд симетричної колоколоподібної кривої, максимум якої відповідає середньому значенню ФВ. Це відповідає тому, що при вимірюваннях найбільша кількість виміряних значень ФВ (даних) групується навколо їх середнього (істинного) значення – ймовірність такої події найбільша (формула 1), відповідно, і випадкова похибка $\Delta x_{\text{в}}$ таких даних буде найменшою. Крім того, розподіл значень ФВ і розподіл їх похибок однаковий (рис.2). Це випливає з формул (8)-(10), які проілюстровані також на рис.3, оскільки інтервал між значеннями $F(x_1)$ і $F(x_2)$ і між $F(x_1+\Delta x)$ і $F(x_2+\Delta x)$ є однаковий, а він і є ймовірністю (9). Зміщення координати Δx на величину $\Delta x_{\text{сис}}$ у сторону початку відліку (на $-\Delta x_{\text{сис}}$) відповідає виправленим на постійну систематичну похибку даним. У загальному випадку криві розподілів можуть мати різну форму в залежності від закону розподілу випадкових величин.

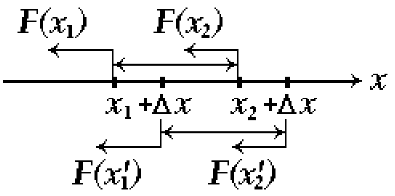


Рис. 3.

Із (11) випливають наступні рівності:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx; \quad F(\Delta x)=\int_{-\infty}^{\Delta x} f(\Delta x)d(\Delta x) \qquad (12)$$

$$p(\infty<x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx; \; p(x_1<x<x_2)=\int_{x1}^{x_2} f(x)dx. \quad (13)$$

Ймовірність (13) того, що значення x (або похибки Δx) попаде у заданий інтервал ($x_1 \div x_2$), графічно визначається площею під ділянкою кривої розподілу густини ймовірності між значеннями цих точок (заштрихована на рис.2). Так як виявити у проміжку від $-\infty$ до $+\infty$ будь-яке наперед задане число є подією достовірною (p=1), то площа під всією кривою $f(x)$ повинна дорівнювати 1,

тобто
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)d(\Delta x)=1 \qquad (14)$$

– ця математична рівність називається **умовою нормування функції розподілу густини ймовірності**. Крім того, ця функція повинна задовольняти умовам:

1) $f(x) \geq 0$; 2) $f(-\infty) = 0$; 3) $f(+\infty) = 0$.

Іншими словами рівняння (14) і ці три умови являються властивостями *будь-якої* функції розподілу густини ймовірності. Безмежні межі інтегрування ($-\infty$;$+\infty$) записані, щоб охопити всі можливі значення випадкових величин, але якщо відомо, що вони можуть виникати тільки в обмеженому інтервалі значень, то інтегрування в (14) здійснюється тільки в цих межах.

Як знайти середнє значення випадкової величини, що змінюється неперервно і тому може приймати нескінчену кількість можливих значень? Скористаємося (для наочності) формулою (5) знаходження $\bar{x}$ скінченної множини даних: чим більша буде їх кількість n, тим меншою стане ймовірність p_i реалізації значення x_i, зменшуватись буде інтервал Δx_i між сусідніми числами і відповідна ймовірність $p(\Delta x_i)$, що для нескінченно малих значень записується як $dp=f(x)dx$. Якщо $n\to\infty$, то $dx\to 0$, тобто до x, а dp можна записати як p. Тому, з врахуванням цих міркувань і того, що сума нескінченно малих і є операція інтегрування, формулу (5) запишемо у вигляді:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = x_{зñò} \quad \{ \text{ для похибок: } \overline{\Delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta x f(\Delta x)d(\Delta x) \ \}, \quad (15)$$

яка і є шукана формула середнього значення неперервно змінної ФВ. Крім того, формула (15) оперує величезною (нескінченною) кількістю даних вимірювання одної і тої ж ФВ, і тому $\bar{x}$ надзвичайно близьке до *істинного* значення, а в границі просто рівне йому, $\bar{x}=x_{іст}$, але за умови, що виключена стала систематична похибка (що і відмічено у записі формули (15)).

В теорії ймовірності інтеграл (15) має і таке поняття як *математичне сподівання* неперервно змінної випадкової величини (X_m)

$$X_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \quad (15а)$$

тоді $X_m=\bar{x}$, причому і при обробці невиправлених на $\Delta x_{сис}$ даних вимірів (що і відображено на графіках рис.2, і відмітимо, що значення X_m відповідає максимуму функції розподілу густини ймовірності).

Грунтуючись на (7) і попередніх міркуваннях, запишемо формулу для дисперсії неперервно змінної випадкової величини:

$$\sigma^2(x) \equiv D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X_m)^2 f(x)dx. \quad (16)$$

Для виправлених даних величину X_m у (16) можна замінити на $x_{іст}$ (подібна формула записується і для дисперсії похибок).

Як ми відмічали раніше, похибки вимірювань містять дві складові – випадкову і систематичну: $\Delta x=\Delta x_в+\Delta x_{сис}$. Якщо $\Delta x_{сис}$ не змінюється в процесі вимірювань ФВ, то їй дисперсія дорівнює нулю, $\boldsymbol{D(\Delta x_{сис})=0}$. У випадку однакової ймовірності впливу на результат вимірювання випадкових похибок протилежних знаків, їх середнє значення дорівнює нулю (сума зліва = сумі справа від істинного значення ФВ), отже, *математичне сподівання таких випадкових похибок дорівнює нулю*: $\mathbf{\Delta X_{m(в)}=0}$ (інтеграл 15а для випадкових похибок дорівнює нулю). Тоді для похибки Δx математичне сподівання буде дорівнювати $\mathbf{\Delta X_m} = \Delta X_{(в+сис)} = \Delta X_в + \Delta X_{сис} = \mathbf{\Delta X_{сис}}$. (17)

Отже: математичне сподівання похибки вимірювання дорівнює систематичній похибці. Статистичне (або ймовірнісне) визначення незмінної систематичної похибки: ***систематична похибка*** *– це відхилення математичного сподівання (невиправлених) результатів вимірювань від істинного значення вимірюваної величини*:

$$\Delta x_{\text{сис}} = X_m - x_{з\tilde{n}\grave{o}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx - x_{з\tilde{n}\grave{o}} \approx \bar{x} - x_{з\tilde{n}\grave{o}}. \qquad (18)$$

Дисперсія (розсіювання) систематичної похибки дорівнює нулю, тому дисперсія даних вимірювань x дорівнює дисперсії випадкових похибок $\Delta x_в$:

$$\underline{\mathbf{D(x)=D(\Delta x)=D(\Delta x_в)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_{з\tilde{n}\grave{o}})^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta x_{\text{в}}^2 f(\Delta x_{\text{в}})d\Delta x_{\text{в}} \qquad (19)$$

Якщо $\Delta x_{сис}$=0, а імовірність відхилення деякої випадкової величини x внаслідок наявності випадкової похибки $\Delta x_в$ в сторону менших значень така ж, як і до більших, то функція $F(\Delta x_в)$ буде перетинати вісь ординат в точці 0,5. Якщо ж $\Delta x_{сис} \neq 0$, то функції $f(x)$ і $F(\Delta x)=F(\Delta x_в+\Delta x_{сис})$ будуть зміщені по осі абсцис на значення систематичної похибки $\Delta x_{сис}$ (рис.2).

Інтеграли (15а) і (16) є частинними випадками більш загальних інтегралів, які в теорії ймовірності і статистичній обробці випадкових похибок дістали назву початковими і центральними моментами. Моменти являють собою деякі середні значення і називаються *початковими*, якщо усереднюються величини, що відраховуються від початку координати, і *центральними* – від центра функції розподілу густини ймовірності.

<u>Початковий момент порядку ***r***</u> результатів спостережень (випадкових величин x) являє собою математичне сподівання степеня $\boldsymbol{x^r}$:

$$\mu_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx; \quad (\text{якщо } r = 1, \text{ то } \mu(x) = X_m). \qquad (20)$$

Центральним (центрованим) моментом порядку ***r*** результатів спостережень називають інтеграл виду

$$\alpha_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X_m)^r f(x)dx, \qquad (21)$$

які одержують зміщенням початку координат розподілу густини ймовірності у точку X_m. Перший центральний момент дорівнює нулю ($x–X_m = \pm\Delta x$, а їх сума дорівнює нулю). Другий центральний момент – дисперсія результатів спостережень:

$$\alpha_2(x)= D(x) = D(x_в) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta x_{\hat{a}})^2 f(\Delta x_{\hat{a}}) d(\Delta x_{\hat{a}}). \quad \{ +\sqrt{D} = \sigma \}$$

Третій центральний момент – характеризує асиметрію розподілу випадкових похибок. Коефіцієнт асиметрії $S_k = \dfrac{\alpha_3(\Delta x_{\hat{a}})}{\sigma^3(\Delta x_{\hat{a}})}$ (для *нормального розподілу* похибок S_k=0) (рис.4а,б).

Четвертий центральний момент – характеризує форму, плосковершність або гостровершність, розподілу випадкових похибок і описується за допомогою *ексцесу* $E_k = \dfrac{\alpha_4(\Delta x_{\hat{a}})}{D^2(\Delta x_{\hat{a}})} - 3$. Число 3 віднімається, тому що для *нормального розподілу* похибок $\alpha_4(\Delta x_в)$=3 і тоді E_k=0. (рис.4в). Значення $1/\sqrt{E_k}$ називається контрексцесом. Ці характеристики розподілу випадкових величин є основними.

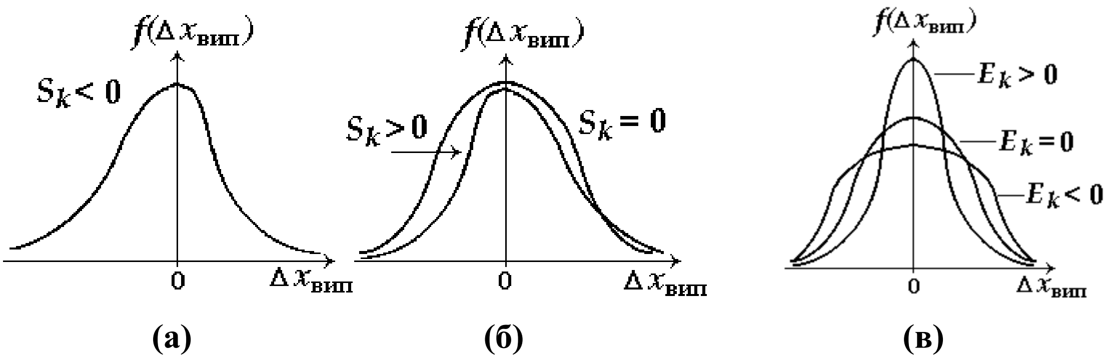


Рис. 4. Характеристики третього (S_k) і четвертого (E_k) центральних моментів.

в) Розподіл Гауса. Функція Лапласа

В статистиці і при обробці результатів вимірювань найбільш часто використовують **нормальний розподіл (розподіл Гауса)**, функція розподілу густини ймовірності якого має вигляд (рис.5):

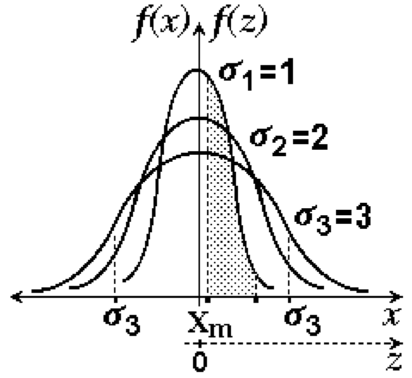


Рис. 5. Функція Гауса: звичайна і нормована.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - x_{\text{зñð}})^2}{2\sigma^2}} \qquad (22)$$

Властивості функції Гауса:

1) крива симетрична відносно осі ординат (вісь "y"), що проходить через максимум;
2) функція має максимальне значення
$$f(x)_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \text{при } x = x_{icm} \equiv X_m;$$
3) дві точки перегину кривої відповідають абсцисам $x_{1,2} = x_{icm} \pm \sigma$;
4) з обох сторін від X_m крива, прямуючи до ∞, асимптотично наближається до осі абсцис (вісь "x");
5) параметрами розподілу Гауса є величини X_m і σ (математичне сподівання і СКВ) – чим більше значення σ, тим крива Гауса більш полога (збільшується розсіювання даних), але площа під нею, згідно умови нормування, дорівнює завжди одиниці (розмірність якої відповідає розмірності осей "x" і "y", а заштрихована площа між відмітками на осі x дорівнює ймовірності спостерігати випадкову величину в цьому інтервалі).

Можливі різні причини і різні значення відхилення виміряних ФВ від істинного значення. Тому виникає питання: коли випадкові похибки будуть описуватися розподілом Гауса?

Постулат про нормальний розподіл випадкових похибок.

Із (22) видно, що при нормальному розподілі випадкова величина x може приймати значення в межах від $-\infty$ до $+\infty$. Але випадкові похибки вимірювання, якими би грубими вони не були, не можуть приймати значення від $-\infty$ до $+\infty$, а це означає, що вони не можуть абсолютно чітко описуватися нормальним розподілом випадкових величин. Тому використання функції Гауса в теорії похибок базується на таких припущеннях:

а) похибки вимірювань приймають неперервний ряд значень;
б) випадкові похибки окремих вимірювань взаємно незалежні (тільки в цьому випадку вибірку можна розглядати як реалізацію незалежних випадкових величин);
в) вони обумовлені багатьма незалежними причинами;

г) при дуже великій кількості спостережень (вимірювань) похибки однакової величини, але протилежного знаку зустрічаються однаково часто, тобто вони рівноймовірні;
д) частота появи похибок зменшується з ростом абсолютної величини похибки – великі похибки зустрічаються рідше, ніж малі.

Однаковим законам розподілу підкоряються незалежні випадкові величини, вимірювання яких проведені одним методом і при однакових умовах, тобто при *рівноточних* вимірюваннях.

Оскільки в результаті вимірювань елементи вибірки одержані з похибками, то і параметри закону розподілу випадкових величин не можуть бути визначені точно. Мова може йти тільки про оцінку параметрів розподілу і значення вимірюваної величини. Для нормального розподілу похибок необхідно знати оцінки математичного сподівання $X_m \equiv x_{icm}$ і дисперсію або СКВ σ. Оцінкою x_{icm} є середнє арифметичне всіх елементів вибірки $\overline{x}$, а дисперсії – середня квадратична похибка S_n (див. попередню тему).

Для зручності табулювання функції густини імовірності (22) вводиться *безрозмірна випадкової змінна* ***z*** *(<u>зведена похибка</u>)*:

$$z = \frac{x - x_{з\tilde{n}\grave{o}}}{\sigma} = \frac{\Delta x_{\hat{a}}}{\sigma} \approx \frac{x - \overline{x}}{S_n} = \frac{\Delta x_{\hat{a}}}{S_n}. \qquad (23)$$

Тоді функція Гауса для випадкової змінної $\Delta x_в$ приймає вигляд:

$$f(\Delta x_{\hat{a}}) = \frac{1}{\sigma} f(z), \quad \text{де функцію} \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (24)$$

називають ***стандартним*** *або* ***зведеним нормальним розподілом***.

Ця формула отримується наступним чином. З (23) випливає, що $dz=dx/\sigma$ або $dx=\sigma dz$, тому запишемо <u>інтегральну функцію</u> $F(\Delta x_в)$ для розподілу Гауса і потім зробимо перепозначення, ввівши змінну ***z*** у експоненту і диференціал:

$$F(\Delta x_{\hat{a}}) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x_{\hat{a}})^2}{2\sigma^2}} d(\Delta x_{\hat{a}}) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz.$$

Так як змінилася змінна, то і верхня межа інтегрування перепишеться (зміститься) на число Z, отже отримуємо:

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{Z} \underline{f(z)} dz.$$

Відмітимо: максимум функції $f(z)$, як функції *випадкових і симетричних похибок*, припадає на координату z=0 (рис.5), не збігається із математичним сподіванням (середнім значенням) ФВ, яке за наявності постійної (одного знаку) систематичної похибки (*невиправлені* дані) не відповідає істинному значенню ФВ.

У відповідності з формулою (12), запишемо інтегральну функцію розподілу ймовірності у вигляді двох складових

$$F^*(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{Z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \qquad (25)$$

Площа, обмежена кривою $f(z)$ і віссю абсцис z, симетрична відносно ординати z=0 і нормована на 1, тому інтеграл $\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{2}}$.

Другий доданок в (25) дістав назву **функція Лапласа *F*(*Z*)**

$$\boxed{\boldsymbol{F(Z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{Z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz} \qquad (26)$$

або **інтеграл ймовірності *p*/2**. Він визначає імовірність попадання значення випадкової <u>зведеної похибки ***z***</u> в (половинний) інтервал від 0 до $Z=Z_{\max}=(x_{\max}-x_{icm})/\sigma=\Delta x_{\max}/\sigma$, де $\Delta x_{\max}$ ($=\sigma Z$) – максимальне відхилення випадкової величини від свого істинного значення (яке в практичних розрахунках оцінюється її середнім арифметичним $\bar{x}$).

За нормального розподілу похибок і відомому σ (або S_n) ймовірність отримати похибку в <u>симетричному</u> довірчому інтервалі **$\Delta x = \pm Z\sigma$** визначається за формулою

$$\boldsymbol{p}(x_{icm}-Z\sigma<x<x_{icm}+Z\sigma) = 2F(Z)=2F(\Delta x/\sigma) \equiv \boldsymbol{\alpha} \qquad (27)$$

і носить назву *довірча імовірність* ***p*** або *коефіцієнт надійності* **α**. Значення функції $F(Z)$ для деяких Z наведені в табл.1 (змінна Z ще має назву *квантіль розподілу* $F(Z)$, яку за відомої ймовірності p знаходять також з цієї таблиці).

Якщо вид розподілу невідомий, то ймовірність того, що при одноразовому вимірюванні випадкова похибка за абсолютним значенням <u>**не**</u> перевищить деякого наперед заданого значення **ε** ($p(|\Delta x|<\varepsilon)$, можна оцінити за допомогою середньоквадратичного відхилення σ, використовуючи *нерівність* (*Чебишева*) $p(|\Delta x|<\varepsilon) \geq [1-(\sigma/\varepsilon)^2]$. Але інтервали, які одержуються з допомогою цієї нерівності, виявляються досить широкими. Тому на практиці спочатку визначають вигляд (функцію) розподілу, задають довірчу ймовірність $\boldsymbol{p}$ і тоді обчислюють *надійний (довірчий) інтервал* $\boldsymbol{\Delta x(p)}$. Це той інтервал, в якому з ймовірністю $\boldsymbol{p}$ буде спостерігатися виміряна ФВ, іншими словами, $\boldsymbol{p}$ (процентів) – це довіра до виміряного значення.

Таблиця 1. Значення нормованої функції Лапласа

$$F(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^Z e^{-z^2/2}dz; \quad p(x_{іст}-Z\sigma<x<x_{іст}+Z\sigma)=2F(Z)=\alpha$$

Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)	Z	F(Z)
0,0	0,00000	0,9	0,31594	1,8	0,46407	2,7	0,49653	3,6	0,49984
0,1	0,03983	1,0	0,34134	1,9	0,47128	2,8	0,49744	3,7	0,49989
0,2	0,07926	1,1	0,36433	2,0	0,47725	2,9	0,49813	3,8	0,49993
0,3	0,11791	1,2	0,38493	2,1	0,48214	3,0	0,49865	3,9	0,49995
0,4	0,15542	1,3	0,40320	2,2	0,48610	3,1	0,49903	4,0	0,49997
0,5	0,19146	1,4	0,41924	2,3	0,48928	3,2	0,49931	4,5	0,49999
0,6	0,22575	1,5	0,43319	2,4	0,49180	3,3	0,49952		
0,7	0,25804	1,6	0,44520	2,5	0,49379	3,4	0,49966		
0,8	0,28814	1,7	0,45543	2,6	0,49534	3,5	0,49977		

<u>Як приклад</u> застосування функції Лапласа для визначення ймовірності попадання випадкової величини (похибки) у заданий інтервал розглянемо наступну задачу.

Результати вимірювань напруги містять випадкові похибки, розподілені за нормальним законом, їх СКВ σ=100 мВ, систематична похибка $\Delta_{сис}$=50 мВ. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання перевищить істинне значення напруги $U_{іст}$.

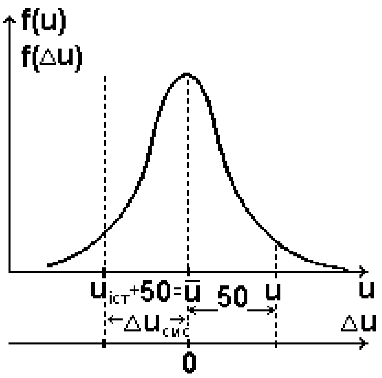


Рис. 6. Розподіл густини ймовірності при $\Delta U_{сис}\neq0$

<u>Розв'язок.</u>

За означенням, систематична похибка $\Delta_{сис}=U_m-U_{іст}$=50 мВ, де U_m – математичне сподівання результату вимірювання, за яке наближено можна прийняти середнє значення $U_{сер}$ сукупності рівноточних вимірів і яке відповідає максимуму функції $f(U)$ розподілу густини ймовірності виміряних даних. Тоді істинне значення потужності $U_{іст}=U_m-\Delta U_{сис}\cong U_{сер}-\Delta U_{сис}=U_{сер}-50$ і на осі U воно знаходиться лівіше на 50 мВ від значення максимуму $f(U)$ (рис.6). *Систематична похибка взята з протилежним знаком називається поправкою, тобто П=-50 мВт.* Додавши поправку до показу приладу, одержимо *виправлений результат* вимірювання U^*, математичне сподівання якого буде співпадати з істинним значенням результату вимірювання.

Як видно з графіка рис.6, ймовірність отримати при вимірюванні невиправлене значення більше за $U_{іст}$ дорівнює:

$$p = \int_{U_{сер}-50}^{\infty} f(U)dU = \int_{-50}^{\infty} f(\Delta U)d(\Delta U), \text{ де } f(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{\sigma}\right)^2}, \ \Delta U = U - U_{сер}.$$

Враховуючи симетричність кривої Гауса відносно $U_{сер}$, умову нормування і те, що $dU=d(\Delta U)$, цей інтеграл можна представити сумою двох ймовірностей:

$$p = \int_{-50}^{0} f(\Delta U)dU + \int_{0}^{\infty} f(\Delta U)dU = \left(\int_{0}^{50} f(\Delta U)dU\right) + \frac{1}{2} = \int_{0}^{Z=50/\sigma} f(z)dz + 0{,}5 ,$$

де $z = \Delta U/\sigma$ – зведена похибка, $f(z)$ – зведений (стандартний) розподіл Гауса, а інтеграл є функцією Лапласа $F(Z)$. З табл.1 для $\boldsymbol{Z}$=50/σ=**0,5** знаходимо, що $F(Z)=\boldsymbol{p/2}$ = **0,19146**. Ймовірність $\boldsymbol{p}$ – це ймовірність одержати при вимірюванні значення напруги в одній із половин інтервалу $U_{іст}\pm50$ мВт (або лівій, або правій – адже крива симетрична і площі однакові, а в симетричному інтервалі $\boldsymbol{p}$(-50÷+50)=**2**х**0,19146**). А ймовірність того, що значення U при одному з вимірів виявиться більшим за істинне буде $\boldsymbol{p}$ **= 0,19146+0,5=0,69**.

г) Вивід функції Гауса та її параметрів

В усі формули для неперервно змінної випадкової фізичної величини входить <u>функція розподілу густини ймовірності</u> (появи цієї випадкової величини) $\boldsymbol{f(x)}$. **<u>Її зміст</u>** – <u>це ймовірність</u> *отримати деяке значення* $\boldsymbol{x}$ *в одиничному інтервалі, тобто в інтервалі* $(x; x+1)$. Коли фізична величина x dN раз потрапляє в інтервал dx значень $(x; x+dx)$, то $\boxed{f(x) = \frac{p(dx)}{dx} \equiv \frac{dp}{dx} = \frac{dN}{Ndx}}$. Звідси: $dp = \frac{dN}{N} = f(x)dx = dF(x)$, (1)

$\boldsymbol{F(x)}$ – відповідним чином задана <u>функція розподілу ймовірності</u> значень x, яка змінюється в межах від 0 до 1. **Її зміст** – <u>це ймовірність</u> того, *що фізична величина набуде значення в інтервалі від* -∞ до x. Функції $F(x)$ і $f(x)$ є додатними, оскільки ймовірність $0<p<1$.

Є різні функції розподілу $f(x)$ фізичних величин.

Розглянемо розподіл Гауса, який описує (ймовірність) відхилення деякої випадкової величини від її середнього значення, або при стрільбі по мішені – відносне число (див. (1)) відхилень куль на величину (x; $x+dx$) від центра мішені. Знайдемо вигляд (формулу) цього розподілу.

Оскільки ми говоримо про випадкові відхилення від центра мішені (в системі координат (x,y) – це початок координат, точка 0), то очевидно, що “плюсові” і “мінусові” кількості і величини відхилень повинні бути однаковими (якщо їх велика кількість і вони є абсолютно випадкові). А це означає, що функція, яку ми шукаємо (її значення), не повинна залежати від знаку (x) або (y), а при довільних значення аргументу це можливо тільки тоді, коли ці величини (x,y) входять у формулу, як квадрати величин (тобто як x^2 і y^2, бо тоді $(-x)^2=x^2$, а $f(-x)=f(x)$, *але це тільки тоді, коли значення x і $-x$ рівноймовірні*). Тому далі ми вже будемо використовувати цю властивість шуканої функції і писати її як $\varphi(x^2)$ і $\varphi(y^2)$.

Не коректно говорити про число відхилень від центра мішені, оскільки точно в центр не попаде жодна куля! Можна говорити про число куль, які попали в деякий інтервал або площадку навколо центра чи іншу, зміщену від центра (рис.1).

Нехай маємо $\varphi(x^2)$ і $\varphi(y^2)$. Виберемо на певній віддалі від центра мішені площадку ds з центром (x,y): $ds = dxdy$ (рис.1). Враховуючи функції розподілу, можна записати відповідні ймовірності попадання кулі в ці інтервали (див. формулу 1):

$$\frac{dN_x}{N} = \varphi(x^2)dx; \qquad \frac{dN_y}{N} = \varphi(y^2)dy; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dN_s}{N} = \varphi(x^2)\varphi(y^2)ds \qquad (2)$$

$p(s) = p(x)\cdot p(y)$ – тому що події (відхилення і по x і по y) незалежні.

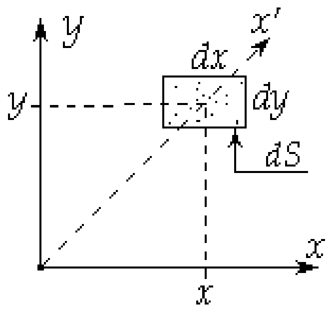


Рис. 1

Змінимо осі координат так, щоб вісь X проходила через площадку ds, яка взагалі то є точковою (така вона мала). Тоді координату $У$ такої площадки можна вважати рівною 0 і можна ввести нову змінну x' і, відповідно, нову функцію розподілу $\varphi(x'^2)$, в якій вже “y” не буде. Але й ця функція розподілу повинна дати таку ж відносну кількість куль на площадці ds, тобто ту ж саму ймовірність попадання туди куль, отже $\varphi(x'^2)ds = \frac{dN_s}{N}$, але тоді $\varphi(x^2)\varphi(y^2)ds = \varphi(x'^2)ds$. Як видно з рис.1, за теоремою Піфагора

$x'^2 = x^2+y^2$. Тоді отримуємо: $\varphi(x^2)\cdot\varphi(y^2) = \varphi(x^2+y^2)$ (3)

(так би мовити, "проміжна" властивість функції Гауса). Для зручності перепозначимо змінні ($x^2 \equiv x_1$; $y^2 \equiv y_1$; $x^2+y^2 \equiv z$) і тепер запишемо рівність (3) так $\varphi_{x1}\cdot\varphi_{y1} = \varphi_z$ і візьмемо натуральний логарифм:

$$\ln\varphi_{x1}\cdot + \ln\varphi_{y1} = \ln\varphi_z. \quad (4)$$

Перейдемо від суми цих "логарифмів" до <u>суми їх диференціалів</u> вже за цими новими змінними x_1 і y_1. Відомо, що похідна від $\ln(x)$ по x дорівнює $1/x$, а для складної функції $\varphi(x)$ необхідно ще множити на похідну функції, тобто: $\frac{d[\ln\varphi(x)]}{dx} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$. Для зручності і наочності запишемо цей вираз так: $(\ln\varphi_x)' = \frac{\varphi'_x}{\varphi_x}$, тут "*штрих*"$\equiv\frac{d}{dx}$ – позначає знак похідної по змінній x, яка записана індексом функції φ. Тоді диференціал цього логарифму буде записаний так: $d[\ln\varphi_x] = \frac{\varphi'_x}{\varphi_x}dx$.

Вираз для диференціала (похідної) правої частини (4) трохи складніший, тому що функція $\ln\varphi_z$ залежить від двох змінних ($z=x_1+y_1$). Але тут застосовне правило: *повний* диференціал (або похідна по *складній* змінній z) дорівнює сумі *частинних диференціалів* (сумі *частинних* похідних по кожній змінній окремо і при цьому інші змінні вважаються константами) і $dz=dx_1+dy_1$. Тому запишемо

$$d[\ln\varphi_z] = \frac{\partial[\ln\varphi_z]}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial[\ln\varphi_z]}{\partial y_1}dy_1$$ і візьмемо ці частинні похідні:

$$\frac{\partial[\ln\varphi_z]}{\partial x_1} = \frac{1}{\varphi_z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{\varphi_z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right)\cdot 1;\ \text{аналогічно}\ \frac{\partial[\ln\varphi_z]}{\partial y_1} = \frac{1}{\varphi_z}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}\right) \equiv \frac{\varphi'_z}{\varphi_z}.$$

Отже, <u>сума диференціалів</u> відповідно до рівності (4) набуде вигляду:

$$\frac{\varphi'_{x1}}{\varphi_{x1}}dx_1 + \frac{\varphi'_{y1}}{\varphi_{y1}}dy_1 = \frac{\varphi'_z}{\varphi_z}dx_1 + \frac{\varphi'_z}{\varphi_z}dy_1;\ (5)\quad \left[\frac{\varphi'_{x1}}{\varphi_{x1}} - \frac{\varphi'_z}{\varphi_z}\right]dx_1 + \left[\frac{\varphi'_{y1}}{\varphi_{y1}} - \frac{\varphi'_z}{\varphi_z}\right]dy_1 = 0.\ (5а)$$

При довільних x і y, і коли диференціали незалежні рівняння (5а) дорівнює нулю лише тоді, коли <u>вирази в квадратних дужках = 0</u>. Тоді, як видно з формул у квадратних дужках, оскільки другий доданок в них однаковий, то дорівнюють і перші доданки, $\frac{\varphi'_{x1}}{\varphi_{x1}}=\frac{\varphi'_{y1}}{\varphi_{y1}}$, а так як x і y незалежні, то рівність цих дробів може бути лише тоді, коли ці відношення не залежать ні від x, ні від y – вони є *сталими величинами*, отже, $\frac{\varphi'_{x1}}{\varphi_{x1}}=\pm\alpha$; $\frac{\varphi'_{y1}}{\varphi_{y1}}=\pm\alpha \Rightarrow \frac{1}{\varphi_{x1}}\frac{d\varphi_{x1}}{dx_1}=\pm\alpha$; $\frac{1}{\varphi_{y1}}\frac{d\varphi_{y1}}{dy_1}=\pm\alpha$.

Тепер згадаємо, що диференціювання функції $\varphi(x_1)$, тобто $\varphi(x^2)$, було за змінною x_1, що "в реальності" є x^2 (аналогічно $\varphi(y^2)$ – за змінною y^2), тобто $\frac{d\varphi(x^2)}{\varphi(x^2)\cdot d(x^2)}=\pm\alpha \Rightarrow \frac{d\varphi(x^2)}{\varphi(x^2)}=\pm\alpha\cdot d(x^2)$.

Якщо записати цей вираз без аргументів, то диференціальне рівняння набуде вигляду: $\frac{d\varphi}{\varphi}=\pm\alpha\cdot d(x^2)$. Візьмемо інтеграл від обох частин:

$$\ln(\varphi)=\pm\alpha x^2+const \Rightarrow \varphi(x^2)=Ae^{\pm\alpha x^2}, \text{ аналогічно } \varphi(y^2); \qquad (6)$$

$+\alpha$ немає фізично-статистичного змісту, оскільки тоді чим далі від центру, тим більше буде φ (попадань куль). Тому функції такі:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x^2)=Ae^{-\alpha x^2}\\ \varphi(y^2)=Be^{-\alpha y^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{f(r)}=\varphi(x^2)\varphi(y^2)=ABe^{-\alpha(x^2+y^2)}\underline{=Ce^{-\alpha r^2}}. \qquad (7)$$

У виразах (7) використана властивість функції (2) і (3). Знайдемо невідому константу C, яка називається “константою нормування”, вона вибирається такою, щоб функція $f(r)$, як функція розподілу густини ймовірності, задовольняла *умові нормування*, тобто інтеграл цієї функції по всій області існування змінних повинен дорівнювати одиниці. Наші змінні x і y, взагалі кажучи, можуть змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$.

З математичного аналізу відомі значення таких інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Замінюючи в (7) змінну r на змінну x (що для функції немає ніякого значення, писали r – тепер будемо писати x, це ж тільки *літерні* позначення), будемо мати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx=C\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=1 \rightarrow C=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \Rightarrow \underline{f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}}.$$

При $x=0$ функція має максимальне значення $f(0)=f_{max}=\sqrt{\alpha/\pi}$. Це тому, що в нашій задачі (про мішень) ми намагалися потрапити в центр мішені з координатою (x,y)=0. Іншими словами, сума всіх координат потраплянь куль (з "плюсами" і "мінусами") дорівнювала нулю, або *середнє значення* координат всіх куль = 0. Тому в даному випадку x є відхилення від середнього значення випадкової величини. Якщо середнє значення випадкової величини не дорівнює 0, а має значення μ, то відхилення від нього буде $\Delta x = x - \mu$; Тому в загальному випадку функцію Гауса потрібно записати так:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha(x-\mu)^2}; \tag{8}$$

величину μ ще називають "математичним сподіванням" випадкової величини. Константа α, як фізична величина, має розмірність обернену до розмірності x^2 (щоб добуток давав безрозмірну величину – показник степеня має бути безрозмірною величиною). Тому часто α замінюють на обернену величину $\alpha = 1/\sigma'^2 = 1/(2\sigma^2)$ з тим, щоб розмірності x і σ були однакові, а формулу Гауса записують у вигляді

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}. \tag{8a}$$

Якщо дослідити криву Гауса (8) на екстремуми, то перша похідна дорівнює нулю в точці $x = \boldsymbol{\mu}$ – перший параметр кривої, що відповідає максимуму функції. Прирівнюючи до нуля другу похідну, знаходять точку (положення) перегину кривої, яка припадає на значення $x = 1/\sqrt{2\alpha}$. У випадку позначень (8а) цей перегин якраз припадає на значення $x = \pm\boldsymbol{\sigma}$ (від μ) – це другий параметр кривої Гауса, що чисельно дорівнює середньоквадратичному відхиленню (СКВ) від математичного сподівання $\boldsymbol{\mu}$ (істинного значення, оцінкою якого є середнє арифметичне даних), а $\sigma^2 = D$ – дисперсії.

Зробимо ці обчислення. Візьмемо похідну від функції (8а) і прирівняємо її до 0, щоб знайти координату максимуму $x_{\text{макс}}$:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)\cdot 1 = 0 \;\rightarrow\; x_{\text{макс}} - \mu = 0 \;\rightarrow\; x_{\text{макс}} = \mu.$$

Від цього виразу (який тепер є добутком двох функцій) знову візьмемо похідну (другу від функції 8а) і прирівняємо її до 0, щоб знайти координату точки перегину:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot (x-\mu) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} \right) \cdot 1 \cdot (x-\mu) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot 1\right) = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 = 0 \rightarrow$ $\underline{x = \mu \pm \sigma}$, якщо μ=0 (для похибок), то $\underline{x = \pm\sigma}$.

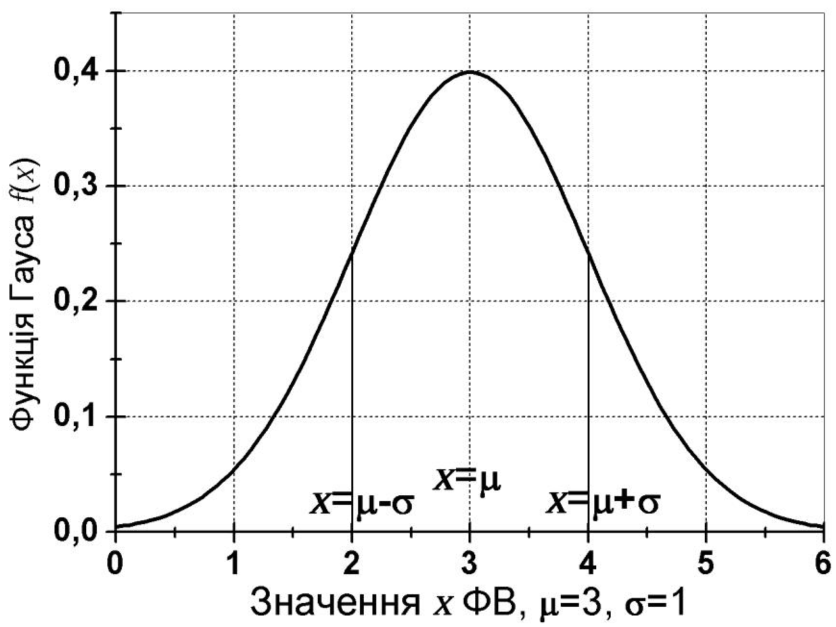


Рис. 2. Розподіл густини ймовірності випадкових величини (розподіл Гауса): вказано характеристики розподілу (μ, σ) і точки перегину кривої.

Інші види законів розподілу густини ймовірності випадкових величин.

Поряд з нормальним законом розподілу існують (реалізуються) інші закони розподілу випадкових похибок (величин). Ця тема буде розглянута на наступній лекції.

Тема 8. Негаусівські види розподілу випадкових величин

Знаючи функцію розподілу випадкових величин $f(x)$ або похибок їх вимірювання $f(\Delta x)$, можна знайти і значення основних характеристик, що визначають це вимірювання: $X_m=\bar{x}$, дисперсію D (або СКВ σ), ймовірність p появи очікуваного значення ФВ у визначеному інтервалі їх можливих значень (випадкових похибок), абсолютне значення (модуль) похибки визначення $\bar{x}$ – довірчий інтервал результату вимірювання ФВ. Як аналітично, так і графічно функції розподілу густини ймовірності можуть мати різний вигляд. Розглянемо основні.

1. Рівномірний (прямокутний) розподіл

Такий розподіл найбільш характерний для невиключних систематичних похибок. Якщо відсутні дані про вид розподілу такої похибки, то вони приймаються розподіленими рівномірно в межах граничних значень допустимих похибок. Рівномірному розподілу підлягає, наприклад, похибка викликана заокругленням значень фізичних і математичних констант, в процесі обчислень при непрямих вимірюваннях, при відліку показів шкали приладів,. Приклад рівномірного розподілу густини ймовірності – кидання грального кубика: ймовірність випасти будь-якому цілому числу від 1 до 6 є однаковою.

Функція розподілу густини ймовірності $f(x)$ має вигляд (рис.1)

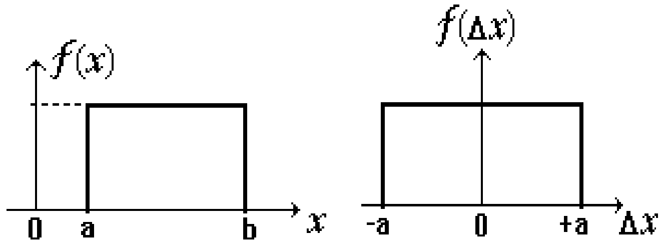


Рис. 1. Рівномірні розподіли: $f(x)$ – випадкової ФВ, $f(\Delta x)$ – випадкової похибки.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a;\, x>b\end{cases}.$$

Математичне сподівання

$$X_m(x)=\frac{a+b}{2}\quad(=\bar{x}),$$

дисперсія $D(x)=\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Функція розподілу густини ймовірності випадкової похибки

$$f(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |\Delta x|\le a\\ 0, & |\Delta x|\ge a\end{cases},\quad X_m(\Delta x)=0,\quad \text{дисперсія}\ D(\Delta x)=\frac{a^2}{3}.$$

2. Розподіл Сімпсона – трикутний і трапецевидний

Нехай необхідно, наприклад, визначити площу прямокутника шляхом вимірювання лінійкою довжини його сторін, коли похибка визначення цих довжин може з однаковою ймовірністю мати якесь значення, наприклад, в інтервалі половини ціни поділки лінійки (це *рівномірний розподіл* в межах *граничної похибки* 0,5). Тому поставимо питання питання: який вигляд (графік) за цих умов матиме функція розподілу густини ймовірності похибок визначення площі прямокутника? (або ще: який розподіл ймовірності появи очікуваного добутку чи суми чисел, що випадають при киданні двох кубиків або два рази одного?). Тут проявляються два незалежні розподіли, які діють (накладаються) одночасно на ФВ. Результуючий закон розподілу називається *композицією* законів розподілу. Отже, розглянемо таку задачу.

Нехай є дві незалежні випадкові похибки Δx_1 і Δx_2 з різними дисперсіями (відхиленням даних навколо середнього), густини розподілу яких відповідно $f_1(\Delta x_1)=1/2a$ і $f_2(\Delta x_2)=1/2b$. Показати, що їх композиція (накладання) у випадку a=b (однакові дисперсії) дасть трикутний розподіл (розподіл Сімпсона).

Розв'язок.

Значення функцій $f_{1,2}(\Delta x_{1,2})$ не залежить від значення аргументу $\Delta x_{1,2}$ – це *рівномірні* розподіли, довільна похибка Δx_1 в інтервалі [-a, +a] виникає з однаковою імовірністю (так само – в інтервалі [-b, +b]). В цьому випадку накладання двох випадкових похибок приводить до виникнення сумарної похибки $\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2$. Для спрощення розгляду будемо вважати, що похибка може приймати лише такі п'ять дискретних значень: 2, 1, 0, -1, -2 (однакових для обох інтервалів). Тоді ймовірність появи одної з них дорівнює 1/5 (незалежно від величини похибки), а довільної пари похибок з двох інтервалів (***і*** Δx_1 ***і*** Δx_2) – 1/25 (добуток ймовірностей незалежних подій). Всі 25 комбінації цих похибок і результат їх накладання запишемо в таблицю:

Похибки [-a,+a]	-2	-1	0	1	2	Результат				
Похибки [-b,+b]	-2	-1	0	1	2	додавання похибок				
Можливі варіанти додавання похибок	-2-2	-2-1	-2-0	-2+1	-2+2	-4	-3	-2	-1	0
	-1-2	-1-1	-1-0	-1+1	-1+2	-3	-2	-1	0	1
	0-2	0-1	0-0	0+1	0+2	-2	-1	0	1	2
	1-2	1-1	1-0	1+1	1+2	-1	0	1	2	3
	2-2	2-1	2-0	2+2	2+2	0	1	2	3	4

Бачимо, що значення “0” результуючої похибки випадає 5 разів, “1” – 4 рази, “2” – 3 рази і так далі. Отже імовірність одержати похибку “0” дорівнює $p(0)=5\cdot(1/25)=1/5$, $p(\pm1)=4/25$, $p(\pm2)=3/25$ і т. д. Якщо ці значення нанести на графік $f(\Delta x)= p(\Delta x)/dx= p(\Delta x)$ (так як в нашій задачі інтервал між числами $dx=1$), то одержимо трикутний розподіл. При різних дисперсіях (граничні похибки $|a|\neq|b|$), їх композиція дасть трапецевидний розподіл (це можна перевірити, склавши аналогічну таблицю). Схематичні графіки розподілів відображені на рис.2.

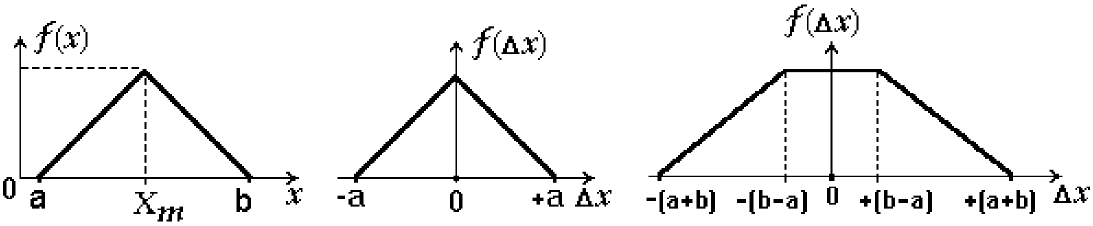


Рис. 2. Розподіл Сімпсона: трикутний і трапецевидний (b>a)

Функції трикутних розподілів Сімпсона для випадкових значень фізичних величин $f(x)$ і їх похибок $f(\Delta x)$ мають різний аналітичний вигляд і складаються з двох частин.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, \ a<x<\dfrac{a+b}{2}\\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, \ \dfrac{a+b}{2}<x<b\end{cases}, \quad X_m=\bar{x}=\frac{a+b}{2}, \ D=\frac{(b-a)^2}{24}, \ \sigma=\frac{b-a}{\sqrt{24}};$$

$$f(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{a-|\Delta x|}{a^2}, \ |x|\leq a\\ 0, \quad \Delta x\geq a\end{cases}, \qquad X_m=\bar{x}=0, \ D=\frac{a^2}{6}, \ \sigma=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

На рис.2 приведений трапецевидний розподіл, який є результатом композиції двох рівномірних розподілів випадкових похибок в інтервалах $\pm\Delta a$ і $\pm\Delta b$, де b>a. Відповідно до позначень трапеції на графіку функція буде мати вигляд:

$$f(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, \ |x|<(b-a)\\ \dfrac{a+b-|x|}{4ab}, (b-a)\leq x<(a+b)\end{cases}, \quad f(\Delta x)=0 \text{ за межами } \pm(a+b);$$

Математичне сподівання $X_m=0$, а дисперсія приймається як сума дисперсій рівномірних розподілів: $D_{трап}=D_1+D_2= a^2/3+b^2/3 = (a^2+b^2)/3$

Зробимо вивід функції трапецевидного розподілу, виходячи з її графіка і інших позначень, тобто розглянемо обернену задачу: *графік* *розподілу густини імовірності похибки деякої фізичної величини має вид трапеції, зображеної на рисунку 3. Знайти формулу функції* $f(\Delta x)$.

Як видно з графіка, функцію $f(\Delta x)$ у загальному випадку можна представити як суму трьох лінійних функцій:

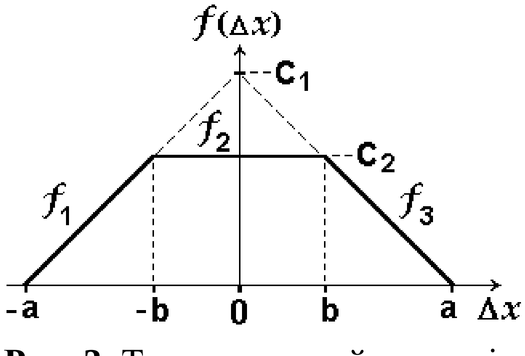


Рис. 3. Трапецевидний розподіл густини ймовірності похибки

$f_1 = C_1 + k\Delta x = C_1 + \frac{C_2}{a-b}\Delta x$, $-a \le \Delta x \le -b$;

$f_3 = C_1 - k\Delta x = C_1 - \frac{C_2}{a-b}\Delta x$, $b \le \Delta x \le a$;

$f_2 = C_2$, $-b \le \Delta x \le b$.

Виходячи з графіків функцій, за відомим значенням аргументу і функції (f_1=0 при Δx= -a, також f_3=0 при Δx= a) знаходимо константу C_1:

$$f_1 = C_1 - \frac{C_2}{a-b}a = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{a-b}a,$$ те саме буде для f_3 і тоді

$$f_1 = \frac{C_2}{a-b}a + \frac{C_2}{a-b}\Delta x = \frac{C_2}{a-b}(a+\Delta x), \quad f_2 = \frac{C_2}{a-b}a - \frac{C_2}{a-b}\Delta x = \frac{C_2}{a-b}(a-\Delta x).$$

Тепер в шуканій функції залишилась невідомою константа C_2. Для її знаходження використаємо умову нормування функції густини ймовірності, враховуючи, для полегшення обчислень, симетричність функції відносно 0. Тоді інтеграл (як площа під кривою) по правій половині графіка дорівнює 0,5:

$$\int_0^b C_2 d(\Delta x) + \int_b^a \frac{C_2}{a-b}(a-\Delta x)d(\Delta x) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 b + \frac{C_2}{a-b}(a^2 - ab - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Після розкриття дужок і зведення доданків отримуємо, що

$$\underline{C_2 = \frac{1}{a+b} \equiv f_2}, \quad \text{звідки} \quad \boxed{f_1 = \frac{a+\Delta x}{a^2-b^2}} \qquad \boxed{f_3 = \frac{a-\Delta x}{a^2-b^2}}.$$

Таким чином, *трапецевидний* розподіл Сімпсона для похибок записується наступною функцією:

$$f(\Delta x) = \begin{cases} \frac{a+\Delta x}{a^2-b^2}, -a \le \Delta x \le -b \\ \frac{1}{a+b}, \ -b \le \Delta x \le b \\ \frac{a-\Delta x}{a^2-b^2}, b \le \Delta x \le a \end{cases}$$

$f(\Delta x) = 0$ – за межами $\pm a$ ($x>|a|$)

Перевіримо правильність одержаних виразів. За умовою нормування площа під кривою (трапеції) дорівнює 1:

$S = h\frac{d_1+d_2}{2}$, де h – висота трапеції, d_1 і d_2 – довжини її основ; у нас h=C_2, d_1=2a, d_2=2b, отже, $S = \frac{1}{a+b}\frac{2a+2b}{2} = 1$.

Подібний алгоритм знаходження аналітичного виразу функції за її графіком справедливий для будь-якої функції густини ймовірності.

3. Розподіл Пірсона (закон розподілу χ^2)

Такому розподілу підлягає неперервно змінна випадкової величини $\boldsymbol{X}$, яка виражена формулою (і її перепозначено на χ_k^2)

$$X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2 \equiv \chi_k^2, \qquad (1)$$

де всі k чисел x_i – незалежні випадкові величини, кожна з яких розподілена за *стандартним* нормальним розподілом. В цьому випадку їх математичні сподівання $X_{m\text{i}}$=0, а дисперсії D=σ_i^2=1, а це тому, що в стандартному розподілі змінною є *зведена* випадкова похибка – $z = (x\text{-}X_m)/\sigma$). Отже, випадкові величини x_i в (1) є по-суті зведеними похибками. Величина χ_k^2 – називається "хі-квадрат" з k ступенями вільності. Розподіл густини ймовірності величини $\chi_k^2 \equiv X$ задається формулою [1]

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{X^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\frac{X}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{k}{2})}, X > 0 \\ 0, \quad X \le 0 \end{cases}$$

де $\Gamma(\frac{k}{2}) = \int\limits_0^\infty X^{\frac{k}{2}-1} e^{-X} dX$ – гама-функція Ейлера;

математичне сподівання і дисперсія розподілу: X_m=k, D=$2k$. Параметром функції є величина k. Графіки розподілів "хі-квадрат" для деяких ступенів вільності k відображені на рис.4.

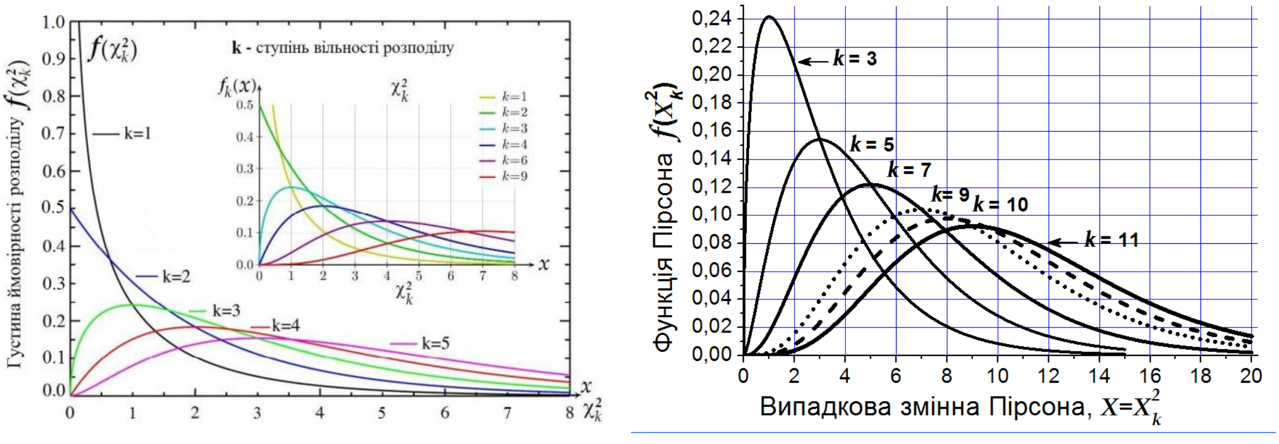


Рис. 4. Розподіл Пірсона (хі-квадрат)

З графіків видно, що із збільшенням k (числа випадкових змінних, що додаються) форма кривої стає більш симетричною, наближаючись до кривої Гауса.

4. Розподіл Релея

У випадку k=2 і стандартного розподілу двох незалежних випадкових величин (σ=1), випадкова величина $X \equiv \sqrt{\chi_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ описується розподілом Релея, формула якого

$$f(X) = X \cdot e^{-\frac{X^2}{2}}, \text{ при } X>0; \quad f(X)=0, \text{ при } X\le 0. \qquad (4)$$

Для практичного розуміння цього розподілу густини ймовірності можна, як приклад, розглянути постріли у центр мішені (точку 0,0). Якщо відхилення від центру для двох взаємно перпендикулярних напрямків (x,y) нормально розподілені і некорельовані, то відстань промаху $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ (випадкова величина R) має розподіл Релея. Коли дисперсії випадкових величин x_1 і x_2 однакові, але $\sigma \neq 1$, розподіл Релея набуває вигляду (рис.5): $f(X) = \frac{X}{\sigma^2} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}$; $X_m=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $D=\sigma^2\frac{4-\pi}{2}$.

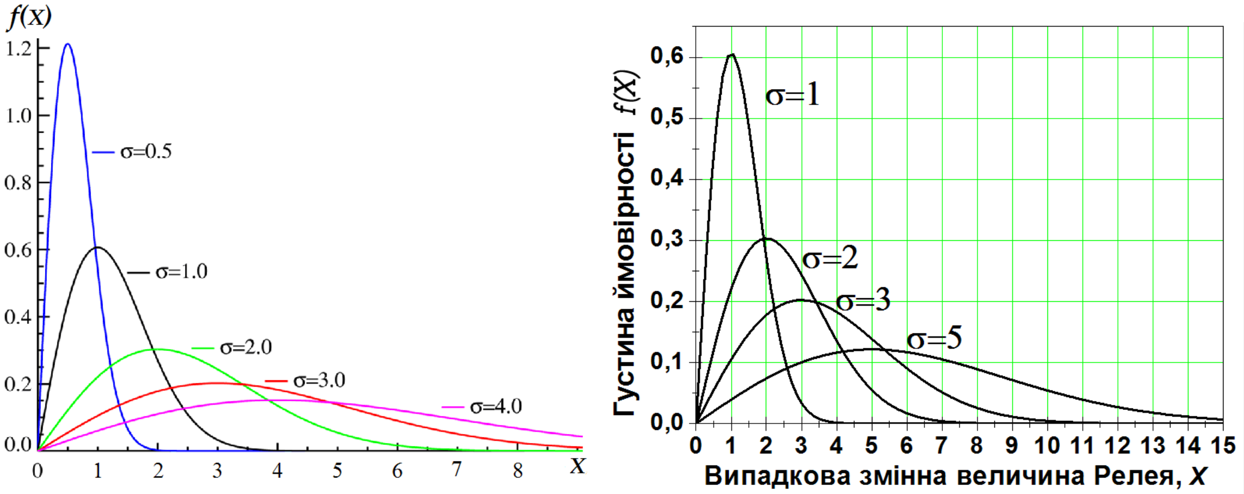
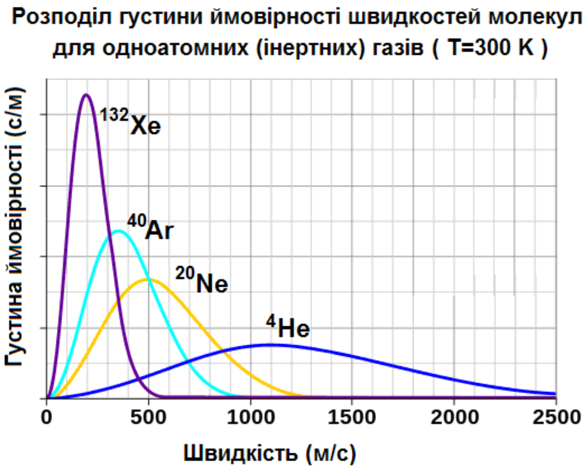


Рис. 5. Розподіл Релея для різних дисперсій ($\sigma=\sqrt{D}$).

4. Розподіл Максвела

Для числа ступенів вільності k=3, функція розподілу густини ймовірності випадкової величини $V=\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ описується розподілом Максвела (згадаємо курс молекулярної фізики, $v=\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ – модуль швидкості молекул) $f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$ (рис.6). З порівняння змінних розподілів Пірсона і Максвела видно, що $\chi_3^2=\sqrt{\frac{m_0 v^2}{kT}}$, тоді $f(\chi_3^2)d(\chi^2)=f(v)dv$. У загальному випадку, ввівши заміну $\alpha=\dfrac{m_0}{2kT}$, розподіл Максвела записується формулою $f(v)=(4\pi^{-1/2}\alpha^{3/2})v^2e^{-\alpha v^2}$.



Математичне сподівання

$$\underline{V_m}\equiv v_{\text{н.і.}}=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}.$$

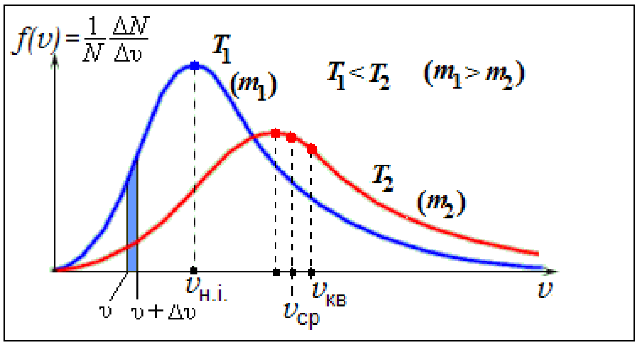


Рис. 6. Функція розподілу Максвела.

Значення дисперсії знайдемо з формули $D=\overline{x^2}-\overline{x}^2$ (див. тему 8(1)), знаючи середню і середню квадратичну швидкість (молекул)

$$\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)dv=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}=\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} \quad \text{і} \quad \overline{v^2}=\int_0^\infty v^2f(v)dv=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}:$$

$$\underline{D=\overline{v^2}-\overline{v}^2}=\frac{3}{2\alpha}-\frac{4}{\pi\alpha}=\underline{\frac{3\pi-8}{2\pi\alpha}}.$$

5. Розподіл t_k-Стьюдента

Розподіл Стьюдента дозволяє визначити ймовірнісні межі похибки, коли число даних вимірювань (випадкових величин) є незначним, тобто для обмеженої вибірки даних.

Розподілом t_k-Стьюдента з k ступенями вільності називається розподіл густини ймовірності випадкової величини $t_k=\dfrac{Z}{\sqrt{\chi_k/k}}=Z\sqrt{\dfrac{k}{\chi_k}}$,

де Z – випадкова величина, що має *стандартний* нормальний розподіл (з X_m=0 і σ=1); χ_k – випадкова величина, що має розподіл хі-квадрат з k ступенями вільності; Z і χ_k – незалежні випадкові величини [2]. Розписавши випадкову величину χ_k, змінну t_k можна записати: $t_k=\dfrac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i^2}}$, де x_i – незалежні величини, що також мають нормований (стандартний) розподіл Гауса (у якому змінною є *зведена* похибка, тобто $x_i \equiv z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma$). Функція розподілу густини ймовірності неперервно змінної випадкової величини t_k з k ступенями вільності має вигляд [2]:

$$f(t_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t_k^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Г – гамма-функція Ейлера.
Математичне сподівання
$X_m = 0$ при $k \geq 2$.
Дисперсія $D = \frac{k}{k-2}$ при $k \geq 3$.

Дріб з гамма-функціями розписується наступним чином:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{(k-1)(k-3)\cdots 5\cdot 3}{2\sqrt{k}\cdot(k-2)(k-4)\cdots 4\cdot 2}$$ – для парних чисел k;

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{(k-1)(k-3)\cdots 4\cdot 2}{\pi\sqrt{k}\cdot(k-2)(k-4)\cdots 5\cdot 3}$$ – для непарних чисел k.

Так, розподіл Стьюдента з одним ступенем вільності (k=1) має вигляд: $f(t_1) = \frac{1}{\pi\cdot(1+t^2)}$ і ця функція називається розподілом Коші;

при k=2: $f(t_2) = \frac{1}{(2+t^2)^{3/2}}$; k=3: $f(t_3) = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{\pi\cdot(3+t^2)^2}$; $f(t_\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ – розподіл Стьюдента при $k=\infty$ відповідає стандартному розподілу.

Тепер розглянемо практичний випадок, коли випадкові величини Z і χ не є стандартизовані, тобто їх $X_m \neq 0$ і $\sigma \neq 1$, а їх кількість ***n*** є вибіркою з генеральної сукупності даних, але ці ***n*** випадкових величин $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ є незалежні і мають розподіл Гауса ($X_m = \bar{x}$, σ^2). Тоді їх вибіркове середнє $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, оцінка дисперсії $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2$. Якщо поділимо кожну похибку Δx_i на σ, то це буде зведена похибка (z), яка є змінною стандартного розподілу Гауса та фігурує у розподілі Пірсона як χ^2. Тому запишемо:

$\frac{S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2 = \frac{\chi_n}{n-1}$ (нами у формулах Пірсона було перепозначено $\sum_{i=1}^{n}\chi_n^2 \equiv \chi_n$). Тоді випадкова величина $\chi_n = \frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1)$ має розподіл хі-квадрат з <u>$k=n-1$</u> ступенями вільності. Оцінкою СКВ середнього арифметичного є $\sigma(\bar{x}) \approx \frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Запишемо *зведене значення* похибки вибіркового середнього $Z = \frac{\bar{x}_n - X_m}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}_n - X_m}{S_n/\sqrt{n}} = (\bar{x}_n - X_m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$. Заміну S_n на σ зроблено тому, що наше вибіркове середнє має, за умовою, нормальний розподіл з дисперсією $D=\sigma^2$. Отже, випадкова величина t_k набуде виразу

$$t_k = \frac{Z}{\sqrt{\chi_n}}\sqrt{n} = \frac{(\bar{X}-X_m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}{\frac{S_n}{\sigma}\sqrt{(n-1)}}\sqrt{n} = \underline{(\bar{X}-X_m)\frac{\sqrt{n}}{S_n}},$$

вона має розподіл Стьюдента з <u>$k=n-1$</u> ступенями вільності. Відмітимо, що і <u>для скінченої вибірки</u> даних в цій випадковій величині (t_k) невідома дисперсія σ^2 відсутня, так як вона була і в чисельнику, і в знаменнику. Тому розподіл величини t_k залежить від k, але не залежить від X_m і D (рис.7), що робить розподіл Стьюдента важливим для практичного застосування (невідома дисперсія, мала кількість даних).

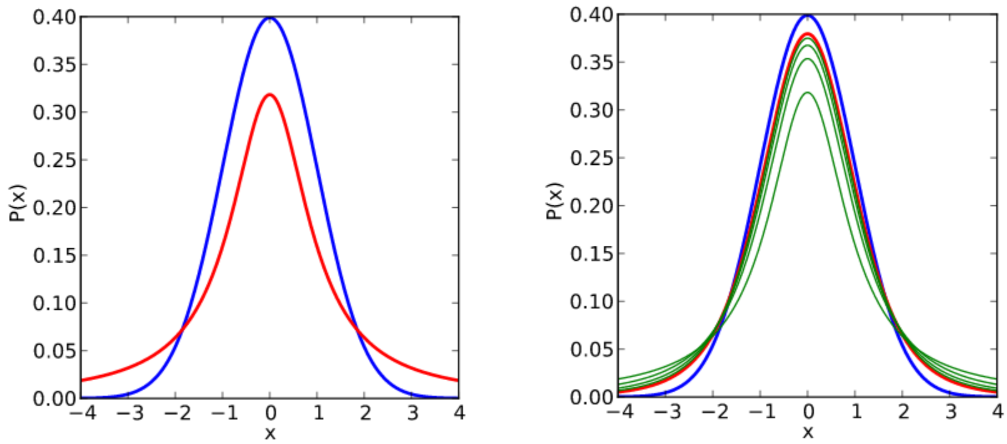


Рис. 7. Порівняння розподілу Гауса (синя крива) з розподілом Стьюдента при k=1 і трансформація кривих від k=1 до k=5; при великих ступенях вільності крива Стьюдента збігається з кривою Гауса.

6. Розподіл гармонічного коливання (розподіл арксинуса)

Гармонічне коливання $U(t) = U_m \sin(2\pi\nu t + \varphi_0)$ постійної амплітуди U_m і частоти ν можна розглядати як випадкову величину, якщо початкова фаза φ_0 є випадкова величина, розподілена за рівномірним законом в інтервалі [+π/2, -π/2]. Це може бути, наприклад, складова похибки вимірювання, викликана впливом синусоїдальних електричних полів (наводками). Схематично це пояснюється на рис.8. Зміщення початкової фази приводить до зміщення синусоїди коливання, отже, і значення величини U у кожний момент часу t.

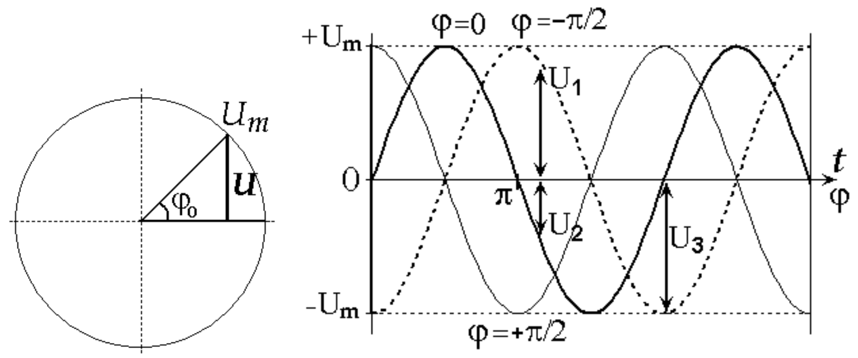


Рис. 8. Схема появи випадкового збурення U при зміщені початкової фази коливання.

Функція розподілу густини ймовірності має наступний вираз:

$$f(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{U_m^2 - U^2}},$$

в межах

$-U_m < U < +U_m$;

$D = \frac{U_m^2}{2}$; $X_m = 0$.

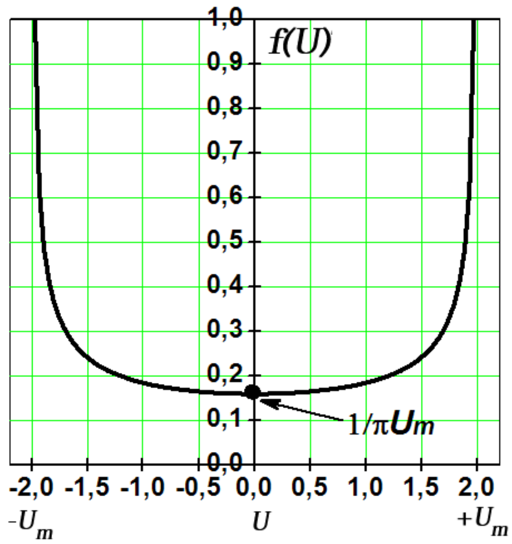
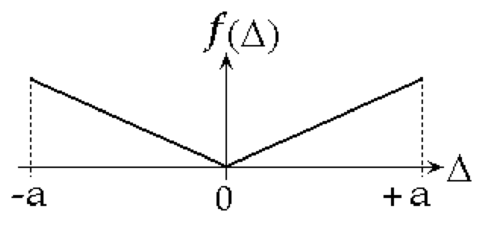


Рис. 9. Функція розподілу гармонічного коливання.

На рис.9 приведений графік цієї функції. Інтегральна функція F цього розподілу – функція розподілу ймовірності, має вираз $F(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{U}{U_m}\right)$, звідси і назва "закон розподілу арксинуса".

Графік (функція) закону розподілу густини ймовірності, який має мінімум (один або декілька) у визначеній області випадкових величин називається *антимодальним*. На рис.10 приведений ще один варіант графіка антимодального-I (з одним мінімумом) закону розподілу:



$$f(\Delta) = \begin{cases} \frac{|\Delta|}{a^2}, & |\Delta| \le a \\ 0, & |\Delta| > a \end{cases}.$$

Рис. 10.

Використана література

1. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. - М.: Статистика, 1980, 95 с.
2. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.–М.: Наука, 1985.–640 с.

Тема 9. Обробка багатократних рівноточних вимірювань.

1. Алгоритм обробки. Систематичні похибки та методи їх виключення або врахування.

Мета обробки експериментальних даних – одержати результат вимірювання фізичної величини (ФВ) і його похибку. Є багато методів обробки експериментальних даних. Ось деякі фундаментальні монографії:

- Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. – М.: Мир, 1980. – 610 с.
- Мостелер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. Вып.1. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 317 с.
- Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

Вибір методу обробки даних вимірювань ФВ залежить від:

1) числа n даних (багатократні, однократні);
2) виду (функції) розподілу похибок;
3) виду вимірювань (прямі, непрямі, сукупні, сумісні);
4) одна або декілька груп вимірювань (рівноточні чи нерівноточні, критерії відповідності);
5) вимог до швидкості обрахунків.

Перераховані методи обробки мають свою математику, формули, теорію, алгоритм виконання операцій вимірювання, інше.

Для оцінки похибки одноразових вимірювань використовують результати спеціально поставленого аналогічного експерименту або дані попередніх досліджень, умови вимірювань, похибки засобів і методів вимірювань та похибку оператора.

Для визначення похибки ФВ при її багатократних вимірюваннях користуються ймовірнісно-статистичними методами. Вони залежать від виду (функції) розподілу даних. В більшості випадків для випадкових похибок він є нормальним (гаусівським). Саме для цього випадку статистичні методи найбільш розроблені та обґрунтовані.

Все вище сказане вимагає і відповідний алгоритм обробки даних та визначення похибки вимірювання. Нижче наведений один з найбільш застосовних розширених алгоритмів обробки (ГОСТ 8-207-76), який може бути реалізований навіть за допомогою звичайного калькулятора (хоча скласти відповідну програму обчислень для ЕОМ не викликає труднощів).

Алгоритм обробки багаторазових рівноточних експериментальних даних

(ДСТУ ГОСТ 8.207-76)

x_i	1. Попередній аналіз і ввід (запис) даних: вилучення з даних промахів оператора, аналіз умов вимірювань і одержання даних, попередня оцінка рівноточності.
$\Delta x_{сис}$	2. Виключення відомих систематичних похибок одного знаку (*поправок*), які знаходяться експериментально або розрахунком (наприклад, в результаті підключення приладу).
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	3. Обчислення результату вимірювання.
$v_i = x_i - \bar{x}$; $\sum_{i=1}^{n} v_i \approx 0$	4. Обчислення випадкового відхилення v_i; та контрольна перевірка правильності введених даних і обчислень (близькості суми до нуля).
$S_n = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$	5. Оцінка СКВ – ступеня розсіювання даних навколо середнього значення ($\bar{x}$).
Перевірка гіпотези про функцію розподілу	6. При n>50 – критерій Пірсона (χ^2), Колмогорова, Мізеса-Смірнова (ω^2); при 3<n<50 – спеціальний критерій W, якщо розподіл скоріше всього нормальний або логарифмічно нормальний; при 10<n<50 – складовий критерій для підтвердження або спростування нормального виду розподілу.
Виявлення та виключення даних з грубими похибками	7. Якщо дані мають розподіл Гауса, то застосовується статистичний критерій виявлення і виключення тих даних, що не належить даному розподілу (грубих похибок).
$S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$	8. Для розподілу, що належить нормальному, обчислюється СКВ середнього арифметичного (результату вимірювання).
Оцінка довірчих меж похибок: $\Delta_{вип}(p) = t_{pn} \cdot S_{n\bar{x}}$, $\theta(p) = k\sqrt{\sum_{J=1}^{m} \theta_j^2}$	9. Оцінюються границі похибок: випадкових $\Delta_{вип}(p)$, не виключених систематичних $\theta(p)$ та результату вимірювань $\Delta_{рез}(p)$ (p – ймовірність, що вибрана для довірчого інтервалу, t_{pn} – коефіцієнт Стьюдента).
Запис результату вимірювання: $\bar{x}$, $\Delta_{рез}$, p, n	10. Для симетричного інтервалу похибок результат записують у формі: $\bar{x}$, $\Delta_{рез}$, p

(з відповідними правилами заокруглення). Якщо функцію розподілу невідомо і необхідна подальша обробка, то форма запису така: $\bar{x}$, $S_{n\bar{x}}$, n, θ; якщо для довірчого інтервалу θ(p) ймовірність p відома, то її (це число) також записується.

Межі похибки кінцевого результату вимірювання $\Delta_{рез}(p)$ обраховуються згідно формул: $\Delta_{рез}=K \cdot S(\Delta,\theta)$, де $S(\Delta,\theta)=\sqrt{S_{n\bar{x}}{}^2+\frac{\theta^2}{3}}$ – оцінка сумарного СКВ результату (тобто $\bar{x}$), коефіцієнт $K=f(\Delta_{вип},\theta)$ – є функцією випадкової і сумарної систематичної похибок.

Що стосується аналізу умов одержання даних та проведення експерименту (пункт 1 алгоритму): якщо це один оператор, одна група приладів (вимірювальна установка) та однакові умови вимірювання, то такі вимірювання і група даних називаються *рівноточні* (в іншому випадку – *нерівноточні*, вони поділяються на відповідні групи даних і до них застосовуються *критерії оцінки сумісності даних* різних груп, за відповідними формулами проводиться обчислення *вагового (зваженого) коефіцієнту* кожної групи, середнього значення (як результат вимірювання) і СКВ та похибки.

У наступних темах ми більш детально розглянемо інші пункти цього алгоритму: для рівноточних даних з розподілом Гауса та інших функціях розподілу випадкових величин; для нерівноточних і для непрямих вимірювань, а також даних одноразових вимірювань.

Систематичні похибки найбільш суттєво спотворюють результат вимірювань. Тому знаходженню і усуненню їх джерел приділяється велике значення. Перш за все перед проведенням вимірювань необхідно виключити або зменшити вплив на фізичну величину або засіб вимірювань різноманітних зовнішніх факторів і створити нормальні умови застосування засобів вимірювання або, хоча би, робочих умов. До таких заходів, що попереджують додаткові похибки, відносяться: захист приладу від вібрацій, екранування від теплових потоків і електромагнітних полів, створення оптимальної температури і вологості оточуючого середовища, встановлення приладу в певне положення або його попередній прогрів деякий час (якщо це вимагає його технічна характеристика).

Аналіз умов вимірювань і прийняття можливих заходів для їх покращення особливо важливе, так як дозволяють досягти впевненості в тому, що серед складових похибки вимірювання немає найбільш небезпечних – неврахованих та систематичних.

Якщо вдається виявити систематичну похибку і усунути її, то результат спостереження називають виправленим.

{згадаємо: поняття *точності* (близькість результату вимірювання до істинного значення: $\Delta x_{\text{вип}} \rightarrow 0$), *правильності* ($\Delta x_{\text{сист}} \rightarrow 0$), *відтворюваності* (одержання однакових результатів визначених у різний час, різними засобами і методами і т.д.), *збіжності* (близькість один одному результатів двох послідовних вимірювань виконаних в однакових умовах)}.

Розрізняють наступні систематичні похибки:

1. Похибки, властиві засобам вимірювань (інструментальні);
2. Похибки, обумовлені дією впливаючих величин;

   Ці два види похибок можна ще поділити на:

   а) постійні систематичні похибки;

   б) змінні систематичні похибки: періодичні і прогресуючі.

   Прогресуючі похибки в процесі виміру монотонно збільшуються (або зменшуються) у часі, або є функцією зовнішніх впливаючих величин. Наприклад, похибка монотонно змінюється в результаті поступового падіння напруги, що дає джерело "постійної" (і нам відомої) електрорушійної сили (батарейки, акумулятора) при вимірюваннях тестером або за допомогою амперметра опору ділянки електричного кола.

   Періодичні похибки змінюються з певним періодом. Наприклад, у приладах з круговою шкалою, якщо вісь обертання покажчика не співпадає з віссю шкали.
3. Методичні похибки:

   а) похибки методу вимірювання (його недосконалість);

   б) внаслідок обмеженої точності емпіричних формул, покладених для опису явища при вимірюваннях (наприклад, рівняння ідеального газу);

   в) неточність констант, що входять у формули.
4. Похибки, що виникають через неточність дій оператора.
5. Похибки, обумовлені неадекватністю моделі вимірювання об’єкту вимірювання.

Як можна оцінити характер (закон) зміни систематичної похибки?

Нехай зроблено n спостережень. Невиправлений результат i-го спостереження можна представити у вигляді: $X_i^{'} = \overline{A} + \Delta_i^{\text{âèï}} + \Delta_з^{\text{ñèñò}}$,
а його середнє арифметичне значення

$$\overline{A}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{'} = \overline{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{âèï}}}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{ñèñ}}}{n} = (\text{якщо } \Delta_з^{\text{ñèñ}} = const = \Delta_c) = \overline{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{âèï}}}{n} + \Delta_c .$$

З ростом n випадкова складова похибки зменшується (внесок цього доданка у середнє значення невиправленого результату прямує до нуля), а систематична залишається незмінною. Загальну систематичну похибку визначають алгебраїчним додаванням окремих її складових.

Математичне сподівання невиправленого результату спостережень A′ не співпадає з істинним значенням A вимірюваної ФВ, а відрізняється від нього на значення $\Delta_{\text{с}}$: $A = \mu[\overline{A}'] - \Delta_c$.

Випадкове відхилення результатів окремих спостережень

$$v_i' = X_i' - \overline{A}' = (\overline{A} + \Delta_i^{\text{âèï}} + \Delta_i^{\text{ñèñ}}) - (\overline{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{âèï}}}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{ñèñ}}}{n}) =$$

$$= \Delta_i^{\text{âèï}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{âèï}}}{n} + \Delta_i^{\text{ñèñ}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{ñèñ}}}{n})$$

Випадкові похибки фізичної величини групуються навколо істинного значення (A) в певному інтервалі $\Delta_{\text{вип}}$, який не залежить від номера i вимірювання, тобто цей доданок не є функцією часу або умов виміру. Для великої кількості вимірів можна записати:

$$\Delta_i^{\text{âèï}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{âèï}}}{n} \approx \Delta_i^{\text{âèï}} - 0 < \Delta_{\hat{a}} .$$

Отже, $v_i' = const + \Delta_i^{\text{ñèñ}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i^{\text{ñèñ}}}{n} = \Delta_i^{\text{ñèñ}} - \Delta^{\tilde{n}} + const .$

Таким чином, характер зміни відхилення v_i' в залежності від i (номера вимірювання) дає якісний характер зміни систематичної похибки при послідовних вимірюваннях однієї і тієї ж ФВ.

Якщо невиправлені відхилення результатів різко змінюються при зміні умов спостережень, то дані результати містять постійну систематичну похибку, яка залежить від умов спостережень.

Для *прогресуючої* систематичної похибки у послідовності невиправлених відхилень результатів вимірів спостерігається тенденція до збільшення або зменшення. Якщо знаки відхилень почергово змінюються "+" і "–", такі дані містять *періодичну* систематичну похибку.

Розглянемо деякі типові причини і прийоми зменшення вказаних вище видів систематичних похибок.

1. Систематичні похибки властиві засобам вимірювань.

Похибка ЗВ, що вказується класом точності (інструментальна), хоча і відноситься до категорії систематичних, але не вносить спотворення у результат вимірювання ФВ, оскільки легко обчислюється і враховується разом з випадковою похибкою і додається до неї при визначенні надійного інтервалу.

Найбільш суттєві систематичні похибки засобів вимірювань виникають через їх нестабільність і неточність градуювання. Тому проводять їх періодичну повірку і градуювання, порівнюють із зразковими засобами вимірювання або мірами. Порівняння з мірою може проводитись і в процесі серії вимірів. Наприклад, зміщення "нуля" потенціометра через падіння напруги джерела живлення періодично підстроюється зміною відповідного опору в схемі живлення.

До систематичних похибок засобів вимірювань відносяться також похибки, обумовлені неправильною їх установкою, зміщенням початку відліку, гістерезисом (деякої характеристики або фізичного процесу, покладеного в основу принципу вимірювання ФВ); наприклад, при вимірюванні значення індукції в слабо змінних магнітних полях використовують залізний сердечник у котушці, в результаті виникає магнітний гістерезис), "мертвим" ходом верньєрного механізму (коли передається рух через зціплення черв'ячних передач, шестерень) і інші.

Для усунення похибки через неточність установки приладу використовують рівень. Коли це неможливо або точність залишається недостатньою, то для врахування цієї похибки (або подібних похибок) використовують методи рандомізації. Суть методу – у створенні умов, при яких систематична похибка переходить у розряд випадкових. У нашому випадку можливі два експерименти: 1) проводять n вимірювань при одній установці приладу (тоді систематична похибка має певне значення і не залежить від кількості вимірювань), 2) проводять n вимірювань кожний раз заново встановлюючи прилад. У цьому випадку систематична похибка буде в $\sqrt{n}$ раз меншою, ніж можлива систематична похибка кожного спостережуваного значення ФВ.

Похибку від зміщення початку відліку ліквідують встановленням показника на "нуль" перед початком вимірів або в процесі їх проведення. Для виключення систематичних похибок від гістерезису і "мертвого" ходу верньєрних механізмів ЗВ, вимірюють шукану величину при підході до певної точки шкали зліва (x_1) і справа (x_2). Результат виміру обчислюють як середнє значення А=(x_1+x_2)/2.

2. Систематичні похибки обумовлені дією впливаючих величин.

Ці похибки виключають введенням поправок, або в процесі виконання вимірювань, використовуючи принцип протилежного впливу, що ґрунтується на направленому варіюванні умов або алгоритму вимірювань.

Реалізуючи принцип протилежного впливу виконують n=2k спостережень (часто k=1), причому алгоритм або умови виміру змінюють так, щоб причина, що викликає систематичну похибку при k спостереженнях, виявила протилежний вплив при інших k спостереженнях. Тоді значення фізичної величини, обчислене за формулою середнього арифметичного ($\bar{x}$), майже (а часто повністю) не містить систематичної складової похибки.

Наприклад, внаслідок впливу термострумів в електровимірній установці через різну температуру її частин з'являється систематична похибка, що спотворює покази гальванометра при вимірюванні сили постійного струму. Нехай цей показ X дорівнює X=I+Q, I – значення струму, Q – значення термоструму. Змінюючи напрям електричного струму в колі, одержимо: X= –I+Q, тому що напрям термоструму залишається незмінним. За результат вимірювання приймається значення $A = \frac{X - X'}{2} = \frac{I + Q + I - Q}{2} = \frac{2I}{2} = I$.

Інший приклад. Щоб уникнути впливу зовнішнього магнітного поля Землі при вимірюваннях магнітної індукції і інших величин, що піддаються впливу магнітних полів, вимірювання виконують декілька разів, повертаючи об'єкт відносно ліній магнітного поля Землі. За результат виміру приймають середнє арифметичне одержаних даних.

3. Систематичні похибки методу.

Ці похибки можуть виникнути:

а) Через недосконалість вибраного методу вимірювання.

Наприклад, визначення об'єму геометричного тіла за лінійними вимірюваннями, тоді як є метод за визначенням об'єму витісненої тілом рідини при його зануренні у цю рідину; або: визначення товщини плівок мікроскопом, тоді як є інтерференційний метод, або по пропусканню чи поглинанню світла; або: визначення опору низькоомних речовин за вимірами *U* та *I*, але є і безконтактні методи, які усувають, наприклад, вплив паразитних контактних опорів.

б) Внаслідок обмеженої точності емпіричних формул, що застосовуються для опису явища, покладеного в основу вимірювання.

Коли похибки емпіричних формул невідомі, їх переводять у розряд випадкових, застосовуючи прийом рандомізації. З цією метою одну і ту ж величину вимірюють декількома методами і за одержаними експериментальними даними обчислюють її середнє значення. Наприклад обчислення параметрів газу за формулами ідеального газу $PV = \frac{m}{\mu} RT$ або рівняння Ван-дер-Ваальса $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ є наближеними за своєю суттю, крім того, і константи (a і b) обчисленні з обмеженою точністю, отже результат містить систематичну похибку внаслідок неточності емпіричних формул.

в) Внаслідок обмеженої точності фізичних і математичних констант (числа π і e та інші, наближення при проведенні розрахунків).

Оцінки похибок формул і фізичних констант частіше всього відомі і являються невиключеними систематичними похибками, тобто такими, які неможливо виключити, але їх потрібно враховувати.

<u>4. Систематичні похибки, що виникають внаслідок неточності дій оператора.</u>

Поява таких похибок пояснюється індивідуальними особливостями оператора. Наприклад, неточні дії оператора можуть призвести до запізнення або упередження реєстрації деякого сигналу (наприклад, вимірювання часу падіння), асиметрії при установці покажчика між двома штрихами. Ці похибки можна перевести у розряд випадкових шляхом проведення попередніх вимірювань, багаторазової повторної установки покажчика, вимірювань декількома операторами. За результат вимірів приймають усереднене значення похибок оператора(ів).

<u>5. Систематичні похибки, що виникають через неадекватність моделі вимірів об’єкту вимірювання.</u>

Наприклад, треба виміряти довжину (або об’єм) циліндра (куба). Але можлива непаралельність граней приведе до похибки (тобто циліндр не є циліндром у геометричному розумінні). Тому треба провести вимірювання довжини (і діаметра) через певні проміжки, повертаючи циліндр навколо осі. За результат взяти середнє значення цих вимірювань.

2. Статистичний критерій виключення грубої похибки

Результати багатократних спостережень (вимірювань), які одержуються при прямих вимірюваннях фізичної величини ФВ), називаються *рівноточними (рівнорозсіяними)*, якщо вони є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами. Вимірювання проводяться одним оператором, в однакових умовах зовнішнього середовища і з допомогою одного і того ж засобу вимірювання. Такі дані (результати) мають однакову дисперсію (або S_n) і відповідну їй криву Гауса. Якщо ж при деякому наступному i-му вимірюванні цієї ж ФВ з'явилася додаткова причина впливу на результат виміру, то похибка і її дисперсія будуть вже належати *іншому* розподілу Гауса. На цьому і ґрунтується статистичний критерій визначення грубої похибки (та вилучення такого значення ФВ із сукупності даних).

Важливо, щоб одержані при вимірюванні дані до обробки були ретельно переглянуті і проаналізовані. Спочатку перевіряють наявність окремих похибок, які різко відрізняються від решти похибок. Ці грубі похибки (промахи) викреслюють тільки в тому випадку, якщо твердо переконані, що допущена неправильна дія оператора. Якщо причини грубих даних невідомі, для вирішення питання про можливості їх виключення використовують статистичні методи.

Нехай є вибірка результатів вимірювання ФВ: x_1, x_2, x_3, ... , x_n. Припустимо, що внаслідок випадкових похибок ці дані належать деякому розподілу $\varphi(x)$. Розглянемо конкретне дане $\boldsymbol{x_i}$, поставивши запитання: чи належить воно тому ж розподілу, або тій же рівноточній вибірці, що і інші n-1 даних ?

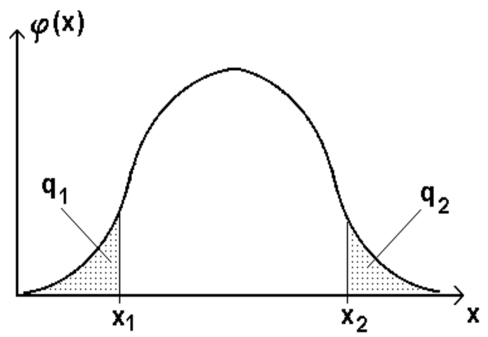


Рис. 1. Функція $\varphi(x)$ випадкової величини x. Заштрихована площа дорівнює рівню значимості **q** =(q_1+q_2)

Для перевірки цього поступають наступним чином. Нехай графік функції $\varphi(x)$ має форму, зображену на рис.1. Числа $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$ обмежують граничні мінімальне і максимальне значення випадкової величини $\boldsymbol{x}$, а площі $\mathbf{q_1}$ і $\mathbf{q_2}$ визначають (малі) ймовірності одержати при вимірюванні ФВ значення $x<x_1$ або $x>x_2$:

$$q_1 = p(x < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)dx\,,$$

$$q_2 = p(x > x_2) = \int_{x_2}^{\infty} \varphi(x)dx\,; \quad q = q_1 + q_2. \qquad (1)$$

Ймовірності $q_{1,2}$ (їх задають досить малими: від 0,01 до 0,1) дістали назву ***рівня значимості*** критерію (припущення, гіпотези), що перевіряється (в даному випадку – критерію про належність числа x_i розподілу $\varphi(x)$). Звичайно в практиці статистичної обробки даних береться $q_1=q_2$. Якщо x_i попадає в область значень $x_1<x<x_2$, то вважається, що воно належить розподілу $\varphi(x)$ і, отже, всі n даних вибірки складають одну сукупність рівноточних вимірювань. Інакше, при попаданні виміряної ФВ в *критичну область* q_1 або q_2, де ймовірність такого значення дуже мала, приймається, що воно або належить іншому розподілу, або містить додаткові похибки, тобто **не** належить до сукупності інших n-1 рівноточних вимірювань даної вибірки і повинно бути відкинуте.

Як видно з (1), ***статистичний зміст* q** – *це ймовірність того, що ми відкинули правильне твердження* (гіпотезу, дане, тому що воно знаходиться все-таки в межах кривої розподілу). Наприклад, якщо $x_i>x_2$ при рівні значимості q=0,05, то виходить, що число x_i належить даному розподілу з ймовірністю 5%, а ми його відкидаємо. Прийнято, що гіпотезу (про належність даного до рівноточної вибірки і грубої похибки немає) слід вважати цілком справедливою, якщо вона виконується при q≥10 (якщо дане x_i, що перевіряється, менше критичного x_2, а не попадає в заштрихований "хвіст" у ≥10 %, то грубої похибки точно немає) і навпаки – безумовно незастосовною до експериментально одержаної вибірки, якщо вона відкидається з рівнем значимості q<0,01 (якщо це дане попало у таку область "хвоста", то там точно є груба похибка).

Статистичний критерій *виявлення даних, які різко виділяються*, ґрунтується на припущені, що група даних належить нормальному розподілу. Для того, щоб перевірити, чи містить деяке різко відмінне дане $x_{\max}$ грубу похибку, потрібно, *по-перше*, обчислити абсолютне значення зведеної похибки $z_{\max} = \dfrac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S_n}$, де $\bar{x}$ – середнє арифметичне групи даних; $S_n = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ – СКВ даних, *по-друге*, порівняти обчислене значення $z_{\max}$ з теоретичним значенням $\mathbf{z_т}$ (табл.1) при вибраному рівні значимості q. Якщо $\mathbf{z_{max}} > \mathbf{z_т}$, то виміряне значення x_{max} потрібно вилучити як таке, що містить грубу похибку. Якщо після виключення одного різко відмінного даного викликає сумнів яке-небудь інше, то описаний вище порядок дій повторюють, але вже не враховуючи раніше вилучене дане x_{max}.

Коли в результаті нерівності $z_{max}>z_т$, був відкинутий результат вимірювання $x_{мах}$, як такий, що містить грубу похибку, то необхідно мати на увазі наступне. Рівень значимості q в даному випадку характеризує ймовірність того, що отриманий висновок у випадку $z_{max}>z_т$ про те, що дане x_{max} містить грубу похибку, <u>є хибним</u> (тобто те, що z_{max} містить грубу похибку *справедливо тільки з імовірністю* p = 1-q). Тим не менше ми його відкидаємо – ми відкидаємо ймовірно (p=q) правильне число. Але при малих вибірках експериментальних даних n<50 це оправдано з наступних міркувань. Наприклад, q=1 % означає, що із 100 вимірювань одне може попасти у “хвіст” розподілу; коли ж із n<50 вимірювань одне з них внаслідок випадкового відхилення попадає в цю ж область значень, то це занадто малоймовірно. Більш імовірно, що це відхилення має іншу природу. Тому чим більша кількість вимірювань, тим ширша можлива область випадкових значень при тому ж рівні значимості, і тим вона вужча із зростанням q. Якщо при q=1 % в нашій вибірці є значення більші за $z_т$, то вони <u>безумовно містять</u> грубу похибку; якщо при q=10 % всі числа вибірки менші $z_т$, то вони <u>безумовно позбавлені</u> грубих похибок і є рівноточними.

Таблиця 1. Найбільші абсолютні значення нормованих відхилень $z_т$.

Рівень значимості **q**, %	Число результатів вимірювань, ***n***						
	4	6	8	10	12	15	18
1	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,00
2	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,90
5	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,72
10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,58
Рівень значимості q, %	**Число результатів вимірювань, *n***						
	20	25	30	35	40	45	50
1	3,08	3,20	3,29	3,36	3,42	3,47	3,52
2	2,96	3,07	3,16	3,22	3,28	3,33	3,37
5	2,78	2,88	2,96	3,02	3,08	3,12	3,16
10	2,62	2,72	2,79	2,85	2,90	2,95	2,99

За результат вимірювання приймають середнє арифметичне значення тих даних, що залишились. Відповідно, враховуючи тільки ці дані, знаходять СКВ і похибку результату вимірювання.

Приклад.

При вимірюванні сили струму I (в міліамперах) одержані наступні результати: 10,07; 10,10; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; **10,40**; 10,13; 10,12; 10,08. Перевірити, чи містить значення I_{max} = 10,40 мА грубу похибку.

Розв'язок.

1. Обчислюємо середнє арифметичне даних: $\bar{I} = \dfrac{101{,}58}{10} \approx \underline{10{,}16\ \text{А}}$.
2. Обчислюємо СКВ експериментальних даних S_n= 0,094 мА.
3. Знаходимо зведену похибку "грубого" значення:

$\mathbf{z_{max}} = \dfrac{10{,}40 - 10{,}16}{0{,}094} = \mathbf{2{,}55}$. Покладемо **q=5** %. ($p$=95 %)

З таблиці 1 при n=10 і q=5 % знаходимо значення $\mathbf{z_т}$ **=2,41**. Так як $\mathbf{z_{max}} > \mathbf{z_т}$, то експериментальне дане 10,40 містить грубу похибку необхідно вилучити. Тоді виправлений результат вимірювання струму становитиме: $\bar{I} = \dfrac{91{,}18}{9} \approx \underline{10{,}13\ \text{А}}$.

Тема 10. Обробка результатів прямих одноразових вимірювань

(Основні принципи проведення точних вимірювань)

Є багато випадків, коли неможливо провести повторне вимірювання тої чи іншої фізичної величини (розміру) даного об’єкту, а тим більше багаторазово повторювати цей вимір. Причиною може бути, наприклад, руйнування даного об’єкту в процесі вимірювання (вимірювання твердого тіла на силу розриву або межу пружної чи пластичної деформації, твердість; визначення характеристик вибуху саме цієї речовини або її спектру в процесі згорання, оскільки іншого зразка немає або він занадто дорогий), унікальний і дорогий експеримент також може дуже обмежити кількість спроб провести вимірювання комплексу фізичних характеристик об’єкту(ів) (наприклад, дослідження, що проводяться на Великому адронному колайдері).

Звісно, що для одержання достовірного результату, до таких вимірювань (досліджень) потрібно ретельно готуватися, як з точки зору інструментальної, так і самого процесу проведення вимірювань. Тому перед початком проведення прямого одноразового вимірювання необхідно дотримуватися певних правил і умов.

1) Попередньо зробити аналіз інформації про об’єкт дослідження з метою:
   а) визначення математичної моделі параметра (наприклад, це – ребро куба, постійний в часі опір резистора, діапазон прозорості або непрозорості і т.д.);
   б) наявності можливих зовнішніх впливів на результат вимірювання, які можна поділити на 5 основних груп:
      ⇒ кліматичні (температура, тиск, вологість);
      ⇒ електричні, магнітні, електромагнітні;
      ⇒ зовнішні навантаження (вібрації, удари, дотики деталей приладів);
      ⇒ іонізуюче випромінювання;
      ⇒ газовий склад атмосфери.
   в) визначення методики вимірювання і типу необхідних приладів.
2) Перевірити справність (метрологічну придатність, повірку) засобів вимірювання, їхні метрологічні характеристики: діапазон шкали, клас точності, ціна поділки та чутливість, швидкодія (час встановлення показів).

3) Попередньо дослідити метод вимірювання, діапазон значень очікуваного результату, оцінити похибку методу і похибку приладу, скласти (або ознайомитися) з процедурою (алгоритмом, схемою, послідовністю) проведення вимірювання.

4) Оцінити похибку оператора, якщо вона може бути суттєвою. Зробити це можна, проводячи необхідні вимірювання на подібному об'єкті. Наприклад, спалюючи досліджувану речовину і спостерігаючи спектр випромінювання за допомогою монохроматора (спектроскопа), необхідно по шкалі візуально визначити ширину та розділення смуг (ліній). Оцінити похибку оператора можна спалюючи іншу речовину. Оператор повинен:
   а) підтримувати вимірювання в заданому режимі;
   б) дотримуватися техніки безпеки;
   в) зайняти зручне положення;
   г) чітке слідувати схемі проведення вимірювання;
   д) вести записи умов вимірювання (у відповідному журналі);
   е) вести записи проміжних числових даних з числом цифр точності на дві більше (якщо це можливо), ніж вимагається в кінцевому результаті;
   ж) якість оператора визначається похибкою заокруглення під час запису відліку з шкали приладу.

Одне вимірювання достатньо провести і у тому випадку, коли очікувані випадкові похибки будуть значно менша за систематичні, які не можуть бути виключені ($\Delta_{вип} << \Delta_{сис}$).

Прийнято (ДСТУ ГОСТ 8-207-76), що випадкову похибку можна не враховувати, якщо виконується нерівність: $\theta/S_n > 8$, де S_n – СКВ випадкової похибки вимірювання, а θ – границі невиключених систематичних похибок (наприклад, при вимірюванні діаметра не дуже товстої дротини або циліндра звичайною лінійкою випадкову похибку можна вже не враховувати).

Похибка результату однократного вимірювання $\theta_{рез}$ складається з таких основних складових:

1) похибки засобу вимірювання (інструментальної) $\theta_з$, яка включає основну похибку $\theta_{зо}$ (визначається за класом точності приладу) і додаткову $\theta_{зд}$ (обумовлену дією на прилад сторонніх факторів);
2) похибки методу $\theta_м$;
3) похибки оператора $\theta_{оп}$.

На відміну від випадкових похибок, параметри розподілу і межі яких розраховуються статистичними методами, оцінку границі невиключеної систематичної похибки дослідник встановлює, керуючись, у значній мірі, досвідом і інтуїцією. *Довірчий інтервал декількох невиключених систематичних похибок (тобто інтервал, так званої, композиції похибок)* знаходять, вважаючи *ці похибки розподіленими рівномірно* в заданих межах θ. Тому для знаходження довірчого інтервалу результуючої похибки застосовують формулу

$$\theta_{\eth\mathring{a}\c{c}} = k(p) \cdot \sqrt{\theta_{\c{c}}^2 + \theta_{\grave{\imath}}^2 + \theta_{\ddot{\imath}\ddot{\imath}}^2}\ , \qquad (1)$$

де коефіцієнт k залежить від вибраної довірчої ймовірності p:

$\boldsymbol{p}$	0,90	0,95	0,98	0,99
$\boldsymbol{k}$**=**	0,95	1,10	1,40	1,45

За результат одноразового вимірювання приймається значення фізичної величини (ФВ), одержаної в цьому вимірюванні.

Задача-приклад. Необхідно виконати одноразове вимірювання і встановити "істинне" значення падіння напруги на ділянці електричного кола з опором R≈40 Ом з відносною похибкою не більше ±1,5 % (тобто $\varepsilon_{\text{рез}} \le 1{,}5$ %).

Провівши попереднє дослідження місця та умов вимірювання, були встановлені такі додаткові дані про об’єкт вимірювання:

а) ділянка кола має стабільний опір, $R \ne f(T, v, \ldots)$; б) струм – постійний (стабілізація по струму); в) температура у приміщені +30 °С;

г) очікуване падіння напруги постійне і не більше 1,5 В.

Отже, згідно умови задачі, сумарна відносна похибка $\theta_{\text{рез}} = \frac{\Delta U}{U} 100 \le 1{,}5\%$. Згідно, наприклад, ДСТУ ГОСТ 8.395:2008 "Нормальні умови вимірювань при повірці. Загальні вимоги.", похибка засобу вимірювань має складати 30-40 % від загальної похибки. При можливості, потрібно вибирати вольтметр із такою шкалою, щоб значення показу при вимірюванні було у другій половині шкали – тоді відносна похибка буде меншою, тому і клас точності вибраного вольтметра буде кращим. Отже нехай є вольтметр зі шкалою (0-1,5) В, кількість поділок шкали N=150, його внутрішній опір R_V=1000 Ом (для більшої наочності я навмисно привів такий малий внутрішній опір. Насправді опір вольтметрів сотні кОм і більше).

Який тепер повинен бути клас точності вольтметра, якщо $\theta_{\text{рез}}$=1,5 % ? Будемо виходити з максимального значення U≈1,5 В, тоді і гранична похибка приладу буде оцінена по максимуму, виходячи з формули $\theta=\Delta U_{\text{гр}}/U$, при адитивності (незмінності, незалежності) похибки приладу від значення вимірюваної величини. Отже, з попередньої формули маємо: $\Delta U=\dfrac{\theta\cdot U}{100}=\dfrac{1{,}5\cdot 1{,}5}{100}=0{,}0225B$.

Враховуючи вимоги стандарту, похибка приладу повинна бути на (30-40) % меншою – нехай це буде ≈ 0,008 В. Знайдемо необхідний нам клас точності вольтметра (η), відповідно з його нормуванням по зведеній похибці: $\eta\geq\gamma=\dfrac{\Delta U_{\text{ãð}}}{U_N}100=\dfrac{0{,}008}{1{,}5}100\approx 0{,}533\%$. В ці задачі нам краще взяти точніший прилад, тому беремо вольтметр з η=0,5.

Приступаємо до вимірювання. Нехай вольтметр показав падіння напруги на опорі <u>U=0,90 В</u>. Тепер нам потрібно визначити похибку цього вимірювання $\theta_{\text{рез}}$.

1. Визначаємо *інструментальну похибку* засобу вимірювання – це основна і додаткова похибки приладу. *Основна похибка* визначається за класом точності приладу: абсолютне значення похибки –

$$\Delta U_{\text{ãð}}=\frac{\eta\cdot U_N}{100}=\frac{0{,}5\cdot 1{,}5}{100}=0{,}0075\text{ В};$$ відносна похибка (у відсотках) –

$$\theta_{\text{îñ}}=\frac{\Delta U_{\text{ãð}}}{U}100=\frac{\eta\cdot U_N}{100}\cdot\frac{100}{U}=\frac{\eta\cdot U_N}{U}100=\frac{0{,}75}{0{,}90}=\underline{0{,}833\ \%}.$$

2. Визначаємо *додаткову похибку приладу* обумовлену дією зовнішніх факторів. У нашій задачі – це температурний фактор. Характеристики засобів вимірювання, в тому числі клас точності, нормуються, коли вони знаходяться за *нормальних умов*. За нормальні (номінальні) умови в метрологічній практиці прийнято (ДСТУ ГОСТ 8.395-80): температура – 20 $^{\circ}$C, атмосферний тиск – 101,3 кПа, відносна вологість – 60 %. Наші вимірювання проходили при температурі 30 $^{\circ}$C, тобто відхилення від номінальної – +10 $^{\circ}$C. Тому потрібно врахувати цю *додаткову температурну похибку*. Вона враховується наступним чином: $\theta=[(0{,}03\text{-}0{,}06)\cdot\eta]\cdot\Delta t$ (%), де Δt – відхилення температури від номінальної. Отже, вибираючи максимальне із значень інтервалу (0,03-0,06) – воно залежить від особливостей конструкції і захищеності ЗВ – отримуємо: $\theta_{\text{т}}=0{,}06\cdot 0{,}5\cdot 10=\underline{0{,}30\ \%}$.

3. *Похибка методу* вимірювання. У даному випадку – це похибка, яку вносить підключення вольтметра в електричне коло.

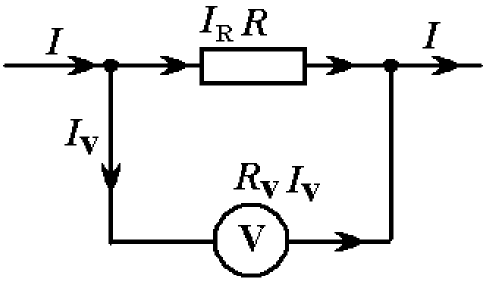


Рис.1.

На рис.1 накреслена схема такого підключення. Як бачимо, підключення створює на ділянці кола розгалуження, відповідно, певна частина струму I_V від загального I буде вже йти через вольтметр, а через опір R проходитеме менший струм I_R і тому відбувається вже менше падіння напруги на опорі R, $U_{\text{вим}}=I_R{\cdot}R$, який і вимірюється вольтметром, тобто виміряне значення $U_{\text{вим}}$ є меншим за дійсне $U_{\text{дійс}}$. Отже, в даній задачі різниця $\Delta U_{\text{м}}=U_{\text{дійс}}-U_{\text{вим}}$ і є методичною похибкою методу вимірювання. Її можна визначити. Із схеми ділянки кола випливає:

$I_R=I-I_V$; $U_{\text{вим}}=(I-I_V)R = I{\cdot}R-I_VR = (I{\cdot}R)-I_VR = U_{\text{дійс}}-I_VR$;

$U_{\text{дійс}}= U_{\text{вим}}+I_VR \rightarrow \Delta U_{\text{м}} = U_{\text{дійс}}-U_{\text{вим}} = I_VR$. Знайдемо I_V.

При паралельному розгалуженні ділянок електричного кола падіння напруги, на них однакове. У нас це ділянка з опором R і паралельна ділянка з опором R_V вольтметра, тому $U_R=U_V$ або $I_VR_V=I_RR$,

звідки отримуємо $I_V=\dfrac{R}{R_V}I_R$. Отже, $\Delta U_{\text{м}}= I_VR =$

$$= \frac{R}{R_V}I_R\cdot R=\frac{R}{R_V}(I_RR)=\frac{R}{R_V}(U_{\text{âèì}}) \rightarrow \underline{\frac{\Delta U_{\text{ì}}}{U_{\text{âèì}}}=\frac{R}{R_V}=\theta_{\text{ì}}}\ .$$

Ми знайшли відносну методичну похибку. Як бачимо, вона дорівнює відношенню активного опору, що вимірюється, до опору вольтметра. Тому вона тим менша, чим більший опір вольтметра: $\underline{\theta_{\text{ì}}=\dfrac{R}{R_V}100(\%)}$.

З даних задачі отримуємо такий результат: $\theta_{\text{ì}}=\dfrac{40}{1000}100=4{,}0\,\%$. Ми шляхом розрахунку чітко взнали абсолютне значення і знак похибки, що вносить підключення приладу: $\Delta U_{\text{ì}}=\dfrac{R}{R_V}U_{\text{âèì}}=\dfrac{40}{1000}0{,}90=$ $\underline{+0{,}036\text{ В}}$.

Тому ця похибка переходить у ранг *поправки* і її необхідно додати (в даному випадку) до виміряного значення, тобто зробити його корекцію, і тому <u>дійсне</u> значення напруги дорівнює: $\boldsymbol{U_{\text{дійсне}}}$**= 0,936 В**.

В цій задачі визначення методичної похибки (підключення вольтметру до опору) можна здійснити іншим методом, використавши формулу додавання паралельних опорів:

$$\frac{1}{R_{\tilde{n}\acute{o}\grave{i}}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_V}=\frac{R_V+R}{R_V R} \rightarrow R_{\tilde{n}\acute{o}\grave{i}}=\frac{R_V R}{R_V+R};$$

$$U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}=I\cdot R_{\tilde{n}\acute{o}\grave{i}}=I\cdot\frac{R\cdot R_V}{R_V+R}=(I\cdot R)\frac{R_V}{R_V+R}=U_{\ddot{a}^3\acute{e}\tilde{n}}\frac{R_V}{R_V+R}.$$

$$U_{\ddot{a}^3\acute{e}\tilde{n}}=U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}\frac{R_V+R}{R_V}=U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}(1+\frac{R}{R_V})=U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}+U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}\frac{R}{R_V}=U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}+\Delta U;$$

отже $\underline{\Delta U=U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}\frac{R}{R_V}} \rightarrow \boxed{\theta_{\hat{i}}=\frac{\Delta U}{U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}}=\frac{R}{R_V}\ (\times 100)\,\%}$.

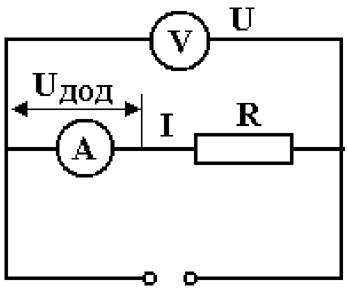


Рис. 2а

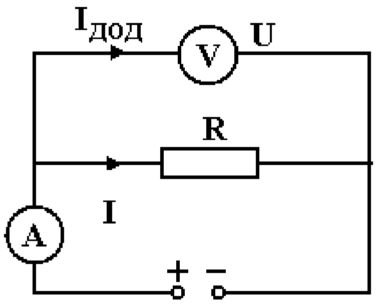


Рис. 2б

Підключення амперметра в коло також вносить свою похибку, оскільки він також має опір, хоча і незначний. У випадку підключення амперметра разом з вольтметром, наприклад, для визначення опору за формулою *R=U/I*, ця похибка залежить від місця підключення приладів (рис.2). Якщо напруга (різниця потенціалів) на ділянці кала з опором, до якої підключаються амперметр і вольтметр, є <u>стабільна</u> (наприклад, батарейка або акумулятор), то при підключенні їх по схемі (а) необхідно врахувати додаткове падіння напруги на амперметрі, а по схемі (б) – зміну (збільшення) струму через амперметр (зменшився загальний опір через ділянку кола) і струм через вольтметр.

4. *Похибка оператора* (експериментатора). Вона визначається його вміннями та навичками проводити вимірювання, наприклад, точністю у фіксуванні показів різноманітних приладів. В даній задачі у нас один прилад і одне вимірювання, де потрібно візуально провести відлік показу вольтметра по шкалі. За граничну похибку у випадку лінійних шкал приймається половина її найменшої поділки, яку чітко бачить оператор. Наш вольтметр має 150 поділок у діапазоні (0-1,5) вольт, отже ціна поділки становить 0,01 В. Тоді можлива похибка оператора буде $\Delta U_{\text{оп}}$= <u>0,005 В</u>, а по відношенню до виміряного значення це становитиме $\theta_{\hat{\imath}\ddot{\imath}}=\frac{\Delta U_{\hat{\imath}\ddot{\imath}}}{U_{\hat{a}\grave{e}\grave{i}}}100=\frac{0{,}005}{0{,}90}100\approx$ <u>0,556 %</u>.

Тепер необхідно об’єднати ці (систематичні) складові похибки і визначити довірчий інтервал результуючої похибки одноразового вимірювання. Для цього використаємо формулу (1), врахувавши, що методичну похибку ми вже додали як поправку; також візьмемо значення довірчої ймовірності p=0,95 і тоді коефіцієнт k=1,1:

$$\theta_{ðåç} = k(p)\cdot\sqrt{\theta_{ç}^2 + \theta_{î}^2 + \theta_{ïï}^2} = 1{,}1\cdot\sqrt{(0{,}833_{oc}^2 + 0{,}30_{т}^2)_{ç.â.} + 0{,}556_{ïï}^2} =$$

$$= +1{,}150026 \approx \underline{1{,}150\ \%}.$$

Залишилося записати кінцевий результат, визначивши результуючу абсолютну похибку (у вольтах):

$$\Delta U_{рез} = \theta_{рез}\cdot U_{дійс}/100 = 1{,}150\cdot 0{,}936/100 = 0{,}010764 \approx \underline{0{,}011\ В}.$$

$$\boldsymbol{U_{рез} = (0{,}936 \pm 0{,}011)\ В.}$$

Примітка: проміжні результати математичних обрахунків необхідно записувати (заокруглювати) при можливості з точністю на два порядки кращою, ніж це буде в кінцевому записі результату вимірювання.

Вибір необхідної кількості вимірювань

Як вже відмічалося вище, трапляються випадки вимірювань, коли не є необхідним проводити занадто багаторазові вимірювання одної і тої ж фізичної величини навіть тоді, коли для цього є можливість. Або такої можливості немає, наприклад, через обмеженість у часі або фінансах. Тоді постає питання: яку кількість вимірювань (даних) достатньо провести, а якої вже буде занадто, не доцільною для забезпечення кращої точності кінцевого результату? Але, як ми знаємо, СКВ <u>випадкових</u> похибок S_n залежить від кількості вимірювань n – чим їх більше, тим менший достовірний (надійний) інтервал похибки середнього арифметичного $\Delta\bar{x} = \pm t_{\alpha n}\cdot S_{n\bar{x}} = \pm t_{\alpha n}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, і для мети вимірів – це краще. Що ж тоді обмежує кількість вимірювань (?) – наявність невиключених систематичних похибок $\theta_{сис}$. У випадку багаторазових вимірювань n_{max} визначається нерівністю $8\cdot S_{n\bar{x}} = 8\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \le \theta$, отже, коли $S_{n\bar{x}}$ стане хоча б у 8 разів меншою за *сумарну* систематичну похибку θ, кількість вимірюваних даних вважається достатньою. Мало того, тоді навіть можна і не враховувати випадкову похибку, а обмежитися тільки цією результуючою систематичною похибкою θ. Звідки отримуємо:

$$n_{\max} = 64\left(\frac{S_n}{\theta}\right)^2 \quad \text{або} \quad (n^2 - n) \geq \frac{8}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2), \quad \text{або напишемо це ще так:}$$

$$(n-1)_{\max} \approx n_{\max} \geq 8\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{\theta} = 8\frac{\overline{\Delta x_i^2}}{\theta} \qquad (2)$$

Із (2) випливає і практична реалізація цієї умови: робимо декілька пробних вимірювань n=(2-4), оцінюємо відношення $(S_n)^2$ до $(\theta_{сис})^2$, беручи хоча б одну з відомих, що є найбільшою, і множимо на 64. Наприклад, якщо це відношення дорівнює 1 ($S_n = \theta_{сис}$), то необхідно зробити ≈60 вимірювань, щоб можна було вже не враховувати випадкову похибку (тобто довірчий інтервал, в якому з ймовірністю p міститься істинне значення вимірюваної ФВ, з достатньою точністю визначатиметься тільки систематичною похибкою). Як видно з (2), можна також знайти середнє значення квадратів випадкових похибок цих n пробних вимірювань і оцінити кількість $n_{\max}$.

Якщо відношення $\frac{\theta}{S_{n\bar{x}}} \leq 8$, то вже необхідно враховувати обидві складові похибки. Але знову ж таки виникає доцільність дуже малого значення цього відношення, тобто необхідність (доцільність) врахування порівняно малої систематичної похибки. В метрологічній практиці прийнято, що обидві складові похибки враховуються, якщо виконується нерівність

$$0{,}8 \leq \frac{\theta}{S_{n\bar{x}}} \leq 8 \qquad (3)$$

Тоді результуюча похибка (довірчий інтервал $\Delta(p)$), з врахуванням довірчих інтервалів випадкової $\Delta(p)$ і систематичної $\theta(p)$ похибок, визначається за формулою, яку можна записати по аналогії з інтервалом випадкових похибок

$$\Delta(p) = t_{\text{sum}}S_{\text{sum}}, \text{ де } \quad S_{sum} = \sqrt{S_{n\bar{x}}^2 + \frac{\theta^2}{3}}, \quad t_{sum} = \frac{\Delta(p)_{âèï} + \theta(p)}{S_{n\bar{x}} + \theta/\sqrt{3}}, \qquad (4)$$

або так: $\boldsymbol{\Delta(p)=K[\Delta(p)_{вип}+\theta(p)]}$. (4а)

Отже, результуючий довірчий інтервал (похибка) не є простою сумою двох цих похибок, а є ще помноженою на деякий коефіцієнт ***К***, що залежить від довірчої ймовірності ***p***, яку ми приймаємо, беручи з таблиці коефіцієнтів Стьюдента коефіцієнт $\boldsymbol{t_{np}}$ (надійності α), і відношення $\theta / S_{n\bar{x}}$. Значення коефіцієнта *К* наведені в табл.1.

Таблиця 1. Значення коефіцієнта *K* в залежності від відношення $\theta/S_{n\bar{x}}$ і *p*

$\theta/S_{n\bar{x}}$	0,50	0,75	0,80	1	2	3	4	5	6	7	8
p=0,95	**0,81**	**0,77**	**0,76**	**0,74**	**0,71**	**0,73**	**0,76**	**0,78**	**0,79**	**0,80**	**0,85**
p=0,99	**0,87**	**0,85**	**0,84**	**0,82**	**0,80**	**0,81**	**0,82**	**0,83**	**0,83**	**0,84**	**0,85**

Нехай відношення похибок знаходиться у вказаних формулою (3) межах. Поставимо питання: скільки приблизно необхідно зробити вимірювань ФВ, щоб подальше їх збільшення вже суттєво не впливало на підвищення точності результату? Щоб вияснити це, запишемо (4) для двох випадків вимірювань – одноразовому і ***n***-разовому, врахувавши залежність від n не тільки $S_{n\bar{x}}$, а і від границі (межі) випадкової похибки $\Delta_{\text{вип}}(p) = t_{np}S_{n\bar{x}} = t_{np}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$. Відповідно запишемо коефіцієнт t_{sum} і сумарну похибку $\Delta(p)$

$$t_{sum} = \frac{t_{np}S_n + \theta(p)\sqrt{n}}{S_n + \sqrt{n}\cdot\theta/\sqrt{3}} = \frac{t_{np} + \sqrt{n}\cdot\theta/S_n}{1 + (\sqrt{n}/\sqrt{3})\cdot\theta/S_n} = \frac{\sqrt{3}(t_{np}/\sqrt{n} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3}/\sqrt{n} + \theta/S_n)};$$

$$\Delta(p) = \sqrt{S_{n\bar{x}}^2 + \frac{\theta^2}{3}}\,\sqrt{3}\,\frac{(t_{np}/\sqrt{n} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3/n} + \theta/S_n)}$$

та перепишемо її для двох випадків:

$$\boldsymbol{\Delta(n)} = \sqrt{\frac{3}{n} + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot\frac{S_n}{}\cdot\frac{(t_{np}/\sqrt{n} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3/n} + \theta/S_n)}, \quad \boldsymbol{\Delta(1)} = \sqrt{\frac{3}{1} + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot\frac{S_n}{}\cdot\frac{(t_{np} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3} + \theta/S_n)}.$$

Візьмемо відношення однократного вимірювання до багатократного, щоб прослідкувати, як зменшується сумарна похибка в залежності від кількості вимірювань, при цьому необхідно зауважити, що S_n – це параметр розподілу випадкових даних або похибок (параметр σ функції Гауса) і *він не залежить від* n:

$$\gamma(n) = \frac{\Delta(1)}{\Delta(n)} = \frac{\sqrt{3 + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot S_n\frac{(t_{np} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3} + \theta/S_n)}}{\sqrt{\frac{3}{n} + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot S_n\frac{(t_{np}/\sqrt{n} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3/n} + \theta/S_n)}} = \frac{\sqrt{3 + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot\frac{(t_{np} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3} + \theta/S_n)}}{\sqrt{\frac{3}{n} + \left(\frac{\theta}{S_n}\right)^2}\cdot\frac{(t_{np}/\sqrt{n} + \theta/S_n)}{(\sqrt{3/n} + \theta/S_n)}}.$$

На рис.3 приведені графіки залежностей кривих $\gamma(n)$ від параметра (θ/S_n). Вони є наближені і служать для якісної оцінки поведінки функції $\gamma(n)$ як від n, так і відношення θ/S_n. Це видно з формули, так як відношення $\boldsymbol{\gamma}$ залежить не тільки від $\boldsymbol{n}$, а й від коефіцієнта $\boldsymbol{t_{np}}$, який, у свою чергу, залежить від $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{p}$. Тому ці криві розраховані для p=0,95 і незмінних значеннях $\boldsymbol{t_{np}}$, що дорівнюють: $\boldsymbol{t_{1p}}$=4 для одноразового вимірювання і $\boldsymbol{t_{np}}$=2 для багаторазового вимірювання. Разом з тим, прямування кривих до насичення досить чітко вказує на відмінності в характеристиках цих залежностей і приблизно на ту кількісну область вимірювань (даних, спостережень), після яких вже не відбувається суттєвого покращення точності (зменшення похибки) виміряного значення ФВ. Наприклад, якщо $\theta=S_n$, то після 10-12 вимірювань випадкова похибка зменшується у 3 рази і подальші вимірювання (набір даних) вже є практично недоцільні, оскільки ця крива залежності $\gamma(n)$ вже виходить на насичення.

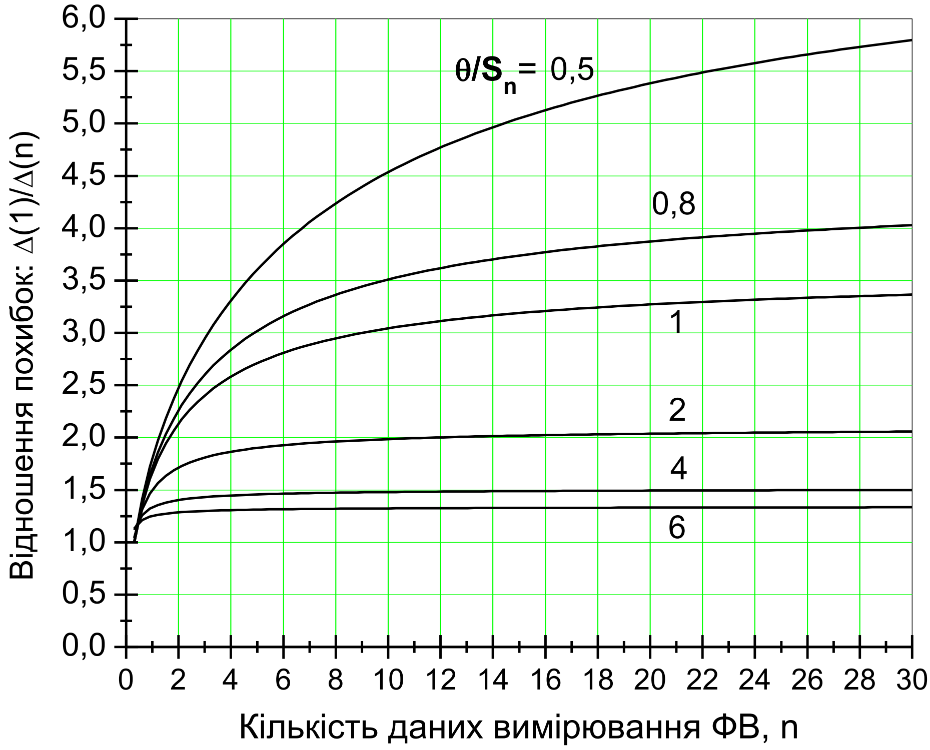


Рис. 3. Залежність відношення сумарної похибки (випадкової Δ + систематичної θ) одноразового вимірювання фізичної величини до такої ж похибки $\boldsymbol{n}$-разового від кількості вимірювань $\boldsymbol{n}$

Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Основи метрології та стандартизації

(цикл лекційних і практичних занять)

Частина 2. Основи стандартизації.
Теми лекційних занять.

Тема 1. Теоретичні основи стандартизації

1.1. Державна система стандартизації
1.2. Основні терміни та їх визначення з стандартизації
1.3. Мета стандартизації та її основні принципи

1.1. Державна система стандартизації

Весь історичний розвиток людства супроводжується принципами стандартизації. Необхідність спільного співіснування в суспільстві привела до узгодження норм поведінки, обрядів, традицій, появи мови, одиниць вимірювання та ін.

Жодне суспільство не може існувати без технічного законодавства та нормативних документів, які регламентують правила, процеси, методи виготовлення та контролю продукції, а також гарантують безпеку життя, здоров'я людей та навколишнього середовища. Стандартизація якраз і є тією діяльністю, яка виконує ці функції.

Запровадження і дотримання єдиних і обов'язкових норм, правил і вимог в умовах багатогалузевого народного господарства є складним завданням, розв'язання якого вимагає системного підходу. Для цього створена Державна система стандартизації (ДСС), основні положення якої викладені в ДСТУ 1.0-93 "Державна система стандартизації України. Основні положення".

ДСС – це система правил і положень, що визначають порядок проведення робіт із стандартизації в Україні в усіх галузях народного господарства і на всіх рівнях влади. Ці правила і положення є в комплексі державних стандартів, умовно названому ДСТУ 1.

Згідно з Законом України "Про стандартизацію" суб'єктами стандартизації є:

- центральний орган виконавчої влади;
- рада;
- технічні комітети.

1.2. Основні терміни та їх визначення з стандартизації

Стандартизація – діяльність, яка полягає в установленні положень для загального і багаторазового застосування щодо наявних чи можливих завдань з метою досягнення оптимального ступеня упорядкування у певній сфері, результатом якої є підвищення ступеня відповідності продукції, процесів та послуг їх функціональному призначенню, усуненню бар’єрів у торгівлі та сприянню науково-технічному співробітництву.

Міжнародна стандартизація – стандартизація, що проводиться на міжнародному рівні та участь у якій відкрита для відповідних органів усіх країн.

Регіональна стандартизація – стандартизація, що проводиться на регіональному рівні та участь у якій відкрита для відповідних органів країн повного географічного та економічного простору.

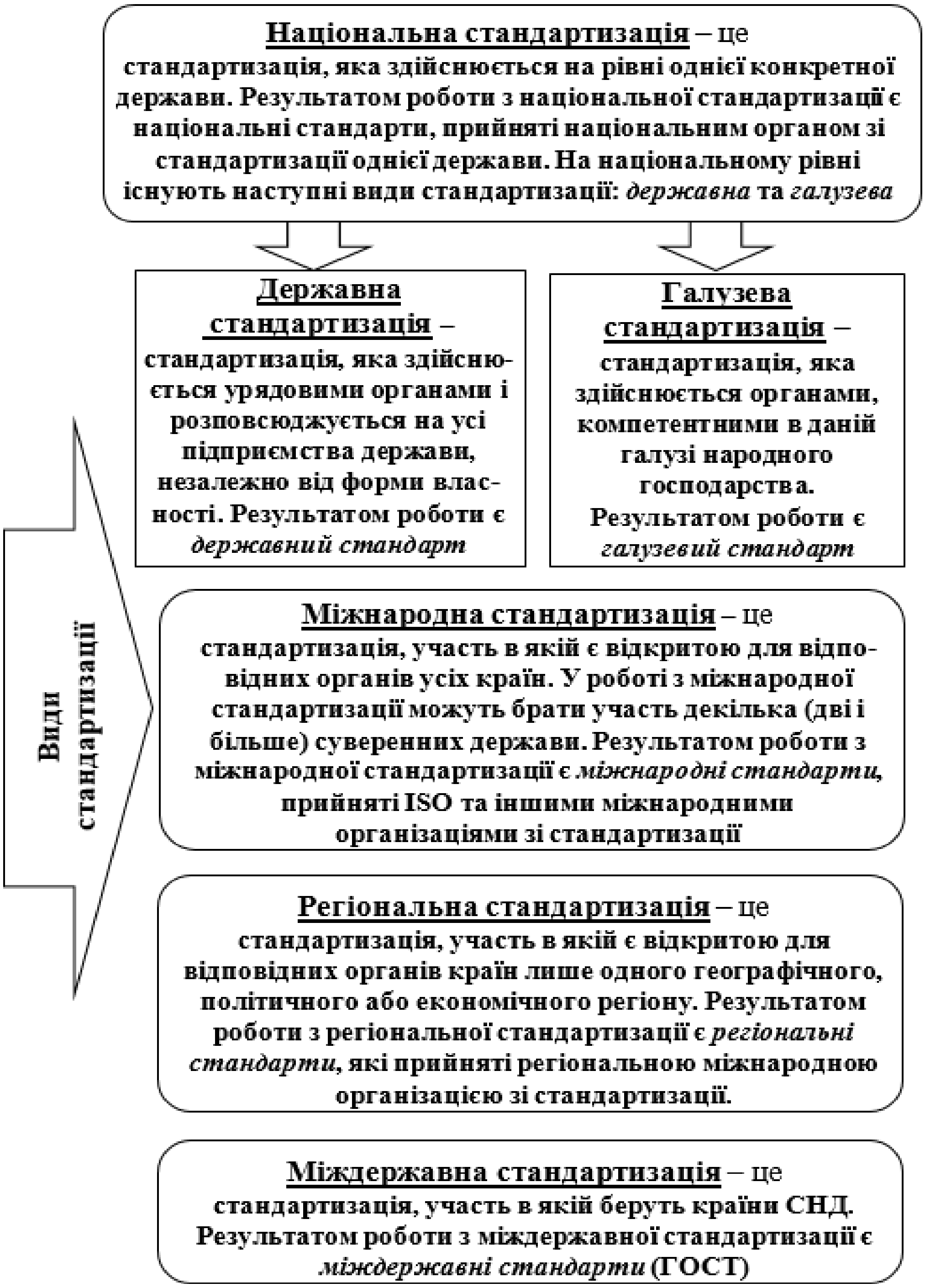


Рис. 1.1. Основні види стандартизації.

Національна стандартизація – стандартизація, що проводиться на рівні однієї країни.

Орган стандартизації – орган, що займається стандартизацією, визнаний на національному, регіональному чи міжнародному рівні, основними функціями якого є розроблення, схвалення чи затвердження стандартів.

Об'єкт стандартизації – предмет (продукція, процес, послуга), який підлягає стандартизації і для якого розробляються ті чи інші вимоги, характеристики, параметри, правила та ін. Стандартизація може стосуватись об'єкта взагалі, або його окремих складових. Причому названий термін однаково стосується будь-якого обладнання, матеріалу, компонента або системи, а також правила, процедури, функції, методу чи діяльності.

Стандарт – документ, що встановлює для загального і багаторазового застосування правила, загальні принципи або характеристики, які стосуються діяльності чи її результатів, з метою досягнення оптимального ступеня упорядкованості у певній галузі, розроблений в установленому порядку на основі консенсусу.

Нормативний документ (НД) - документ, що встановлює правила, загальні принципи чи характеристики різних видів діяльності або їх результатів. Цей термін охоплює такі поняття як "стандарт", "кодекс сталої практики" та "технічні умови".

Консенсус – загальна згода, яка характеризується відсутністю серйозних заперечень щодо істотних питань у більшості заінтересованих сторін і досягається в результаті процедури, спрямованої на врахування думок всіх сторін та зближення різних точок зору.

Міжнародний та регіональний стандарти – стандарти, прийняті відповідно міжнародним та регіональним органом стандартизації.

Національні стандарти – державні стандарти України, прийняті центральним органом виконавчої влади у сфері стандартизації та доступні для широкого кола користувачів.

Кодекс сталої практики (звіт правил) – документ, що містить практичні правила чи процедури проектування, виготовлення, монтажу, технічного обслуговування, експлуатації обладнання, конструкцій чи виробів. Кодекс сталої практики може бути стандартом, частиною стандарту або окремим документом.

Технічні умови – документ, що встановлює технічні вимоги, яким повинні відповідати продукція, процеси чи послуги. Технічні умови можуть бути стандартом, частиною стандарту або окремим документом.

Технічний регламент – нормативно–правовий акт, прийнятий органом державної влади, що встановлює технічні вимоги до продукції, процесів чи послуг безпосередньо або через посилання на стандарти чи відтворює їх зміст.

Технічна документація на продукцію - сукупність документів, яка необхідна і достатня для безпосереднього використання на кожній стадії життєвого циклу продукції. До неї належить конструкторська, технічна та проектна документація. Технічну документацію поділяють на вихідну, робочу та інформаційну.

Конструкторська документація – сукупність конструкторських документів, які залежно від їх призначення містять дані, потрібні для розробки, виготовлення, контролю, приймання, постачання, експлуатації та ремонту виробу. Порядок розробки, оформлення та передачі конструкторської документації в різні інстанції встановлено комплексом стандартів Єдиної системи конструкторської документації.

Технологічна документація – сукупність технологічних документів, які визначають технологічний процес. Порядок розробки, оформлення та обертання технологічної документації на вироби базується на конструкторській документації, обумовленій комплексом стандартів Єдиної системи технологічної документації (ЄСТД).

Технологічність продукції – властивість продукції, що характеризує її якість та пристосування до виробництва у потрібному обсязі. Показниками технологічності продукції можуть бути, наприклад, енергоємність, матеріалоємність, тривалість виробничого циклу, собівартість, трудомісткість.

Науково-технічна документація – сукупність конкретних технічних вимог (правил), законодавчих положень про захист життя і здоров’я людини, охорону навколишнього середовища, забезпечення прав споживача, а також встановлення порядку нагляду за виконанням цих вимог. Останні повинні враховувати соціально-економічні умови і досягнутий рівень науково-технічного розвитку виробництва.

Безпека – відсутність неприпустимого ризику, пов’язаного з можливістю завдання будь-якої шкоди.

Сумісність – придатність продукції, процесів, послуг до спільного використання, що не викликає небажаних взаємодій, за заданих умов для виконання встановлених вимог.

Охорона навколишнього природного середовища – комплекс міжнародних, державних, регіональних заходів (адміністративних, господарських, політичних та громадських) щодо підтримування параметрів функціонування природних систем (фізичних, хімічних і біологічних) в межах, що забезпечують здоров'я та добробут людини.

1.3. Мета стандартизації та її основні принципи

Основною метою стандартизації в Україні є:

- реалізація технічної політики в сфері стандартизації, метрології і сертифікації;
- захист інтересів споживачів і держави в питаннях безпеки продукції, процесів, робіт, послуг для життя, здоров'я і майна громадян, охорони навколишнього природного середовища;
- забезпечення якості продукції відповідно до сучасних досягнень науки і техніки, потреб населення і народного господарства;
- забезпечення уніфікації сумісності та взаємозамінності продукції, її надійності при експлуатації (або споживанні);
- раціональне використання усіх видів ресурсів, поліпшення техніко-економічних показників виробництва;
- безпека народно-господарських об'єктів і попередження аварій і техногенних катастроф з урахуванням ступеня ризику виникнення природних катаклізмів і ін.
- створення нормативної бази функціонування систем стандартизації і сертифікації продукції, проведення державної політики в сфері ресурсозбереження (у тому числі впровадження безпечних технологій), розробка і виконання державних і міждержавних соціально-економічних програм;
- усунення технічних і термінологічних перешкод для створення конкурентоздатності продукції і виходу її на світовий ринок;
- впровадження та застосування сучасних виробничих та інформаційних технологій;
- сприяння забезпеченню обороноздатності і мобілізаційної готовності держави.

Основними принципами стандартизації в Україні є:

- врахування рівня розвитку науки і техніки, екологічних вимог, економічної доцільності й ефективності технологічних процесів для виробника, користі і безпеки для споживача і держави в цілому;

- гармонізація нормативних документів з стандартизації з міжнародними, регіональними і, при необхідності, з національними стандартами інших країн;
- забезпечення відповідності вимог нормативних документів актам законодавства;
- участь у розробці нормативних документів усіх зацікавлених сторін (розробник, виконавець, орган державної виконавчої влади, інші);
- взаємозв'язок і погодженість документації всіх рівнів);
- придатність нормативних документів для сертифікації продукції;
- відкритість інформації про діючі стандарти,про програми робіт з стандартизації з урахуванням вимог діючого законодавства;
- відповідність комплексів (систем) стандартів складу і взаємозв’язкам об’єктів стандартизації визначеної її області, раціональність, однозначність, несуперечність вимог стандартів, можливість їхньої перевірки;
- застосування інформаційних систем і технологій в галузі стандартизації.

Серед методичних принципів стандартизації слід виділити: плановість, перспективність, оптимальність, динамічність, системність, обов’язковість:

- принцип плановості забезпечується шляхом складання перспективних і поточних планів з розробки, розвитку і проведення робіт зі стандартизації;
- принцип перспективності забезпечується розробкою і випуском випереджаючих стандартів, в яких запроваджуються підвищені норми та вимоги до об’єктів стандартизації відносно досягнутого рівня, тобто ті норми, які будуть оптимальними в майбутньому;
- принцип оптимальності передбачає вироблення і прийняття таких норм, правил та вимог, які забезпечують народному господарству оптимальні витрати ресурсів: сировинних, матеріальних, енергетичних, економічних, соціальних;
- принцип динамічності передбачає періодичну перевірку стандартів та іншої нормативної документації, внесення до них змін, а також своєчасний перегляд і відміну стандартів;
- принцип системності забезпечується розробкою документів на об’єкти стандартизації, що належать до певної галузі, які встанов-

люють взаємно погоджені вимоги до всіх об’єктів на основі загальної мети;
- принцип обов’язковості визначає законодавчий характер стандартизації. Стандарти мають обов’язковий характер.

На основі принципів стандартизації сформована система її методів. Стандартизація в своїй діяльності використовує різноманітні методи, найбільш значними з яких є уніфікація, агрегатування, типізація, які забезпечують взаємозамінність і спеціалізацію на різних рівнях.

Методи стандартизації.

Уніфікація передбачає приведення об’єктів до одноманітності на основі встановлення раціонального числа їх різновидів. Уніфікація спрямована на зниження кількості різновидів виробів за рахунок їх комбінування та змін конструкцій. Уніфікація дає змогу знизити вартість виробництва нових виробів, підвищити серійність та рівень автоматизації виробничих процесів, знизити важкоємність виготовлення, організувати спеціалізовані виробництва.

Агрегатування – утворення виробів шляхом компонування їх обмеженої кількості стандартних і уніфікованих деталей, вузлів і агрегатів, що мають геометричну та функціональну взаємозамінність. Агрегатування забезпечує поширення сфери застосування машин шляхом заміни їх окремих вузлів, блоків, можливістю компонувати машини, прилади, устаткування різного функціонального призначення з окремих вузлів.

Типізація, або метод “базових конструкцій” – розробка типових конструкцій, технологічних, організаційних та інших рішень на основі загальних технічних характеристик для деяких виробів, процесів, методів управління.

Взаємозамінність – це придатність одного виробу, процесу, послуги для використання замість іншого виробу, процесу, послуги з метою виконання одних і тих же вимог.

Спеціалізація – це організаційно-технічні заходи, спрямовані на створення виробництв чи підприємств з реалізації однотипної продукції в масовому масштабі з використанням оптимальної технології при мінімальній собівартості та найкращій якості.

Питання до самоконтролю

1. Що таке Державна система стандартизації?
2. Які існують основоположні документи Державної системи стандартизації України?
3. Мета стандартизації.
4. Основні принципи стандартизації.
5. Які методи стандартизації існують?

Література: [5, с. 25;   8, с. 52 - 61]

Список літератури

1 Кудряшов Л.С. Стандартизация, метрология, сертификация в пищевой промышленности [Текст]/ Л.С. Кудряшов, Г.В. Гуринович, Т.В. Рензяева. – М.: ДеЛи принт, 2002. – 303 с.
2 Кириченко Л.С, Мережко Н.В. Основи стандартизації, метрології та управління якістю. [Текст]: Навч. посібник. – К.: КНТЕУ, 2001. – 446 с.
3 Кириченко Л.С. Стандартизація і сертифікація товарів та послуг. [Текст]: підручник / Л.С. Кириченко, А.А. Самойленко. – Х.: Вид-во "Ранок", 2008. – 240 с.
4 Клименко Л.П., Метрологія, стандартизація та управління якістю. [Текст]: навч. посіб. / Л.П. Клименко, Л.В. Пізінцалі, Н.І. Александровська, В.Д. Євдокимов. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім.Петра Могили, 2011 – 243 с.
5 Салухіна Н.Г. Стандартизація та сертифікація товарів і послуг. [Текст]/ Н.Г. Салухіна, О. М. Язвінська. – К.: Центр учб. літератури, 2010. – 336 с.
6 Студеняк І.Т. Основи стандартизації та сертифікації товарів та послуг. [Текст]: опор. Конспект / І.Т. Студеняк, Ю.М. Ажнюк, І.М. Чучка. – К.: Кондор, 2007. – 115 с.
7 Тарасова В.В. Метрологія, стандартизація та сертифікація [Текст]: підручник / В.В Тарасова. А.С. Маліновский, М.Ф. Рибак. Державн. агроеколог. ун-т. – К.: Центр навч. л-ри, 2006. – 264 с.
8 Цюцюра С.В. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація [Текст]: навч. посібник / С.В. Цюцюра, В.Д. Цюцюра. – 3-те вид., стер. – К.: Знання, 2006. – 242 с. - (Вища освіта XXI століття).

Тема 2. Організаційні основи стандартизації

2.1. Категорії, види стандартів та об'єкти стандартизації стандартів
2.2. Стадії розроблення стандартів
2.3. Державний нагляд і відомчий контроль за впровадженням та дотриманням стандартів
2.4. Органи і служби стандартизації

2.1. Категорії, види стандартів та об'єкти стандартизації стандартів

Національна система стандартизації України вміщує різноманітні **стандарти**, в яких встановлені вимоги до конкретних об'єктів стандартизації. Залежно від об'єкта стандартизації, складу, змісту, сфери діяльності та призначення вони **поділяються на такі види:**

- державні стандарти України – ДСТУ;
- галузеві стандарти України – ГСТУ;
- стандарти науково-технічних та інженерних товариств і спілок України – СТТУ;
- технічні умови України – ТУУ;
- стандарти підприємств – СТП.

Державні стандарти України (ДСТУ) – це нормативні документи, які діють на території України і використовуються усіма підприємствами незалежно від форми власності та підпорядкування, громадянами-суб'єктами підприємницької діяльності, міністерствами (відомствами), органами державної виконавчої влади, на діяльність яких поширюється дія стандартів. ДСТУ для будь-якої держави світу є національним стандартом України, який затверджується Держспоживстандартом України. ДСТУ мають міжгалузеве використання і запроваджуються переважно на продукцію масового чи серійного виробництва, на норми, правила, вимоги, терміни та поняття, позначення й інші об'єкти, регламентування яких потрібне для забезпечення оптимальної якості продукції, а також для єдності та взаємозв'язку різних галузей науки, техніки, виробництва та культури.

До державних стандартів прирівнюються державні будівельні норми і правила, а також державні класифікатори техніко-економічної та соціальної інформації. Республіканські стандарти колишньої УРСР застосовуються як державні стандарти України до часу їх заміни або скасування.

Державні стандарти України містять обов'язкові та рекомендовані вимоги.

До обов'язкових належать:

- вимоги, що забезпечують безпечність продукції для життя, здоров'я, майна громадян, її сумісність і взаємозамінність, охорону навколишнього природного середовища та вимоги методів випробувань цих показників;
- вимоги техніки безпеки та гігієни праці з посиланням на відповідні норми і правила;
- метрологічні норми, правила, вимоги та положення, що забезпечують достовірність і єдність вимірювань;
- положення, що забезпечують технічну єдність під час розроблення, виготовлення, експлуатації (застосування) продукції.

Обов'язкові вимоги ДСТУ підлягають безумовному виконанню органами державної виконавчої влади, всіма підприємствами та громадянами-суб'єктами підприємницької діяльності, на діяльність яких поширюється дія стандартів.

Рекомендовані вимоги ДСТУ обов'язкові до виконання, якщо:

- це передбачено чинними актами законодавства;
- ці вимоги включено до договорів на розроблення, виготовлення та поставку продукції;
- виробником (постачальником) продукції документально заявлено про відповідність продукції цим стандартам.

Галузеві стандарти України (ГСТУ) розробляють на продукцію, послуги в разі відсутності ДСТУ, або за потребою встановлення вимог, які перевищують або доповнюють вимоги державних стандартів. Вимоги ГСТУ не повинні суперечити обов'язковим вимогам ДСТУ. ГСТУ є обов'язковими для всіх підприємств і організацій даної галузі, а також для підприємств і організацій інших галузей (замовників), які використовують чи застосовують продукцію цієї галузі.

Стандарти науково-технічних та інженерних товариств (спілок) України (СТТУ) розробляють за потребою розповсюдження та впровадження систематизованих, узагальнених результатів фундаментальних і прикладних досліджень, одержаних у певних галузях знань та сферах професійних інтересів. Вимоги СТТУ не повинні суперечити обов'язковим вимогам ДСТУ та ГСТУ.

Підприємства застосовують СТТУ добровільно, а окремі громадяни – суб'єкти підприємницької діяльності, якщо вважають доцільним використовувати нові передові засоби, технології, методи та інші вимоги, які містяться в цих стандартах. Використання СТТУ для виготовлення продукції можливе лише за згодою замовника або споживача цієї продукції, що закріплено договором або іншою угодою.

Технічні умови (ТУ) – нормативний документ, який розробляють для встановлення вимог, що регулюють відносини між постачальником (розробником, виробником) і споживачем (замовником) продукції, для якої відсутні державні чи галузеві стандарти (або за потребою конкретизації вимог зазначених документів). ТУ затверджують на продукцію, що перебуває на стадії освоєння і виробляється невеликими партіями. ТУ розробляються на один чи кілька конкретних виробів, матеріалів, речовин, послугу чи групу послуг. Запроваджують ТУ в дію на короткі строки, термін їх дії обмежений або встановлюється за погодженням із замовником. Підприємства використовують ТУ незалежно від форми власності та підпорядкованості, громадяни – суб'єкти господарювання – за договірними зобов'язаннями або ліцензіями на право виготовлення та реалізацію продукції (надання послуг).

Стандарти підприємств (СТП) розробляються на продукцію (процес, роботу, послугу), яку виробляють і застосовують (надають) лише на конкретному підприємстві. СТП не повинні суперечити обов'язковим вимогам ДСТУ та ГСТУ.

Об'єктами СТП є складові продукції, технологічне оснащення та інструмент; технологічні процеси; послуги, які надають на певному підприємстві; процеси організації та управління виробництвом.

СТП – основний організаційно-методичний документ у діючих на підприємствах системах управління якістю продукції. Як СТП можуть використовуватися міжнародні, регіональні та національні стандарти інших країн на основі міжнародних угод про співробітництво широкого кола користувачів.

Кодекси сталої практики розробляють на устаткування, конструкції, технічні системи, які відрізняються конструктивним виконанням. В кодексах сталої практики зазначають правила та методи розв'язування завдань щодо координації робіт зі стандартизації та метрології, а також реалізації певних вимог технічних регламентів чи стандартів.

Технічний регламент – це новий вид нормативного документа, який створено з метою розмежування законодавчо регульованої та нерегульованої сфери використання нормативних документів. В одночасно прийнятому Законі України "Про підтвердження відповідності" від 17.05.2001 № 2406-III такий документ названо технічним регламентом з підтвердження відповідності і йому надано статус урядового нормативно-правового акта. Тут встановлено, що цей ТР має містити: опис видів продукції, що підлягає обов'язковому підтвердженню відповідності; вимоги до такої продукції, які мають убезпечувати людей, тварин, рослини, майно і довкілля; процедури підтвердження відповідності таким вимогам. Отже, технічний регламент – це закон України або нормативно-правовий акт, прийнятий Кабінетом Міністрів України, у якому визначено характеристики продукції або пов'язані з нею процеси чи способи виробництва, а також вимоги до послуг, включаючи відповідні положення, дотримання яких є обов'язковим. Він може також містити вимоги до термінології, позначок, пакування, маркування чи етикетування, які застосовуються до певної продукції, процесу чи способу виробництва.

Залежно від специфіки об'єкта стандартизації, призначення, складу та змісту вимог, які встановлені до нього, для **різних категорій** нормативних документів зі стандартизації розробляють стандарти таких видів:

- основоположні;
- на продукцію, послуги;
- на процеси;
- на методи контролю (випробувань, вимірювань, аналізу).

Основоположні стандарти встановлюють організаційно-методичні та загально-технічні положення для визначеної галузі стандартизації, а також терміни та визначення, загально-технічні вимоги, норми та правила, що забезпечують упорядкованість, сумісність, взаємозв'язок та взаємну узгодженість різних видів технічної та виробничої діяльності під час розроблення, виготовлення, транспортування та утилізації продукції, безпечність продукції, охорону навколишнього середовища.

Стандарти на продукцію, послуги встановлюють вимоги до груп однорідної або певної продукції, послуги, які забезпечують її відповідність своєму призначенню. У них наводяться технічні вимоги до якості продукції (послуг) при її виготовленні, постачанні та використанні; визначаються правила приймання, способи контролю та випробування, вимоги до пакування, маркування, транспортування, зберігання продукції або якості наданих послуг.

Стандарти на процеси встановлюють основні вимоги до послідовності та методів (засобів, режимів, норм) виконання різних робіт (операцій) у процесах, що використовуються у різних видах діяльності та які забезпечують відповідність процесу його призначення.

Стандарти на методи контролю (випробувань, вимірювань, аналізу) регламентують послідовність (операцій), способи (правила, режими, норми) і технічні засоби їх виконання для різних видів та об'єктів контролю продукції, процесів, послуг. У них наводяться уніфіковані методи контролю якості, що засновані на досягненнях сучасної науки і техніки.

<u>Об'єкти стандартизації.</u>

Об'єктами державної стандартизації є:

а) об'єкти організаційно-методичні та загально-технічні, в тому числі

- організація проведення робіт із стандартизації;
- термінологічні системи різних галузей знань та діяльності;
- класифікація і кодування техніко-економічної та соціальної інформації;
- системи та методи забезпечення якості та контролю якості (вимірювань, аналізу), методи випробувань;
- метрологічне забезпечення (метрологічні норми, правила, вимоги, організація робіт);
- вимоги техніки безпеки, гігієни праці, ергономіки, технічної естетики;
- системи технічної та іншої документації загального використання, єдина технічна мова;
- системи величин та одиниць;
- достовірні довідкові дані про властивості речовин і матеріалів;
- типорозмірні ряди і типові конструкції виробів загальномашинобудівного застосування (підшипники, елементи кріплення, інструменти, деталі тощо);
- інформаційні технології, включаючи програмні та технічні засоби інформаційних систем загального призначення;

б) продукція міжгалузевого призначення та широкого вжитку;

в) складові елементи народногосподарських об'єктів державного значення, в тому числі банківсько-фінансова система, транспорт, зв'язок,

енергосистема, охорона навколишнього середовища, вимоги до вживаних природних ресурсів, оборона тощо;
г) об'єкти державних соціальних економічних та державних науково-технічних програм.

Об'єктами стандартизації та технічного регулювання є продукція, процеси та послуги, матеріали та обладнання, правила, процедури, методи чи діяльність, персонал і органи, а також вимоги до термінології, позначення, фасування, пакування, маркування, етикетування, системи управління якістю і системи екологічного управління.

2.2. Стадії розроблення стандартів

Розробляють державні стандарти відповідно до основоположного стандарту ДСТУ 1.2-93, який установлює вимоги до порядку розробки, узгодження, затвердження, державної реєстрації, видання, впровадження, перевірки, перегляду, зміни чи скасування державних стандартів України.

Розробку державних стандартів здійснюють технічні комітети по стандартизації (ТК), міністерства (відомства), головні (базові) організації по стандартизації чи організації (підприємства), які мають у відповідній області необхідний науково-технічний потенціал. Цю розробку проводять відповідно до плану державної стандартизації з врахуванням норм діючого законодавства України, вимог стандартів державної системи стандартизації та документів міжнародних та регіональних організацій по стандартизації, а також з використанням результатів науково-дослідних, дослідно-конструкторських, проектних робіт і патентних досліджень.

За побудовою, змістом, оформленням стандарти повинні відповідати ДСТУ 1.5-93 «Державна система стандартизації України. Загальні вимоги до побудови, викладу, оформлення та змісту стандартів».

Згідно Закону України "Про стандартизацію" правила і порядок розробки, схвалення та прийняття національних стандартів, що установлюються центральним органом виконавчої влади в сфері стандартизації, повинні передбачати:

- критерії врахування чи відхилення пропозицій щодо розробки національних стандартів;
- критерії визначення розробників національних стандартів;
- визначення пріоритетів щодо застосування міжнародних (регіональних) стандартів;

- механізм апеляції;
- інформування зацікавлених сторін про стан робіт у сфері національної стандартизації.
- ознайомлення за рівних умов з проектами національних стандартів усіх зацікавлених сторін.

Термін розгляду проекту національного стандарту і надання відзивів не може бути меншим, ніж 60 днів із дня його опублікування.

Стадії розроблення стандартів наступні:
- організація розробки стандарту;
- розробка проекту стандарту (першої редакції);
- розробка проекту стандарту (остаточної редакції);
- затвердження та державна реєстрація стандарту;
- видання стандарту.

При організації розробки стандарту ТК, міністерства (відомства) чи за їх дорученням головні (базові) організації по стандартизації розглядають обґрунтовані заявки на розробку стандарту та вносять пропозиції до плану державної стандартизації в Держспоживстандарт України.

Перед розробкою першої редакції стандарту ТК міністерства (відомства) чи за їх дорученням головні (базові) організації по стандартизації укладають договір на розробку стандарту, а також технічне завдання щодо цієї процедури, до якого додають перелік організацій, котрим необхідно розіслати проект стандарту на відзив, та перелік організацій, з котрими необхідно погодити проект стандарту.

До переліку організацій, з котрими необхідно *погодити* проект стандарту, включають:
- замовника (якщо ним не є Держспоживстандарт України), чи основного споживача стандарту;
- ТК, який працює за напрямком стандарту, який розробляється (при відсутності такого ТК - головну (базову) організацію з стандартизації міністерства чи відомства);
- науково-дослідну організацію Держспоживстандарту України;
- органи державного нагляду.

Після узгодження проекту технічне завдання на розробку стандарту затверджує голова ТК або керівник організації-розробника.

Відповідно до договору та технічного завдання ТК та інші уповноважені організації готують 1-шу редакцію проекту стандарту і розсилають її на відзив організаціям відповідно до переліку.

На наступній стадії ТК чи організація-розробник обробляє отримані відзиви та складає зведення. На основі зауважень та пропозицій, що містяться у зведенні, проект стандарту дороблюється та уточнюється пояснювальна записка до нього. Доороблена редакція проекту стандарту разом з пояснювальною запискою відсилається організаціям для погодження в термін, не перевищуючий одного місяця з моменту одержання стандарту. Після погодження ТК відповідне міністерство (відомство) чи організація-розробник представляє на затвердження в Держспоживстандарт остаточну редакцію проекту стандарту. Разом з проектом стандарту повинна бути представлена така документація:

- пояснювальна записка щодо остаточної редакції проекту стандарту;
- копія технічного завдання на розробку стандарту;
- зведення відзивів;
- оригінали документів, підтверджуючих узгодження проекту стандарту;
- протокол засідання ТК або науково-технічної ради організації-розробника.

Держспоживстандарт України організовує державну експертизу проекту стандарту, до якої можуть бути залучені науково-дослідні організації Держспоживстандарту України, ТК, відомі вчені та спеціалісти визначеної галузі. Після проведення експертизи Держспоживстандарт України розглядає проект стандарту та приймає рішення про його затвердження чи повернення проекту на доопрацювання. У випадку затвердження проекту стандарту видається наказ Держспоживстандарту України. Як правило, державні стандарти затверджують без обмеження терміну їх дії.

Під час схвалення чи прийняття національного стандарту центральний орган виконавчої влади в сфері стандартизації визначає дату надання стандарту чинності з урахуванням часу на виконання підготовчих мір для його впровадження.

Після затвердження стандарту Держспоживстандарт України проводить його реєстрацію, а перелік прийнятих протягом місяця стандартів публікується в наступному місяці в офіційному виданні центрального органу виконавчої влади в сфері стандартизації.

Стандарт вважається впровадженим, якщо установлені в ньому вимоги дотримуються відповідно до установленої області.

Перевірку чинних національних стандартів на відповідність законодавству, інтересам держави, потребам споживачів, рівню розвитку науки і техніки, вимогам міжнародних і регіональних стандартів здійснюють відповідні технічні комітети чи інші уповноважені суб'єкти стандартизації. Стандарти на продукцію перевіряються не рідше одного разу на п'ять років. За результатами перевірки відповідні технічні комітети чи інші суб'єкти стандартизації дають пропозиції про перегляд, зміни чи скасування стандартів до центрального органу виконавчої влади у сфері стандартизації.

Перегляд, в результаті якого розробляється новий національний стандарт чи вносяться зміни в діючий стандарт, здійснюється у порядку, установленому для розробки стандартів.

Припинення дії національного стандарту здійснює центральний орган виконавчої влади в сфері стандартизації у випадку припинення випуску продукції, регламентованої цим стандартом, а також у випадку розроблення, схвалення чи прийняття замість нього іншого стандарту за поданням відповідного технічного комітету стандартизації чи іншого суб'єкта стандартизації.

Інформація про зміни, текст змін національних стандартів публікується в офіційному виданні центрального органу виконавчої влади у сфері стандартизації не пізніше, чим за 90 днів до терміну надання їм чинності.

Міжнародні (регіональні) стандарти впроваджуються як національні стандарти за умови їх прийняття центральним органом виконавчої влади в сфері стандартизації.

Прийняття міжнародного (регіонального) стандарту – це опублікування національного стандарту, що ґрунтується на відповідному міжнародному (регіональному) стандарті, чи підтвердження того, що міжнародний (регіональний) стандарт має той же самий статус, що і національний стандарт, із зазначенням будь-яких відхилень від міжнародного (регіонального) стандарту.

Порядок застосування стандартів.

Стандарти застосовуються на добровільних засадах, якщо інше не установлено законодавством.

Стандарти застосовуються безпосередньо чи шляхом посилання на них в інших документах.

Застосування стандартів чи їх окремих положень є обов'язковим:

- для всіх суб'єктів господарювання, якщо це передбачено в технічних регламентах чи інших нормативно-правових актах;
- для учасників угоди (контракту) про розроблення, виготовлення чи постачання продукції, якщо в ній (ньому) є посилання на певні стандарти;
- для виробника чи постачальника продукції, якщо він склав декларацію про відповідність продукції певним стандартам чи застосував позначення цих стандартів у її маркуванні;
- для виробника чи постачальника, якщо його продукція сертифікована щодо дотримання вимог стандартів.

Міжнародні (регіональні) стандарти і стандарти інших країн, якщо їхні вимоги не суперечать законодавству України, можуть бути застосовані в Україні в установленому порядку шляхом посилання на них у національних та інших стандартах. Стандарти, застосовані під час виготовлення продукції, повинні зберігатися у виробника протягом 10 років після випуску останнього виробу даного виду продукції.

2.3. Державний нагляд і відомчий контроль за впровадженням та дотриманням стандартів

Основним завданням Державного нагляду за дотриманням стандартів, норм і правил є захист прав споживачів, інтересів держави та підприємств, сприяння попередженню порушень законів України та положень нормативних документів, які містять обов'язкові вимоги до об'єктів стандартизації, особливо до якості продукції, її безпеки, охорони праці та навколишнього середовища.

Відповідальність юридичних осіб (підприємств, об'єднань, асоціацій та інших організацій), посадових осіб та інших робітників за недотримання стандартів установлює діюче законодавство України.
Державний нагляд і відомчий контроль за впровадженням та дотриманням стандартів і технічних умов, за виконанням міністерствами та відомствами передбачених в планах заходів для своєчасного забезпечення підготовки виробництва до випуску продукції за новими стандартами в установлений термін, за виробництвом, станом та застосуванням мір і вимірювальних приладів, їх ремонтом, а також за роботою відомчих служб стандартизації та метрологічних служб здійснює Держспоживстандарт України, його територіальні органи – центри

стандартизації, метрології та сертифікації, а також уповноважені на це органи відповідно до діючого законодавства.

Цей нагляд і контроль проводиться на підприємствах, у виробничих відділах, науково-виробничих відділах, науково-дослідницьких, проектно-конструкторських організаціях. В системі Мінагрополітики України уповноваженими органами державного нагляду є:

- на сільськогосподарську продукцію – Державна інспекція по заготівлях та якості;
- у справах машин та обладнання – Державна інспекція по нагляду за технічним станом машин та обладнання;
- у справах хлібопродуктів - Державна хлібна інспекція;
- у справах насінництва - Українська державна насіннєва інспекція;
- у справах карантину рослин – Державна інспекція по карантину рослин по Україні;
- у справах алкогольних напоїв – Українська державна інспекція по якості алкогольних напоїв.

Державний нагляд охоплює всі стадії створення та споживання продукції – розробку (проектування), підготовку виробництва, виготовлення, транспортування, зберігання, ремонт та експлуатацію (вживання) продукції та поширюється на всі види продукції.

Головне завдання Державного нагляду – забезпечення своєчасного впровадження та дотримання стандартів та технічних умов, правил вимірювання, єдності вимірювань в країні, аналіз науково-технічного рівня стандартів та технічних умов, засобів вимірювань.

Державний нагляд повинен не тільки виявляти будь-які порушення, а також надавати допомогу в усуненні цих порушень. Він здійснюється органами Держспоживстандарту, центрами стандартизації та метрології, лабораторіями держнагляду.

Органи державного нагляду наділені всіма повноваженнями. На них покладено ряд функцій управлінського, організаційного та методичного характеру.

Функції органів Держнагляду:

- контроль за роботою служб стандартизації та метрології;
- методичне керівництво та координаційна діяльність інспекцій у справах якості в частині контролю за стандартами, засобами вимірювань;

- узагальнення результатів державного нагляду;
- проведення державних випробувань;
- проведення експертизи та реєстрації стандартів та технічних умов (ТУУ);
- участь в атестації продукції;
- проведення атестації головних організацій у справах державних випробувань найважливіших видів продукції.

Права органів Держнагляду:
- забороняти передачу замовникам та застосування конструкторської, технологічної та проектної документації, яка не відповідає вимогам стандартів та метрологічних правил;
- забороняти випуск, реалізацію, транспортування, зберігання та використання продукції з порушенням стандартів;
- давати розпорядження про використання економічних санкцій до підприємств, організацій та закладів при систематичному порушенні.

Державний нагляд здійснюється за щорічними планами, затвердженими Держспоживстандартом. Плани передбачають комплексну перевірку, тобто не тільки головного підприємства, але і підприємств, що виготовляють сировину, напівфабрикати, комплексні вироби.

2.4. Органи і служби стандартизації

У систему органів і служб стандартизації входять міжнародні (всесвітні та регіональні) і національні організації з стандартизації. Існує понад 400 організацій, які займаються питаннями стандартизації. Найбільші з них – Міжнародна організація по стандартизації (МОС) і Міжнародна електротехнічна комісія (МЕК). Вони самостійні і незалежні одна від одної.

МОС створена з *метою* сприяння розвитку стандартизації у світовому масштабі для полегшення світового товарообміну і співробітництва в галузі інтелектуальної, наукової, технічної та економічної діяльності. Ця організація проводить роботи зі стандартизації в усіх галузях промисловості, економіки і техніки, за винятком електротехніки та електроніки.

Основне завдання МЕК – розробляти міжнародні стандарти в галузі електротехніки та електроніки, радіозв’язку і приладобудування та сприяння міжнародному співробітництву в цих галузях.

Регіональні організації зі стандартизації обмежуються діяльністю в межах групи країн певного регіону. Ці організації сприяють розробці регіональних стандартів для розв'язання завдань, які випливають із загальних інтеграційних економічних і технічних угод між країнами регіону. Найбільша в світі регіональна організація зі стандартизації – Європейський комітет з питань стандартизації – створена в рамках країн ЄС і Європейської асоціації вільної торгівлі. Європейський комітет з питань стандартизації розробляє єдині європейські стандарти для країн-учасниць з метою усунення технічних бар’єрів, пов’язаних з розходженням вимог у національних стандартах. Для країн СНД регіональною організацією є Міждержавна рада зі стандартизації.

До національних органів і служб стандартизації в Україні відносяться: Комітет з питань стандартизації, метрології і сертифікації при Кабінеті Міністрів України (Держстандарт), котрий здійснює загальне керівництво роботами зі стандартизації, затверджує і реєструє національні стандарти, організовує інформаційне забезпечення з питань стандартизації, метрології і сертифікації. Держстандарт має свої територіальні органи – центри стандартизації і метрології, які здійснюють функції і права Держстандарту у встановлених межах. Керівництво діяльністю зі стандартизації в галузі будівництва і будматеріалів здійснює Міністерство будівництва.

У міністерствах, відомствах і концернах галузей економіки роботи зі стандартизації проводять управління або відділи стандартизації. На підприємствах, в організаціях і установах роботи зі стандартизації виконують конструкторсько-технологічні або науково-дослідні відділи чи лабораторії, бюро, а також окремі фахівці.

Для розробки стандартів Держстандарт може формувати технічні Комітети (ТК), призначати головні і базові організації зі стандартизації. В Україні створені: Український НДІ стандартизації, сертифікації, інформатики, а також Центри: метрології (Харків) і технології «Система» (Львів), національна система сертифікації СЕПРО (УкрСЕПРО) – у Києві.

Питання до самоконтролю:

1. Назвіть стадії розроблення стандартів.
2. Які існують категорії стандартів?
3. Які існують об’єкти стандартизації?
4. Порядок застосування стандартів.
5. Вкажіть органи і служби стандартизації.

Література: [5, с. 28-32; 8, с.69-72; с.78-84; с.84-87]

Список літератури

1. Кудряшов Л.С. Стандартизация, метрология, сертификация в пищевой промышленности [Текст]/ Л.С. Кудряшов, Г.В. Гуринович, Т.В. Рензяева. – М.: ДеЛи принт, 2002. – 303 с.
2. Кириченко Л.С, Мережко Н.В. Основи стандартизації, метрології та управління якістю. [Текст]: Навч. посібник. – К.: КНТЕУ, 2001. – 446 с.
3. Кириченко Л.С. Стандартизація і сертифікація товарів та послуг. [Текст]: підручник / Л.С. Кириченко, А.А. Самойленко. – Х.: Вид-во "Ранок", 2008. – 240 с.
4. Клименко Л.П., Метрологія, стандартизація та управління якістю. [Текст]: навч. посіб. / Л.П. Клименко, Л.В. Пізінцалі, Н.І. Александровська, В.Д. Євдокимов. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім.Петра Могили, 2011 – 243 с.
5. Салухіна Н.Г. Стандартизація та сертифікація товарів і послуг. [Текст]/ Н.Г. Салухіна, О. М. Язвінська. – К.: Центр учб. літератури, 2010. – 336 с.
6. Студеняк І.Т. Основи стандартизації та сертифікації товарів та послуг. [Текст]: опор. Конспект / І.Т. Студеняк, Ю.М. Ажнюк, І.М. Чучка. – К.: Кондор, 2007. – 115 с.
7. Тарасова В.В. Метрологія, стандартизація та сертифікація [Текст]: підручник / В.В Тарасова. А.С. Маліновский, М.Ф. Рибак. Державн. агроеколог. ун-т. – К.: Центр навч. л-ри, 2006. – 264 с.
8. Цюцюра С.В. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація [Текст]: навч. посібник / С.В. Цюцюра, В.Д. Цюцюра. – 3-те вид., стер. – К.: Знання, 2006. – 242 с. - (Вища освіта XXI століття).

Жихарєв В.М., Павлишин Р.Є.

Частина 3

Теми практичних занять

Тема 1. Види похибок. Випадкові похибки та їх обчислення

Основні визначення та формули до теми.

Істинним значенням фізичної величини x_0 називається таке її значення, яке об'єктивно відображає в якісному і кількісному відношенні певну властивість об'єкту – це значення фізичної величини (ФВ), яке є вільним від похибок вимірювання.

Похибки можна класифікувати:

- за формою числового виразу: *абсолютні, відносні і зведені*;
- за закономірністю появи: *випадкові, систематичні (відомі, тобто поправки, і невідомі), грубі, промахи*;
- за можливістю реалізації: *граничні, імовірні, середньоквадратичні, середні, середньоарифметичні*;
- за умовами виникнення: *основні і додаткові*.

Абсолютна і відносна похибки i-го вимірювання (x_i) обчислюються, відповідно, за формулами: $\delta x_i = x_i - x_0$ і $\varepsilon_i = \dfrac{\delta x_i}{x_i}$,

похибка $\boldsymbol{\delta x}$ має розмірність вимірюваної величини x, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – безрозмірна величина або, при множенні на 100, виражається у відсотках (%). Оскільки істинне значення величини x_0 експериментатору невідоме, то він не може визначити і δx. Тому в його задачу входить знаходження верхньої межі абсолютного значення можливої похибки $\boldsymbol{\Delta x}$: $|\boldsymbol{\delta x}| \le |\boldsymbol{\Delta x}|$. Це *граничне значення* $\boldsymbol{\Delta x}$ називається *похибкою вимірювання* або похибкою виміряного значення ФВ.

Оскільки вибірка обмежена невеликим числом елементів (даних вимірювань), то ми маємо можливість зробити тільки оцінку параметрів розподілу і істинного значення ФВ. Для *нормального розподілу* даних у вибірці нам необхідно вміти знаходити оцінки математичного сподівання (істинного значення x_0), дисперсії $\boldsymbol{D}$ і середнього квадратичного відхилення $\boldsymbol{\sigma}$.

Постулат про середнє арифметичне. Нехай нами виконано послідовно $\boldsymbol{n}$ вимірювань деякої ФВ x, істинне значення $\boldsymbol{x_0}$ якої невідоме, і одержана вибірка: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Постулат про середнє арифметичне стверджує: *найкращою* ***оцінкою*** *істинного значення* вимірюваної величини x_0 *є середнє арифметичне* вибірки $\boldsymbol{\bar{x}}$: $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Постулат про середню квадратичну похибку. Генеральна сукупність характеризується дисперсією D фізичної величини x:

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2}{n}, \qquad (1.1)$$

або середнім квадратичним відхиленням виміряного <u>*окремого значення*</u> x_i від істинної величини x_0: $\sigma(x)=+\sqrt{D(x)}$. В якості міри випадкової похибки у визначеному середньому значені $\bar{x}$ береться величина $\boldsymbol{\sigma(\bar{x})}$:

$$\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}. \qquad (1.2)$$

Для вибірки випадкова похибка $\boldsymbol{\Delta x_i}$ i-го вимірювання обчислюється за формулою

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}. \qquad (1.3)$$

Постулат: ***оцінкою дисперсії*** <u>*окремого вимірювання*</u> $\boldsymbol{\sigma^2(x)}$ у сукупності з $\boldsymbol{n}$ даних *є середнє квадратичне відхилення* $\boldsymbol{S_n}$ (СКВ), що обчислюється за формулою

$$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2,\ S_n=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2},\ \sigma(x)=\lim_{n\to\infty}S_n, \qquad (1.4)$$

а ***оцінкою дисперсії*** <u>*середнього арифметичного*</u> $\boldsymbol{\bar{x}}$ *є середнє квадратичне відхилення* $S_{n\bar{x}}$, обчислене за формулою

$$S_{n\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \quad \text{або} \quad S_{n\bar{x}}=\frac{S_n}{\sqrt{n}} \qquad (1.5)$$

Параметр S_n характеризує розсіювання (розкид) даних навколо середнього значення $\bar{x}$, а СКВ $S_{n\bar{x}}$ – навколо істинного x_0.

Розмах результатів вимірювань R_n – алгебраїчна різниця найбільшого $x_{\max}$ і найменшого $x_{\min}$ окремих вимірювань, що утворюють ряд (або вибірку) із n вимірювань:

$$R_n = x_{max} - x_{min}. \qquad (1.6)$$

Середня арифметична похибка $\boldsymbol{r}$ *окремого вимірювання в серії* із n <u>*рівноточних незалежних*</u> вимірювань – узагальнена характеристика розсіювання (внаслідок випадкових причин) окремих результатів вимірювань x_i (одної і тої ж ФВ), що обраховується за формулою:

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|. \qquad (1.7)$$

При числі вимірювань $n>30$ між середньою арифметичною (r) і середньою квадратичною (S_n) похибками існує співвідношення $\boldsymbol{S_n=1{,}25\, r}$.

При нерівноточних *вимірюваннях* СКВ середнього арифметичного в серії з n вимірювань визначають за формулою:

$$S(X)_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - X_p)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i}}, \text{ де } X_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \qquad (1.8)$$

p_i *– статистична вага* ***i***-го вимірювання в серії нерівноточних вимірювань, X_p – середнє зважене (дивись тему 9).

Середнє квадратичне відхилення (похибка) результату ***непрямих вимірювань*** величини ***y***, яка є функцією ***$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$***, обчислюють за формулою (див. тему 8)

$$S_n = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 S_{n1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 S_{n2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 S_{nn}^2}, \qquad (1.9)$$

де S_{n1}, S_{n2}, ... S_{nn} – середні квадратичні похибки (СКВ) результатів вимірювань величин x_1 x_2, ... x_n.

Для більшої надійності одержання задовільного результату проводять ***m*** серій вимірювань, а СКВ окремого вимірювання находять за формулою

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta x_{ik})^2}{N-m}}, \qquad (1.10)$$

де чисельник – сума суми квадратів відхилення від середніх значень в кожній із m серій; n_k – число вимірювань в k-тій серії; N – загальне число вимірювань в усіх серіях.

Похибки визначення середньоквадратичних відхилення S_n і S_m може бути визначена, використовуючи, відповідно, наступні вирази:

$$\Delta S_n = \frac{1}{\sqrt{2}(n-1)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_n}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad \Delta S_m = \frac{S_m}{\sqrt{2(N-m)}}, \qquad (1.11)$$

Похибка визначення середнього арифметичного, яке являється результатом вимірювання, обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{\Delta\bar{x} = t_{np} \cdot S_n}\bar{x}, \qquad (1.12)$$

де $\boldsymbol{t_{np}}$ – коефіцієнт (коефіцієнт Стьюдента), який залежить від кількості даних n і вибраної *довірчої імовірності* ***p*** (її ще називають коефіцієнтом *надійності* **α**) не перевищити дану похибку. Формула (1.12) визначає так званий **довірчий (або надійний) інтервал**, в якому з ймовірністю p знаходиться істинне значення виміряної ФВ. Вона застосовується, якщо випадкова величина x із вибірки з n експериментальних даних має *нормальний розподіл* з невідомою дисперсією (реальний випадок, коли число вимірювань невелике). Тоді вибірковий розподіл середнього значення $\boldsymbol{\bar{x}}$ має розподіл Стьюдента і тоді довірчий інтервал визначається через квантіль (або коефіцієнт) Стьюдента $\boldsymbol{t_{np}}$ (табл.1) і оцінку дисперсії $S_{n\bar{x}}$:

$$\bar{x} - t_{np}S_{n\bar{x}} \le x_o < \bar{x} + t_{np}S_{n\bar{x}}. \qquad (1.13)$$

Таблиця 1.1. Коефіцієнти (квантілі) Стьюдента t_{np} (f – число ступенів вільності)

f=n-1	p=0,90	p=0,95	p=0,98	p=0,99	f=n-1	p=0,90	p=0,95	p=0,98	p=0,99
2	2,920	4,303	6,965	9,920	18	1,734	2,101	2,552	2,878
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	22	1,717	2,074	2,508	2,819
5	2,015	2,571	3,365	4,032	24	1,711	2,064	2,492	2,797
6	1,943	2,447	3,143	3,707	26	1,706	2,056	2,479	2,779
7	1,895	2,365	2,998	3,499	28	1,701	2,048	2,467	2,763
8	1,860	2,306	2,896	3,355	30	1,697	2,043	2,457	2,750
9	1,833	2,262	2,821	3,250	40	1,680	2,020	2,420	2,700
10	1,812	2,228	2,764	3,169	60	1,670	2,000	2,390	2,660
12	1,782	2,179	2,681	3,055	80	1,665	1,990	2,370	2,640
14	1,761	2,145	2,624	2,977	120	1,660	1,980	2,356	2,620
16	1,746	2,120	2,583	2,921	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Гранична похибка вимірювання – максимальна похибка вимірювання (плюс, мінус), імовірність $\boldsymbol{p}$ не перевищити яку має значення, близьке до одиниці. При нормальному законі розподілу випадкових похибок за граничну похибку приймають значення $\boldsymbol{\Delta_{гр}(p) = \pm\, 3S_n}$.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1.1.

При вимірюванні деяких 3-х однойменних фізичних величин різними методами було проведено по 15 вимірювань і зроблені такі записи усереднених результатів і їх похибок: X_1=3,405 , X_2= 4,9784, X_3= 1,33175; Δx_1=0,04159, Δx_2= 0,00553, Δx_3= 0,000359. Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутки одержаних наближених величин.

Розв'язок.

Враховуючи кількість зроблених вимірювань (15) дані похибок необхідно заокруглити, залишивши доцільну кількість значущих цифр:

Δx_1= 0,04159 потрібно писати Δx_1= 0,04;

Δx_2= 0,00553 потрібно писати Δx_2= 0,006;

Δx_3= 0,000359 потрібно писати Δx_3= 0,00036.

Отже середні величини X_i також необхідно заокруглити, залишивши правильні і одну сумнівну цифри:

X_1= **3,40**, бо цифра 4 виявляється правильною (Δx_1=0,04<0,05), тому залишається ще сумнівна цифра 0 (яка не збільшується на одиницю, оскільки є парною);

X_2= **4,98**, бо цифра 7 вже є сумнівною (Δx_2=0,006>0,005), тому цифри 4 і 8 відкидаються;

X_3= **1,3318** – цифри 1,3,3,1 – правильні (Δx_3=0,00036<0,0005), 8 – сумнівна (7 непарна і при заокругленні, у даному випадку, збільшується на 1).

$\mathbf{X_\Sigma}$= 3,40+4,978+1,3318 = 9,7098 $\approx$ **9,71**;

$\mathbf{X_{доб}}$= 3,40·4,978·1,3318 = 22,54098136 $\approx$ **22,54** – результат математичної дії в даному прикладі заокруглюється до двох значущих цифр після коми.

Задача 1.2.

Одержано 10 виправлених результатів вимірювання довжини стержня l (i від 1 до 10): 58,59; 58,49; 58,55; 58,48; 58,53; 58,52; 58,42; 58,51; 58,46; 58,45 мм. Обчислити розмах і похибки результатів вимірювань.

Розв'язок.

Знаходимо максимальне і мінімальне значення в ряду даних: l_{max} = 58,59 мм; l_{min} = 58,42 мм. Отже, розмах результатів вимірювання становить R_{10}= 58,59-58,42 = 0,57 мм.

Середнє арифметичне даних дорівнює

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow L = \frac{58{,}59 + 58{,}49 + ... + 58{,}45}{10} = \frac{585{,}0}{10} = 58{,}50 \text{ мм.}$$

Абсолютна похибка i-го вимірювання, наприклад 1-го, дорівнює $\Delta l_1 = l_1 - L$ = 58,59-58,50 = 0,09 мм. Відносна похибка цього вимірювання δl_1 = 0,09/58,59 = 0,0015 або 0,15 %.

Знайшовши всі 10 абсолютних похибок, знайдемо середню арифметичну похибку окремого вимірювання

$$r = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} |\Delta l_i| = \frac{|0{,}09| + |-0{,}01| + ... + |-0{,}05|}{10} = 0{,}04 \text{ мм.}$$

Окремі похибки коливаються в межах від +0,09 мм до -0,08 мм (сьоме вимірювання), але в середньому випадкова похибка одного вимірювання в даній серії r = ±0,04 мм.

Середня квадратична похибка окремого вимірювання (тобто середнє квадратичне відхилення даних прямих вимірювань довжини) дорівнює: $S_n = \sqrt{\dfrac{(0{,}09)^2 + (-0{,}01)^2 + ... + (-0{,}05)^2}{10-1}} = \sqrt{\dfrac{0{,}023}{9}} \approx \pm 0{,}051$ мм.

Це значення отримано з похибкою (див. формулу 1.11)

$$\Delta S_n = \frac{0{,}051}{\sqrt{2\cdot(10-1)}} = \frac{0{,}051}{4{,}24} = 0{,}012 \approx \pm 0{,}01 \text{ мм.}$$

Це означає, що через похибки обчислення S_n знаходиться в межах від 0,041 до 0,061 мм, отже, тисячні долі міліметра є ненадійні і їх можна відкинути, тобто потрібно записати: $S_n = \pm\ 0{,}05$ мм

Згідно формули (1.5) отримуємо: $S(L) = \dfrac{0{,}051}{\sqrt{10}} = 0{,}0158 \approx \pm 0{,}016$ мм.

Аналогічно: $\Delta S(L) = \Delta S_n / \sqrt{n} = 0{,}012 / 3{,}162 = 0{,}0038 \approx 0{,}004$ мм.

Задача 1.3.

Представити залежність значення середньоквадратичної похибки результату багатократного вимірювання S_n і S(X) та похибки його визначення ΔS_n і ΔS(X) від числа n вимірювань в серії.

Розв’язок.

Використовуючи формули (1.5) і (1.11) запишемо:

$$\delta_S = \frac{\Delta S_n}{S_n} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-1)}} = \frac{\Delta S_n}{\sqrt{n}\cdot S_{n\bar{x}}} = \frac{\Delta S_{n\bar{x}}}{S_{n\bar{x}}}\ ,$$

де $\Delta S_{n\bar{x}} = \dfrac{\Delta S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{2\cdot n\cdot(n-1)}} = \dfrac{S_{n\bar{x}}}{\sqrt{2\cdot(n-1)}}$ є абсолютна похибка визначення СКВ середнього арифметичного.

Таблиця 1.2.

n	$\delta_S = \dfrac{100}{\sqrt{2\cdot(n-1)}},\%$	$\dfrac{S_{n\bar{x}}}{S_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{\Delta S_{n\bar{x}}}{\Delta S_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$	Макс. похибка (в %) заокруглення до ***n***
1	—	1	1	50
2	71	0,71	0,71	25
3	50	0,58	0,58	17
4	41	0,50	0,50	12
5	35	0,45	0,45	10
7	29	0,38	0,38	7,1
9	25	0,33	0,33	5,5
16	18	0,25	0,25	3,1
25	14	0,20	0,20	2
36	12	0,17	0,17	1,4

Як видно з цих співвідношень, відносні похибки знаходження S_n і $S_{n\bar{x}}$ однакові і визначаються кількістю спостережень (вимірювань) *n*, а абсолютні похибки відрізняються в $\sqrt{n}$ раз, тобто так, як і самі величини середніх квадратичних похибок (відхилень S_n, $S_{n\bar{x}}$). Залежність відобразимо у вигляді таблиці 1.2. Крім того бачимо, що, наприклад, при 10 вимірюваннях відносна похибка обчислення S_n становить 25 %, а СКВ середнього арифметичного зменшується більше як в три рази в порівнянні з СКВ окремого вимірювання в серії. В крайньому правому стовпчику таблиці 1.2 приведена похибка при заокругленні 0,5 до числа *n* у лівому стовпчику (наприклад, коли 16,5 ≈ 16).

Задача 1.4.

Різними дослідниками в різний час були одержані результати вимірювання діаметра d і висоти h (в мм) одного і того ж циліндра з відповідними статистичними вагами $\boldsymbol{p}$: d_1= 22,41, h_1= 17,57, p_1= 1; d_2= 22,58, h_2= 17,35, p_2= 3; d_3= 22,73, h_3= 17,47, p_3= 4; d_4= 22,65, h_4= 17,31, p_4=6. Знайти об'єм циліндра і обчислити його середню квадратичну похибку (СКВ середнього арифметичного).

Розв'язок.

Спочатку знаходимо середнє зважене (середнє вагове) даних d і h, потім обчислюємо СКВ прямих нерівноточних вимірювань діаметра і висоти за формулами (1.8):

$$D_p = \frac{22{,}41\cdot 1 + 22{,}58\cdot 3 + 22{,}73\cdot 4 + 22{,}65\cdot 6}{1+3+4+6} = \frac{316{,}97}{14} = 22{,}64071 \approx 22{,}641 \text{ мм},$$

$$H_p = \frac{17{,}57\cdot 1 + 17{,}35\cdot 3 + 17{,}47\cdot 4 + 17{,}31\cdot 6}{1+3+4+6} = \frac{243{,}36}{14} = 17{,}38286 \approx 17{,}383 \text{ мм}.$$

Так як з отриманими середніми ще будуть проводитись обчислення, то при заокругленні наближеного числа залишаємо на один розряд більше, ніж в кінцевому записі. Далі:

$$S(D_p) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} p_i (d_i - D_p)^2}{(4-1)\cdot 14}} = \sqrt{\frac{0{,}0967}{42}} = 0{,}048 \approx 0{,}05; \quad S(H_P) = 0{,}049 \approx 0{,}05.$$

Об'єм обчислюємо за формулою v=πd²h/4, тобто як результат непрямих вимірювань, тому його середнє значення V оцінюємо, використовуючи величини D_P і H_P, а СКВ – за формулою (1.9). Отже,

$$V = \frac{\pi \cdot D_p^2 \cdot H_p}{4} = \frac{3{,}142\cdot (22{,}641)^2 \cdot 17{,}383}{4} = 6999{,}4212 \approx 6999{,}42 \text{ ìì}^{3}$$

$$V=\frac{\pi D_p^2 H_p}{4}=\frac{3{,}142\cdot(22{,}642)^2\cdot17{,}383}{4}=6999{,}4212\approx6999{,}42\,\text{мм}^3.$$

Візьмемо часткові похідні по d і h від функції v(d,h), а в результат замість змінних d і h підставимо середні значення D_P і H_P:

$$\frac{\partial V}{\partial d}=\frac{\pi\cdot2d\cdot h}{4}=\frac{3{,}142\cdot2\cdot22{,}641\cdot17{,}383}{4}=618{,}2961\approx618{,}30;$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=\frac{3{,}142\cdot(22{,}641)^2}{4}=402{,}6580\approx402{,}66.$$

Підставляючи квадрати цих значень в (1.9), отримаємо:

$$S(V)=\sqrt{(618{,}30)^2\cdot(0{,}05)^2+(402{,}66)^2\cdot(0{,}05)^2}=\sqrt{1361{,}075}=36{,}89\approx40\ \text{мм}^3.$$

Заокруглення в другому порядку (40, а не 37) робимо, враховуючи те, що при 4-х вимірюваннях достатньо обмежитись першою значущою цифрою, замінивши інші нулями (похибка заокруглення буде значно меншою, ніж похибка обчислення S_n для 4-х даних – див. табл. 1.2). В зв'язку з цим необхідно відкоригувати і запис для об'єму V – в ньому необхідно відкинути не тільки соті і десяті одиниці, але також заокруглити одиниці першого розряду (порядку), тобто записати: V = 7000 мм^3.

Коефіцієнт Стьюдента для даних n=4 і ймовірності p=0,95 дорівнює t_{np}=3,182 (табл.1.1). Тоді довірчий (надійний) інтервал

$$\Delta V(p=0{,}95) = 3{,}18\cdot36{,}89 = 117{,}31\ \text{мм}^3.$$

Використавши правила заокруглення, записуємо кінцевий результат: V = (7000 ± 120) мм^3.

Задачі для самостійного розв'язку.

1.5. При вимірюванні деяких 4-х фізичних величин різними методами було проведено по 8 вимірювань і зроблені наступні записи усереднених результатів і їх похибок: X_1= 13,805, X_2= 8,7786, X_3= 11,53165; X_4= 0,7; Δx_1= 0,05157, Δx_2= 0,00550, Δx_3= 0,000249, Δx_4= 0,147. Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутки одержаних наближених величин.

1.6. Одержано 12 виправлених результатів вимірювання зовнішнього діаметру труби d (в мм): 8,58; 8,50; 8,55; 8,48; 8,53; 8,52; 8,49; 8,51; 8,46; 8,45; 8,47; 8,54. Обчислити розмах і похибки результатів вимірювань.

1.7. При експериментальному визначенні прискорення рівноприскореного руху були виміряні пройдений за час t шлях s і початкова швидкість v. Одержано такі усереднені результати та їх похибки: T=11,127 с, Δt=0,25 с (6 дослідів); S=6,50 м, Δs=0,0105 м (6 дослідів); V=0,085 м/с, Δv=0,0155 м/с (12 дослідів). Записати правильно результати вимірювань та обчислити значення прискорення.

1.8. Зроблено 5 вимірювань швидкості деякого тіла у в'язкій рідині: 0,51; 0,54; 0,52; 0,58; 0,56. Обчислити СКВ середнього арифметичного та похибку його визначення.

1.9. Для 12 результатів спостережень при прямих рівноточних вимірюваннь визначити середнє арифметичне значення; середнє квадратичне відхилення (СКВ) випадкових похибок окремих результатів; СКВ результату вимірювання. Оцінити довірчі границі похибки для $P_{дов}$. Записати кінцевий результат у стандартній формі. Варіанти завдань наведені в таблиці. [таблиця з даними взята з посібника: Поджаренко В.О., Кулаков П.І., Ігнатенко О.Г., Войтович О.П. Основи метрології та вимірювальної техніки. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2006. – 151 с.].

В-т	Дані											$P_{дов.}$
1	1,45	1,51	1,52	1,44	1,58	1,53	1,50	1,52	1,46	1,58	1,44	1,51	0,90
2	2,44	2,53	2,43	2,48	2,41	2,59	2,47	2,41	2,45	2,54	2,47	2,54	0,95
3	3,65	3,69	3,69	3,68	3,57	3,59	3,56	3,61	3,59	3,55	3,69	3,57	0,99
4	4,99	4,82	4,88	4,92	4,85	4,93	4,81	4,93	4,90	4,90	4,88	4,82	0,90
5	5,94	5,96	5,98	5,93	5,91	5,94	5,91	5,96	5,93	5,90	5,91	5,97	0,95
6	6,34	6,25	6,33	6,23	6,30	6,28	6,26	6,31	6,26	6,31	6,33	6,34	0,99
7	7,85	7,83	7,76	7,90	7,81	7,98	7,78	7,88	7,77	7,72	7,76	7,85	0,90
8	8,98	8,96	8,85	8,90	8,95	8,84	8,81	8,89	8,93	8,90	8,90	8,93	0,95
9	9,00	9,07	9,11	9,12	9,09	9,14	9,02	9,02	9,17	9,11	9,08	9,09	0,99
10	10,47	10,35	10,34	10,43	10,44	10,39	10,39	10,46	10,40	10,44	10,43	10,36	0,90
11	11,43	11,48	11,46	11,54	11,53	11,50	11,56	11,42	11,57	11,42	11,39	11,40	0,95
12	12,05	12,09	12,12	12,17	12,09	12,08	12,07	12,11	12,08	12,16	12,15	12,13	0,95
13	13,91	13,93	13,84	13,86	13,84	13,95	13,94	13,90	13,90	13,94	13,89	13,87	0,90
14	14,70	14,79	14,75	14,70	14,76	14,67	14,82	14,70	14,76	14,75	14,75	14,81	0,95
15	15,14	15,19	15,17	15,20	15,14	15,19	15,11	15,13	15,17	15,19	15,13	15,15	0,99
16	16,72	16,75	16,73	16,84	16,79	16,82	16,79	16,78	16,79	16,79	16,83	16,86	0,90
17	17,26	17,29	17,28	17,29	17,26	17,23	17,21	17,22	17,21	17,28	17,26	17,26	0,95
18	18,07	18,09	18,11	18,15	18,12	18,12	18,07	18,15	18,09	18,05	18,08	18,16	0,99
19	19,65	19,67	19,69	19,75	19,65	19,65	19,70	19,69	19,67	19,64	19,74	19,66	0,90
20	20,98	20,99	20,96	20,87	20,89	20,89	20,97	20,85	20,89	20,85	20,88	20,95	0,95

Тема 2. Засоби вимірювань та їх похибки. Клас точності приладів

<u>Основні поняття, визначення та формули до практичного заняття.</u>

До засобів вимірювання (ЗВ) відносяться міри, вимірювальні перетворювачі, прилади, установки, системи.

Міра – засіб вимірювання, який призначений для відтворення певної, заданої фізичної величини. Розрізняють міри однозначні і багатозначні. Однозначні міри мають одне певне значення вимірюваної величини. Міра, яка має властивість відтворення декількох різних значень вимірюваної величини, називається багатозначною.

Поряд із багатозначними мірами розрізняють набори або магазини однозначних мір.

Вимірювальний перетворювач – це ЗВ, призначений для перетворення інформації, отриманої в результаті взаємодії з певною фізичною величиною (ФВ), в зручну для подальшої обробки, зберігання або передачі форму, але яка ще не піддається безпосередньому спостереженню і відліку.

Вимірювальний прилад – це сукупність деталей і механізмів, призначених для формування вихідної інформації про вимірювану величину у формі, зручній для безпосереднього спостереження і відліку. Більшість приладів містять в собі перетворювач роду ФВ.

Вимірювальна установка – це сукупність вимірювальних приладів, перетворювачів та інших пристроїв, функціонально об'єднаних між собою і призначених для формування інформації про вимірювану ФВ у формі, зручній для безпосереднього спостереження.

Якщо інформація про вимірювану величину, що поступає від окремих блоків установки, виробляється у формі, зручній для автоматичної передачі і обробки, то такий вимірювальний засіб називається *вимірювальною системою*.

Вимірювальні засоби характеризуються такими *метрологічними параметрами*: класом точності, чутливістю, порогом чутливості, роздільною здатністю, діапазоном вимірювання, ціною поділки, варіацією показів.

Значення фізичної величини, одержане в результаті вимірювань, яке містить в собі похибку вимірювання, називається *дійсним*.

Основна похибка обумовлена неідеальністю власних властивостей ЗВ при його використанні в оптимальних (номінальних) умовах.

Додаткова похибка вимірювання обумовлена впливом на ЗВ зовнішніх факторів і відхиленням умов експлуатації приладу від номінальних або нормальних. Нормальні умови експлуатації засобів вимірювання: температура оточуючого повітря (20 ± 5) °С, відносна вологість 30-80 %, атмосферний тиск $(0{,}8 \div 1{,}05) \cdot 10^5$ Па, напруга мережі (220 ± 4,4) В, частота напруги в мережі (50,0 ± 0,5) Гц.

Похибка, обумовлена взаємодією засобів вимірювання і об'єкту виміру, в багатьох випадках полягає в тому, що підключення ЗВ до об'єкту виміру призводить до зміни значення вимірюваної величини відносно її значення до підключення.

Динамічна похибка обумовлена реакцією засобу вимірювання на швидкість (частоту) зміни вхідного сигналу.

По способу чисельного представлення **розрізняють абсолютну, відносну і зведену похибку**. *Абсолютна похибка приладу* $\boldsymbol{\Delta x}$ – це різниця між показами приладу $\boldsymbol{x}$ і істинним значенням $\boldsymbol{x_o}$ ФВ. *Відносна похибка вимірного приладу* (%) – відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної ФВ (яке наближено може бути знайдено усередненням багатьох рівноточних вимірювань):

$$\delta = [(x - x_o)/x_o] \cdot 100 = (\Delta x / x_o) \cdot 100 \approx [(x - \bar{x})/\bar{x}] \cdot 100.$$

Під *зведеною похибкою* розуміють відношення абсолютної похибки $\boldsymbol{\Delta x}$ засобу вимірювання до *нормуючого значення* $\boldsymbol{X_N}$:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{X_N} \cdot 100 \ (\%). \qquad (2.1)$$

Нормуюче значення X_N приймається рівним:

6) кінцевому значенню шкали приладу $X_К$, якщо нульова відмітка знаходиться на краю шкали або поза нею;
7) сумі кінцевих значень шкали приладу (без врахування знаків), якщо нульова відмітка знаходиться всередині шкали;
8) номінальному значенню вимірюваної величини, якщо таке встановлено (наприклад, для частотомірів з діапазоном вимірювання (45-55) Гц і номінальною частотою 50 Гц, X_N = 50 Гц);
9) для приладів з суттєво нерівномірною шкалою X_N приймають рівним всій довжині шкали або її частині, яка відповідає діапазону вимірювань, – у цьому випадку похибку і довжину шкали виражають в одних одиницях, наприклад, в одиницях довжини;
10) діапазону вимірювань для багатошкальних приладів або, якщо шкала приладу проградуйована, в одиницях величини, для якої прийнята шкала з умовним нулем (наприклад, температура в °С).

У засобів вимірювання часто **виділяють адитивні і мультиплікативні похибки**. Якщо величина похибки не залежить від значення вимірюваної величини (рівня вхідного сигналу), то вона називається *адитивною*. *Мультиплікативними* називаються похибки, значення яких пропорційні значенню вимірюваної величини x.

Основною характеристикою вимірювання є його точність. Під *точністю вимірювання* розуміють якість вимірювань, яка вказує на близькість їх результатів до істинного значення вимірюваної ФВ. Вимірювання тим більш точне, чим менша його похибка.

Клас точності засобу вимірювання – узагальнена характеристика, що визначається межами допустимих основних і додаткових похибок приладу, а також іншими властивостями, які впливають на точність, значення яких встановлюються в стандартах на окремі види засобів вимірювання. Клас точності характеризує властивості приладів у відношенні точності, але не є безпосереднім показником точності і похибки вимірювань, тому що ці параметри залежать ще від метода вимірювань і умов, при яких вони були виконані.

Різновид засобів вимірювання ускладнює можливість єдиного підходу до вибору критерію для їх групування на класи по точності вимірювання. *В основу всіх класифікацій покладено значення гранично допустимої основної похибки: абсолютної, відносної і зведеної***.** Найбільш обґрунтованою і широко вживаною є класифікація ЗВ не по граничній абсолютній, а по відносній або зведеній основній похибці.

В загальному випадку залежність абсолютної похибки Δx від вхідної величини x може бути представлена рівнянням

$\Delta x = \pm(a + b \cdot x + c \cdot x^2 \ldots)$; в основному $\boldsymbol{\Delta x = \pm(a + b \cdot x)}$ (2.2)

a *–адитивна похибка,* ***bx*** *– мультиплікативна похибка*.

Адитивна похибка обмежує найменше значення величини, яке можна виміряти даним приладом, і обумовлена неточністю відліку, тертям в опорах, дрейфом нуля відліку, новодками, вібраціями і т.п.

Причини мультиплікативної похибки – вплив вимірюваної величини або факторів, через які вона визначається, на параметри деяких елементів і вузлів ЗВ, а також зміну неінформативних параметрів вхідного сигналу.

У приладів, для яких адитивна складова похибки значно переважає над мультиплікативною, основна зведена похибка вважається сталою у будь-якій точці шкали (діапазону вимірювань), її граничне значення приймається за *клас точності засобів вимірювання* і визначається формулою $\gamma = \frac{\Delta x}{X_N} \cdot 100 \le \eta$ (зведена похибка в %). (2.3)

Тут клас точності *позначається* <u>*одним числом*</u> **η**, яке вибирається із ряду чисел **η=K·10ⁿ**, де **K** = (1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6) а **n** = 1, 0, -1, -2 і т.д., як число, що стоїть найближче до **γ** в нерівності **|γ| ≤ η**.

У випадку, коли адитивна і мультиплікативна складові похибки одного порядку, *клас точності приладу позначається* <u>*двома числами*</u>, розділеними косою рискою, наприклад: 0,2/0,1. Граничне значення основної відносної похибки, <u>виражене в процентах</u>, в цьому випадку визначається за формулою, приведеній в Держстандарті 8.401-80 і одержаній з використанням (2.2):

$$\delta = \frac{\Delta x_{\max}}{x} \cdot 100 = \frac{a + b \cdot x}{x} \cdot 100 = \left[\frac{a}{x} + b + \frac{a}{X_N} - \frac{a}{X_N} \right] \cdot 100 =$$

$$= \left[\left(b + \frac{a}{X_N} \right) + \frac{a}{X_N} \left(\left| \frac{X_N}{x} \right| - 1 \right) \right] \cdot 100 = \left[c + d \cdot \left(\left| \frac{X_N}{x} \right| - 1 \right) \right], \qquad (2.4)$$

де X_N – нормуюче значення ЗВ. Як випливає з формули, $d = \frac{a}{X_N} \cdot 100$

$c = (b + \frac{d}{100}) \cdot 100$. ***c*** і ***d*** – сталі додатні числа, також виражені в процентах. *Клас точності позначається відношенням* ***c/d***. Числа (c,d) вибираються з того ж ряду, що і **η**. Із (2.4) видно, що абсолютна гранична похибка приладу (2.2) тепер визначається за формулою

$$\Delta x_{\max} = \pm \frac{d \cdot X_N + (c - d) \cdot x}{100}, \quad \text{де} \quad a = \pm \frac{d \cdot X_N}{100}, \quad b = \pm \frac{(c - d)}{100}. \qquad (2.5)$$

Крім того, при значені вимірюваної величини x=X_N/2 відносна похибка **δ=** ***c*+*d*** , а при x=X_N **δ= ±*c*.**

Приклади розв'язку задач

<u>Задача 2.1.</u>

Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням шкали $I_к$= 0,5 мА для вимірювання струму в діапазоні I = 0,1...0,5 мА так, щоб відносна похибка δ вимірювання не перевищила 1 %.

<u>Розв'язок.</u>

Клас точності визначається по максимальній основній зведеній похибці $\gamma = \pm \frac{\Delta_{\text{г}}}{I_N} 100 \le \eta$ (%), де η – найменше число з ряду К·10^{n}, яке задовольняє цій нерівності.

Відносна похибка вимірювання $\delta = \frac{\Delta I}{I} 100\%$, абсолютна $\Delta I = \delta I$. Згідно умови задачі $\delta \le 1$ % при вимірюванні в діапазоні (0,1÷0,5) мА, отже абсолютна максимальна похибка в цьому діапазоні має бути не більше, ніж $\Delta I = \delta \cdot I_{\text{мін}}$, тобто, $\boldsymbol{\Delta_{\text{г}} \le \delta \cdot I_{\text{мін}}} = 1 \cdot 0{,}1/100 = 0{,}001$ мА. Враховуючи, що в даному випадку $I_N = I_{\text{к}} = 0{,}5$ мА, одержуємо:

$\gamma = \pm \frac{0{,}001}{0{,}5} 100 =$ **0,2 %**. Отже, клас точності приладу має бути не гірше 0,2 (число 0,2 є в переліку чисел К) і тут кінцева формула така:

$$\eta = \gamma = \frac{\delta I}{100 I_N} 100 = \frac{\delta \cdot I_{\min}}{I_{\text{k}}}.$$

Задача 2.2.

Визначити покази двох послідовно включених магнітоелектричних міліамперметрів з кінцевим значенням шкали I_{k}=100 мА (число поділок на рівномірній шкалі – 100) і класами точності 1,0 і 0,5. Дійсне значення струму при вимірюванні $I_{\text{д}}$=50 мА. Визначити найбільшу різницю у показах двох міліамперметрів.

Розв’язок.

Через послідовно з’єднані амперметри проходить однаковий струм ($I_{\text{д}}$=50 мА). З формули (2.3) знаходимо максимальну абсолютну похибку приладу $\Delta I = \pm \frac{\eta \cdot I_N}{100}$, де η – клас точності приладу, I_N – нормуюче значення, в даному випадку $I_N = I_{\text{k}}$=100 мА. Отже $\Delta I_1 = \pm 1$ мА і $\Delta I_2 = \pm 0{,}5$ мА. Тоді покази приладу знаходяться в межах $\boldsymbol{I = I_{\text{д}} \pm \Delta I}$ і для одного приладу вони лежать від 49 мА до 51 мА, а для другого – від 49,5 мА до 50,5 мА. Отже, максимально можлива різниця у показах цих двох міліамперметрів може становити $\Delta I_{\text{макс}} = |I_1 - I_2|$ = 51-49,5 мА

або $\boldsymbol{\Delta I_{\text{макс}}} = |(I_{\text{д}} + \Delta I_1) - (I_{\text{д}} - \Delta I_2)| = |\Delta \text{I}_1| + |\Delta \text{I}_2| =$ **1,5 мА**.

Задача 2.3.

Визначити похибку, з якою виміряні індуктивність котушки L=85 мГн і опір резистора R=2,83 Ом. Основна похибка (в %) ЗВ задана рівнянням з адитивною і мультиплікативною складовими: $\delta_L = \pm(1+6/L)$ і $\delta_R = \pm(1+6/R)$ %, де L – індуктивність, мГн; R – опір, Ом.

Розв'язок.

Якщо є адитивна і мультиплікативна складові похибки, то відносна сумарна похибка вимірювання величини x дається формулою:

$$\delta = \frac{\pm\Delta x}{x} = \pm\frac{a+bx}{x} \text{ (відн. од.)} = \pm(\frac{a}{x}+b)\cdot 100 \text{ (\%)}.$$

Зіставляючи цю формулу і формулу $(6/L+2)$ з умови задачі бачимо, що $\boldsymbol{a}\cdot 100 = 6$, а $\boldsymbol{b}\cdot 100 = 1$. Отже, число $\boldsymbol{a} = 6/100$ – це (абсолютна) адитивна похибка (в одиницях вимірювання), а число $\boldsymbol{b} = 2/100$ – це коефіцієнт мультиплікативної похибки (безрозмірна величина). Підставляючи покази вимірюваних величин L і R у відповідні формули, одержуємо значення відносних похибок:

$$\delta_L = \pm(6/85 + 2) = \pm 2{,}1\ \% ; \quad \delta_R = (6/2{,}83 + 1) = \pm 3{,}1\ \%.$$

Задача 2.4.

Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням діапазону вимірювання струму $I_к$=0,5 мА, якщо граничне значення абсолютної похибки вимірювань постійне і дорівнює $\Delta_г = \pm 0{,}0015$ мА.

Розв'язок.

В цьому випадку клас точності приладу нормується по зведеній основній похибці (2.1): $\gamma = \pm\frac{\Delta_г}{I_k}\cdot 100 = \frac{0{,}0015\cdot 100}{0{,}5} = 0{,}3.$

Отже, γ=0,3 %. Із ряду значень класів точності $К\cdot 10^n$ вибираємо найменше більше за 0,3 число: це число 0,5. Отже, клас точності приладу є не вищим (не кращим) за 0,5.

Задача 2.5.

Метрологічні дослідження виявили, що амперметр постійного струму з діапазоном вимірювання від -10 А до +10 А при вимірюванні сили струму в I_1 =1 А дає відносну похибку δ_1 = 4 %, а силу струму I_2 = 9 А вимірює з відносною похибкою δ_2 = 1 %. Оцінити клас точності приладу.

Розв'язок.

Клас точності визначається по зведеній похибці з відношення $\gamma = (\Delta_г/I_N)\cdot 100$, де $\Delta_г$ – максимальна абсолютна похибка амперметра *в усьому діапазоні*, I_N – нормоване значення, яке для даного діапазону вимірювань, за визначенням, становить $I_N = |+10|+|-10| = 20$ А ("нуль" знаходиться посередині шкали). Абсолютні похибки вимірювання струмів I_1=1 А і I_2=8 А дорівнюють, відповідно, $\Delta I_1 = \delta_1 \cdot I_1/100$ = $4 \cdot 1/100 = 0{,}04$ А і $\Delta I_2 = \delta_2 \cdot I_2/100 = 0{,}01 \cdot 9 = 0{,}09$ А. Отже, максимальна похибка приладу при вимірюванні струму є не меншою за 0,09 А, тобто $\Delta_г \geq 0{,}09$ А. Тоді зведена похибка $\gamma = (0{,}09/20) \cdot 100 = 0{,}45$ %. Найближче більше за 0,45 число з ряду $К \cdot 10^n$ є 0,5. Отже, клас точності амперметра – $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0{,}5}$.

Але те, що абсолютна похибка приладу залежить (зростає) від значення I (вхідної величини), вказує на наявність відчутної мультиплікативної складової похибки. Знайдемо її та скоректуємо клас точності ЗВ. Вважаючи залежність $\Delta I(I)$ лінійною, запишемо: $\Delta I = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot I$ або: $\Delta I_1 = a + b \cdot 1 = 0{,}04$ $\quad \Delta I_2 = a + b \cdot 9 = 0{,}09$. Графіком залежності є пряма лінія з коефіцієнтом нахилу $\boldsymbol{b}$ до осі I (b – це тангенс кута нахилу прямої), який дорівнює відношенню відрізків осей ΔI і I між точками їх значень, тобто $\boldsymbol{b} = \frac{0{,}09 - 0{,}04}{9 - 1}$ = 0,00625.

Тепер по одному з рівнянь знайдемо адитивну похибку $\boldsymbol{a}$:

$$a = 0{,}04 - 0{,}00625 \cdot 1 = \underline{0{,}03375 \text{ мА}}.$$

Позначення класу точності знайдемо, скориставшись за формулами (2.5): $d = \frac{a}{X_N} \cdot 100 = \frac{0{,}03375 \cdot 100}{20} = 0{,}16875$ → $\underline{d = 0{,}2}$;

$c = b \cdot 100 + d$ = 0,625+0,169=0,794 → $\underline{c = 1}$. Клас точності – 1,0/0,2.
Зробимо перевірку:

$$\Delta I_{1\max} = \pm \frac{d \cdot X_N + (c - d) \cdot x}{100} = \frac{0{,}2 \cdot 20 + (0{,}8) \cdot 1}{100} \approx \pm 0{,}05 \text{мА};$$

$$\Delta I_{2\max} = \frac{0{,}2 \cdot 20 + (0{,}8) \cdot 9}{100} \approx \pm 0{,}11 \text{ мА}.$$

Ці значення є граничними похибками приладу, які обмежують верхню межу *інструментальної* похибки при реальних вимірювань ФВ. Як бачимо, похибки з умови задачі менші, але близькі них (задача зроблена правильно).

Задачі для самостійного розв’язку.

2.6. Визначити клас точності магнітоелектричного міліамперметра з кінцевим значенням шкали $I_к$ = 2,5 мА для вимірювання струму I=0,5...1,5 мА так, щоб відносна похибка δ вимірювання струму не перевищила 2 %.

2.7. Визначити покази двох послідовно з'єднаних магнітоелектричних міліамперметрів з кінцевим значенням шкали $I_к$=500 мА (число поділок шкали 100) і класами точності 1,5 і 1,0. Дійсне значення струму при вимірюванні $I_д$=150 мА. Визначити найбільшу різницю в показах двох міліамперметрів у мА та поділках шкали.

2.8. Визначити похибку, з якою виконано вимірювання ємності конденсатора C=200 нФ і опору резистора R=12,47 Ом. Основна похибка моста задана в вигляді двох складових: адитивної і мультиплікативної $\delta_C = \pm(40/C+2)$ %, $\delta_R = \pm(15/R+3)$ %.

2.9. Визначити клас точності мілівольтметра з діапазоном вимірювання напруги (0÷15) мВ, якщо граничне значення абсолютної похибки вимірювань постійне і дорівнює ±0,02 мВ.

2.10. Метрологічні дослідження виявили, що амперметр постійного струму з діапазоном вимірювання від -1 А до +2 А при вимірюванні сили струму в I_1 =0,2 А дає відносну похибку δ = 5 %, а силу струму I_2 = 0,8 А вимірює з відносною похибкою δ_2 = 2 %. Визначити клас точності приладу.

2.11. Клас точності ватметра з діапазоном вимірювання від 0 до 250 Вт задано числами 0,5/0,1. Написати рівняння і накреслити графік залежності похибки Δw від значення вимірюваної потужності w.

2.12. Для визначення напруги стабільного джерела використали вольтметр з трьома діапазонами вимірювання: 0÷100 В, 100÷200 В і 200÷500 В. Після декількох спроб одержано значення напруги 250 В з похибкою ±5 В. Приймаючи цю похибку за інструментальну (похибку самого вольтметра) зробити оцінку класу точності вольтметра.

Тема 3. Основні поняття теорії випадкових похибок. Елементи теорії ймовірності

Основні поняття, визначення та формули даної теми.

Подія називається **випадковою**, якщо її неможливо передбачити незалежно від рівня наших знань про фізичний світ і технічні можливості. Закономірності, пов'язані з випадковими величинами, вивчаються теорією імовірності і математичною статистикою. Задача теорії по передбаченню випадкових подій зводиться до знаходження кількісних характеристик можливості їх появи.

Розглянемо подію появи деякого випадкового числа A із нескінченної множини чисел при незмінних зовнішніх умовах. Нехай N – загальна кількість спостережень або вимірювань, N_A – кількість подій, коли спостерігалось число A. **Ймовірність настання події *A*** визначається формулою

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}. \tag{3.1}$$

Події називаються **незалежними**, якщо ймовірність настання однієї з них не залежить від того, здійснилась чи ні інша подія. Події називаються **взаємно виключними**, якщо настання однієї події робить неможливим здійснення другої. Події є **рівноймовірними**, якщо ймовірність їх настання однакова.

Нехай є дві незалежні події A і B, імовірності настання яких $P(A)$ і $P(B)$ відповідно. Тоді імовірність того, що відбудеться ***або*** *подія A* ***або*** *подія B*, визначається формулою

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{3.2}$$

де $$P(AB) = N_{AB}/N = P(A)\cdot P(B) \tag{3.3}$$

ймовірність здійснення двох очікуваних подій A і B (одночасно або послідовно, але в одному циклі спостережень). Для взаємно виключних подій $P(AB)$=0. Формула (3.2) визначає **додавання ймовірностей**. Вираз (3.3) визначає ймовірність того, що відбудеться ***і*** *подія A* ***і*** *подія B* і називається **множенням ймовірностей**.

Якщо відомі ймовірності P_i всіх m можливих взаємно виключних подій в даній системі, то

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) називається **умовою нормування ймовірностей**.

Якщо випадкова величина x приймає ряд дискретних значень x_1, x_2, x_3,…, x_n, серед яких є групи $\boldsymbol{n_j}$ однакових $\boldsymbol{x_j}$, то для визначення середнього значення дискретної випадкової величини можна записати

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n_j \cdot x_j) = \sum_j \frac{n_j}{n} x_j = \sum_j P_j x_j \ . \qquad (3.5)$$

При **n→∞** ця формула визначає *математичне сподівання випадкової величини* з врахуванням імовірності.

"Розкид" випадкової величини навколо її істинного значення характеризується *дисперсією*. Вона визначається середнім значенням квадрата відхилення від істинного значення за наступною формулою

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \ . \qquad (3.6)$$

Корінь квадратний із дисперсії називається **стандартним або середньоквадратичним відхиленням** (СКВ) $\sigma = +\sqrt{D}$. З врахуванням ймовірності формулу (3.6) можна також переписати: $\sigma^2 = \sum_j (x_j - \overline{x})^2 P_j$.

Приклади розв'язку задач

Задача 3.1.

Багаторічні спостереження погоди в деякій місцевості показали, що 20 % днів в листопаді погода безхмарна, а в 20 % хмарних днів йде дощ. Визначити, скільки процентів в листопаді складають дні, коли йде дощ, і яка ймовірність того, що деякий наперед заданий день буде дощовий ?

Розв'язок.

Ймовірність *P*(б) безхмарного дня дорівнює 0,2. Отже, ймовірність хмарного дня дорівнює *P*(х) = 1-*P*(б) = 0,8. Дощовими можуть бути тільки хмарні дні, тому ймовірність дощового дня в умові задачі є умовною. Ймовірність, що день дощовий за умови, що він хмарний, дорівнює *P*(д/х) = 0,2. Ймовірність, що день дощовий, за умови, що він безхмарний, *P*(д/б) = 0. Тому ймовірність того, що наперед заданий день дощовий, за формулою множення ймовірності дорівнює ***P*(д) =** *P*(х)·*P*(д/х) = 0,8·0,2 = **0,16**. Отже, дощові дні в листопаді в цій місцевості складають **16 %** всіх днів.

Задача 3.2.

Ймовірність появи випадкової величини x (функція $P(x)$) задана таблицею. Обчислити середнє значення $\overline{x}$, дисперсію D і СКВ.

x	1	2	3	4	5
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Розв'язок.

За формулою (3.5) знаходимо $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i =$

$$= 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}3 = \mathbf{3{,}6}.$$

Коли б в таблиці всі $P_i = P$=const (це означає, що P=1/5, тому що за умовою нормування сума всіх ймовірностей P_i повинна = 1), то середнє значення величини x було б: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i P = P \sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{15}{5} = 3$.

Бачимо, що в цьому випадку формула (3.5) приймає вигляд звичної формули знаходження середнього арифметичного n даних.

За формулою (3.6) знайдемо дисперсію:

$$\boldsymbol{D} = (1-3{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (2-3{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (3-3{,}6)^2 \cdot 0{,}2 + (4-3{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (5-3{,}6)^2 \cdot 0{,}3 = \mathbf{1{,}64},$$

а $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1{,}28}$.

Задача 3.3.

В урні є n = 30 чорних і m = 10 білих куль, в іншому ідентичних між собою. Кулі добре перемішані. Знайти імовірності P(ч) і P(б) виймання чорної і білої кулі з ящика при одній спробі. Перевірити виконання умови нормування. Знайти ймовірності послідовного виймання двох чорних двох білих, чорної і білої, білої і чорної куль, якщо після першого виймання вийнята куля повертається в урну і якщо вона не повертається.

Розв'язок.

Оскільки будь-які обставини, що забезпечують переважаючі умови виймання деякої конкретної кулі (білої або чорної), відсутні, ймовірність виймання при випробовуванні для всіх куль однакова і дорівнює 1/(n+m). Отже, за формулою додавання ймовірність вийняти при досліді будь-якої чорної кулі дорівнює

$$\boldsymbol{P}(\text{ч}) = \underbrace{1/(\mathrm{n}+\mathrm{m}) + 1/(\mathrm{n}+\mathrm{m}) + \ldots + 1/(\mathrm{n}+\mathrm{m})}_{n \text{ разів}} = n/(n+m) = 0{,}75. \qquad (3.7)$$

Аналогічно, імовірність виймання білої кулі $\boldsymbol{P}(\text{б}) = \boldsymbol{m}/(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}) = \mathbf{0{,}25}$.

Оскільки ці дві події складають повний набір всіх можливих результатів дослідів, вони повинні задовольняти умові нормування ймовірності. Перевірка цієї обставини служить одночасно перевіркою правильності проведеного розрахунку:

$$P(\text{ч}) + P(\text{б}) = n/(n+m) + m/(n+m) = 1.$$

Якщо здійснюється послідовне виймання двох куль, то можливих результатів подій чотири: біла-біла (бб), чорна-чорна (чч), біла-чорна (бч), чорна-біла (чб). Оскільки ці чотири результати складають повний набір можливих результатів, їх ймовірності повинні задовольняти умові нормування $P(бб) + P(чч) + P(бч) + P(чб) = 1$.

Якщо після першого досліду вийнята куля повертається в урну, то ймовірність вийняти кулю певного кольору при другій спробі така ж, як і при першій. Отож,

$P_1(б) = P_2(б) = m/(n+m) = 0{,}25$; $P_1(ч) = P_2(ч) = n/(n+m) = 0{,}75$.

Ймовірність результату другого виймання не залежить від результату першого виймання, тобто події першої і другої спроб незалежні. Тому для ймовірності результату двох послідовний виймань згідно формули множення ймовірностей (3.3) одержуємо:

$$P(бб) = P_1(б)\cdot P_2(б) = [m/(n+m)]^2 = 0{,}0625;$$
$$P(чч) = P_1(ч)\cdot P_2(ч) = [n/(n+m)]^2 = 0{,}5625;$$
$$P(бч) = P_1(б)\cdot P_2(ч) = [m/(n+m)][n/(n+m)] = 0{,}1875;$$
$$P(чб) = P_1(ч)\cdot P_2(б) = [n/(n+m)][m/(n+m)] = 0{,}1875;$$

а умова нормування має вигляд

$$\left(\frac{n}{n+m}\right)^2 + \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 + \frac{nm}{(n+m)^2} + \frac{mn}{(n+m)^2} = 1.$$

Якщо після першого випробовування вийнята куля не повертається в урну, то результат другого виймання залежить від того, що відбулося при першому, тобто в другій спробі ми маємо вже справу з умовною ймовірністю. При першому вийманні ймовірності вийняти білу і чорну кулі, так же як і в попередньому випадку, задаються формулами (3.7). При другому вийманні умови змінюються. Якщо в першому вийманні була вийнята біла куля, то ймовірність вийняти білу кулю в другому вийманні $\boldsymbol{P_2(б/б)} = (m-1)/(n+m-1) \mathbf{= 0{,}231}$, оскільки при другому вийманні в урні знаходиться всього $\underline{n+m-1}$ куль і із них $\underline{m-1}$ білих. Аналогічно, умовні ймовірності інших результатів другого виймання задаються формулами:

$$P_2(ч/ч) = (n-1)/(m+n-1) = 0{,}744;\quad P_2(б/ч) = m/(m+n-1) = 0{,}256;$$
$$P_2(ч/б) = n/(n+m-1) = 0{,}769.$$

Умовні ймовірності при другому вийманні не задовольняють умові нормування, тому що відповідні події не є взаємовиключними. Наприклад, біла куля може бути витягнута як після чорної кулі, так і після білої, і так далі.

Ймовірність того, що буде послідовно вийнято дві білі кулі, у відповідності з формулою (3.3) дорівнює

$$\underline{P(бб)} = P_1(б)\cdot P_2(б/б) = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n+m}}\frac{m-1}{n+m-1} = 0{,}25\cdot 0{,}231 = \underline{0{,}058}.$$

Аналогічно,

$\underline{P(чч)} = P_1(ч)\cdot P_2(ч/ч) = [n/(n+m)]\cdot[(n-1)/(m+n-1)] = 0{,}75\cdot 0{,}744 = \underline{0{,}558}$;

$P(бч) = P_1(б)\cdot P_2(ч/б) = [m/(n+m)]\cdot[n/(n+m-1)] = 0{,}25\cdot 0{,}769 = 0{,}192$;

$P(чб) = P_1(ч)\cdot P_2(б/ч) = [n/(n+m)]\cdot[m/(m+n-1)] = 0{,}75\cdot 0{,}256 = 0{,}192$.

Сукупність подій двох виймань складає повну систему взаємовиключних один одного подій і повинна задовольняти умові нормування. Перевіримо це:

$$\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}+\frac{m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}+\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}+\frac{mn}{(n+m)(n+m-1)}=1.$$

Тим самим перевірено також, що в розрахунках враховані всі можливі результати двох виймань. Перевіркою правильності обчислень може служити рівність одиниці суми ймовірностей окремих виймань: 0,558 + 0,058 + 0,192 + 0,192 = 1,0. В межах прийнятої при розрахунках точності цей результат підтверджує правильність числових значень для ймовірностей окремих результатів виймань куль.

Оскільки чорних куль в урні приблизно в три рази більше, ніж білих, імовірність події, коли із двох вийнятих куль хоча б одна чорна, суттєво більше імовірності події, коли чорна куля не виймається, тобто виймаються дві білі кулі. Майже в 60% випадків будуть вийматися дві чорні кулі і майже в 40% випадках – чорна і біла. Дві білі кулі будуть вийняті менше, ніж в одному з десяти випадків.

Задачі для самостійного розв’язку

3.4. На автобусній зупинці вивішено такий інтервал руху міських автобусів: автобус №1 приходить з інтервалом 6 хвилин, автобус №2 – з інтервалом 12 хвилин, а №3 – 24 хвилини. Визначити ймовірність того, що протягом перших 2 хвилини очікування до зупинки під’їде автобус №1 ?, №2 ?, №3? , №1 або №3 ?, №1 і №2 ?, всі разом?

3.5. Ймовірність появи випадкової величини x (функція імовірності $P(x)$) задана таблицею. Обчислити середнє значення $\bar{x}$, дисперсію D і СКВ $\boldsymbol{\sigma}$.

x	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

3.6. В урні є $n = 10$ чорних і $m = 5$ білих куль, в іншому ідентичних між собою. Кулі добре перемішані. Знайти ймовірності $P(ч)$ і $P(б)$ виймання чорної і білої кулі з ящика при одній спробі. Перевірити виконання умови нормування. Знайти ймовірності послідовного виймання двох чорних, двох білих, чорної і білої, білої і чорної куль, якщо після першого виймання вийнята куля поверталася в урну.

3.7. Із 150 експериментальних числових даних число 7 зустрічається 10 разів, число 8 – 30 разів, число 9 – 40 разів, число 10 – 50 разів, число 11 – 20 разів. Скласти таблицю розподілу ймовірності і знайти середнє значення та дисперсію.

3.8. Вивчення роботи машиністки виявило, що вона за 20 % робочих днів у році робить менше 4-х помилок, протягом 50 % число помилок від 5 до 10, а в інші 30 % днів число помилок перевищує 10. Визначити ймовірності появи цих кількостей помилок у машиністки протягом середньорічного робочого дня.

3.9. В деякому об’ємі перебувають у хаотичному русі 10 молекул. Яка імовірність того, що в деякий момент часу всі ці молекули опиняться в одній половині об’єму ?

3.10. Із колоди (36 карт) послідовно навмання виймають три карти. Яка ймовірність того, що всі вони будуть тузами?

3.11. Яка ймовірність того, що при киданні кубика для ігор випаде: а) або 1 або 6; б) парне число?. Яка ймовірність того, що при киданні двох однакових кубиків випаде 1 і 5?

3.12. Два мисливці майже одночасно, але незалежно, стріляють в одного зайця. Яка ймовірність того, що заєць буде застрелений, якщо ймовірність попадання у ціль першим мисливцем дорівнює 0,8, а другим 0,7?

Тема 4. Закони розподілу випадкових похибок

Основні поняття і формули

Математичний вираз, який дає зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями їх появи, називається законом розподілу випадкових величин.

Якщо випадкова величина x приймає ряд дискретних значень x_1, x_2, x_3, ... , x_k, то найбільш проста форма закону розподілу – це задати значення ймовірності для кожного *дискретного* значення випадкової величини: $p(x=x_1)$, $p(x=x_2)$, $p(x=x_3)$, ... , $p(x=x_k)$, при цьому в загальному випадку x_i можуть набувати будь-яких значень, а на величину $p(x=x_i)$ накладаються обмеження:

$$0 \le p(x=x_i) \le 1, \;\; p(x=x_1) + p(x=x_2) + p(x=x_3)+...+ p(x=x_k) = 1. \quad (4.1)$$

Якщо випадкова величина набуває *неперервний* ряд значень (і це вже є нескінчена множина значень x, хоча, можливо, і в обмеженому інтервалі, наприклад, від 1 до 2), то і тоді існує закон розподілу випадкових величин, але форма його відрізняється від закону розподілу дискретних випадкових величин.

Часто нас цікавить не ймовірність появи певного значення $\boldsymbol{x_i}$, – $p(x=x_i)$, а ймовірність події $\boldsymbol{p(x<x_i)}$, що вимірювана величина прийматиме значення менші за $\boldsymbol{x_i}$. Ця ймовірність є деякою функцією

$$\boldsymbol{p(x<x_i) = F(x_i)}, \quad (4.2)$$

де $\boldsymbol{x_i}$ – довільне наперед задане значення величини x. Функція $\boldsymbol{F(x_i)}$ називається *функцією розподілу <u>ймовірності</u>* випадкової величини або **інтегральною функцією розподілу**.

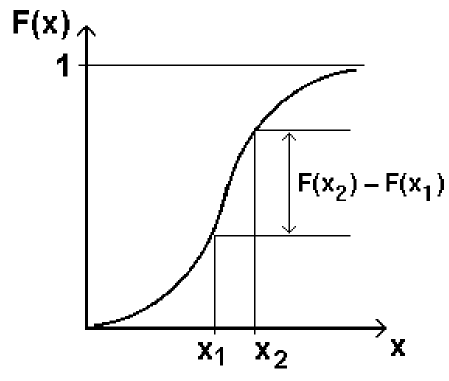


Рис.4.1.
Функція розподілу ймовірності неперервно змінної величини x.

На рис.4.1 приведений графік однієї з можливих інтегральних функцій розподілу $F(x)$. Основні властивості функції:

3. $F(x)\ge 0$ (може приймати тільки додатні значення, як і будь-яка ймовірність).
4. Якщо $x_2>x_1$, то $F(x_2)>F(x_1)$, ($F(x)$ <u>неспадна</u> функція свого аргументу).
5. $F(-\infty)=0$; 4. $F(+\infty)=1$.

Виходячи з цих властивостей, знайдемо ймовірність того, що вимірювана величина x прийме значення в інтервалі від x_1 до x_2 ($x_1<x<x_2$). З теореми про додавання (а також віднімання) ймовірностей незалежних подій випливає:

$$p(x_1<x<x_2) = p(x<x_2) - p(x\leq x_1) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (4.3)$$

Так як $F(x)$ є неспадною і неперервною, то при $x_2=x_1$ отримаємо, що $\boldsymbol{p(x=x_1)=0}$ – ймовірність появи при вимірюванні будь-якого наперед заданого конкретного значення неперервно змінної випадкової величини дорівнює нулю. Тому має зміст говорити про ймовірність виявити (отримати) значення $x=x_0$ вимірюваної фізичної величини (ФВ) тільки в певному інтервалі її значень.

Для опису розподілу значень випадкової величини, яка змінюється неперервно, поряд з $F(x)$ використовується функція $\boldsymbol{f(x)}$, яка характеризує швидкість зміни $F(x)$ при зміні значень x, а математично визначається як похідна від функції розподілу ймовірності:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}; \quad dF(x) = f(x)dx. \qquad (4.4)$$

З (4.3) також виливає, що $\boldsymbol{dp=f(x)dx}$. Функція $\boldsymbol{f(x)}$ називається *густиною ймовірності* неперервної випадкової величини або **диференціальною функцією розподілу** і чисельно дорівнює ймовірності появи значення ФВ в *одиничному* інтервалі в околі x. Вона застосовна для опису розподілів тільки неперервно змінних випадкових величин. На рис.4.2 зображено графік однієї з можливих *функцій розподілу густини ймовірності*. Із (4.4) випливають наступні рівності:

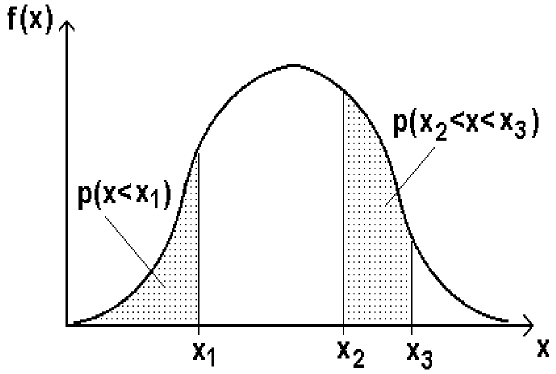


Рис.4.2. Графік функції розподілу густини ймовірності випадкової неперервно змінної величини.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad (4.5)$$

$$p(x<x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx, \qquad (4.6)$$

$$p(x_2<x<x_3) = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx. \qquad (4.7)$$

Функція $f(x)$ нормована на одиницю: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (4.8)$

Геометрично це означає, що у вибраних координатах площа під кривою графіка дорівнює одиниці. Крім (4.5)-(4.8) функція $f(x)$ повинна задовольняти умовам:

1) $f(x)\geq 0$; 2) $f(-\infty) = 0$; 3) $f(+\infty) = 0$.

Знаючи $f(x)$, легко визначити математичне сподівання $\boldsymbol{M(x)}$, яке ототожнюється з істинним значенням $\boldsymbol{x_0}$, і дисперсію $\boldsymbol{D(x)}$:

$$x_0 = M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (4.9) \qquad \sigma^2(x) = D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_o)^2 f(x) dx. \quad (4.10)$$

В статистиці і при обробці результатів вимірювань найбільш часто використовують **нормальний розподіл (розподіл Гауса)**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad (4.11)$$

Графік цієї функції приблизно відповідає графіку на рис.4.2: функція має максимум при $x=x_o$; крива симетрична відносно осі ординат, що проходить через точку $x=x_o$ і має дві точки перегину, що відповідають абсцисам $x= x_o \pm \sigma$; вона асимптотично наближається до осі абсцис. Параметрами розподілу Гауса є величини $\boldsymbol{x_0}$ і $\boldsymbol{\sigma}$.

Постулат про нормальний розподіл випадкових похибок. Випадкові похибки вимірювання, якими би грубими вони не були, не можуть приймати значення від $-\infty$ до $+\infty$, а це означає, що вони (теоретично) не можуть підкорятися нормальному розподілу випадкових величин. Тому використання функції Гауса в теорії похибок базується на таких припущеннях:

а) похибки вимірювань можуть приймати неперервний ряд значень;

б) при дуже великій кількості дослідів (вимірювань) похибки одного значення, але протилежного знаку зустрічаються однаково часто, тобто вони рівноймовірні;

в) частота появи похибок зменшується з ростом абсолютної величини похибки – великі похибки зустрічаються рідше, ніж малі;

г) похибки окремих вимірювань взаємно незалежні (тоді вибірку можна розглядати як реалізацію незалежних випадкових величин);

д) похибки обумовлені багатьма незалежними причинами.

Однаковим законам розподілу описуються незалежні випадкові величини, вимірювання яких проведені одним методом при однакових умовах, тобто при *рівноточних* вимірюваннях.

Оскільки в результаті вимірювань елементи вибірки одержані з похибками, то і параметри закону розподілу випадкових величин не можуть бути визначені точно. Мова може йти тільки про оцінку параметрів розподілу і значення вимірюваної величини. Для нормального розподілу похибок необхідно знати оцінку математичного сподівання $M(x)\equiv x_o$ (середнє арифметичне всіх елементів вибірки $\bar{x}$) і дисперсії σ (середнє квадратичне відхилення S_n) (див. тему № 3).

Для зручності табулювання функції густини ймовірності при нормальному розподілі вводиться *безрозмірна випадкової змінна* ***z*** (*зведена похибка*, тоді вісь ординат завжди проходитиме через точку z=0), для якої функція Гауса приймає вигляд:

$$z=\frac{x-x_0}{\sigma}\approx\frac{x-\bar{x}}{S_n}; \quad f(x)=\frac{1}{\sigma}f(z), \text{ де функцію } f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (4.12)$$

називають ***стандартним*** *або* ***зведеним нормальним розподілом***. Відповідно з (4.5), інтеграл ймовірності густини розподілу $f(z)$ можна представити виразом

$$F^*(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{Z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz}. \qquad (4.13)$$

Враховуючи симетричність площі під кривою $f(z)$ відносно ординати z=0 і її нормування на 1, інтеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}$. (4.14)

Другий інтеграл в (4.13) дістав назву **функція Лапласа *F*(*Z*)** або **інтеграл ймовірності *P*/2**. Він визначає ймовірність попадання значення зведеної похибки z в інтервал від 0 до $Z=Z_{max}=(x_{max}-x_o)/\sigma$, де x_{max} – максимальне відхилення випадкової величини від свого істинного значення (яке в практичних розрахунках оцінюється її середнім арифметичним $\bar{x}$).

За нормального розподілу похибок і відомому σ (або S_n) ймовірність попадання похибки в симетричний довірчий інтервал $\boldsymbol{\Delta x=\pm Z\sigma}$ визначається за формулою

$$P(x_o\text{-}Z\sigma<x<x_o+Z\sigma) = 2F(Z)=2F(\Delta x/\sigma) = \alpha \qquad (4.15)$$

і носить назву **довірчої ймовірності *P*** або **коефіцієнта надійності α**. Значення функції $F(Z)$ для деяких Z подані в таблиці 4.1 (змінну Z ще називають *квантіль* розподілу $F(Z)$; при відомій ймовірності P її також знаходять з таблиці 4.1).

Якщо вид розподілу невідомий, то ймовірність того, що при <u>одноразовому</u> вимірюванні випадкова похибка за абсолютним значенням <u>не</u> перевищить наперед задане значення **ε**, можна оцінити, використовуючи *нерівність (Чебишева)* $P(|\Delta x|<\varepsilon)\geq 1-(\sigma/\varepsilon)^2$. Але інтервали, які одержуються за цією нерівністю, виявляються досить широкими, тому на практиці спочатку визначають вид розподілу, задають довірчу ймовірність P і тоді обчислюють довірчий інтервал $\Delta(P)$.

Таблиця 4.2. Значення нормованої функції Лапласа $F(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^Z e^{-z^2/2}dz$;

$$P=p(x_o-\sigma Z<x\le x_o+\sigma Z)=2F(Z)=\alpha$$

Z	$F(Z)$	**Z**	$F(Z)$	**Z**	$F(Z)$	**Z**	$F(Z)$	**Z**	$F(Z)$
0,0	0,00000	0,9	0,31594	1,8	0,46407	2,7	0,49653	3,6	0,49984
0,1	0,03983	1,0	0,34134	1,9	0,47128	2,8	0,49744	3,7	0,49989
0,2	0,07926	1,1	0,36433	2,0	0,47725	2,9	0,49813	3,8	0,49993
0,3	0,11791	1,2	0,38493	2,1	0,48214	3,0	0,49865	3,9	0,49995
0,4	0,15542	1,3	0,40320	2,2	0,48610	3,1	0,49903	4,0	0,49997
0,5	0,19146	1,4	0,41924	2,3	0,48928	3,2	0,49931	4,5	0,49999
0,6	0,22575	1,5	0,43319	2,4	0,49180	3,3	0,49952		
0,7	0,25804	1,6	0,44520	2,5	0,49379	3,4	0,49966		
0,8	0,28814	1,7	0,45543	2,6	0,49534	3,5	0,49977		

Похибка вимірювання $\Delta x=x-x_o \approx x-\bar{x}$ в загальному випадку може містити дві складові – випадкову і систематичну: $\Delta x=\Delta x_в+\Delta x_{сис}$. Характер залежності функції розподілу від значення ФВ x і від значення її похибки Δx один і той же (лише максимум розподілу зміщений по осі абсцис на величину x_o). Враховуючи формулу (4.9) і однакову ймовірність виникнення випадкових похибок протилежних знаків і, отже, рівність нулю їх математичного очікування $M(\Delta x_в)=0$, для похибки Δx математичне очікування дорівнює

$$M(\Delta x) = M(\Delta x_в + \Delta x_{сис}) = M(\Delta x_{сис}). \quad (4.16)$$

Ми одержали, що математичне очікування похибки вимірювання дорівнює систематичній похибці. ***Систематична похибка $\Delta x_{сис}$*** *– це відхилення математичного сподівання результатів вимірювань від істинного значення* $\mathbf{x_o}$ *вимірюваної величини*:

$$\Delta x_{сис}=M(x)-x_o=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx-x_o\approx\bar{x}-x_o. \quad (4.17)$$

Дисперсія (розсіювання) систематичної похибки дорівнює нулю, тому дисперсія результатів вимірювання x дорівнює дисперсії випадкових похибок Δx

$$D(x)=D(\Delta x)=D(\Delta x_в)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_o)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta x_в^2 f(\Delta x_в)d\Delta x_в. \quad (4.18)$$

Якщо $\Delta x_{сис}$=0, а ймовірність одержати відхилення деякої випадкової величини x внаслідок наявності випадкової похибки $\Delta x_в$ у сторону менших значень така ж, як і до більших, то функція $F(\Delta x_в)$ буде перетинати вісь ординат в точці 0,5. Тоді функція $F(\Delta x)=F(\Delta x_в+\Delta x_{сис})$ буде зміщена по осі абсцис на величину $\boldsymbol{\Delta x_{сис}}$ (рис.4.3).

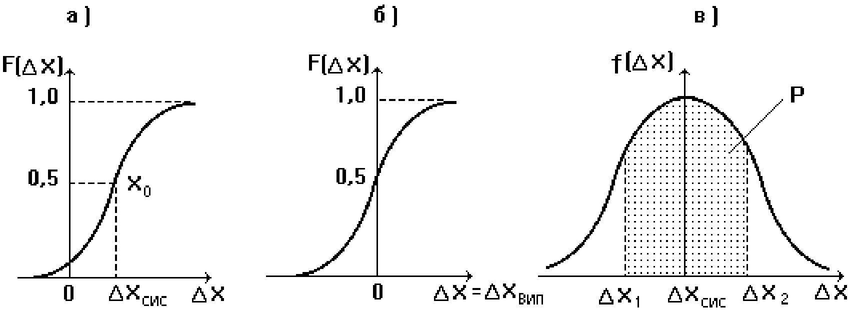


Рис.4.3. Графіки функції розподілу ймовірності (а і б) і густини ймовірності (в) випадкової величини: а – $\Delta x_{сис} \neq 0$; б і в – $\Delta x_{сис} = 0$

Приклади розв'язку задач

Задача 4.1

Похибка вимірювання напруги ΔU розподілена за нормальним законом, систематична похибка $\Delta U_с$=0, середнє квадратичне відхилення (СКВ) σ = 60 мВ. Яка ймовірність того, що результат виміру $\boldsymbol{U_x}$ буде відрізнятися від істинного значення U не більше, ніж на 144 мВ.

Розв'язок.

Ймовірність одержати відхилення результату вимірювання $\Delta U = U_x - U$ від істинного значення в інтервалі $-144 \le \Delta U \le 144$ знаходиться за формулою (4.7):

$$P = \int_{U_1}^{U_2} f(U)dU = \int_{U-144}^{U+144} f(U_x)dU_x = \int_{-144}^{+144} f(\Delta U)d(\Delta U) \,, \qquad (4.19)$$

де $f(U_x)$ – функція Гауса. При відсутності систематичної похибки вона симетрична відносно істинного значення U або відносно точки ΔU=0, а $f(U_x) = f(\Delta U)$, то формулу (4.19) можна представити так:

$$P = 2\int_0^{\Delta U_{max}} f(\Delta U)d(\Delta U) = 2\int_0^{144} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sigma} d(\Delta U) = 2\int_0^{144/60} f(z)dz = 2F(Z),$$

де $z=\Delta U/\sigma$ і Z=144/60 – зведені похибки, $f(z)$ – *стандартний* розподіл (нормований розподіл Гауса), а $F(Z)$ – функція Лапласа, значення якої табульовані за аргументом Z (табл.4.1). Для Z= **2,4** знаходимо, що $F(Z)$ = 0,49180. Отже, ймовірність ***P* = 0,984** (або P = 98,4%).

Задача 4.2.

Результат вимірювання струму містить випадкову похибку, яка розподілена за нормальним законом. Середнє квадратичне відхилення σ = 4 мА, систематична похибка Δ_c=0. Визначити ймовірність того, що похибка окремого вимірювання перевищить за абсолютним значенням 12 мА.

Розв’язок.

Функція $f(\Delta I)$ є функцією Гауса і вона симетрична відносно початку координат. Для знаходження ймовірності того, що випадкова похибка $\Delta x = \pm\Delta I$ за абсолютним значенням буде більше 12 мА, необхідно взяти інтеграли (4.6): $P = \int\limits_{\infty}^{-12} f(x)dx + \int\limits_{12}^{\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{12}^{\infty} f(x)dx$. Взяти цей інтеграл важко. Але, використавши функцію Лапласа $F(Z)$ (задача 4.1) можемо знайти таку ймовірність

$P(\Delta I \le |\pm 12|) = 2F(Z) = 2\ F(12/4) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$.

Тоді ймовірність знайти значення струму під час вимірів з похибкою більшою за ±12 буде ***P*** = 1 – 0,0073 = 0,0027 (0,27 %).

Задача 4.3.

Результат вимірювання напруги містить випадкову похибку, розподілену за нормальним законом з σ=60 мВ, систематична похибка $\Delta_{сис}$=-40 мВ,. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання попаде в інтервал $U_{іст}$.±20 (мВ).

Розв’язок.

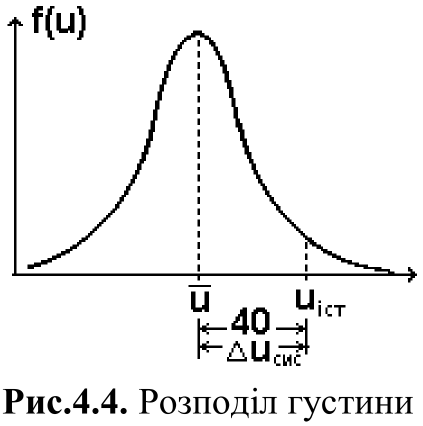


Рис.4.4. Розподіл густини ймовірності при $\Delta U_{сис} \neq 0$

За означенням, систематична похибка $\Delta U_{сис} = M(U) - U_{іст}$=-40 мВ, де $M(U)$ – математичне сподівання результату вимірювання, за яке наближено можна прийняти середнє значення $U_{сер}$ сукупності рівноточних вимірювань і яке відповідає максимуму функції $f(U)$. Тоді істинне значення напруги $U_{іст} = M(U) - \Delta U_{сис} \cong U_{сер} - \Delta U_{сис} = U_{сер}+40$. На осі абсцис воно знаходиться правіше на 40 мВ від значення максимуму функції розподілу невиправлених даних $f(U)$ (рис.4.4). Систематична похибка взята з протилежним знаком називається *поправкою*, тобто П=+40 мВт. Додавши поправку до показу приладу, одержимо виправлений результат вимірювання U^*, математичне сподівання якого $M[U^*]$ буде співпадати з істинним значенням результату ($U_{іст}$).

Тут для розв'язку задачі вже не можна безпосередньо використати функцію Лапласа, тому що параметр Z в ній відбиває відхилення від середнього значення ($\Delta U=U-U_{сер}$). Але його можна тепер знайти. З графіка видно, що $\Delta U_1=U_{іст}$-20=20, а ΔU_2= $U_{іст}$+20=60, тобто шукати значення ймовірності необхідно в інтервалі від 20 до 60 (мВ) або від Z_1=20/60=1/3 до Z_2=1. З табл.4.1 виходить, що ймовірність появи значення U в інтервалі (0–20) буде $F(Z_1)\approx0{,}13$, а в інтервалі (0–60) – $F(Z_2)\approx0{,}34$. А нам потрібно – в інтервалі (20–60), отже, беремо різницю і отримуємо, що виміряне невиправлене значення U буде у визначеному інтервалі з ймовірністю $P \approx 0{,}21$ (21 %).

Задача 4.4.

Оцінити ймовірність того, що опір R відрізняється від свого математичного очікування $M(R)$ не більше, ніж на 1 Ом. Закон розподілу похибок невідомий, середнє квадратичне відхилення $\sigma_R = 0{,}4$ Ом.

Розв'язок.

Оцінку ймовірності появи результату вимірювання в інтервалі значень з відомими межами при невідомому законі розподілу можна зробити використавши нерівність Чебишева. Випадкова похибка ΔR при одноразовому вимірюванні опору повинна задовольняти умові $|\Delta R| \le \varepsilon$, де $\varepsilon=1$. Тоді ймовірність появи при вимірювані значення R в інтервал **[**$M(R)$-1, $M(R)$+1**]** дорівнює

$$\boldsymbol{P}(|\Delta|\le1) \ge 1 - (0{,}4)^2/1 = 1 - 0{,}16 = \mathbf{0{,}84.}$$

Задача 4.5.

Похибки вимірювання ФВ рівномірно розподілені в інтервалі значень від -1 до +2 (по за ними похибки відсутні). Знайти значення функції розподілу густини ймовірності та дисперсію.

Розв'язок.

Ясно, що, так би мовити, функцією рівномірного розподілу густини ймовірності похибок є деяке стале значення, $f(x)$=const, точніше, $f(x)=C$ (на рис.4.5 його графік) і нам необхідно визначити це число C.

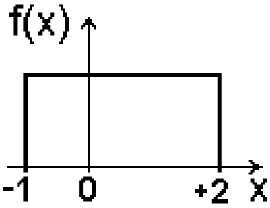


Рис.4.5. Рівномірний розподіл

Для цього скористаємося умовою нормування:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} Cdx = 1 \ \rightarrow \ C(2\text{-}(\text{-}1))=1 \ \rightarrow \ C=1/3.$$

Отже, шукана функція – $f(x)=1/3$. Перевіримо: площа під лінією (прямокутника) має дорівнювати одиниці (це умова нормування) – $\underline{(1/3)\cdot 3 = 1}$.

Визначимо середнє значення і дисперсію неперервно змінної випадкової величини:

$$\bar{x} = \int_{-1}^{2} xCdx = \frac{1}{3}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \underline{+0{,}5}; \quad D = \int_{-1}^{2} (x-0{,}5)^2 \frac{1}{3} d(x-0{,}5) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-0{,}5)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{9}[(1{,}5)^3 - (-1{,}5)^3] = \frac{1}{9}(3{,}375 + 3{,}375) = \underline{0{,}75} \quad (\sigma = 0{,}866).$$

Задача 4.6.

Похибка результату вимірювання напруги розподілена по закону Сімпсона (рис.4.6) в інтервалі від -1 до +3 мВ. Визначити систематичну похибку і середнє квадратичне відхилення результату вимірювання; ймовірність того, що виправлений результат вимірювання відрізняється від істинного значення вимірюваної напруги не більше, ніж на 1 мВ.

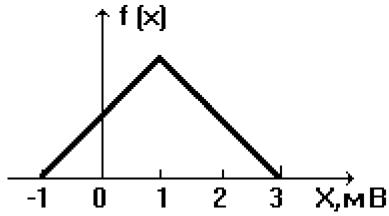


Рис. 4.6 Розподіл Сімпсона

Розв’язок.

При відсутності систематичної похибки, максимум функції густини розподілу випадкової похибки одержується при $\Delta_в=0$, адже її математичне очікування (середнє значення) $M(\Delta_в)$ дорівнює 0, інакше $M(\Delta)=M(\Delta_в+\Delta_{сис}) = M(\Delta_{сис})$, тобто максимум $f(\Delta)$ припадає на значення $\Delta=\Delta_{сис}$. Отже, відповідно рисунку, $\mathbf{\Delta_{сис}=+1}$ **мВ**. Ввівши поправку у дані вимірювань $\underline{П=-\Delta_{сис}=-1}$ мВ (додаємо цю величину до кожного виміряного значення напруги), ми виключимо систематичну похибку і отримаємо виправлений результат з максимумом функції $f(\Delta)$ саме при $\Delta=0$ і межами похибки (вже тільки випадкової) [-2,+2].

Функція розподілу Сімпсона для випадкової похибки (позначимо її для зручності записів x) задається формулою: $f(x)=(b-|x|)/b^2$, де b – межі похибки (±2). Тоді дисперсія, враховуючи симетричність функції відносно точки $x=0$, дорівнює (4.18):

$$D = 2\int_0^2 x^2 \frac{2-x}{4}dx = \frac{2}{3},\ \text{а СКВ } \sigma = 0{,}82.$$

Імовірність знайти похибку у заданому інтервалі знаходимо за формулою (4.7): $P(-1 \le x \le +1) = \int_{-1}^{0} \frac{2+x}{4}dx + \int_0^1 \frac{2-x}{4}dx = 2\int_0^1 \frac{2-x}{4}dx = 0{,}75$.

Задача 4.7.

Визначити середнє арифметичне значення неперервної випадкової величини x у діапазоні значень від 0÷1, дисперсію і СКВ, якщо функція густини імовірності задана законом $f(x)=\mathrm{a}x^2$.

Розв'язок.

Щоб скористатися формулами (4.9) і (4.10) для знаходження середнього значення (математичного сподівання) і дисперсії, необхідно знати явний вид функції розподілу, в даному випадку – чисельне значення коефіцієнта **a**. Для цього використаємо умову нормування (4.8): обчислимо інтеграл в межах від 0 до 1 (в іншому діапазоні значень x немає) і прирівняємо результат до одиниці.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx = a\left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = \frac{a}{3} = 1$. Звідси, $a = 3$ і $f(x)=3x^2$.

Тепер знаходимо середнє значення випадкової величини

$\bar{x} = \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 3x^3dx = 3 \cdot \frac{1^4 - 0}{4} = \frac{3}{4}$ та дисперсію

$$D = \int_0^1 (x - \frac{3}{4})^2 3x^2dx = \int_0^1 (3x^4 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{16}x^2)dx = \frac{3}{5} - \frac{9}{8} + \frac{27}{48} = \frac{3}{80} = 0{,}0375 \approx 0{,}038;$$

СКВ – це корінь із дисперсії, $\sigma = 0{,}19$.

Задача 4.8.

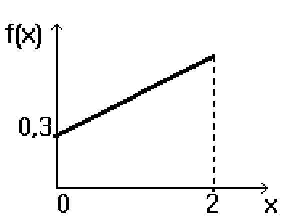


Рис. 4.7

Визначити $\bar{x}$, D, σ, якщо в інтервалі від 0 до 2 функція розподілу густини ймовірності задана графіком (рис.4.7). Знайти ймовірність одержати значення x в інтервалі $[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma]$.

Розв'язок.

У відповідності з рисунком функція розподілу є лінійною і в загальному випадку може бути записана: $f(x)=kx+b$, де k, b деякі постійні, значення яких необхідно знайти.

З графіка видно, що при x=0 функція $f(x)=b=0{,}3$. Щоб знайти коефіцієнт k, скористаємось умовою нормування:

$$\int_0^2 (kx+0{,}3)dx = \int_0^2 kxdx + \int_0^2 0{,}3dx = \frac{k\cdot 2^2}{2} + 0{,}3\cdot 2 = 2k + 0{,}6 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{k = 0{,}2}.$$

Підставивши ці значення, маємо: $\underline{f(x)=0{,}2x+0{,}3}$.

Тепер вже можна визначити $\bar{x}$, D, σ, використовуючи формули (4.9) і (4.10):

$$\bar{x} = \int_0^2 x(0{,}2x+0{,}3)dx = 0{,}2\cdot\frac{2^3}{3} + 0{,}3\cdot\frac{2^2}{2} \approx \underline{1{,}1}; \qquad D = \int_0^2 (x-1{,}1)^2(0{,}2x+0{,}3)dx =$$

$$= \int_0^2 (0{,}2x^3 - 0{,}14x^2 - 0{,}418x + 0{,}363)dx \approx 0{,}3; \qquad \underline{\sigma \approx 0{,}5}.$$

Знаємо $\bar{x}$ і σ, тому інтервал умови задачі такий: [0,6 – 1,6]. Ймовірність попасти випадковій величині x у вказаний інтервал визначається за формулою (4.7)

$$\boldsymbol{P} = \int_{0{,}6}^{1{,}6} (0{,}2x+0{,}3)dx = 0{,}2\cdot\frac{1{,}6^2 - 0{,}6^2}{2} + 0{,}3\cdot(1{,}6-0{,}6) = \underline{0{,}55}.$$

Задачі для самостійного розв'язку.

4.9. Нехай є дві незалежні випадкові похибки Δ_1 і Δ_2 з різними дисперсіями, розподіли яких відповідно $f_1(\Delta_1)$= 1/2a і $f_2(\Delta_2)$= 1/2b. Показати на прикладі, що їх композиція дасть трапецевидний розподіл Сімпсона.

4.10. Похибки вимірювання струму розподілені за законом Сімпсона в інтервалі від -4 до +2 мА. Визначити систематичну похибку, величину розсіювання даних навколо середнього значення струму і ймовірність того, що виправлений результат вимірювання відрізняється від істинного значення струму не більше, ніж на 2 мА.

4.11. Визначити $\bar{x}$, D, σ, якщо в інтервалі від -2 до 2 функція розподілу густини імовірності задана графіком (рис.4.8). Визначити ймовірність одержати при вимірюванні значення x в інтервалі [$\bar{x}$-σ, $\bar{x}$+σ].

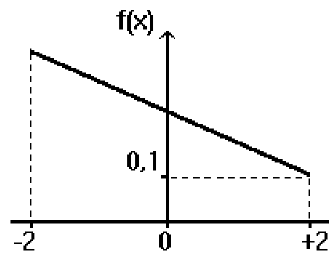


Рис. 4.8.

4.12. Задана функція $f(x)$ – функція розподілу густини ймовірностей величини x. Написати вираз для $P(a \le x \le b)$ – ймовірності того, що значення величини x знаходиться в інтервалі від **a** до **b**.

4.13. Дано $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – функції розподілу густини ймовірностей для статистично незалежних величин x і y. Написати вираз для $P(a_1 \le x \le a_2;\ b_1 \le y \le b_2)$ – ймовірності того, що значення величини x міститься в інтервалі від a_1 до a_2, а значення величини y знаходиться при цьому в інтервалі від b_1 до b_2.

4.14. На рис.4.9 приведені графіки чотирьох різних функцій розподілу густини ймовірностей значень деякої випадкової величини x. Для кожного з графіків знайти константу **A**, при якій функція виявляється нормованою, та обчислити середні значення x і x^2. Для графіка **а** обчислити також середнє значення $|x|$.

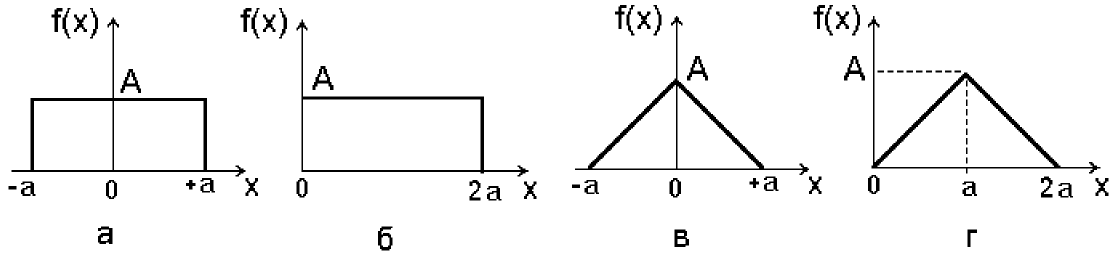


Рис. 4.9.

4.15. Функція розподілу густини ймовірності величини x має вигляд $f(x) = Ae^{-\alpha x^2} 4\pi x^2$, де **A** і α – константи. Написати наближену формулу для ймовірності того, що значення x виявиться в межах від 7,9999 до 8,0001.

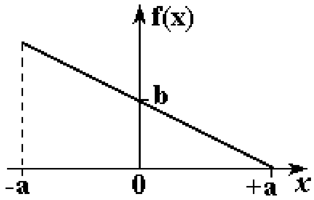
4.16. Результати вимірювань напруги розподілені за нормальним законом, систематична похибка $\Delta_{сис}$=+40 мВ, а (СКВ) σ=100 мВ. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання напруги буде знаходитись в межах ±10 мВ в околі істинного значення напруги $U_{іст}$ ($U=U_{іст}\pm10$ мВ).

4.17. Результати вимірювання напруги розподілені за нормальним законом, систематична похибка $\Delta_{сис}$=-40 мВ, а СКВ – 80 мВ. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання напруги перевищить істинне значення напруги $U_{іст}$.

4.18. Результат вимірювання напруги містить випадкову похибку, розподілену за нормальним законом, систематична похибка $\Delta_{сис}$=+50 мВ, а середнє квадратичне відхилення σ=100 мВ. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання напруги буде більшим за істинне значення напруги $U_{іст}$ більше, ніж на 10 мВ ($U>U_{іст}+10$ мВ).

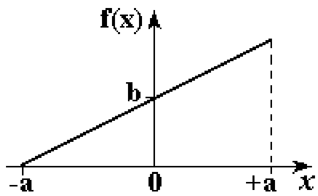
4.19. Результат вимірювання напруги містить випадкову похибку, розподілену за нормальним законом, систематична похибка $\Delta_{сис}$=-20 мВ, а середнє квадратичне відхилення σ=50 мВ. Визначити ймовірність того, що невиправлений результат вимірювання напруги U перевищить значення напруги U=($U_{іст}$-10) мВ ($U>U_{іст}$-10).

4.20. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини *x* задана графіком (рис.) в межах від <u>-a до +a</u> (a=1).



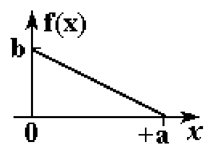
<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини $\mathbf{a_{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина ***x*** набуде деякого значення в межах від <u>0 до a/2</u>, та дисперсію.

4.21. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини *x* задана графіком (рис.) в межах від <u>-a до +a</u> (a=2).



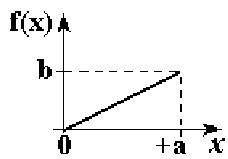
<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини $\mathbf{a_{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина *x* набуде деякого значення в межах від <u>0 до a/2</u>, та дисперсію.

4.22. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини *x* задана графіком (рис.) в межах від <u>0 до a</u> (a=3).



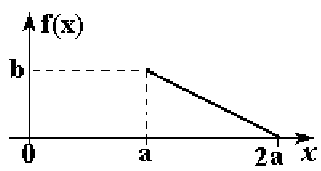
<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини $\mathbf{a_{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина ***x*** набуде деякого значення в межах від <u>0 до a/2</u>, та дисперсію.

4.23. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини *x* задана графіком (рис.) в межах від <u>0 до a</u> (a=4).



<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини $\mathbf{a_{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина ***x*** набуде деякого значення в межах від <u>0 до a/2</u>, та дисперсію.

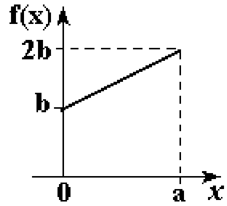
4.24. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини *x* задана графіком (рис.) в межах від <u>a до 2a</u> (a=2; a=0,5; a=1; a=1,5).



<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд

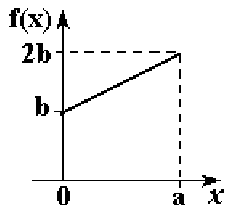
функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини **a**$_{\mathbf{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від <u>а до (а+а/2)</u>, та дисперсію.

4.25. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини x задана графіком (рис.) в межах від <u>0 до а</u> (а=0,5).



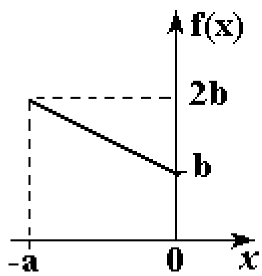
<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини **a**$_{\mathbf{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від <u>0 до а/2</u>, та дисперсію.

4.26. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини x задана графіком (рис.) в межах від <u>0 до а</u> (а=2).



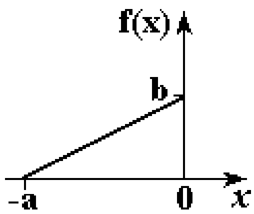
<u>Знайти:</u> значення **b** і аналітичний вигляд функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини **a**$_{\mathbf{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від <u>а/2 до а</u>, та дисперсію.

4.27. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини x задана графіком (рис.) в межах від <u>-а до 0</u> (а= -2).



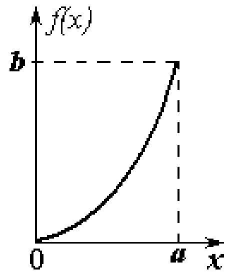
<u>Знайти:</u> значення **b** і рівняння функції (формулу прямої), а також <u>середнє</u> значення випадкової величини **a**$_{\mathbf{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від <u>0 до а/2</u>, та дисперсію.

4.28. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини x задана графіком (рис.) в межах від <u>-а до 0</u> (а= -2).



<u>Знайти:</u> значення **b** і рівняння прямої, а також <u>середнє</u> значення випадкової величини **a**$_{\mathbf{сер}}$, <u>ймовірність</u> того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від <u>0 до а/2</u>, та дисперсію.

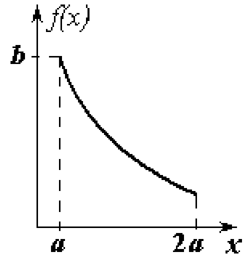
4.29. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від <u>0 до a</u> (a=1) описується функцією $f(x) = x^2$ (рис.).



<u>Знайти:</u> зв'язок між $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ та значення $\boldsymbol{b}$, а також <u>середнє</u> значення $\boldsymbol{a}_{\mathbf{сер}}$ випадкової величини, <u>ймовір-</u>

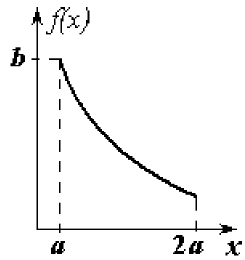
ність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від 0 до $a/2$, та дисперсію.

4.30. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від a до $2a$ (a=1) описується функцією $f(x) = 1/x$ (рис.).



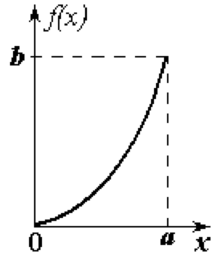
Знайти: зв'язок між $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ та значення $\boldsymbol{b}$, а також середнє значення $\boldsymbol{a}_{сер}$ випадкової величини, ймовірність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від a до $a+a/2$, та дисперсію.

4.31. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від a до $2a$ (a=1) описується функцією $f(x) = 1/x^2$ (рис.).



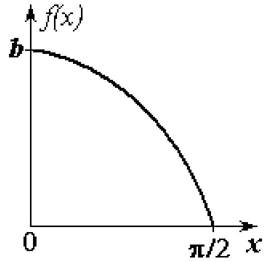
Знайти: зв'язок між $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ та значення $\boldsymbol{b}$, а також середнє значення $\boldsymbol{a}_{сер}$ випадкової величини, ймовірність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від a до $a+a/2$, та дисперсію.

4.32. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від 0 до a=1 заданий функцією $f(x)= x^n$ (n > 1) (рис.).



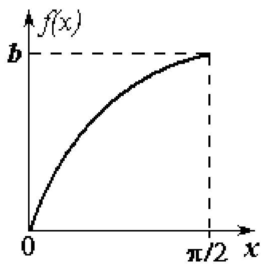
Знайти: зв'язок між **n** і $\boldsymbol{b}$ та значення $\boldsymbol{b}$ для n=3, а також середнє значення $\boldsymbol{a}_{сер}$ випадкової величини, ймовірність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від 0 до a/2, та дисперсію.

4.33. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від 0 до $\pi/2$ заданий функцією $f(x) = b\cdot\cos x$ (рис.).



Знайти: значення $\boldsymbol{b}$, а також ймовірність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від 0 до $\pi/4$, та дисперсію.

4.34. Розподіл густини ймовірності випадкової величини x в межах від 0 до $\pi/2$ заданий функцією $f(x) = b\cdot\sin x$ (рис.).



Знайти: значення $\boldsymbol{b}$, а також ймовірність того, що випадкова величина x набуде деякого значення в межах від 0 до $\pi/4$, та дисперсію.

Тема 5. Наближені оцінки значення вимірюваної величини і визначення границь похибок вимірювань

Методи обробки даних для нормального розподілу похибок добре відпрацьовані [5]. *В якості значення вимірюваної величини* при використанні цих методів *приймають середнє арифметичне* $\bar{x}$ ряду експериментальних даних із яких виключені систематичні похибки, а *в якості характеристики її похибки – оцінку параметра* σ *нормального розподілу*, тобто СКВ. При кількості даних n ≤ 10 для збільшення точності оцінки параметра σ значення S_n помножують на множник ξ , який залежить від n (табл.5.1).

Таблиця 5.1.

n	3	4	5	6	7	10
ξ	1,13	1,08	1,06	1,05	1,04	1,03
	Примітка. Замість введення множника ξ можна використовувати спрощене СКВ, замінюючи в формулі 6.1 знаменник **(n - 1)** на **(n-1,5).** В цьому випадку зміщення СКВ складе не більше 1 %.					

Результат вимірювання $\bar{x}$ визначено за скінченим числом даних n, тому його значення може мінятися при переході від одної *вибірки* до іншої, тобто він містить похибку і є випадковою величиною. Отже, кожна вибірка значень підкоряється певному *вибірковому розподілу*. Відповідно, СКВ середнього арифметичного $S_{n\bar{x}}$ для нормально розподілених даних обчислюють за формулою:

$$S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\ . \qquad (5.1)$$

Якщо розподіл похибок не належить іншим видам розподілів (наприклад, рівномірному, експоненціальному, показниковому), значення вимірюваної величини і характеристика її похибок відрізняються від середнього арифметичного і середнього квадратичного відхилення (СКВ). Наближені значення вимірюваної величини і характеристики її похибок в цих випадках наведені в таблиці 5.2. В ній використані наступні позначення: $f_1(x)$, $f_2(x)$ – функції розподілів густини ймовірності; a, b – границі рівномірного розподілу; n – кількість експериментальних даних; $\boldsymbol{r}$ – число найбільших і найменших членів варіаційного ряду, що відкидаються, яке дорівнює найближчому цілому числу, більшому за $n/20$; $\boldsymbol{x_к}$, $\boldsymbol{x_{к+1}}$ – середні члени варіаційного ряду;

Таблиця 5.2. Оцінка вимірюваної величини та характеристики її похибки в залежності від закону розподілу густини ймовірності

Закон розподілу	Функція розподілу густини ймовірності	Оцінка вимірюваної величини (результат вимірювання)	СКВ результату вимірювання $S_{n\bar{x}}$
Рівномірний	$f(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a<x<b$	$\bar{x}=\dfrac{a+b}{2}$	$\sigma=\sqrt{D}=\dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$, $S_{n\bar{x}}=\dfrac{b-a}{\sqrt{2(n+1)(n+2)}}$
Трикутний (Сімпсона)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x<\dfrac{a+b}{2}\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2}<x<b\end{cases}$	$\bar{x}=\dfrac{a+b}{2}$	$\sigma=\dfrac{b-a}{\sqrt{24}}$, $S_{n\bar{x}}=\dfrac{b-a}{\sqrt{24n}}$
Трапецевидний (Сімпсона)	$f(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a+b}, & -b<\Delta x<b\\ \dfrac{a-\lvert\Delta x\rvert}{a^2-b^2}, & b<\lvert\Delta x\rvert<a\end{cases}$		$\sigma=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{6}}$, $S_{n\bar{x}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{6\cdot n}}$
Нормальний	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$	$S_{n\bar{x}}=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$
Забруднений нормальний	$f(x)=(1-\varepsilon)\cdot f_1(x)+\varepsilon\cdot f_2(x)$	$\bar{x}=\dfrac{1}{n-2r}\cdot\sum\limits_{i=r+1}^{n-r}x_i$	$S_{n\bar{x}}=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=r+1}^{n-r}(x_i-\bar{x})^2}{(n-2r)(n-2r-1)}}$
Подвійний експоненціальний (Лапласа)	$f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\dfrac{x^2}{\lambda}}$	$\bar{x}=\begin{cases}x_{k+1} & \text{при } n=2k+1\\ \dfrac{1}{2}(x_k+x_{k+1}) & \text{при } n=2k\end{cases}$	$S_{n\bar{x}}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\cdot f(\bar{x})\cdot\sqrt{n}}$

$f(\bar{x})$ – оцінка густини розподілу результату вимірювання, яка визначається експериментально по гістограмі в околі $\bar{x}$; λ – параметр експоненціального розподілу; x_{min} і x_{max} – мінімальне і максимальне значення ряду експериментальних даних.

S_n і $S_{n\bar{x}}$ називають точковими характеристиками випадкових похибок. Інтервал, в який із заданою (довірчою) ймовірністю попадає істинне значення вимірюваної величини, називають *довірчим інтервалом*. Розглянемо методи знаходження довірчих інтервалів деяких вибіркових розподілів.

а) Нехай випадкова величина x із вибірки n вибіркових даних має ***нормальний розподіл*** **з** відомою дисперсією $D(x)=\sigma^2$ і математичним очікуванням $M(x)$. В цьому випадку вибірковий розподіл середнього значення $\bar{x}$ також є нормальним з тим самим математичним очікуванням $M(\bar{x})= M(x)$ і дисперсією $D(\bar{x})=D(x)/n=\sigma^2/n$. Довірчий інтервал для *випадкової* величини $\bar{x}$, в якому з імовірністю P буде міститись істинне значення $\boldsymbol{x_o}$, буде мати вигляд

$$\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le x_o < \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.2)$$

де z – квантіль нормованого розподілу Лапласа для імовірності P (табл.4.1). Границями інтервалу є довірчі межі випадкових похибок $\Delta_в(P)=z\sigma/\sqrt{n}$, а результат вимірювань $\bar{x} \pm \Delta_в(P)$.

б) Якщо випадкова величина x із вибірки n даних має *нормальний розподіл* з невідомою дисперсією (реальний випадок, коли число вимірювань невелике), то вибірковий розподіл середнього значення $\bar{x}$ має розподіл Стьюдента. Тоді довірчий інтервал визначається через квантіль (або коефіцієнт) Стьюдента $\boldsymbol{t_{np}}$ (табл.5.3) і оцінку дисперсії $S_{n\bar{x}}$ (5.1):

$$\bar{x} - t_{n\alpha}S_{n\bar{x}} \le x_o < \bar{x} + t_{n\alpha}S_{n\bar{x}}. \qquad (5.3)$$

Коефіцієнт Стьюдента залежить від кількості даних n і вибраної довірчої імовірності P (її ще називають коефіцієнтом надійності $\boldsymbol{\alpha}$**)**.

Значення $\pm\Delta_в(P)= t_{np}\cdot S_{n\bar{x}}$ є довірчі межі випадкової похибки (або довірча випадкова похибка) результату вимірювань, тобто середнього арифметичного вибірки.

в) Так само обчислюється довірча границя і ***для забрудненого нормального розподілу*** з відповідними значеннями $\bar{x}$, $S_{n\bar{x}}$ (див. таблицю 5.2) і $\mathbf{f}=\boldsymbol{n}\mathbf{-2}\boldsymbol{r}\mathbf{-1}$.

Таблиця 5.2.

Коефіцієнти (квантілі) Стьюдента t_{np} (f – число ступенів вільності)

f=n-1	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99	f=n-1	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99
2	2,920	4,303	6,965	9,920	18	1,734	2,101	2,552	2,878
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	22	1,717	2,074	2,508	2,819
5	2,015	2,571	3,365	4,032	24	1,711	2,064	2,492	2,797
6	1,943	2,447	3,143	3,707	26	1,706	2,056	2,479	2,779
7	1,895	2,365	2,998	3,499	28	1,701	2,048	2,467	2,763
8	1,860	2,306	2,896	3,355	30	1,697	2,043	2,457	2,750
9	1,833	2,262	2,821	3,250	40	1,680	2,020	2,420	2,700
10	1,812	2,228	2,764	3,169	60	1,670	2,000	2,390	2,660
12	1,782	2,179	2,681	3,055	80	1,665	1,990	2,370	2,640
14	1,761	2,145	2,624	2,977	120	1,660	1,980	2,356	2,620
16	1,746	2,120	2,583	2,921	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

г) Якщо розподіл експериментальних даних не суперечить ***розподілу Лапласа***, то довірчі границі випадкових похибок для ймовірності P при $n \geq 10$ визначаються за формулами:

нижню границю інтервалу $\boldsymbol{\Delta_в(P)_н = x_к - \bar{x}}$, де k – найближче ціле число, менше за $(n+1-z_{p/2}\cdot\sqrt{n})/2$; *верхню границю* інтервалу $\boldsymbol{\Delta_в(P)_в = x_m - \bar{x}}$, де $\boldsymbol{m}$ - найближче ціле число, більше за $(n+1+z_{p/2}\cdot\sqrt{n})/2$; $z_{0,90/2} = 1{,}64$; $z_{0,95/2} = 1{,}96$; $z_{0,99/2} = 2{,}58$ (при інших значеннях P величини $z_{p/2}$ знаходять по таблиці 4.1).

д) Якщо розподіл експериментальних даних не суперечить ***рівномірному розподілу***, довірчі границі випадкових похибок обчислюють за формулою

$$\Delta_в(P) = h\cdot\frac{x_{\max}-x_{\min}}{2},\ \text{де}\ h = \frac{1}{\sqrt[n-1]{1-P}} - 1. \qquad (5.4)$$

е) Випадкова величина x розподілена ***за законом, відмінним від нормального, але з відомою дисперсією***. В теорії статистичної обробки даних доводиться теорема, згідно якої при збільшенні об'єму вибірки n вибірковий розподіл середнього значення вибірки $\bar{x}$ наближається до нормального розподілу, незалежно від виду розподілу вихідної випадкової величини. Нормальність вибіркового розподілу величини $\bar{x}$ прийнятна в багатьох випадках при $n>4$ і цілком добре виправдовується при $n>10$. В цьому випадку довірчі похибки і інтервал обчислюються за формулою (5.2).

Довірчий інтервал <u>*невиключних*</u> ***систематичних похибок*** знаходять, вважаючи *ці похибки розподіленими рівномірно* в заданих межах **θ**. Якщо є m систематичних похибок, для знаходження їх довірчого інтервалу $\theta(P)$ застосовують формулу

$$\theta(P) = k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \theta_j^2}\ , \tag{5.5}$$

де k – коефіцієнт, що відповідає вибраній довірчій імовірності P і в загальному випадку залежить від m; θ_j – границя j-вої невиключної систематичної похибки. При P=0,90 і P=0,95 залежність k від m слабка і значення k приймають рівним <u>0,95</u> і <u>1,1</u> відповідно. <u>Для P=0,99</u> коефіцієнт k складним чином залежить від m та відношення між значеннями систематичних похибок і змінюється в межах від 1 до 1,49.

Якщо невиключні систематичні похибки в порівняні з випадковими малі, а саме, відношення <u>$\theta/S_{n\bar{x}} < 0{,}8$</u>, то похибку результату вимірювання можна характеризувати тільки довірчими межами випадкової похибки. Якщо <u>$\theta/S_{n\bar{x}} > 0{,}8$</u> – то тільки систематичною похибкою. Якщо $\mathbf{0{,}8 \le \theta/S_{n\bar{x}} \le 8}$, то для знаходження похибки результату вимірювання необхідно враховувати обидві складові похибки:

$$\boldsymbol{\Delta(P)=K\cdot[\theta(P)+\Delta_в(P)],} \tag{5.6}$$

де коефіцієнт $\boldsymbol{K}$ залежить від вибраної довірчої імовірності P і відношення $\theta/S_{n\bar{x}}$ (табл.5.4).

Таблиця 5.3. Значення коефіцієнта ***K*** в залежності від P і відношення $\theta/S_{n\bar{x}}$

θ/S(X)	**0,75**	**0,80**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
P=0,95	0,77	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,85
P=0,99	0,85	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Приклади розв’язку задач

<u>Задача 5.1.</u>

Статистична обробка даних, одержаних при калібруванні зразкової багатогранної призми, дала наступні результати для відхилення одного з кутів від номінального значення: $\bar{x}$=1,98″, $S_{n\bar{x}}$=0,05″, θ=0,03″, n=20. Визначити довірчий інтервал результату вимірювання.

<u>Розв’язок.</u>

Довірчі межі випадкової похибки обчислюють так. При P=0,95 з таблиці 5.3 для кількості вимірювань n=20 находимо: $t_{пр}$ =2,09. Тоді $\Delta_в(P) = t_{пр} \cdot S_{n\bar{x}} = 2{,}09 \cdot 0{,}05'' = \underline{0{,}10''}$. Так як $\theta/S_{n\bar{x}}$=0,6<0,8, то систематичну похибку θ=0,03″ можна не враховувати. Тоді результат вимірювання може бути представлений в вигляді $\bar{x}$ =$\underline{1{,}98''\pm0{,}10''}$, $S_{n\bar{x}}$=$\underline{0{,}05'',\ n{=}20}$. Це означає, що істинне значення вимірюваної величини знаходиться інтервалі [1,88″; 2,08″] з ймовірністю P= 95 %.

Якщо в наведеному прикладі межі невиключних систематичних похибок були б більші, наприклад, $\underline{\theta = 0{,}17''}$, то запис кінцевого результату вимірювань був би іншим. Так як $\theta/S_{n\bar{x}}$=0,17/0,05= $\underline{3{,}4 > 0{,}8}$, $\underline{\text{але} <8}$, то необхідно врахувати і систематичну похибку: за табл.5.4 знаходимо $\underline{K(0{,}95)=0{,}74}$. Отже, $\mathbf{\Delta(P)}$ = $\underline{0{,}74\cdot(0{,}17''+0{,}10'')}$ ≈ 0,1998″ **≈ ≈0,20″**, а результат вимірювання представляється у формі:

$$\bar{x}=1{,}98'';\ \ \Delta(P)=0{,}20;\ \ P=0{,}95;\ \ n=20.$$

Задача 5.2.

В таблиці 5.5 наведені експериментальні дані вимірювання кута одним оператором, одним і тим теодолітом, в одних і тих умовах. Відомо, що розподіл густини ймовірності цих даних нормальний. Знайти довірчий інтервал (довірчу випадкову похибку).

Розв'язок.

Знаходимо середнє арифметичне значення $\bar{x}$, тобто результат вимірювання:

$\bar{x} = (\Sigma x_i)/14 = 17^0 56' + 569{,}786''/14 \approx$ $\approx 17^0 56' + \underline{40{,}670''}$.

Таблиця. 5.4

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
17⁰56′45,00″	4,301″	18,498601
17⁰56′36,25″	-4,449″	19,793601
42,50″	1,801″	3,243601
45,00″	4,301″	18,498601
37,50″	-3,199″	10,233601
38,33″	-2,369″	5,612161
37,50″	-3,199″	10,233601
43,33″	2,631″	6,922161
40,63″	-0,069″	0,004761
36,25″	-4,449″	19,793601
42,50″	1,801″	3,243604
39,17″	-1,529″	2,337841
45,00″	4,301″	18,498601
40,83″	0,131″	0,017161

Для того, щоб оцінити наскільки це число є близьким до істинного значення вимірюваної величини, необхідно знайти довірчий інтервал похибок (випадкових). Отже, за формулою (5.1) обчислюємо $S_{n\bar{x}}$ = 0,88″. Вибираємо довірчу ймовірність, наприклад, $\underline{P=0{,}95}$, для n=14, з таблиці 5.3 знаходимо коефіцієнт Стьюдента $\boldsymbol{t_{пр}}$ $\underline{= 2{,}16}$. Отже, довірча границя випадкової похибки $\Delta_в(P) = t_{пр} \cdot S_{n\bar{x}} = 2{,}16 \cdot 0{,}88'' \approx \underline{1{,}90''}$.

Істинне значення вимірюваної величини з ймовірністю P=0,95 знаходиться в інтервалі <u>[$17^0 56'38,8'' - 17^0 56'42,6''$]</u>.

<u>Задача 5.3.</u>

Одержано 13 значень рівноточних вимірювань напруги (в мВ): 100,08; 100,09; 100,07; 100,10; 100,05; 100,06; 100,04; 100,06; 99,95; 99,92; 100,02; 99,98; 99,97. Знайти і написати правильно результат вимірювання.

<u>Розв'язок.</u>

Оцінка результату і його похибки залежить від виду розподілу експериментальних даних (див. табл.5.2). При кількості даних n=13 використаємо складовий критерій для перевірки належності розподілу до нормального. Обчислимо *оцінки* параметрів нормального розподілу – середнє арифметичне значення $\bar{x}$ і СКВ $S_{n\bar{x}}$ (формули 5.1), S_n* і d (формули 6.2): $\bar{x}$=<u>100,03 мВ</u>; S_n=<u>0,0574 мВ</u>; S_n^*=<u>0,0552</u>; <u>d=0,62/(13·0,0552)≈0,86</u>. Вибравши рівень значимості q_1=0,02 з таблиці 6.3 знаходимо $d_{0,01}$=0,93; $d_{0,99}$=0,68. Так як вирахуване нами значення d попадає в цей інтервал, то <u>критерій I виконується</u>. Розгляд критерію II також проведемо для q_2=0,02. Тоді для n=13, з таблиці 6.4 маємо P=0,98, а з таблиці значень нормованої функції Лапласа (табл.4.1) одержуємо, що $z_{p/2}$=2,33, а добуток $z_{p/2}\cdot S_n$=<u>2,33·0,0574≈0,13</u>. За критерієм II не більше одної різниці $|x_i - \bar{x}|$ може перевищити число 0,13. По даним розрахунків таких чисел немає: критерій II виконується. Отже, при рівні значимості $q \le q_1+q_2$= <u>0,04</u> гіпотеза про те, що наведені в задачі дані мають нормальний розподіл, підтверджується.

У такому випадку СКВ середнього арифметичного знаходиться за формулою 5.1 (див. табл.5.2) і дорівнює

$$S_{n\bar{x}} = S_n/\sqrt{n} = 0{,}0574/3{,}6 = \underline{0{,}016 \text{ мВ}}.$$

Для оцінки довірчих меж (похибки) *результату* вимірювання ($\bar{x}$) звертаємося до табл.5.3 щоб визначити коефіцієнт Стьюдента t_{np}: даємо *власну* (об'єктивно-суб'єктивну) довіру до отриманого значення $\bar{x}$, вибравши (довірчу) ймовірність, наприклад, P=0,95, і (для n=13) тоді t_{np}=<u>2,179</u>. Отже, $\mathbf{\Delta_в(P)= t_{np}}\cdot S_{n\bar{x}}$ = 2,179·0,016 = **0,035 мВ**.

Робимо <u>кінцевий запис</u> результату *багатократних* вимірювань:

$$\underline{\bar{x} = [100{,}03 \pm 0{,}04] \text{ мВ}};$$

або: $\bar{x}$=100,03 мВ; $\Delta_в(P)$=0,035 мВ; $S_{n\bar{x}}$ = 0,016 мВ; P=0,95.

Це означає, що істинне значення вимірюваної напруги з ймовірністю P=0,95 знаходиться в інтервалі [99,99 ÷ 100,07].

Задача 5.4.

Група даних вимірювання внутрішнього об'єму довгої трубки відповідає забрудненому нормальному розподілу: 1,241; 1,273;1,585; 1,355; 1,425; 1,370; 1,481; 1,632; 1,398; 1, 810; 1,650; 1,825; 1,675; 1,773; 1,680; 1,846; 1,835; 1,615; 1,745; 1,790; 1,865; 1,710; 1,567; 1,742 (см^3). Знайти результат вимірювання та межі похибок його визначення при довірчій імовірності P=95 %. В процесі вимірювання виявлено дві не виключені систематичні похибки $\theta_1 = 0,03$ і $\theta_2 = 0,05$.

Розв'язок.

Для знаходження результату вимірювання (зрізаного середнього арифметичного) необхідно відкинути ***r*** найбільших і ***r*** найменших членів групи даних. Знайдемо частку n/20 = 24/20 = 1,2. Найближче ціле число, більше ніж 1,2 є $\underline{r = 2}$. Тоді з групи даних *вилучаємо* два найменших числа (це 1,241 і 1,273) і два найбільших (це 1,865 і 1,846), а з рештою $\underline{m =}$ n-2r = 24-4 = 20 даних знаходимо середнє арифметичне $\overline{x}$ та його розсіювання $S_{n\overline{x}}$ (СКВ):

$$\overline{V} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} v_j = 1{,}633 \text{ см}^3; \qquad S(V) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}(v_j - \overline{V})^2}{m(m-1)}} = 0{,}035 \text{ (см}^3)$$

Для m=20 даних (число ступенів вільності f=19) коефіцієнт Стьюдента дорівнює (табл.5.3) $t_{пр}(P=0{,}95)$ = 2,09. Тоді довірча границя випадкової похибки $\underline{\Delta_в(P)} = t_{пр} \cdot S(V)$= 2,09·0,035=0,073 **≈ 0,07**.

Результуюча систематична похибка у відповідності з формулою (5.5) та враховуючи, що при P=95 коефіцієнт k=1,1, дорівнює

$$\theta(P) = 1{,}1 \cdot \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}05^2} = 1{,}1 \cdot 0{,}0583 = 0{,}064 \approx \underline{0{,}06 \text{ см}^3}.$$

Для визначення *сумарної* похибки вимірювання (формула 5.6) необхідно знайти відношення систематичної похибки до СКВ середнього арифметичного: 0,064/0,035 ≈ 2 (для проміжних обчислень використовуємо значення на порядок точніші, ніж у кінцевому записі). Отже, за табл.5.4, при P=0,95 коефіцієнт $\underline{K = 0{,}71}$. Таким чином,

$$\underline{\Delta(P)} = 0{,}71 \cdot (0{,}064 + 0{,}073) = 0{,}097 \approx \underline{0{,}10 \text{ см}^3}.$$

Кінцевий запис результату: $\underline{V = (1{,}63 \pm 0{,}10) \text{ см}^3;\ P = 0{,}95}$.

Проміжні результати обрахунків задачі 5.4 наведені в таблиці 5.6.

Таблиця 5.5

i	v_i	j	v_j	v_j-$\overline{V}$	$(v_j$-$\overline{V})^2$
1	1,241				
2	1,273				
3	1,355	1	1,355	-0,278	0,0773
4	1,370	2	1,370	-0,263	0,0692
5	1,398	3	1,398	-0,235	0,0552
6	1,425	4	1,425	-0,208	0,0433
7	1,481	5	1,481	-0,152	0,0231
8	1,567	6	1,567	-0,066	0,0044
9	1,585	7	1,585	-0,048	0,0023
10	1,615	8	1,615	-0,018	0,0003
11	1,632	9	1,632	-0,001	0,0000
12	1,650	10	1,650	0,017	0,0003
13	1,675	11	1,675	0,042	0,0018
14	1,680	12	1,680	0,047	0,0022
15	1,710	13	1,710	0,077	0,0059
16	1,742	14	1,742	0,109	0,0119
17	1,745	15	1,745	0,112	0,0125
18	1,773	16	1,773	0,140	0,0196
19	1,790	17	1,790	0,157	0,0246
20	1,810	18	1,810	0,177	0,0313
21	1,825	19	1,825	0,192	0,0369
22	1,835	20	1,835	0,202	0,0408
23	1,846				
24	1,865				
Сума	**38,888**		**32,663**	**0,003**	**0,4629**
38,888/24=1,620		**V=32,663/20=1,633**			**S(V)=0,035**

<u>Задача 5.5.</u>

Знайти результат вимірювання об'єму в попередній задачі, вважаючи, що розподіл експериментальних даних належить розподілу Лапласа.

<u>Розв'язок.</u>

Розташуємо дані у варіаційний ряд в порядку зростання v_i (табл.5.6, стовпчик 2). Кількість даних – парне число (n=24), тому, у відповідності з табл.5.2, для оцінки значення величини V беремо два числа з індексами i=n/2=12 та i+1=13 і знаходимо їх середнє:

$$V = \frac{1}{2}(v_{12} + v_{13}) = \frac{1{,}650 + 1{,}675}{2} = 1{,}6625 \approx 1{,}662. \text{ см}^3.$$

Визначимо нижню границю довірчого інтервалу випадкових похибок $\Delta_в(P)_н$. Нехай P=0,95 ($z_{p/2}$=1,96). Індекси експериментальних даних у варіаційному ряді (табл.5.6) шукаємо за формулами:

$\mathbf{i_н}$ **=** $(24+1-1,96\cdot\sqrt{\mathbf{24}})/2 = 7,7 \equiv \mathbf{7}$; $\mathbf{i_в}$**=** $(24+1+ 1,96\cdot\sqrt{\mathbf{24}})/2 = 17,3 \equiv \mathbf{18}$.

Відповідні результати вимірювання дорівнюють:

$x_н = 1,481$; $x_в = 1,773$. Отже, $\mathbf{\Delta_{вн}}$= 1,481-1,662= -0,181 ≈ -0,18 см^3;

$\mathbf{\Delta_{вв}}$= 1,773-1,662 = 0,111 ≈ 0,11 см^3; істинне значення вимірюваного об'єму, без врахування систематичної похибки, з ймовірністю P=0,95 знаходиться в інтервалі   [1,48; 1,77] см^3.

Щоб знайти СКВ середнього значення, тобто S(V), необхідно оцінити значення функції розподілу в цій точці, тобто f(V). Для цього побудуємо гістограму. Експериментальні значення об'єму містяться в інтервалі шириною Δv =1,865-1,241= 0,624 см^3. Розіб'ємо його на 6 однакових інтервалів (тоді їх ширина b=0,104 см^3) і підрахуємо кількість даних, що попали в кожний інтервал. Бачимо, що в малому інтервал в околі V=1,66 попало 5 експериментальних значень, тобто

f(V) = $\Delta n/(n\cdot b)$= 5/(24·0,104) ≈ 2,00.   Отже,

$$S(V) = \frac{1}{2f(V)\sqrt{n}} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{24}} = 0,051 \approx \underline{0,05\ см^3}.$$

Врахування невиправленої систематичної похибки θ(P) = 0,064 (при P=0,95) дещо змінить результат. Її відношення до середньоквадратичного відхилення становить 0,064/0,051 ≈ 1,3. У відповідності з табл.5.4, K ≈0,73. Тоді $\mathbf{\Delta_н}$= 0,73·(-0,181-0,064) = -0,17885 ≈ **-0,18**;

$\mathbf{\Delta_в}$ **=** 0,73·(0,111+0,064) = 0,12775 ≈ **0,13**.

Кінцевий результат: V= 1,66 см^3; [1,48; 1,79] см^3; θ=0,06 см^3; P=0,95.

Задача 5.6.

При зважуванні на високоточних аналітичних терезах з додатковою шкалою шматочка дорогоцінного металу була одержана така вибірка даних (в мг): 445, 449, 451, 454, 449, 452, 446, 449, 452, 447, 449, 452, 447, 450, 452, 448, 451, 454, 451, 446, 454, 448, 451, 453, 448, 450, 454, 447, 450, 453, 455. Оцінити вид розподілу густини ймовірності і знайти результат вимірювання та його довірчі межі.

Розв'язок.

Розташуємо дані в порядку зростання (запишемо варіаційний ряд): 445, 446, 446, 447, 447, 447, 448, 448, 448, 448, 449, 449, 449, 449, 450, 450, 450, 451, 451, 451, 451, 452, 452, 452, 452, 453, 453, 454, 454, 454, 455. Бачимо певну закономірність, що більш чітко проявляється на гістограмі, якщо по вісі абсцис відкласти значення вимірювання, а по вісі ординат – кількість даних, що зустрічаються з цим значенням в вибірці (рис.5.1а). Найкраще описує цю гістограму трапецевидний розподіл. Знайдемо середнє значення вибірки ($\overline{m}$=450 мг) і перетворимо цей розподіл в розподіл похибок (рис.5.1б: пересвідчуємося, що вид розподілу при цьому не змінився). Так як характер розподілу відомий, згідно таблиці 7.2 знайдемо СКВ даних σ (a=±6, b=±2):

$$\sigma = \sqrt{\frac{36+4}{6}} = \sqrt{6{,}67} = 2{,}58.$$

При об'ємі вибірки n=31 розподіл середнього арифметичного, як випадкової величини $\overline{x}$, буде нормальним, тому для СКВ середнього арифметичного справедлива формула $S_{n\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}58}{\sqrt{31}} \approx 0{,}46.$

Отже, значення граничної довірчої похибки результату вимірювання, наприклад, для P=0,98 визначається так:

$$\underline{\Delta(P)} = z_{p/2} \cdot S_{n\overline{x}} = 2{,}34 \cdot 0{,}46 = 1{,}0764 \underline{\approx \pm 1{,}1 \text{ мг}};$$

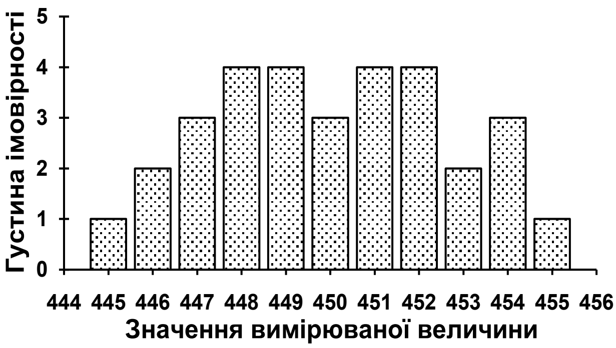
тут $z_{p/2}=Z$ – квантіль розподілу Лапласа для $P/2$ = 0,49 (табл. 4.1).

Кінцевий результат вимірювання маси має вигляд:

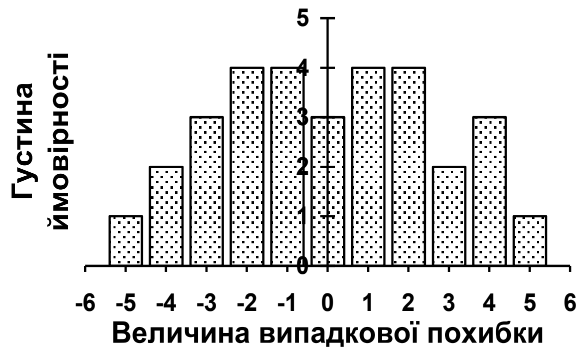
$$\underline{m = (450 \pm 1) \text{ мг}, \quad P = 0{,}98}.$$

Наявність систематичної похибки розширить довірчий інтервал похибки. Нехай, наприклад, $\Delta m_{сис} \equiv \theta(P) = \pm 1$ мг. Тоді, згідно (5.4), сумарна похибка $\Delta(P) = 0{,}8 \cdot (1{,}1+1{,}0) \underline{\approx 1{,}7 \text{ мг}}$;

результат вимірювання: $\underline{m = (450 \pm 2) \text{ мг}}$; $S_{n\overline{x}}$=0,5; n=31.



а)



б)

Рис. 5.1.

Задачі для самостійного розв'язку

5.7. Перевірити вибірку задачі 5.6 на належність її до нормального розподілу з q=0,1 та знайти довірчі межі (похибку) визначеного $\overline{m}$ для P=0,98; порівняти з результатом задачі 5.6, зробити висновок.

5.8. На високоточних аналітичних терезах зроблено 5 вимірювань маси (в мг) однієї з компонент вихідної шихти, необхідної для синтезу деякої складної хімічної сполуки: m_1=1,015; m_2=1,021; m_3=1,018; m_4=1,014; m_5=1,022. Оцінити значення маси цієї компоненти шихти та довірчий інтервал її визначення. Відомо, що розподіл похибок нормальний, а систематична похибка терезів $\Delta m_{сис}$=±1 мг.

5.9. При розрізуванні попередньо вирощених циліндричних монокристалів сапфіру на обумовлені в технічному завданні спеціальні диски контролюється товщина дисків і паралельність сторін диска, що одержується. Такі вимірювання, здійсненні мікрометром з діапазоном кругової шкали в 0,5 мм (50 поділок), дали такі значення товщини дисків в контрольній партії (в мм): 2,25; 2,23; 2,26; 2,22; 2,23; 2,24; 2,25; 2,20; 2,26; 2,24; 2,22; 2,25; 2,24; 2,26; 2,22; 2,23; 2,24; 2,27; 2,23; 2,24; 2,21; 2,25; 2,28; 2,27; 2,21. Клас точності мікрометра дорівнює 1. Знайти середнє значення товщини диска в партії та довірчий інтервал товщини отримуваних пластин для P=0,95.

5.10. Клас точності Q-метра в діапазоні вимірювань ємності від 500 пФ до 800 пФ становить 0,1/0,05. Багатократні виміри ємності конденсатора дали значення: 670, 680, 675, 690, 673, 685, 690, 673, 688, 685, 675, 679, 680, 684, 675, 686, 690, 687, 680, 670, 686, 580, 650, 682, 678, 677. Обробити дані, записати кінцевий результат для P=0,99.

5.11. Одержано 15 значень при рівноточних вимірюваннях напруги, в мВ: 10,108; 10,109; 10,107; 10,110; 10,105; 10,106; 10,104; 10,106; 10,095; 10,092; 10,102; 10,098; 10,097; 10,194; 10,115. Клас точності мілівольтметра 0,01, діапазон вимірювання напруги – 30 мВ. Знайти і написати правильно результат вимірювання.

5.12. Група даних вимірювання об'єму тонкого довгого монокристалу відповідає забрудненому нормальному розподілу: 114; 117; 148; 125; 132; 127; 138; 153; 129; 171; 155; 172; 157; 167; 158; 174; 173; 151; 164; 169; 176; 161; 146; 164; 157 (мм^3). Знайти результат вимірювання та його похибку для довірчої ймовірності P=95 %. При вимірюванні виявлено три похибки приладів: $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 4$ і $\theta_3 = 7$.

Тема 6. Обробка результатів прямих рівноточних вимірювань. Тема 6.1. Виключення грубих похибок

Основні поняття, визначення та формули

Результати багатократних спостережень (вимірювань), які одержуються при прямих вимірюваннях величини **А**, називаються *рівноточними (рівнорозсіяними)*, якщо вони є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами. Вимірювання проводяться одним оператором, в однакових умовах зовнішнього середовища і за допомогою одного і того ж засобу вимірювання.

Важливо, щоб одержані при вимірюванні дані до обробки були ретельно переглянуті і проаналізовані.

Спочатку перевіряють наявність окремих похибок, які різко відрізняються від решти похибок. Ці грубі похибки (промахи) викреслюють тільки в тому випадку, якщо твердо переконані, що допущена неправильна дія оператора. Якщо причини грубих даних невідомі, для вирішення питання про можливості їх виключення використовують статистичні методи.

Нехай маємо вибірку з n результатів вимірювання величини $\boldsymbol{x}$: x_1, x_2, x_3, ... , x_n. Припустимо, що внаслідок випадкових похибок ці дані належать деякому розподілу $\boldsymbol{\varphi}(x)$. Виділимо дане x_i , що дещо виділяється від більшості інших, і поставимо питання: чи належить воно тому ж розподілу, або тій же рівноточній вибірці, що й інші n-1 даних?

Для перевірки цього поступають наступним чином. Нехай графік функції $\boldsymbol{\varphi}(x)$ має форму, зображену на рис.6.1. Числа $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$ обмежують відповідно певні граничні мінімальне і максимальне значення випадкової величини x, а площі $\boldsymbol{q_1}$ і $\boldsymbol{q_2}$ визначають ймовірності появи чисел $x<x_1$ і $x>x_2$ відповідно, тобто

$$q_1 = p(x < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)dx;\quad q_2 = p(x > x_2) = \int_{x_2}^{\infty} \varphi(x)dx,\quad q = q_1 + q_2. \qquad (6.1)$$

Ці ймовірності (їх чисельні значення вибираються досить малими: від 0,01 до 0,1) дістали назву *рівня значимості* критерію (припущення, гіпотези), що перевіряється (в даному випадку – критерію про належність числа $\boldsymbol{x_i}$ розподілу $\varphi(x)$). Звичайно в практиці статистичної обробки даних береться q_1=q_2. Якщо x_i попадає в область значень

$x_1<x<x_2$, то вважається, що воно належить розподілу $\varphi(x)$ і, отже, всі n даних вибірки складають одну сукупність рівноточних вимірювань. В іншому випадку, при попаданні числа x_i в **критичну область q_1** або **q_2**, де ймовірність його появи дуже мала, приймається, що воно або має інший розподіл, або містить додаткові похибки, тобто не належить до сукупності інших n-1 рівноточних вимірювань даної вибірки і тому повинно бути відкинуто.

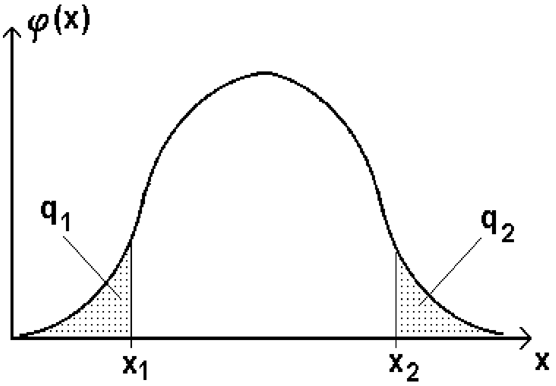


Рис. 6.1. Функція розподілу густини ймовірності випадкової величини x. Заштрихована площа дорівнює рівню значимості $q=q_1+q_2$.

Як видно з формул (6.1), ***статистичний зміст q*** – *це ймовірність того, що ми відкинули правильне твердження* (гіпотезу, число). Наприклад, якщо $x_i>x_2$ при рівні значимості q=0,05, то виходить, що число x_i все-таки належить даному розподілу з ймовірністю 5 %, а ми його відкидаємо. Прийнято, що гіпотезу слід вважати *безумовно* незастосовною до експериментально одержаної вибірки, якщо вона відкидається з рівнем значимості $q<0{,}01$ (дане попало в цю область q – воно точно має грубу похибку) і навпаки – *цілком справедливою*, якщо вона виконується при $q\geq 10$ (дане в інтервалі між x_1 і x_2 при таких q – точно **не** містить грубої похибки).

Статистичний критерій *виявлення даних, які різко виділяються*, ґрунтується на припущені, що група даних належить *нормальному* розподілу. Для того, щоб перевірити, чи містить деяке різко відмінне дане $\boldsymbol{x_{max}}$ грубу похибку, потрібно, *по-перше*, обчислити дріб

$$z_{\max}=\frac{|x_{\max}-\bar{x}|}{S_n}, \quad \text{де} \quad S_n=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}} \qquad (6.2)$$

– середнє квадратичне відхилення (СКВ) експериментальних даних, $\bar{x}$ – середнє арифметичне даних; *по-друге*, порівняти обчислене значення $\boldsymbol{z_{max}}$ з теоретичним значенням $\boldsymbol{z_т}$ при вибраному рівні значимості q (вони приведені в табл.6.1). Якщо $z_{\max} > z_т$, то виміряне значення $x_{\max}$ потрібно вилучити як таке, що містить грубу похибку. Якщо після виключення одного різко відмінного даного викликає сумнів інше, то описаний вище порядок дій повторюють, але вже не враховуючи раніше вилучене дане x_{max}.

Рівень значимості q в даному випадку характеризує ймовірність того, що отриманий висновок у випадку $z_{max} > z_т$ про те, що дане x_{max} містить грубу похибку, є хибним (тобто те, що z_{max} містить грубу похибку справедливо з ймовірністю $P = 1\text{-}q$). Тим не менше ми його від-кидаємо – ми відкидаємо ймовірно (P=q) правильне число. Але при малих вибірках експериментальних даних n<50 це оправдано з таких міркувань. Наприклад, q=1 % означає, що із 100 вимірювань одне може попасти у “хвіст” розподілу; коли ж із n<50 вимірювань одне з них внаслідок випадкового відхилення попадає в цю ж область значень, то це занадто малоймовірно. Більш імовірно, що це відхилення має іншу природу. Тому чим більша кількість вимірювань, тим ширша можлива область випадкових значень при тому ж рівні значимості, і тим вона вужча із зростанням q. Якщо при q=1 % в нашій вибірці є значення більші за $z_т$, то вони безумовно містять грубу похибку; якщо при q=10 % всі числа вибірки менші $z_т$, то вони безумовно позбавлені грубих похибок і є рівноточними. Значення q дослідник вибирає сам, з міркувань важливості задачі і необхідної точності результату вимірювань. За результат приймають середнє арифметичне значення тих даних, що залишились. Відповідно, враховуючи тільки їх, знаходять СКВ і похибку результату вимірювання.

Таблиця 6.1. Найбільші абсолютні значення нормованих відхилень $z_т$

Рівень значимості ***q***, %	Число результатів вимірювань, ***n***						
	4	6	8	10	12	15	18
1	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,00
2	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,90
5	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,72
10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,58
Рівень значимості ***q***, %	Число результатів вимірювань, **n**						
	20	25	30	35	40	45	50
1	3,08	3,20	3,29	3,36	3,42	3,47	3,52
2	2,96	3,07	3,16	3,22	3,28	3,33	3,37
5	2,78	2,88	2,96	3,02	3,08	3,12	3,16
10	2,62	2,72	2,79	2,85	2,90	2,95	2,99

Приклади розв'язку задач

Задача 6.1.

При вимірюванні сили струму I (в мА) одержані такі значення: 10,07; 10,10; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40; 10,13; 10,12; 10,08. Перевірити, чи містить значення I_{max} = 10,40 мА грубу похибку.

Розв'язок.

Обчислюємо середнє арифметичне даних: $\bar{I} = \frac{101{,}58}{10} \approx 10{,}16$ мА.

За формулою (6.2) обчислюємо СКВ експериментальних даних S_n=0,094 мА. Тоді експериментальне значення z_{max} (*зведена* похибка) дорівнює: $z_{max} = \frac{10{,}40 - 10{,}16}{0{,}094}$ = 2,55. Покладемо P=0,95, тоді q=5 %. З таблиці 6.1 при n=10 і q=5 % знаходимо, що значення $z_т$ **=2,41**. Так як $z_{max} > z_т$ (2,55>2,41), то виміряне значення 10,40 необхідно вилучити з вибірки даних. Тоді виправлений результат вимірювання струму

$$\bar{I} = \frac{91{,}18}{9} \approx 10{,}13 \text{ мА} \quad (\text{а не } 10{,}16 \text{ мА}).$$

Задача 6.2.

Вимірювання діаметру циліндра мікрометром дали наступні значення d_i (в мм): 8,05; 8,45; 8,52; 8,49; 8,47; 8,50; 8,46; 8,45; 8,49; 8,51; 8,55; 8,60; 8,50; 8,51; 8,53; 8,48; 8,50; 8,52; 8,54; 8,44. Перевірити дані на наявність грубої похибки при рівні значимості q=0,05.

Розв'язок.

Розміщуємо числа в порядку зростання: 8,05; 8,44; 8,45; 8,45; 8,46; 8,47; 8,48; 8,49; 8,49; 8,50; 8,50; 8,50; 8,51; 8,51; 8,52; 8,52; 8,53; 8,54; 8,55; 8,60. Бачимо, що по кількості однакових випадкових чисел в цій вибірці розподіл має максимум і може бути апроксимований нормальним розподілом; в приведеному *варіаційному ряду* різко відмінними є два числа: 8,05 і 8,60. Але число 8,05 відрізняється дуже суттєво – приблизно на половину міліметра від основної сукупності даних. Отже тут велика ймовірність промаху оператора при знятті (зчитуванні) або запису цього числа – він записав "0" замість деякого напевно іншого значення на основній шкалі мікрометра. Тому ми це число відкидаємо з подальшої обробки, як промах (залишилось 19).

Перевіримо наявність грубої похибки в значенні d_{12}=8,60. Знаходимо середнє арифметичне даних (тобто результат вимірювання) і їх середнє квадратичне відхилення S_n (6.2):

$$\bar{d} = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} d_i = 8{,}5005 \approx 8{,}50\,\text{мм}; \quad S_n = \sqrt{\frac{0{,}0277}{19-1}} = \sqrt{0{,}00154} = 0{,}039 \approx 0{,}04\ \text{мм}.$$

Знаходимо максимальне зведене відхилення:

$$z_{\max} = \frac{8{,}60-8{,}50}{0{,}04} = \frac{0{,}1}{0{,}04} = \underline{2{,}50}.$$

Для n=19 і q=0,05 теоретичне значення $\underline{z_т=2{,}7}$ (табл.6.1). Отже, $z_{\max}<z_т$ – експериментальне дане 8,60 <u>не містить</u> грубої похибки *за умови належності його до нормального розподілу*.

<u>Задача 6.3.</u>

Були виконані вимірювання деякої довжини 10 разів і одержано вибірку: 238,5; 235,4; 236,6; 236,7; 237,0; 236,5; 236,7; 242,0; 236,3; 236,9. Розподіл даних належить нормальному. При якому рівні значимості q ці вимірювання можна вважати як такі, що не містять грубої похибки ?

<u>Розв'язок.</u>

Середнє арифметичне вибірки дорівнює L=237,26 ≈ 237,3. СКВ даних S_n=1,83. Тоді зведене максимальне відхилення дорівнює

$$z_{\max} = \frac{242{,}0-237{,}3}{1{,}83} = \frac{4{,}7}{1{,}83} = \underline{2{,}56}.$$

По таблиці 6.1 бачимо, що при n=10 наш результат більший за 2,54 (q=2 %) і менший за 2,62 (q=1 %). Отже дане із значенням <u>242,0</u> не містить грубої похибки тільки при рівні значимості $\underline{q<2}$ %. Це означає, що з долею сумніву результат виміру l=242,0 можна вважати за статистичне випадкове відхилення від істинного значення довжини.

Задачі для самостійного розв'язку

6.4. При вимірюванні напруги V (у мілівольтах) одержані такі дані: <u>1,07</u>; 1,10; 1,15; 1,16; 1,17; 1,20; <u>1,39</u>; 1,37; 1,13; 1,12; 1,08. Перевірити, чи не містять значення $V_{\max}$=1,39 і $V_{\min}$=1,07 грубу похибку.

6.5. Багатократні вимірювання опору котушки індуктивності з підвідними провідниками було здійснено компенсаційним методом. Одержана вибірка R_i (Ом): 4,55; 4,65; 4,72; 4,69; 4,67; 4,70; 4,66; 4,65; 4,69; 4,54; 4,73; 4,95; 4,70; 4,71; 4,73; 4,68; 4,70; 4,72; 4,74; 4,64. Перевірити дані на наявність грубої похибки при рівні значимості q=0,1.

6.6. Було виконано 12 вимірювань деякої фізичної величини і одержано наступну вибірку: 28, 25, 27, 26, 26, 27, 26, 26, 22, 26, 26, 27. Розподіл даних належить нормальному. При якому рівні значимості q ці вимірювання можна вважати як такі, що не містять грубої похибки? Обчислити результат вимірювання для рівня значимості q=10 %, знайти середню та середню квадратичну похибку вимірювання, зробити необхідні заокруглення результатів обчислень.

6.7. Перевірити на наявність грубої похибки (q=0,05 і q=0,01), обчислити результат вимірювання та його похибку:
8,65; 10,35; 10,38; 9,71; 9,9; 10,29; 9,73; 10,97; 10,37; 9,77; 11,41; 11,08; 9,09; 9,89; 10,03; 11,22; 8,84; 9,40; 9,41; 10,43.

6.8. Перевірити на наявність грубої похибки (q=0,10 і q=0,02), обчислити результат вимірювання та його похибку:
1,03; 1,27; 1,37; 1,23; 1,25; 1,81; 1,47; 1,74; 1,82; 1,62; 1,73; 1,67; 1,40; 1,51; 1,60; 1,28; 1,86; 1,14; 1,70; 1,68.

Тема 6.2. Перевірка відповідності дослідного розподілу випадкової величини з теоретичним

Для спрощення розрахунків (при використання ЕОМ) або зменшення обсягу обчислень (якщо обробка даних проводиться вручну) рекомендується групувати дані, якщо їх більше 50. Групування – розділення ряду даних від найменшого $x_{\min}$ до найбільшого $x_{\max}$ на $\boldsymbol{r}$ інтервалів. Кількість інтервалів r рекомендується брати в залежності від числа даних $\boldsymbol{n}$ (табл. 6.2). Ширину інтервалу $\boldsymbol{b}=(x_{\max}-x_{\min})/r$ вибирають постійною для всього ряду експериментальних даних і вона повинна бути більшою за похибку заокруглення при записі даних. Значення b заокруглюють до десяткового знаку заокруглення даних.

Таблиця 6.2. Рекомендована кількість інтервалів в залежності від числа даних

Число даних, n	Число інтервалів, r
40 – 100	6 – 9
100 – 500	8 – 12
500 – 1000	10 – 16
1000 – 10000	12 – 22

Встановивши межі інтервалів, розташовують виміряні значення в порядку зростання (будують *варіаційний ряд*), підраховують кількість $\boldsymbol{n_{ei}}$ даних, що попали в кожний $\boldsymbol{i}$-товий інтервал, і будують *гістограму* статистичного розподілу у вигляді $\boldsymbol{r}$ стовпців. Ширина стовпця дорівнює b, а висота – $h_i(x_{oi}) = n_{ei}/(n\cdot b)$, де $\boldsymbol{x_{oi}}$ – значення середини $\boldsymbol{i}$-тового стовпця. Після побудови гістограми підбирають плавну криву, яка відображає всі характерні особливості гістограми (*експериментального розподілу* густини ймовірності) і відповідає одному з *теоретичних* розподілів.

Перевірити гіпотезу про те, що розподіл даних не суперечить вибраному теоретичному розподілу, можна по ряду критеріїв. Найбільш ефективними є критерій Колмогорова, $\boldsymbol{\omega}$-критерій і $\boldsymbol{\chi^2}$-критерій (критерій Пірсона).

При кількості даних <u>$n > 50$</u> для перевірки критерію узгодження теоретичного розподілу $f(x)$ з дослідним частіше всього використовують критерій Пірсона. Суть критерію полягає в контролі відхилення гістограми дослідних даних від гістограми з таким же числом інтервалів, побудованій на основі теоретичного розподілу. Обчислення зводять в таблицю. Визначають середнє арифметичне $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення (СКВ) $\boldsymbol{S_n}$ експериментальних даних за формулами:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_{ei} x_{oi} \qquad S_n = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}{n-1}}. \tag{6.1}$$

Потім знаходять число даних, яке повинно було бути в i-товому інтервалі, коли б їх розподіл відповідав гаданому: $\boldsymbol{n_{\text{т}i} = n \cdot b \cdot f(x_{oi})}$. Якщо в який-небудь інтервал теоретично попадає менше п'яти даних, то його необхідно об'єднати з сусіднім, щоб в новому інтервалі $n_{\text{т}i} > 5$. Після цього для кожного інтервалу обчислюють відношення: $\chi_i^2 = \frac{(n_{ei} - n_{\text{т}i})^2}{n_{\text{т}i}}$. Просумувавши $\boldsymbol{\chi_i^2}$ по всім r інтервалам одержують число $\boldsymbol{\chi^2}$ з певним числом ступенів вільності $\boldsymbol{k}$. *Для нормального розподілу* $k=r-3$ (3 – число накладених зв'язків: 1) замість нескінченого числа даних – скінчене число n; 2) замість σ – його оцінка S_n; 3) замість істинного значення вимірюваної величини – $\overline{x}$). Вибравши рівень значимості q, за таблицями розподілу χ^2 знаходять (при даному k) нижню $\boldsymbol{\chi_{\text{н}}^2}$ і верхню $\boldsymbol{\chi_{\text{в}}^2}$ границі критичної області (табл.6.3). Гіпотезу про відповідність теоретичного розподілу дослідному приймають, якщо $\boldsymbol{\chi_{\text{н}}^2 < \chi^2 < \chi_{\text{в}}^2}$.

Таблиця 6.3. Критичні значення $\boldsymbol{\chi^2}$-розподілу для різних k,q

k	$P(\chi^2>\chi_{\text{н}}^2) = 1-q/2$, нижня границя			$P(\chi^2>\chi_{\text{в}}^2) = q/2$, верхня границя		
	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,01
1	0,0316	0,0239	0,0158	2,706	3,841	6,635
2	0,020	0,103	0,211	4,605	5,991	9,210
3	0,115	0,352	0,584	6,251	7,815	11,35
4	0,297	0,711	1,064	7,779	9,488	13,28
5	0,554	1,145	1,610	9,236	11,07	15,09
6	0,872	1,635	2,204	10,65	12,59	16,81
7	1,239	2,167	2,833	12,02	14,07	18,48
8	1,646	2,733	3,490	13,36	15,51	20,09
9	2,088	3,325	4,168	14,68	16,92	21,67
10	2,558	3,940	4,865	15,99	18,31	23,21
12	3,571	5,226	6,304	18,55	21,03	26,22
14	4,660	6,571	7,790	21,06	23,69	29,14
16	5,812	7,962	9,312	23,54	26,30	32,00
18	7,015	9,390	10,87	25,99	28,87	34,81
20	8,260	10,85	12,44	28,41	31,41	37,57
25	11,52	14,61	16,47	34,38	37,65	44,31
30	14,95	18,49	20,60	40,26	43,77	50,89

При кількості даних 10 < n < 50 важко встановити вид розподілу. Тому для перевірки належності розподілу даних *нормальному* розподілу використовують ***складовий критерій*** (складається з *критерію I* і *критерію II*)

Критерій I. Обчислюють значення параметра $\boldsymbol{d}$ за формулою

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |}{nS*}, \quad \text{де} \quad S_n^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \qquad (6.2)$$

Гіпотеза про нормальність розподілу підтверджується, якщо $d_{1\text{-}q/2} < d < d_{q/2}$, де q – завчасно вибраний рівень значимості критерію (ймовірність відкинути правильну гіпотезу, тобто якщо виявиться, що гаусівський характер розподілу не підтверджується, то це так з ймовірністю 1-q); $d_{1\text{-}q/2}$ і $d_{q/2}$ – так звані ***q*/2-процентні точки** розподілу значень d, які беруться з таблиці 6.4.

Таблиця 6.4. Статистика *d*

n	Рівень значимості ***q*/2**			**1 – *q*/2**		
	1 %	5 %	10 %	90 %	95 %	99 %
10	0,940	0,910	0,890	0,740	0,720	0,670
15	0,914	0,888	0,870	0,744	0,724	0,683
20	0,900	0,877	0,865	0,748	0,730	0,695
25	0,890	0,869	0,860	0,752	0,736	0,704
30	0,883	0,863	0,855	0,755	0,740	0,711
35	0,877	0,858	0,850	0,758	0,744	0,717
40	0,872	0,854	0,844	0,761	0,747	0,722
45	0,868	0,851	0,840	0,763	0,750	0,726
50	0,865	0,848	0,837	0,765	0,752	0,729

Критерій II. Гіпотеза про те, що ряд n даних має *нормальний розподіл* підтверджується, якщо не більше $\boldsymbol{m}$ різниць $|x_i - \bar{x}|$ перевищили значення $S_n \cdot z_{p/2}$ (в іншому випадку гіпотеза про нормальний розподіл даних повинна бути відкинута). S_n визначено за (6.1); $z_{p/2}$ – зведене значення нормованої функції Лапласа $F(Z)$ (верхня квантіль), що відповідає ймовірності $P/2$ (див. табл.4.1 з теми 4). Саму ймовірність $P(n,q)$ визначають за кількістю даних n і рівнем значимості $\boldsymbol{q_2}$ критерію II, як корінь рівняння

$$1 - \sum_{k=0}^{m} C_n^k (1-P)^k P^{n-k} = q_2, \quad \text{де} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (6.3)$$

Таблиця 6.5.

Значення довірчої ймовірності $P(n,q)$
(для обчислення $z_{p/2}$)

n	m	Рівень значимості $q/2$		
		1 %	2 %	5 %
10	1	0,98	0,98	0,96
11 – 14	1	0,99	0,98	0,97
15 – 20	1	0,99	0,99	0,98
21 – 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24 – 27	2	0,98	0,98	0,97
28 – 32	2	0,99	0,98	0,97
33 – 35	2	0,99	0,98	0,98
36 – 49	2	0,99	0,99	0,98

Для знаходження значень $P(n,q)$ складена таблиця 6.5. При кількості даних $\underline{10 \le n \le 20}$ приймають $\underline{m = 1}$, якщо $n > 20$, то $m = 2$.

Якщо гіпотеза про нормальність розподілу даних відкидається хоча б за одним з критеріїв, вважають, що розподіл даних відмінний від нормального. Якщо для критерію I вибрано рівень значимості q_1, а для критерію II – q_2, то рівень значимості складового критерію є не більшим за їх суму $\underline{q \le q_1+q_2}$.

Приклади розв'язку задач

Задача 6.1.

Цифровим вольтметром постійного струму виконано 100 вимірювань напруги. Результати вимірювань x_j (j=1, 2, ... , 100) лежать в діапазоні (3,911; ...; 3,927) В. Оцінити вид розподілу і перевірити його відповідність теоретичному розподілу за критерієм χ^2.

Розв'язок.

1. За формулою (6.1) знаходимо середнє арифметичне даних $\bar{x}$ і оцінку СКВ S_n: одержимо $\bar{x}$ = 3,91936 В, S_n= 0,0028 В.

2. Всі x_j розташовуємо в порядку їх зростання і групуємо по інтервалам. Згідно табл.6.2 число інтервалів беремо r=8, тоді ширина інтервалу b=(3,927-3,911)/8=0,002. Для кожного інтервалу знаходимо його середину x_{oi} та кількість даних n_{ei}, що в нього попали. Складаємо таблицю 6.6.

3. Обчислюємо висоту кожного i-го стовпчика $h_i=n_{ei}/(100 \cdot 0{,}002)$ (див. 4-й стовпчик в таблиці 6.6) і будуємо гістограму експериментального розподілу: по горизонталі відкладаємо через рівні проміжки значення x_{oi}, а по вертикалі – відповідні висоти h_i (масштаб по осям гістограм має бути таким, щоб відношення її висоти до основи було

приблизно 5:8). Як видно з рис.6.1, розподіл експериментальних даних досить добре апроксимується функцією Гауса. Тому подальша обробка даних буде зв'язана з їх *перевіркою на нормальний розподіл*.

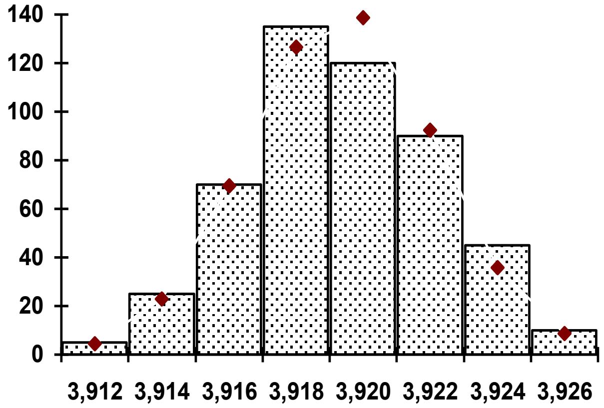


Рис.6.1. Гістограма експериментальних даних. Відмічено відповідні значення функції Гауса

4. Для обчислення теоретичного числа даних n_{Ti} в i-му інтервалі, які відповідають нормальному розподілу, від реальних середин інтервалів переходимо до нормованих значень: $z_i = (x_{oi} - \bar{x})/S_n$ (стовпчик 6 в табл.6.6). Для кожного аргументу z_i знаходимо за табл.6.7 значення нормованої функції розподілу густини ймовірності $f(z_i)$ (стовпчик 7) і від нього переходимо до значень функції Гауса $f(x_i) = f(z_i)/S_n$. На гістограмі вони позначені чорними крапками.

Таблиця 6.6. Результати обробки даних за критерієм χ^2 (Пірсона)

i	x_{oi}	n_{ei}	h_i	$x_{oi}-\bar{x}$	z_i	$f(z_i)$	$f(x_i) = f(z_i)/S_n$	n_{Ti}	χ_i^2
1	3,912	1	5	-0,00736	-2,630	0,0126	4,5	0,90	
2	3,914	5	25	-0,00536	-1,914	0,0640	22,8	4,56	0,05340
3	3,916	14	70	-0,00336	-1,200	0,1942	69,4	13,88	0,00104
4	3,918	27	135	-0,00136	-0,485	0,3546	126,6	25,32	0,11150
5	3,920	24	120	+0,00064	+0,229	0,3885	138,8	27,76	0,50920
6	3,922	18	90	+0,00264	+0,943	0,2558	92,4	18,28	0,00426
7	3,924	9	45	+0,00464	+1,660	0,1006	35,9	7,18	0,49500
8	3,926	2	10	+0,00664	+2,370	0,0241	8,6	1,72	
$x_{oi}=(x_i+x_{i+1})/2$		$h_i=n_{ei}/(n \cdot b)$		$z_i=(x_{oi}-\bar{x})/S_n$			$n_{Ti}=n \cdot b \cdot f(x_i)$		$\Sigma=1{,}17$
$\bar{x}=3{,}91936$				$S_n=0{,}0028$		$\chi_i^2=(n_{ei}-n_{Ti})^2/n_{Ti}$; $\chi^2=\Sigma\chi_i^2$			

5. Визначаємо теоретичну кількість даних n_{Ti}, що могли попасти в i-й інтервал змінних: $\boldsymbol{n_{Ti}=n \cdot b \cdot f(x_i)}$ (стовпчик 9). Ця формула випливає з означення *густини* ймовірності – $f(x)=\frac{dP}{dx} \approx \frac{n_i}{n \cdot b}$ ($dx \equiv b$ – ширина інтервала, $n_i \equiv n_{Ti}$ – число даних, що в нього попали). Оскільки в 1-му і 8-му інтервалах теоретично потрапляє менше 5 даних, то вони об'єдну-

ються з сусідніми своїми ж інтервалами так, щоб їх стало ($n_{\text{Ті}}$) ≥ 5, а відповідно це приводить і до об'єднання експериментальних інтервалів. Таким чином число інтервалів стає рівним 6. Далі знаходимо 6 чисел χ_i^2 і їх суму χ^2 (загальна формула наведена внизу таблиці 6.6).

6. Сума шести значень χ_i^2 дорівнює $\underline{\chi^2=1,17}$. Нехай вибраний рівень значимості q=0,1 (q/2=0,05). При числі ступенів вільності k=6-3=3 за таблицею 6.3 знаходимо значення верхньої $\chi_в^2$ і нижньої $\chi_н^2$ критичних областей: $\chi^2_{3;0,05}$=7,815, $\chi^2_{3;0,95}$=0,352.

Висновок: розподіл дослідних даних можна вважати нормальним (гаусівським), оскільки виконується нерівність: $\underline{0,35<\mathbf{1,17}<7,82}$.

Таблиця 6.7.

Густина ймовірності нормованого розподілу: $\mathbf{f(z) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-z^2/2}}$

z	$f(z)$	z	$f(z)$	z	$f(z)$	z	$f(z)$
0,0	0,3989	1,0	0,2420	2,0	0,0540	3,0	0,0044
0,1	0,3970	1,1	0,2179	2,1	0,0440	3,1	0,0033
0,2	0,3910	1,2	0,1942	2,2	0,0355	3,2	0,0024
0,3	0,3814	1,3	0,1714	2,3	0,0283	3,3	0,0017
0,4	0,3683	1,4	0,1497	2,4	0,0224	3,4	0,0012
0,5	0,3521	1,5	0,1295	2,5	0,0175	3,5	0,0009
0,6	0,3332	1,6	0,1109	2,6	0,0136	3,6	0,0006
0,7	0,3123	1,7	0,0940	2,7	0,0104	3,7	0,0004
0,8	0,2897	1,8	0,0790	2,8	0,0079	3,8	0,0003
0,9	0,2661	1,9	0,0656	2,9	0,0060	3,9	0,0002

Задача 6.2.

Цифровим вольтметром постійного струму виконано вимірювання напруги. Результати представлені в таблиці 6.8 (стовпчики 1 і 2 та 5 і 6). Перевірити гіпотезу про належність даної вибірки до нормального розподілу.

Розв'язок.

Число даних n=24, тому використаємо складовий критерій. Обчислимо оцінки параметрів розподілу – середнє значення $\overline{x}$ і СКВ (формула 6.1) та параметр критерію S_n* (формула 6.2):

$$\overline{x} = 8,91896 \approx 8,919 \text{ В};\ S_n = 5,87\cdot10^{-3};\ S_n^* = 5,748\cdot10^{-3}.$$

Перевіримо виконання критеріїв І і ІІ.

Таблиця 6.8. Дані вимірювань та результати їх обробки (задача 6.2)

№ п/п i	Покази приладу	Відхил. $x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$, 10^{-6}	№ п/п i	Покази приладу	Відхил. $x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$, 10^{-6}
1	8,906	-0,013	169	13	8,914	-0,005	25
2	8,915	-0,004	16	14	8,925	0,006	36
3	8,913	-0,006	36	15	8,923	0,004	16
4	8,921	+0,002	4	16	8,917	-0,002	4
5	8,925	+0,006	36	17	8,918	-0,001	1
6	8,929	+0,010	100	18	8,921	0,002	4
7	8,917	-0,002	4	19	8,920	0,001	1
8	8,915	-0,004	16	20	8,920	0,001	1
9	8,919	0,000	0	21	8,914	-0,005	25
10	8,914	-0,005	25	22	8,917	-0,002	4
11	8,921	+0,002	4	23	8,916	-0,003	9
12	8,920	+0,001	1	24	8,935	0,016	256
m=2	$\overline{x}$ = 8,91896 В		S_n = 0,00587		S_n* = 0,005748		

Критерій I. Знайдемо параметр d (6.2): d = 0,103/(24·0,00575) = =0,746. Вибравши рівень значимості q_1= 0,02 із таблиці 6.4 для n=24, знаходимо, що $d_{0,01}$= 0,897; $d_{0,99}$= 0,700. Отже, 0,700<**0,746**<0,897 – тому критерій I виконується.

Критерій II. Приймаємо рівень значимості q_2= 0,02. Для n = 24 і q_2=0,02 з таблиці 6.5 знаходимо P=0,98. Так як P/2= 0,49, то з табл.4.1 (тема 4) знаходимо $z_{p/2}$=2,33. Звідси $\mathbf{z_{p/2}}\cdot S_n$ = 2,33·5,87·10^{-3} = 13,67·10^{-3}. Згідно критерію II не більше m=2 різниць $|x_i-\overline{x}|$ можуть перевищити число 13,67·10^{-3}. За даними розрахунків, приведеними в табл.6.8, бачимо, що ця різниця тільки при i=24 перевищує критичне значення. Отже і критерій II виконується.

Таким чином, гіпотеза про нормальний розподіл одержаних даних підтверджується при рівні значимості не більше $q \le q_1+q_2$= 0,04.

Задачі для самостійного розв'язку

6.3. Визначити за складовим критерієм, чи відповідає закон розподілу значень 13 рівноточних вимірювань напруги (мВ) нормальному закону: 100,08; 100,09; 100,07; 100,10; 100,05; 100,06; 100,04; 100,06; 99,95; 99,92; 100,02; 99,98; 99,97. Також зробити обробку цих вимірювань: розрахувати середнє арифметичне значення, СКВ середнього арифметичного, довірчий інтервал (для довірчої ймовірності P=0,98). Написати правильно результат вимірювання.

(Відповідь: 100,03 мВ; 0,02 мВ; U=(100,03±0,05) мВ, P=0,98).

6.4. В таблиці 6.9 приведені результати вимірювань ЕРС джерела струму компенсаційним методом з допомогою потенціометра. Перевірити, чи можна вважати одержану вибірку як таку, що задовольняє закону нормального розподілу.

Таблиця 6.9

№ п/п	Покази приладу x_i, В	№ п/п	Покази приладу x_i, В	№ п/п	Покази приладу x_i, В	№ п/п	Покази приладу x_i, В
1	2,7997	10	2,7989	19	2,7986	28	2,7982
2	2,7991	11	2,7997	20	2,7999	29	2,7999
3	2,7990	12	2,7993	21	2,7998	30	2,7997
4	2,7997	13	2,8000	22	2,7996	31	2,7999
5	2,7992	14	2,8006	23	2,7992	32	2,7992
6	2,7976	15	2,7998	24	2,8000	33	2,7999
7	2,7984	16	2,7995	25	2,7993	34	2,7989
8	2,7999	17	2,7992	26	2,7988	35	2,7994
9	2,7990	18	2,8011	27	2,7993	36	2,7999

6.5. Лічильником Гейгера виконано 200 вимірювань кількості актів розпаду протягом 5 хвилин деякої радіоактивної речовини. Інтервальні підрахунки наведені в таблиці 6.10. Оцінити належність розподілу даних до розподілу Гауса.

Таблиця 6.10

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{0i}	103	109	115	121	127	133	139	145	151	157
n_{ei}	6	8	18	26	40	44	32	16	9	3

6.6. При високоточному зважуванні шматочка дорогоцінного металу була одержана наступна вибірка даних (в мг): 449, 445, 450, 449, 444, 451, 445, 454, 450, 449, 446, 452, 450, 446, 450, 449,447, 452,451, 447,451, 449,448, 452, 453, 447, 449, 450, 450, 452, 451, 448, 452, 451,453, 454, 454, 451, 455, 446, 454, 448, 451, 453, 448, 456, 450, 454, 447, 450, 453, 455. Побудувати гістограму, оцінити вид розподілу густини ймовірності, перевірити його за критерієм Пірсона, визначити масу цього шматочку металу та інтервал достовірності отриманого результату.

6.7. Вимірювання площі поверхні об'ємної фігури складної форми (методом нанесення сітки і послідовного вимірювання лінійних розмірів утворених трикутників і чотирикутників) дали такий набір даних загальної площі фігури: 6,08; 6,70; 6,68; 6,70; 6,72; 6,73; 6,67; 6,75; 6,10; 6,21; 6,80; 6,23; 6,78; 6,82; 6,81; 6,84; 6,30; 6,32; 6,29; 6,34; 6,90; 6,88; 6,89; 6,93; 6,95; 6,40; 6,38; 6,39; 6,44; 6,48; 6,50; 6,52; 7,00; 6,98; 7,03; 6,55; 6,49; 6,57; 6,58; 7,10; 6,59; 7,14; 6,60; 7,20; 6,62; 7,40; 6,64; 6,61; 6,15; 6,35; 6,86.

За формою гістограми та застосувавши критерій Пірсона вияснити найбільш доцільний (правильний) вид розподілу даних та обчислити його параметри (характеристики).

6.8. Рівноточні багатократні вимірювання маси одного з компонентів активної речовини виявили такий розкид даних (в мг): 245, 249, 251, 254, 249, 252, 246, 249, 252, 247, 249, 252, 247, 250, 252, 248, 251, 254, 251, 246, 254, 248, 251, 253, 248, 250, 254, 247, 250, 253, 255. Оцінити вид розподілу густини ймовірності і знайти результат вимірювання та його довірчі межі.

Тема 7. Обробка результатів непрямих рівноточних вимірювань

Перш за все відмітимо, що на даний час немає строго обґрунтованого методу оцінки границь довірчого інтервалу при заданій надійності для результатів непрямих вимірювань. Тому будемо користуватися дещо спрощеними методами обробки результатів непрямих вимірювань.

Вимірювана величина $\boldsymbol{y}$ є функцією від x_1, x_2,..., x_m, тобто $\boldsymbol{y} = f(x_1, x_2,..., x_\mathrm{m})$. Для спрощення вважають, що *значення x_i розподілені за нормальним законом, вимірювання рівноточні, похибки вимірювання величин x_1, x_2,..., x_m некорельовані, відповідна множина значень y_i також розподілена за нормальним законом*. Тоді і кожна абсолютна похибка $\Delta\boldsymbol{y}$ є функцією похибок прямих вимірювань $\Delta\boldsymbol{y} = f(\Delta x_1, \Delta x_2,...,\Delta x_\mathrm{m})$, а їх множина Δy_i також розподілена за нормальним законом. За результат вимірювання $\boldsymbol{y}$ приймається значення

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m), \tag{7.1}$$

тобто у формулу зв'язку підставляються середні значення прямих вимірювань.

За характером функції непрямі вимірювання поділяють на дві групи:

1) лінійна залежність між шуканою величиною $\boldsymbol{y}$ і вимірюваними аргументами x_i, $\boldsymbol{y} = b_1x_1+b_2x_2+...+b_\mathrm{m}x_\mathrm{m}$ (експериментально знайти коефіцієнти b можна почерговою зміною одного з аргументів x_i, залишивши незмінними всі інші. Тоді одержимо систему m лінійних рівнянь або графіків, з яких і визначимо кожний коефіцієнт (нахилу) b).

2) нелінійна залежність, $\boldsymbol{y} = f(x_1,...,x_\mathrm{m})$.

При лінійній залежності функції від аргументів, СКВ результату $S_{\overline{y}}$ вираховують за формулою $S_{\overline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i \cdot S_{n_i\overline{x}_i})^2}$,

де $S_{n_i\overline{x}_i}$ – СКВ середнього арифметичного $\boldsymbol{n_i}$ прямих вимірювань $\boldsymbol{i}$-го аргументу (тобто результату вимірювання – $\overline{x}_i$). А якщо розподіл похибок належить нормальному, довірчі межі випадкової похибки результату $\boldsymbol{y}$ непрямого вимірювання знаходять за формулою

$$\Delta_\text{в}(p) = \pm\, t_{np} \cdot S_{\overline{y}}, \tag{7.2}$$

$\boldsymbol{t_{np}}$ – коефіцієнт Стьюдента, який відповідає довірчій імовірності $\boldsymbol{p}$ і числу ступенів вільності $\boldsymbol{f_\text{еф}}$, що визначається за формулами:

$$f_{\text{еф}} = \frac{(S_{\overline{y}})^4 - 2\cdot C}{C}, \text{ де } C = \sum_{i=1}^{m} \frac{(b_i S_{n_i \overline{x}_i})^4}{n_i + 1} \quad (7.2а)$$

Для непрямих вимірювань при нелінійній функціональній залежності використовують *метод лінеаризації,* який ґрунтується на розкладі нелінійної функції в ряд Тейлора. У загальному випадку функції $y=f(x_1,x_2,...,x_m)$, аргументи якої змінюються випадково і незалежно, зміну функції $\Delta f \equiv \Delta y = y - \overline{y}$ (випадкову абсолютну похибку непрямого вимірювання) можна представити виразом:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + R, \text{ де } R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (\Delta x_i)^2 + \sum_{j<i=2}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial \ x_i} \Delta x_j \Delta x_i . \quad (7.3)$$

Значення частинних похідних визначаються для середньоарифметичних значень аргументів $\overline{x}_i$, тобто $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_i = \overline{x}_i}$. Але значення R обчислюється для тих відхилень Δx_i кожного з аргументів x_i від їх середнього значення $\overline{x}_i$, які відповідають максимальній різниці у значеннях функції (тобто максимальній похибці $\Delta y = y - \overline{y}$).

СКВ результату непрямого вимірювання ($\overline{y}$) визначають за виразом:

$$S_{\overline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_i = \overline{x}_i} \cdot S_{n_i \overline{x}_i} \right)^2} . \quad (7.4)$$

Приклад знаходження частинних похідних.

$$y = f(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^3; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_1 = \overline{x}_1} = a \cdot 2\overline{x}_1 + 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_2 = \overline{x}_2} = 0 + b \cdot 3\overline{x}_2^2$$

Довірчі межі випадкової похибки результату непрямого вимірювання обчислюють за тою ж формулою (7.2): $\Delta y_{\text{в}}(p) = \pm t_{np} \cdot S_{\overline{y}}$.

Але описаний вище метод визначення похибки Δy вважається застосовним, якщо $R < 0{,}8 \cdot S_{\overline{y}}$. (7.5)

При відомих довірчих межах похибок $\overline{x}_i(p)$ вимірюваних аргументів, визначення абсолютної похибки (довірчого інтервалу) результату непрямого вимірювання спрощується:

$$\Delta \overline{y}_i(p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_i = \overline{x}_i} \cdot \Delta \overline{x}_i(p) \right)^2} . \quad (7.6)$$

У багатьох випадках розрахунки ще більше спрощуються, якщо спочатку визначити відносну похибку, скориставшись виразом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f(x_1, x_2, ..., x_m) \cdot \Delta x_i\right)^2}\,, \qquad (7.7)$$

тобто, спочатку береться натуральний логарифм функції ($\ln(y)$), а вже потім частинна похідна. Це дуже зручно використовувати у випадку, коли у формулі функції відсутнє додавання/віднімання аргументів.

Приклад.

$V=a \cdot b \cdot c$; $\ln V=\ln(abc)=\ln a+\ln b+\ln c$; $\frac{\partial}{\partial a}[\ln V] = \frac{1}{a}$, $\frac{\partial}{\partial b}[\ln V] = \frac{1}{b}$, $\frac{\partial}{\partial c}[\ln V] = \frac{1}{c}$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}\,. \qquad (7.7а)$$

При використанні формул (7.5) і (7.6), довірчі ймовірності p слід вибирати однаковими.

Довірчі межі невиключної систематичної похибки результату непрямих вимірювань $\theta(\boldsymbol{p})$ визначають за формулами:

при лінійній залежності – $\theta(p) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i\theta_i)^2}$; (7.8а)

при нелінійній залежності – $\theta(p) = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\theta_i)^2}$. (7.8б)

Довірчі границі *результату непрямого вимірювання* (сумарну похибку) обчислюють у відповідності з формулою (5.6 – тема 5).

У випадку невідомих розподілів похибок або за наявності кореляції між ними, для визначення результату непрямого вимірювання і його похибки використовують *метод зведення* (*зведення до прямих вимірювань*): зробивши багатократні прямі вимірювання аргументів (наприклад, b,c,d), обчислюють за ними окремі шукані значення величини α (наприклад, $\alpha_1=b_1 \cdot c_1 \cdot d_1$, $\alpha_2=b_2 \cdot c_2 \cdot d_2$, $\alpha_3=b_3 \cdot c_3 \cdot d_3$, α_n=...). Одержаний таким чином ряд непрямих даних вимірювання α_i можна розглядати як групу експериментальних даних, що є результатом n прямих вимірювань. Їх обробку ведуть за методикою прямих вимірювань – знаходять середнє A і СКВ:

$$A = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{n}; \quad S_{nA} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{(\alpha_j - A)^2}{n(n-1)}}; \quad \Delta(p) = t_{np} \cdot S_{nA}. \qquad (7.9)$$

В процесі оцінок похибок непрямих вимірювань може бути внесена ще й значна похибка за рахунок заокруглення результатів обрахунків. Тому необхідно: а) всі обрахунки кінцевого результату проводити з числом значущих цифр більше на одиницю, ніж число значущих цифр, одержаних при прямих вимірюваннях; б) щоб відносна похибка заокруглення математичних і фізичних констант була на порядок меншою за відносні похибки прямих вимірювань.

Приклади розв'язку задач

Задача 7.1.

При вимірюваннях густини тіла зроблено 11 вимірів його маси m і об'єму v та обраховані середні значення (M=252,91·10^{-3} кг; V=195,38·10^{-6} м^3) і СКВ (S_M =4,4·10^{-7} кг^2; S_V = 4,06·10^{-10} м^6). Оцінити результат непрямого вимірювання густини та його похибку.

Розв'язок.

Результатом непрямого вимірювання згідно формули (7.1) є:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{252{,}9120 \cdot 10^{-3} к\tilde{a}}{195{,}3798 \cdot 10^{-6} м^3} \approx 1{,}294463 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}.$$

Залежність вимірюваної величини від аргументів нелінійна $\rho = m/v$, тому для знаходження випадкової похибки результату вимірювання потрібно скористатися методом лінеаризації, попередньо перевіривши, чи виконується нерівність (7.5). Відповідно до формули (7.3), взявши другі *частинні* похідні, для залишкового члена R одержимо вираз:

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}(\Delta v)^2 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2}(\Delta m)^2\right] + \frac{\partial^2 \rho}{\partial m \partial v}\Delta m \Delta v = \frac{m}{v^3}(\Delta v)^2 + 0 + \frac{1}{v^2}\Delta m \Delta v.$$

Знаки у доданків однакові, так як похибки випадкові. Маючи 11 пар відхилень (Δv і Δm) від середніх значень (V і M) і знайшовши серед них ті, які відповідають максимальному відхиленню значення густини від його середнього значення ($\Delta v_{\max}$=32·10^{-10} м^3, $\Delta m_{\max}$=31·10^{-7} кг), визначимо значення R, підставивши замість m і v їх середні значення

$$R = \frac{252{,}912 \cdot 10^{-3}}{(195{,}3798 \cdot 10^{-6})^3} \cdot (32 \cdot 10^{-10})^2 + \frac{32 \cdot 10^{-10} \cdot 31 \cdot 10^{-7}}{(195{,}3798 \cdot 10^{-6})^2} =$$

$$= 0{,}0347240 \cdot 10^{-5} + 0{,}0259867 \cdot 10^{-5} = 0{,}0607107 \cdot 10^{-5} \approx 6 \cdot 10^{-7}$$

Число R необхідно порівняти з числом добутку $0{,}8 \cdot S(\overline{\rho})$ (умова 7.5). Взявши частинні похідні від виразу для ρ, обчислюємо $S(\overline{\rho})$ (7.4):

$$S(\overline{\rho}) = \sqrt{(\frac{1}{V} \cdot S_M)^2 + (-\frac{M}{V^2} \cdot S_V)^2} = \sqrt{(\frac{4{,}4 \cdot 10^{-7}}{195{,}38 \cdot 10^{-6}})^2 + (\frac{252{,}91 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}06 \cdot 10^{-10}}{38173{,}344 \cdot 10^{-12}})^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}02252\cdot 10^{-1})^2 + (0{,}02690\cdot 10^{-1})^2} = 0{,}00351$$

Отримуємо: 0,0000006<0,8·0,00351=0,00281 – умова застосовності виконується. Тоді результат непрямого вимірювання можна представити у вигляді:

$\overline{\rho}$ = 1,294463·10^3 кг/м^3 =1294,463 кг/м^3; $S(\overline{\rho})$ =0,004 кг/м^3 ; n_1=n_2= 11.

Задача 7.2.

Обробити експериментальні дані при визначенні прискорення вільного падіння, використовуючи формулу математичного маятника $g = \frac{4\pi^2 l}{\tau^2}$, де τ – період коливань і l – довжина маятника, повинні бути експериментально визначені. В результаті прямих вимірювань отримано наступні дані: l_1= 309,5 см, l_2= 310,2 см, l_3= 310,3 см, τ_1= 3,530 с, τ_2 = 3,510с, τ_3 = 3,520 с, τ_4 =3,542 с, τ_5 = 3,536 с, τ_6 = 3,534 с.

Розв'язок.

За цими даними, використовуючи формули (7.9), обчислюємо:

середнє значення: L=310 см; T=3,53 с;

середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного:

$$S_L = \sqrt{\frac{(0{,}5)^2 + (0{,}2)^2 + (0{,}3)^2}{3\cdot 2}} = 0{,}25 \text{ см}; \quad S_T = \sqrt{\frac{0{,}0007}{6\cdot 5}} \approx 0{,}0048 \text{ с}.$$

Задамося довірчою ймовірністю p=0,95 і за таблицею 5.3 (тема 5) для трьох вимірювань довжини знаходимо коефіцієнт Стьюдента $\boldsymbol{t_{пр}}$=4,30. Тоді довірчий (надійний) інтервал (межі) випадкових похибок $\boldsymbol{\Delta_в L}$= $t_{пр}\cdot S_L$=4,30·0,25= ±1,1 см. Вимірювання довжини $\boldsymbol{l}$ проводили рулеткою з міліметровими поділками, тому приймаємо, що систематична похибка θ(l)= 0,1 см. Відношення θ(l)/S_L= 0,1/1,1=0,091<0,8 (тема 5), тому систематичну похибку можна не враховувати, тоді похибка результату при визначенні довжини дорівнює ΔL = ±1,1 см.

Так само для $\boldsymbol{p}$=0,95 визначаємо довірчий інтервал вимірювання періоду. Для шести вимірювань коефіцієнт Стьюдента $\boldsymbol{t_{пр}}$=2,57. Тоді $\boldsymbol{\Delta_в T}$= 0,0048·2,57 ≈ 0,012 с. З паспортних даних секундоміра знаємо, що його (систематична) похибка θ(τ)=0,002 с і тому для неї також виконується умова малості.

Вираховуємо результат непрямого вимірювання – середнє значення G – підставивши середні значення прямих вимірювань:

$$G = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\cdot(3{,}14)^2\cdot 310}{(3{,}53)^2} = 981{,}21 \text{ см/с}^2.$$

Для визначення довірчого інтервалу ΔG скористаємося формулою 7.7, тобто спочатку визначимо відносну похибку непрямого вимірювання. Візьмемо логарифм виразу g ($\ln g = \ln 4 + 2\cdot\ln\pi + \ln l - 2\cdot\ln\tau$) і знайдемо частинні похідні по кожній змінній (в тому числі і по числу π, яке у розрахунках використовується з тим чи іншим наближенням):

$$\frac{\partial}{\partial\pi}[\ln G(\pi, L, T)] = \frac{\partial}{\partial\pi}(\ln 4 + 2\ln\pi + \ln L - 2\ln T) = 2\cdot\frac{1}{\pi} + 0 \quad \text{(інші дорівнюють 0)};$$

аналогічно: $\frac{\partial}{\partial L}(\ln G) = \frac{1}{L}$; $\frac{\partial}{\partial T}(\ln G) = -2\cdot\frac{1}{T} + 0.$

Підставимо квадрати цих похідних у формулу 7.7, одержимо

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta G}{G} = \sqrt{4\cdot\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = \sqrt{4\cdot\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_L^2 + 4\cdot\varepsilon_T^2}\ .$$

Абсолютна похибка результату непрямого вимірювання ΔG знаходиться з добутку відносної похибки на середнє значення, тобто

$$\Delta G = \varepsilon_g \cdot G = 981{,}21\cdot\sqrt{4\cdot\left(\frac{0{,}002}{3{,}14}\right)^2 + \left(\frac{1{,}1}{310}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{0{,}01}{3{,}53}\right)^2} = 6{,}7 \underline{\approx 7 \text{ см/с}^2}.$$

Кінцевий результат: $\underline{G = (981 \pm 7) \text{ см/с}^2}$; $p = 0{,}95$;

відносна похибка $\varepsilon_g = (7/981)\cdot 100\ \% = 0{,}7\ \%$.

Задачі для самостійного розв'язку

7.3. Знайти частинні похідні функцій: а) $f = a(mb + nc)^3 + kac$;

б) $f(x,y,z) = \frac{2x^2 + 3y}{7z} + 6xy$; в) $F = b + \frac{ka - nc^4}{mab}$; k, m, n – постійні, a, b, c – величини, що виміряні з похибками Δa, Δb, Δc відповідно.

7.4. Знайти вираз для обчислення абсолютної і відносної похибки фізичної величини $\underline{w} = f(x,y,z)$, яка зв'язана з величинами x, y, z співвідношенням:

1) $w = axy^3 + bz^4$; 2) $w = \frac{ax^2 z}{cy^2}$; 3) $w = bx^5 - c\sqrt{ay}$; 4) $w = axyz$; 5) $w = \frac{axy}{z}$;

a, b, c – постійні, x, y, z – виміряні з похибками Δx, Δy, Δz відповідно.

7.5. Вивести вирази абсолютної та відносної похибок опосередкованого (непрямого) вимірювання величини $\boldsymbol{Y}=f(X_1, X_2, X_3)$. Записати вирази похибок при заданих значеннях X_1, X_2, X_3. Варіанти завдань записані в таблиці 1 [таблиця з даними взята з посібника: Поджаренко В.О., Кулаков П.І., Ігнатенко О.Г., Войтович О.П. Основи метрології та вимірювальної техніки. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2006. – 151 с.].

Таблиця 1.

Варіант	$Y(X_1, X_2, X_3)$	X_1	X_2	X_3
1	$Y = X_1 + X_2^3 / \sqrt{X_3}$	1,2	2,1	5,2
2	$Y = X_1 / X_2 + \sqrt{X_3}$	2,2	4,3	1,1
3	$Y = X_1 + X_3 \sqrt{X_2}$	3,3	5,4	2,1
4	$Y = X_2 \cdot X_3 / \sqrt{X_1}$	5,2	6,2	4,3
5	$Y = X_1 /(X_2 + \sqrt{X_3})$	4,1	4,2	3,4
6	$Y = X_1 / \sqrt{X_2 + X_3}$	2,0	5,3	2,2
7	$Y = \sqrt{X_1 + X_2} / X_3$	3,3	2,2	1,3
8	$Y = X_1 + X_3 / \sqrt{X_2}$	4,1	1,2	4,2
9	$Y = \sqrt{X_1 \cdot X_2} / X_3$	7,2	4,3	3,3
10	$Y = (X_1 + \sqrt{X_2}) / X_3$	2,1	7,0	2,0
11	$Y = \sqrt[3]{X_1} + X_2 \cdot X_3$	5,3	6,3	1,2
12	$Y = \sqrt[3]{X_3} + X_1 / X_2$	1,1	6,5	5,4
13	$Y = \sqrt{X_1 / X_2} + X_3$	6,9	2,2	4,7
14	$Y = X_1 + \sqrt{X_2} + \sqrt[3]{X_3}$	4,6	7,1	2,2
15	$Y = (X_1 + X_2) / \sqrt{X_3}$	2,2	4,4	1,3
16	$Y = X_1 / \sqrt{X_2 \cdot X_3}$	5,3	3,2	2,1
17	$Y = \sqrt{X_1} / X_3 + X_2$	1,4	2,2	1,2
18	$Y = \sqrt{X_1^3} + X_2 / X_3$	4,1	3,1	3,4
19	$Y = \sqrt{X_1 + X_2} + X_3$	2,2	1,2	1,3
20	$Y = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} / X_3$	3,3	2,2	4,1

7.6. Обробити експериментальні дані, що одержані при визначенні прискорення вільного падіння за формулою шляху рівноприскореного руху: $g = \frac{2h}{t^2}$, де t – час падіння (с), h – висота (см). В результаті прямих вимірювань отримано наступні дані:

h_1=209,8; h_2=210,2; h_3=210,1; h_4=209,9;

t_1=0,653; t_2=0,655; t_3=0,652; t_4=0,663; t_5=0,653; t_6=0,640; t_7=0,648;

невиключні систематичні похибки: θ_h=±1 мм, θ_t=±0,002 с.

7.7. Знайти середнє значення та обчислити похибку визначення швидкості v течії рідини в циліндричній трубі за даними вимірювання її діаметру d та часу t заповнення об'єму V згідно формули $v = \frac{4V}{\pi d^2 t}$. Результати прямих вимірювань представлені їх середніми значеннями V, D, T та їх СКВ:

V=500 см^3, S_V=0,034 см^3; n=5, θ_V=±0,5 см^3;

D=1 см, S_D=0,05 см; n=10, θ_d=±0,1 мм;

T=25 с, S_T=0,13 с, n=5; θ_t=±0,1 с.

7.8. Знайти вираз для обчислення абсолютної і відносної похибки величини U:

1) $U(x,y,z) = \frac{a}{b}(x^2yz)^3$; 2) $U = \frac{(2axx^{1/2} + 5bz^3y^2)^3}{2c+z}$; 3) $U = \frac{ax^2 + 3by}{5z^2} + 6y$

a, b, c – постійні, x, y, z визначені з похибками Δx, Δy і Δz відповідно.

Тема 8. Обробка результатів нерівноточних вимірювань

Якщо критерій перевірки розсіювання середніх арифметичних (критерії Р.Фішера або Стьюдента для нормального розподілу даних; критерії Уілкоксона або Сіджела-Тьюки для розподілів, відмінних від нормального) показав, що відмінності результатів вимірювання окремих груп носять випадковий характер і є допустимі, але розсіювання СКВ значне або вимірювання в групах здійснено різними приладами з різними систематичними похибками, то групи називають *нерівноточними*.

При спільній обробці результатів вимірювань декількох нерівноточних груп необхідно знайти відповідну для кожної групи статистичну вагу.

Вага результату вимірювання $\boldsymbol{p}$ – додатне число, яке служить оцінкою довіри до того чи іншого окремого результату вимірювання $\boldsymbol{x}$. Тоді в якості загальної оцінки результату всіх вимірювань приймають *середнє зважене (середнє вагове) значення* $\boldsymbol{X_p}$ – середнє значення величини, одержане шляхом ряду нерівноточних вимірювань $\boldsymbol{x_i}$ з врахуванням ваги $\boldsymbol{p_i}$ кожного результату в групах, що взяті для обробки:

$$X_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad (8.1)$$

Розглянемо деякі прийоми знаходження чисельного значення ваги результату вимірювання.

1) В більшості випадків прийнято вважати, що ваги ряду нерівноточних вимірювань $\boldsymbol{p_i}$ обернено пропорційні квадратам їх середньоквадратичних похибок S_{ni}, тобто $\boldsymbol{p_i = 1/(S_{ni})^2}$. З цією метою результату з найбільшою похибкою приписують найменшу вагу, наприклад, $\boldsymbol{p_1}$=1, а інші значення $\boldsymbol{p_i}$ знаходять по відношенню до цього числа, тобто шляхом ділення всіх інших дробів $1/(S_{ni})^2$ на дріб $1/(S_{n1})^2$, що був прийнятий за $\boldsymbol{p_1}$: $p_i = \frac{1/S_{ni}^2}{1/S_{n1}^2} = \frac{S_{n1}^2}{S_{ni}^2}$, так як $S_{n1}^2 > S_{ni}^2$, то $p_i > p_1$ – тобто друге і наступні вимірювання є "більш цінні" за перше і саме їх результати є найбільш ймовірні (і точні), але ми не можемо відкидати і перший результат.

2) Часто за вагу приймають число, пропорційне числу повторних вимірювань $\boldsymbol{n}_{\mathbf{i}}$ в кожній із серій, що входять в спільний ряд вимірювань ($\boldsymbol{p}_{\mathbf{i}}\sim\boldsymbol{n}_{\mathbf{i}}$) або навіть рівне n_{i}.

3) Якщо статистичні ваги p_1, p_2,..., p_m $\boldsymbol{m}$ груп даних завчасно невідомі, то їх обчислюють за наступною схемою:

а) знаходять середнє значення $\bar{x}_j$ і довірчий інтервал випадкових похибок $\Delta_{\text{вj}}$ в кожній з m груп даних;

б) обчислюють: СКВ середнього арифметичного (результату вимірювання) $S_{n\bar{x}\,j}$ в кожній групі; СКВ невиключних систематичних похибок $S(\theta)_{\text{j}}$ за формулою (тема 5) $S^2(\theta_j)=\dfrac{k^2}{3}\sum\limits_i \theta_i^2$, – додавання здійснюється по всім невиключним систематичним похибкам даної групи, k – коефіцієнт, що залежить від вибраної довірчої ймовірності p;

тепер роблять оцінку сумарної дисперсії результату вимірювання j-ої групи експериментальних даних

$$(S_{\text{сум}}^2)_j=(S_{n\bar{x}})_j^2+S^2(\theta_j); \tag{8.2}$$

в) знаючи числа $(S_{\text{сум}}^2)_j$, тобто <u>оцінку дисперсії сумарної похибки</u> в кожній групі даних, знаходять суму їх обернених значень і визначають вагу $\boldsymbol{p_j}$ кожної групи даних:

$$(D^{-1})_{\text{сум}}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(S_{\text{сум}}^2)_j};\qquad p_j=\frac{\dfrac{1}{(S_{\text{сум}}^2)_j}}{(D^{-1})_{\text{сум}}}=\frac{D_j^{-1}}{(D^{-1})_{\text{сум}}} \tag{8.3}$$

Легко бачити, що в цьому випадку сума всіх $\boldsymbol{p_j}$ буде дорівнювати одиниці ($\sum\limits_{j=1}^{m}p_j=1$), а ф-ла (8.1) набуває вигляду: $X_p=\sum\limits_{j=1}^{m}p_j\bar{x}_j$. (8.4)

У такому запису вона аналогічна формулі визначення середнього значення, де $\boldsymbol{p}_{\mathbf{j}}$ виступає у якості ймовірності одержати значення $\bar{x}_j$.

Сумарне СКВ результату нерівноточного вимірювання X_p, знаючи вже СКВ в усіх m групах, знаходять за такою формулою (використовуючи вже вирахуване нами раніше число $(D^{-1})_{сум}$:

$$S(X_p)=1/\sqrt{(D^{-1})_{\text{сум}}}\,,\ \text{тобто}\ S(X_p)=\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(S_{\text{сум}}^2)_j}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{S_2^2}+}}). \tag{8.5}$$

Довірчий інтервал похибки виміряного значення X_p визначають за відомою вже формулою $\Delta(P) = t_{np} \cdot S(X_P)$, де коефіцієнт Стьюдента $\boldsymbol{t_{np}}$ відповідає довірчій імовірності P з числом ступенів вільності $\boldsymbol{f = m(n_{\min} - 1)}$, де $\boldsymbol{n_{\min}}$ – найменше із n_j (кількості даних) серед усіх m груп вимірювань.

Часто відомі по групах тільки результат вимірювань, оцінки меж похибок результату і кількість даних в них, тобто $\bar{x}_j$, $\Delta\bar{x}_j$ і n_j. Тоді розподіл похибок приймають за рівномірний і обробку результатів m груп можна вести за наступною схемою.

1. Визначаємо оцінку дисперсії $(S_{n\bar{x}\,j})^2$: $\quad (S_{n\bar{x}\,j})^2 = \Delta\bar{x}_j^2 / n_j$. (8.6)
2. Знаходимо статистичні ваги $\boldsymbol{p_j}$ результатів вимірювань за формулою (8.3), підставивши одержані величини.

Або: $p_j = \dfrac{n_j}{\Delta\bar{x}_j^2} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{n_j}{\Delta\bar{x}_j^2} \right)^{-1}$. Або: $p_j \cong \dfrac{p_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{m} p_j^*}$, де $p_j^* = \dfrac{1}{S_j^2} = \dfrac{n_j}{\Delta\bar{x}_j^2}$

3. Обчислюємо середнє зважене X_p всіх даних в m групах за формулою (8.4).
4. Оцінюємо довірчий (надійний) інтервал похибок результату вимірювань $\quad \Delta X_p = K \cdot \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} p_j \Delta\bar{x}_j^2}$, (8.7)

{ або використовуємо (8.5) і $\Delta(P) = t_{np} \cdot S(X_P)$ }

де K – коефіцієнт, що залежить від довірчої ймовірності p:

P : . . .	0,90	0,95	0,98	0,99
K : . . .	0,95	1,1	1,3	1,4 .

Якщо систематичні похибки значно менші випадкових і ними можна знехтувати, а відмінність між середніми арифметичними $\bar{x}_j$ в групах пояснюється випадковим розсіюванням спостережень у вибірках, процедура обробки результатів m груп даних спрощується:

$$X_p = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} n_j \bar{x}_j \text{, де } N = n_1 + n_2 + ... + n_m \text{; } \quad (\text{тобто тут } p_j \equiv n_j) \qquad (8.8)$$

$$S(X_p) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_j - X_p)^2}\ ; \qquad \Delta(P) = t_{np} \cdot S(X_p)\ , \qquad (8.9)$$

коефіцієнт Стьюдента t_{np} шукається для $f = m-1$ ступенів вільності.

Приклади розв'язку задач

Задача 8.1.

α_i	К-сть даних, n	p_i
13°18′10″	3	1
13°18′08″	6	2
13°18′06″	9	3
13°18′04″	12	4
13°18′00″	15	5

При вимірюваннях в різний час (з різним числом спостережень, n) одного і того ж плоского кута α одержані наступні значення (перші два стовпчики в таблиці). Знайти середнє значення виміряного кута.

Розв'язок.

Значення кута вимірювалась в різний час, тому серії даних можуть бути нерівноточними, а одержані усереднені значення нести різне зважене навантаження p_i. Оцінимо вагу кожного результату по кількості вимірювань n в серії: будемо вважати, що вага p_i пропорційна n_i ($p_i \sim n_i$, третій стовпчик в таблиці). Тоді за формулою (8.1) знаходимо:

$$\alpha_p = \frac{...10''\cdot 1 + ...08''\cdot 2 + ...06''\cdot 3 + ...04''\cdot 4 + ...00''\cdot 5}{1+2+3+4+5} = \frac{...60''}{15} = ...04'' \equiv 13^{\circ}18'04''.$$

Задача 8.2.

Проведені на різних установках і в різний час вимірювання міжатомної відстані в кристалах двоокису титану TiO_2 дали такі результати (в нм): a_1=0,188±0,005 (n_1=10), a_2=0,195±0,017 (n_2=7), a_3=0,180±0,018 (n_3=4), a_4=0,185±0,013 (n_4=5), a_5=0,181±0,008 (n=5). Визначити усереднений результат вимірювання та його похибку при довірчій ймовірності P=0,95, вважаючи систематичні похибки значно меншими за випадкові.

Розв'язок.

Обчислення проводимо за формулами 8.4 і 8.7 для m=5. Для цього оцінюємо дисперсію в кожній групі даних (формула 8.6) і знаходимо статистичні ваги p_i (i=1,...,5) за формулою 8.3. Необхідно мати на увазі, що під час обчислень наближені числа повинні бути на порядок більшої точності ніж кінцевий результат. У задачі наведені середні значення вимірів і похибки, які вже містять і випадкові, і систематичні. Якби систематичні похибки θ приводились окремо від випадкових, то їх необхідно було б об'єднати (дивись тему 5) згідно формули: $\Delta(a_i)=K\cdot[t_{np}S_n(a_i)+\theta(a_i)]$. Отже,

$$D_1 = S(a_1)^2 = \frac{(\Delta a_1)^2}{n_1} = \frac{0{,}000025}{10} = 0{,}0000025\text{нм}^2; \qquad \text{відповідно:}$$

D_2=0,000041 нм^2, D_3=0,000081 нм^2, D_4=0,000034 нм^2, D_5=0,000013 нм^2. Знайдемо суму обернених значень дисперсій: ΣD^{-1} =543071, а потім її обернену величину: $(\Sigma D^{-1})^{-1}$=0,00000184 нм^2. Помноживши обернене значення кожної дисперсії на обернену величину їх суми, отримаємо статистичну вагу для кожної групи вимірювань:

$p_1 = (1/D_1)\cdot(\Sigma D^{-1})^{-1} \;\Rightarrow\; p_1 = 400000\cdot 0{,}00000184 = \underline{0{,}736}$;

p_2= 0,045; p_3= 0,023; p_4= 0,054; p_5= 0,140. $\rightarrow \sum\limits_i p_i = 1$.

Як бачимо, сума всіх p_i дорівнює 0,998 ≈ 1 – не рівність її одиниці пов'язана із заокругленням чисел при математичних діях (похибка обчислення в результаті заокруглення, наприклад, статистичної ваги p_3 в даному випадку становить приблизно 3 %).

Обчислюємо результат вимірювань по цим 5 групам, тобто середнє вагове значення за формулою 9.3:

$$\mathbf{A_P} = 0{,}736\cdot 0{,}188+0{,}045\cdot 0{,}195+0{,}023\cdot 0{,}180+0{,}054\cdot 0{,}185+0{,}140\cdot 0{,}181= \\ = 0{,}186613 \approx \underline{0{,}187}.$$

Оцінюємо довірчий інтервал похибок одержаного результату:

$$\Delta A_p = K\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{5} p_j \Delta A_j^2} =$$

$$1{,}1\cdot\sqrt{0{,}736(0{,}005)^2+0{,}045(0{,}017)^2+0{,}023(0{,}018)^2+0{,}054(0{,}013)^2+0{,}14(0{,}008)^2} =$$
$$= 1{,}1\cdot\sqrt{0{,}00005694} = 1{,}1\cdot 0{,}007546 \approx 0{,}008 \text{ нм.}$$

Кінцевий результат: <u>A_P= 0,187 нм; ΔA_P= ±0,008 нм; P = 0,95.</u>

<u>Задача 8.3.</u>

Обчислити результат попередньої задачі, вважаючи малими не-виключні систематичні похибки, а СКВ в групах обумовлені випад-ковими похибками і відрізняються на незначну величину.

<u>Розв'язок.</u>

Обчислення проводимо згідно формул 8.8 і 8.9. Знайдемо серед-нє значення даних та середнє квадратичне відхилення

$$X_p = \frac{10\cdot 0{,}188 + 7\cdot 0{,}195 + 4\cdot 0{,}180 + 5\cdot 0{,}185 + 5\cdot 0{,}181}{10+7+4+5+5} \approx 0{,}187 \text{ нм.}$$

$$S(X_p) = \sqrt{\frac{10^{-6}\cdot[1^2+8^2+(-7)^2+(-2)^2+(-6)^2]}{5-1}} = 0{,}0062 \text{ нм.}$$

За таблицею коефіцієнтів Стьюдента для кількості даних $n = m$ (тобто для кількості ступенів вільності f=m-1=4) знаходимо значення $t_{пр}$=2,78 (для довірчої ймовірності P=0,95). Тоді довірчий інтервал випадкових похибок дорівнює

$$\mathbf{\Delta A_P} = 2{,}78 \cdot 0{,}0062 = 0{,}01724 \approx \pm 0{,}017 \text{ нм}.$$

Бачимо, що в даному випадку розрахований довірчий інтервал виявився приблизно в два рази більшим, що обумовлено значними випадковими похибками в різних групах даних.

Задача 8.4.

Використовуючи дані задачі 8.2 та обчислені при її розв’язку СКВ результату кожної групи, знайти СКВ середнього вагового (середнього значення по всім групам) та величину довірчого інтервалу $\Delta(P)$ для p=0,95.

Розв’язок.

Результуюче СКВ обчислюємо по формулі 8.5. Для суми обернених значень квадратів величин середніх квадратичних відхилень результатів кожної із п’яти груп одержимо число 543070,76; корінь з цього числа дорівнює 736,93. Таким чином, результуюче СКВ

$\boldsymbol{S(A_P)}$ = 1 / 737 = 0,001357 ≈ 0,0014 нм.

Найменша кількість даних по групам n_{min}= 5. Тому число ступенів вільності дорівнює $\boldsymbol{f} = m \cdot (n_{min}-1) = 5 \cdot 4 = \mathbf{20}$. В цьому випадку коефіцієнт Стьюдента $t_{пр}$=2,08 (див. табл.5.3 з теми 5). Отже, довірчий інтервал для P = 0,95

$$\Delta(P) = t_{пр} \cdot S(A_P) = 2{,}08 \cdot 0{,}0014 = 0{,}002912 \approx 0{,}003 \text{ нм}.$$

Задачі для самостійного розв’язку

8.5. При вимірюваннях одного і того ж плоского кута α різними операторами отримано такі значення (табл. 8.1). Знайти величину кута та похибку його визначення.

Таблиця 8.1

α_i	Кількість вимірювань, n
24°36′26″	4
24°36′15″	6
24°36′20″	8
24°36′23″	12
24°36′18″	18

8.6. Зроблені різними дослідниками з допомогою монохроматора вимірювання довжини хвилі деякої спектральної лінії випромінювання розжареного газу дали такі результати (у нм): λ_1 = 588±5 (n_1=10), λ_2 = 595±17 (n_2=5), λ_3 = 580±18 (n_3=4), λ_4 = 585±13 (n_4=5), λ_5 = 581±8 (n=7). Визначити усереднений результат вимірювання довжини хвилі та його похибку при довірчій імовірності P=0,98.

8.7. Висота телевізійної вишки визначена по геометричній побудові через вимірювання відстані **d** до її основи і кута зору $\boldsymbol{\alpha}$ від вершини до площини горизонту. Знайти надійний (довірчий) інтервал визначення висоти для p=0,95, якщо відомо такі результати трьох серій вимірювань: d_1=(100±2) м, α_1 = 30°10′, n=3; d_2 = (101±1) м, α_2 = 30°20′, n=6; d_3 = (100±1) м, α_3 = 30°05′, n=12.

8.8. Проведено три серії вимірювань різними приладами деякої фізичної величини. Знайти випадкову і систематичну похибки, результат вимірювання та його довірчий інтервал при p=0,95. (клас точності (η) і діапазон шкали (N) приладів вказаний для кожної групи вимірів).

0,76; 0,87; 0,87; 0,88.	η=0,5; N=(-1,5-0-1,5)
0,92; 0,70; 0,84; 1,27; 1,16; 0,87; 1,14.	η=1,0; N= (0-2)
0,83; 0,85; 1,20; 1,52; 1,81; 1.78.	η=2/1; N= (0-2)

8.9. Проведено три серії вимірювань різними приладами деякої фізичної величини. Знайти випадкову і систематичну похибки, результат вимірювання та його довірчий інтервал при p=0,95. (клас точності (η) і діапазон шкали (N) приладів вказаний для кожної групи вимірів).

24,66; 22,73; 21,22; 23,65.	η=0,5; N=(-25-0-25)
23,10; 24,64; 24,78; 23,02; 25,00; 24,81; 23,46.	η=1,0; N= (0-25)
24,83; 23,75; 23,99; 23,27; 26,22; 23,65.	η=2/1; N= (0-25)

8.10. Вимірювання зовнішнього d1 і внутрішнього d2 діаметрів та товщини h декількох партій однотипних феритових кілець дали такі результати (у мм) з відповідними статистичними вагами $\boldsymbol{p}$:
$d1_1$= 32,41, $d2_1$=15,75, h_1= 7,57, p_1= 1; $d1_2$= 32,58, $d2_2$=15,71, h_2= 7,35, p_2= 2; $d1_3$= 32,73, $d2_3$=15,63, h_3= 7,47, p_3= 3; $d1_4$= 32,65, $d2_4$=15,67, h_4= 7,31, p_4=4; $d1_5$=32,51, $d2_5$=15,74, h_5=7,41, p_5=6. Оцінити витрати маси на 1000 виробів, обчислити середньоквадратичну похибку, якщо густина феритової шихти ρ=1,2 г/см^3.

Тема 9. Обробка результатів прямих одноразових вимірювань

Основні поняття, визначення та формули

За результат одноразового вимірювання приймається значення фізичної величини (ФВ), одержаної при цьому вимірюванні.

Перед початком проведення прямого одноразового вимірювання необхідно дотримуватися певних правил і умов.

5) Попередньо зробити аналіз інформації про об'єкт дослідження з метою:
   а) визначення математичної моделі параметра (наприклад, це – ребро куба, постійний в часі опір резистора, діапазон прозорості або непрозорості і т.п.);
   б) наявності можливих зовнішніх впливів на результат вимірювання, які можна поділити на 5 основних груп:
      ⇒ кліматичні (температура, тиск, вологість);
      ⇒ електричні, магнітні, електромагнітні;
      ⇒ зовнішні навантаження (вібрації, удари, дотики деталей приладів);
      ⇒ іонізуюче випромінювання;
      ⇒ газовий склад атмосфери.
   в) визначення методики вимірювання і типу необхідних приладів.
6) Перевірити справність (метрологічну придатність, повірку) засобів вимірювання (ЗВ), їхні метрологічні характеристики: діапазон шкали, клас точності, ціна поділки та чутливість, швидкодія (час встановлення показів).
7) Попередньо дослідити метод вимірювання, діапазон значень очікуваного результату, оцінити похибку методу і похибку приладу, скласти (або ознайомитися) з процедурою (алгоритмом, схемою, послідовністю) проведення вимірювання.
8) Оцінити похибку оператора, якщо вона може бути суттєвою. Зробити це можна, проводячи необхідні (багаторазові) вимірювання на подібному об'єкті. Оператор повинен:
   з) підтримувати вимірювання в заданому режимі;
   и) дотримуватися техніки безпеки;
   к) зайняти зручне положення;
   л) чітке слідувати схемі проведення вимірювання;
   м) вести записи умов вимірювання (у відповідному журналі);

н) вести записи числових даних з числом цифр точності на дві більше (якщо це можливо), ніж вимагається в кінцевому результаті;

є) якість оператора визначається похибкою заокруглення під час запису відліку з приладу.

Одне вимірювання достатньо провести і у тому випадку, коли очікувані випадкові похибки будуть значно менші за систематичні, які не можуть бути виключені ($\Delta_{вип} << \Delta_{сис}$).

Прийнято (ДСТУ ГОСТ 8-207-76), що випадкову похибку можна не враховувати, якщо виконується нерівність: $\theta/S_n > 8$, де S_n – СКВ випадкової похибки вимірювання, а θ – границі невиключних систематичних похибок.

Похибка при однократному вимірюванні $\theta_{рез}$ складається з:

4) похибки засобу вимірювання $\theta_з$, яка включає *основну* похибку $\theta_{зо}$ (визначається за класом точності приладу) і *додаткову* $\theta_{зд}$ (обумовлену дією на прилад сторонніх факторів);
5) похибки методу $\theta_м$;
6) похибки оператора $\theta_{оп}$.

Відповідно, наприклад, ДСТУ ГОСТ 8.395:2008 "Нормальні умови вимірювань при повірці. Загальні вимоги.", похибка ЗВ (*інструментальна похибка*) має складати 30-40 % від загальної похибки. При можливості, потрібно вибирати вольтметр із такою шкалою, щоб значення показу при вимірюванні було у другій половині шкали – тоді відносна похибка буде меншою, тому і клас точності вибраного вольтметра буде кращим.

Основна похибка визначається за класом точності. Якщо ЗВ має тільки адитивну похибку, то абсолютне значення похибки дорівнює

$$\Delta x_{ãð} = \frac{\eta \cdot X_N}{100}, \text{ відносне} - \ \theta_{ç.în.} = \frac{\Delta x_{ãð}}{X} 100 = \frac{\eta \cdot X_N}{100} \cdot \frac{100}{X} = \frac{\eta \cdot X_N}{X} 100\,(\%),$$

η – клас точності приладу, X_N – нормуюче значення приладу, X – виміряне значення ФВ.

Якщо прилад має мультиплікативну складову похибки, його клас точності нормується двома числами (c/d), а абсолютна похибка визначається за формулою:

$$\Delta x_{\max} = \pm \frac{d \cdot X_N + (c-d) \cdot x}{100}, \quad \text{де} \quad a = \pm \frac{d \cdot X_N}{100}, \quad b = \pm \frac{(c-d)}{100}$$

– коефіцієнт мультиплікативної похибки в рівнянні $\boldsymbol{\Delta x = \pm(a + b \cdot x)}$.

Додаткова похибка обумовлена дією зовнішніх факторів. Характеристики засобів вимірювання, в тому числі клас точності, нормуються, коли вони знаходяться за *нормальних умов*. За нормальні (номінальні) умови в метрологічній практиці прийнято (ДСТУ ГОСТ 8.395-80): температура – 20 °С, атмосферний тиск – 101,3 кПа, відносна вологість – 60 %. Найбільш суттєву похибку із цих факторів вносить температурний. Ця похибка враховується наступним чином:

$$\theta=[(0{,}03\text{-}0{,}06)\cdot\eta]\cdot\Delta t\ (\%),$$

де Δt – відхилення температури від номінальної.

<u>Похибка методу</u> вимірювання обумовлена як фізичними характеристиками методу вимірювання ФВ, так і в результаті самого підключення тих чи інших вимірювальних приладів. Наприклад, паралельне підключення в електричне коло вольтметра для вимірювання спаду напруги $U_{вим}$ на опорі R вносить наступну абсолютну (відносну) похибку $\frac{\Delta U_{ì}}{U_{âèì}} = \frac{R}{R_V} = \theta_{ì}$ (R_V – опір вольтметра). Але так як ця похибка може бути вирахувана чисельно, то вона входить як *поправка* у кінцевий результат.

Довірчий інтервал декількох невиключених систематичних похибок (тобто інтервал, так званої, композиції похибок) знаходять, вважаючи *ці похибки розподіленими рівномірно* в заданих межах θ. Тому і в нашому випадку для знаходження довірчого інтервалу результуючої похибки застосовують формулу

$$\theta_{ðåç} = k(p)\cdot\sqrt{\theta_{ç}^2 + \theta_{ì}^2 + \theta_{ïï}^2}\ , \tag{9.1}$$

де коефіцієнт k залежить від вибраної довірчої ймовірності p:
k=0,95 при p=0,90; k=1,10 при p=0,95; k=1,40 при p=0,98; k=1,45 при p=0,99.

Примітка: проміжні результати математичних обрахунків необхідно записувати (заокруглювати) при можливості з точністю на два порядки кращою, ніж це буде в кінцевому записі результату вимірювання.

Приклади розв’язку задач

<u>Задача.9.1.</u>

Необхідно виміряти амперметром (внутрішній опір R_A=10 Ом) <u>дійсне</u> значення струму, що тече через опір R=100 Ом. Відомо, що під'єднання амперметра не змінює напругу (різницю потенціалів) на кінцях цієї ділянки кола. Амперметр показав значення $I_A = 2{,}20$ А.

Розв'язок.

Амперметр підключається послідовно з опором. За умовою задачі різниця потенціалів U_0 при цьому не змінюється, тоді зменшується сила струму, оскільки опір став $R+R_A$, що і вимірює амперметр: $I_A = \frac{U_0}{R+R_A} = \frac{I_0 R}{R+R_A}$. Отже, виміряний струм відрізняється від реального $I_0 = I_A \frac{R+R_A}{R}$ (до підключення) на величину (*методичну* похибку)

$$\mathbf{\Delta I} = I_0 - I_A = I_A\left(1-\frac{R_A}{R}\right) - I_A = \underline{-I_A \frac{R_A}{R}}; \quad \text{відносна похибка: } \boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\frac{\Delta I}{I_A} = \frac{R_A}{R}}$$

Підставимо числа: $\Delta I = -2{,}2\frac{10}{100} = -0{,}22$ А. Відома за знаком і числом похибка, взята з протилежним знаком, називається *поправкою* до виміряного значення. Отже, дійсний стум I_0 = 2,42 А. Відповідно, спад напруги U_0 на опорі R дорівнює не 220 В, а 242 В. Як бачимо, інколи подібні похибки-поправки (методичні і інші) можуть бути суттєвими.

Якщо відомо клас точності амперметра, діапазон шкали і ціна поділки, зовнішні умови вимірювання, то це дає можливість визначити його основні і додаткові похибки – цей приклад детально розглянуто в лекційній темі-10.

Задачі для самостійного розв'язку

9.2. Визначити похибку, яка виникає в результаті підключення амперметра з внутрішнім опором R_A=2 Ом до ділянки кола з незмінною різницею потенціалів U=15 В (тобто підключення амперметра не змінює U), якщо виміряне значення струму дорівнює I=1,5 А. Визначити дійсне значення струму (яке було до підключення амперметра) та сумарну похибку його вимірювання, якщо клас точності амперметра η=1, діапазон вимірювання (0-2) А, шкала має 50 поділок, а вимірювання проводились при 0 °С.

9.3. Для вимірювання опору резистора на ділянці кола із стабільною напругою (різницею потенціалів) був використаний амперметр з класом точності η=0,5 і внутрішнім опором R_A=0,1 Ом, ($I_{макс}$=1 А, кількість поділок шкали N=50) і вольтметр (η=1, R_V=5000 Ом,

$V_{макс}$=150 В, N=100). Одноразове вимірювання, проведене при t=5 ^oC, дало такі покази: I=0,8 А; V=120 В. Який опір резистора та похибка його визначення?

9.4. Використовуючи акумулятор із стабільною е.р.с. ε = 6 В (внутрішній опір r=0,2 Ом) і амперметр (клас точності η=0,5; $I_{макс}$=2 А, R_A=0,1 Ом, кількість поділок шкали 50), виміряли опір обмотки силового трансформатора. Який це опір і похибка його визначення, якщо значення струму I=1,5 А (температура середовища -5 ^oC) ?

9.5. При строго фіксованому струмові в електричному колі I_0=1,5 А були проведені вимірювання опору соленоїда з допомогою вольтметра. Вольтметр показав спад напруги U=45 В (клас точності η=1,0; R_V=10 кОм, шкала 50 В, 100 поділок). Який опір R соленоїда та похибка його визначення (вимірювання проведені при 10 ^oC) ?

9.6. Внутрішній опір вольтметра 20 кОм, клас точності 1,5/0,5. Визначити відносні основну та додаткову похибки при вимірюванні цим приладом спаду напруги на опорі 400 Ом, якщо величина струму через опір 2 А. Яку додаткову похибку може внести те, що температура приладу під час вимірювання була 40 ^oC ? Оцінити можливу похибку оператора (шкала має 100 поділок у діапазоні напруг 0-100 В)

9.7. Резистор має опір 500 Ом. Вольтметр показав спад напруги U=50 В. Яку поправку необхідно внести в це вимірювання (внутрішній опір вольтметра R_V=50 кОм, клас точності η=0,5; шкала має 100 поділок, діапазон напруг 0-100 В). Вказати можливу похибку оператора та температурну похибку при вимірюванні при t=-10 ^oC, а також інтервал, в якому знаходиться істинне значення напруги.

9.8. Визначити похибку, яка виникає в результаті підключення амперметра з внутрішнім опором 2 Ом до ділянки кола з незмінною різницею потенціалів у 10 В, якщо виміряне значення струму дорівнює 1,5 А,. Визначити дійсне значення струму та сумарну можливу похибку його вимірювання, якщо клас точності амперметра η=1/0,5, діапазон вимірювання (-2,5-0-2,5) А, шкала має 50 поділок, а вимірювання проводились при 0 ^oC.

9.9. Для вимірювання опору резистора на ділянці кола із стабілізацією по стуму був використаний амперметр з класом точності η=1,5 і внутрішнім опором R_A=0,5 Ом, ($I_{макс}$=2 А, кількість поділок шкали N=50) і вольтметр (η=1, R_V=10 кОм, $V_{макс}$=100 В, N=100). Одноразове вимірювання, проведене при t=30 ^oC, дало такі покази: I=1,8 А; V=80 В. Який опір резистора та сумарна похибка його визначення?

Рекомендована література

Основна література

1. Жихарєв В.М., Попик Ю.В. Методичні вказівки до розв'язку задач з курсу "Основи метрології". – вид-во УжДУ, Ужгород, 1998. – 76 с.
2. Сусліков Л.М. Основи метрології: Навчальний посібник. – Ужгород.: Вид-во УжНУ "Говерла". 2006. – 158 с.
3. Цюцюра В.Д., Цюцюра С.В. Метрологія та основи вимірювань: Навчальний посібник – К.: Знання-Прес, 2003. – 180 с.
4. Тюрин Н.И. Введение в метрологію. – М.: Изд-во стандартов, 1985.-304 с.
5. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.Ф. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. – Л.: Лениздат, 1987. - 295 с.
6. Метрологія, стандартизація, управління якістю і сертифікація : Підруч. для вищ. навч. закл. / Р.В. Бичківський, П.Г. Столярчук, П.Р. Гамула; Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Л., 2002. - 560 с
7. Поліщук Є.С., Дорожовець М.М., Яцук В.О., Ванько В.М., Т.Г.Бойко Т.Г. Метрологія та вимірювальна техніка: Підручник / За ред. проф. Є.С. Поліщука. – Львів.: Вид-во «Бескід Біт» , 2003. – 544 с.
8. Токар Ю.С., Караван Ю.В. Основи стандартизації, метрології та сертифікації: Посібник. – Львів, ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 247 с.
9. Сергеев А.Г. Метрология: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 408 с.
10. Тартаковский Д.Ф., Ястребов А.С. Метрология, стандартизация и технические средства измерений: Учебник для вузов. – М., 2001. – 205 с.
11. Бойко Т.Г. Основи стандартизації. Навчальний посібник. – Нац. ун-т «Львів. політехніка». – Л., 2004. – 232 с.
12. Фізичні величини та їх одиниці: Основні поняття, співвідношення / Автор-упорядник Є.П. Чорний, О.Є. Шадріна. – К.: Либідь, 1997. – 112 с
13. Орнатський П.П. Вступ до метрології науки – про вимірювання: Навчальний посібник. – К.: ІСДО, 1994. – 160 с.
14. Доманцевич Р.І., Полікарпов І.С., Яцишин Б.П. Основи стандартизації, метрології та управління якістю. – К.: НМЦ «Укоопосвіта», 1997. – 219 с.

Додаткова література

1. Селиванов М.Н., Фридман А.Э. Законодательная метрология. – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 72 с.
2. Шаблин С.А. Прикладная метрология в вопросах и ответах. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 189 с.
3. Основы метрологии и электрические измерения: Учебник для вузов / под ред. Душина Е.М. - Л.: Энергоатомиздат, 1987. - 480 с.
4. Атамалян Э.Г. Приборы и методы измерений электрических величин. – М.: Высшая школа, 1989. – 384 с.

5. Про метрологію і метрологічну діяльність. Закон України від 11 лютого 1998 року, № 113/98-ВЗ.
6. Берка К. Измерения: понятия, теории, проблемы / Перевод с чешского. – М.: Прогресс, 1987. – 320 с.
7. Каменцева Е.И., Устюгов Н.В. Русская метрология / Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1965. – 170 с.
8. Широков К.П., Богуславский М.Г. Международная система единиц. – М.: изд-во стандартов, 1984. – 112 с.
9. ДСТУ 2681-94 “Метрологія: Терміни та визначення”. – К. 1994. – 66 с.
10. Державна система стандартизації. – К.: Держстандарт України, 1994.
11. ГОСТ 8.417-81 (СТ СЭВ 1052-78) “ГСИ. Единицы физических величин”. - М.: Изд-во стандартов, 1981. – 40 с.
12. ДСТУ 3120-95 “Електротехніка: Літерні позначення основних величин”. – К. 1996. – 40 с.
13. ГОСТ 8.009-72 “ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений”.
14. ГОСТ 8.011-72 “ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений”.
15. Закон України «Про стандартизацію».
16. ДСТУ 1.5-93 Державна система стандартизації України. Загальні вимоги до побудови, викладу, оформлення та змісту стандартів.
17. ДСТУ 1.6-97 Державна система стандартизації України. Порядок державної реєстрації галузевих стандартів, стандартів науково-технічних та інженерних товариств і спілок.

Коефіцієнти Стьюдента t_n

(у випадку розподілу Гауса $f=n$-1)

Ступені вільності f	Довірча (надійна) ймовірність *P* (двостороння область)						
	0.7	**0.8**	**0.9**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.999**
1	1.963	3.08	6.31	12.17	31.8	63.7	636.6
2	1.336	1.886	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	1.250	1.638	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94
4	1.190	1.533	2.13	2.77	3.75	4.60	8.61
5	1.156	1.476	2.02	2.57	3.36	4.03	6.86
6	1.134	1.440	1.943	2.45	3.14	3.71	5.96
7	1.119	1.415	1.895	2.36	3.00	3.50	5.40
8	1.108	1.697	1.860	2.31	2.90	3.36	5.04
9	1.100	1.383	1.833	2.26	2.82	3.25	4.78
10	1.093	1.372	1.812	2.23	2.76	3.17	4.59
11	1.088	1.363	1.796	2.20	2.72	3.11	4.49
12	1.083	1.356	1.782	2.18	2.68	3.06	4.32
13	1.079	1.350	1.771	2.16	2.65	3.01	4.22
14	1.076	1.345	1.761	2.14	2.62	2.98	4.14
15	1.074	1.341	1.753	2.13	2.60	2.95	4.07
16	1.071	1.337	1.746	2.12	2.58	2.92	4.02
17	1.069	1.333	1.740	2.11	2.57	2.90	3.96
18	1.067	1.330	1.734	2.10	2.55	2.88	3.92
19	1.066	1.328	1.729	2.09	2.54	2.86	3.88
20	1.064	1.325	1.725	2.09	2.53	2.84	3.85
21	1.063	1.323	1.721	2.08	2.52	2.83	3.82
22	1.061	1.321	1.717	2.07	2.51	2.82	3.79
23	1.060	1.319	1.714	2.07	2.50	2.81	3.77
24	1.059	1.318	1.711	2.06	2.49	2.80	3.74
25	1.058	1.316	1.708	2.06	2.48	2.79	3.72
26	1.058	1.315	1.706	2.06	2.48	2.78	3.71
27	1.057	1.314	1.703	2.05	2.47	2.77	3.69
28	1.056	1.313	1.701	2.05	2.47	2.76	3.67
29	1.055	1.311	1.699	2.04	2.46	2.76	3.66
30	1.055	1.310	1.697	2.04	2.46	2.75	3.65
40	1.050	1.303	1.684	2.02	2.42	2.70	3.55
60	1.046	1.296	1.671	2.00	2.39	2.66	3.46
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.36	2.62	3.37
∞	1.036	1.282	1.645	1.960	2.33	2.58	3.29

Примітка:

частина таблиці з інтернет-видання: Л.А. Міхеєнко. Метрологічна обробка результатів вимірювання. Учбовий посібник з дисципліни «Оптичні вимірювання». Частина I. КПІ, Київ 2009.

Критичні точки розподілу χ2

Число ступенів вільності	Значення χ2 при рівні значущості *q*					
	0, 01	0, 025	0, 05	0, 95	0, 975	0, 99
1	6, 6	5, 0	3, 8	0, 0039	0, 00098	0, 00016
2	9, 2	7, 4	6, 0	0, 103	0, 051	0, 020
3	11, 3	9, 4	7, 8	0, 352	0, 216	0, 115
4	13, 3	11, 1	9, 5	0, 711	0, 484	0, 297
5	15, 1	12, 8	11, 1	1, 15	0, 831	0, 554
6	16, 8	14, 4	12, 6	1, 64	1, 24	0, 872
7	18, 5	16, 0	14, 1	2, 17	1, 69	1, 24
8	20, 1	17, 5	15, 5	2, 73	2, 18	1, 65
9	21, 7	19, 0	16, 9	3, 33	2, 70	2, 09
10	23, 2	20, 5	18, 3	3, 94	3, 25	2, 56
11	24, 7	21, 9	19, 7	4, 57	3, 82	3, 05
12	26, 2	23, 3	21, 0	5, 23	4, 40	3, 57
13	27, 7	24, 7	22, 4	5, 89	5, 01	4, 11
14	29, 1	26, 1	23, 7	6, 57	5, 63	4, 66
15	30, 6	27, 5	25, 0	7, 26	6, 26	5, 23
16	32, 0	28, 8	26, 3	7, 96	6, 91	5, 81
17	33, 4	30, 2	27, 6	8, 67	7, 56	6, 41
18	34, 8	31, 5	28, 9	9, 39	8, 23	7, 01
19	36, 2	32, 9	30, 1	10, 1	8, 91	7, 63
20	37, 6	34, 2	31, 4	10, 9	9, 59	8, 26
21	38, 9	35, 5	32, 7	11, 6	10, 3	8, 90
22	40, 3	36, 8	33, 9	12, 3	11, 0	9, 54
23	41, 6	38, 1	35, 2	13, 1	11, 7	10, 2
24	43, 0	39, 4	36, 4	13, 8	12, 4	10, 9
25	44, 3	40, 6	37, 7	14, 6	13, 1	11, 5
26	45, 6	41, 0	38, 9	15, 4	13, 8	12, 2
27	47, 0	43, 2	40, 1	16, 2	14, 6	12, 9
28	48, 3	44, 5	41, 3	16, 9	15, 3	13, 6
29	49, 6	45, 7	42, 6	17, 7	16, 0	14, 3
30	50, 9	47, 0	43, 8	18, 5	16, 8	15, 0