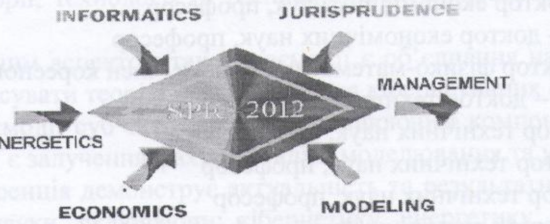
Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна академія наук України
Інститут кібернетики ім. В.М Глушкова НАН України
Бучацький інститут менеджменту і аудиту
Академія правових наук України
Карпатський державний центр інформаційних засобів і технологій НАН України



ПРОБЛЕМНО-НАУКОВА МІЖГАЛУЗЕВА КОНФЕРЕНЦІЯ

ІНФОРМАЦІЙНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ, ЮРИСПРУДЕНЦІЇ, ЕНЕРГЕТИКИ, ЕКОНОМІКИ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ (ПНМК - 2012)

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PROBLEM INTER-BRANCH CONFERENCE INFORMATION PROBLEMS OF COMPUTER SYSTEMS, JURISPRUDENCE, ENERGETICS, ECONOMICS, MODELING AND MANAGEMENT (SPIC – 2012)

Україна
Бучач
07 - 10 червня 2012 року

УДК 517.946

В.В. Маринець
Ужгородський національний університет, vasyl-marynets@rambler.ru

Про один підхід дослідження та наближеного інтегрування крайової задачі для систем диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо область
$$D = D^* \cup D_2,$$
де
$$D^* = \{(x,y) \mid x \in (x_1, x_0],\ y \in (g_1(x), y_2]\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_2],\ y \in (g_2(x), y_1]\},$$
а $y = g_r(x)$ $\left(x = g_r^{-1}(y)\right)$, $r = 1,2$ – «вільні» криві, причому
$$g_1'(x) < 0,\ \ x \in (x_1, x_0),$$
$$g_1(x_k) = y_k,\ k = 0,1,$$
$$g_2'(x) > 0,\ \ x \in (x_0, x_2),$$
$$g_2(x_0) = y_0,\ g_2(x_2) = y_1,\ \ x_1 < x_0 < x_2,\ \ y_0 < y_1 < y_2.$$

Позначимо:
$$L_2U(x,y) := U_{xy}(x,y) + A_1(x,y)U_x(x,y) + A_2(x,y)U_y(x,y),\ \ (x,y) \in D,$$
де $U(x,y) = (u_i(x,y)), i = \overline{1,n}$ – вектор-функція, $A_s(x,y) = \left(\delta_{i,j} a_{i,j}^r(x,y)\right), r = 1,2, i,j = \overline{1,n}$ – задані матриці, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Дослідимо задачу: в просторі вектор-функцій
$$C^*(\overline{D}) := C^{(1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$$
знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь
$$L_2U(x,y) = f(x,y,U(x,y),U(x,\theta(x,y))) := f[U(x,y)], \tag{1}$$
де $f[U(x,y)] = \left(f_i[U(x,y)]\right), i = \overline{1,n}$ – вектор-функція,

який задовольняє умови
$$U(x,g_1(x)) = \Phi_1(x),\ U_y(x,g_1(x)) = \psi(x),\ \ x \in [x_1,x_0],\ \ \psi(x) \in C[x_1,x_0],\ \ \Phi_1(x) \in C^1[x_1,x_0], \tag{2}$$
$$U(x,g_2(x)) = \Phi_2(x),\ \ x \in [x_0,x_2],\ \ \Phi_2(x) \in C^1[x_0,x_2], \tag{3}$$
$$U(x,y) = \Phi(y),\ \ y \in [y_1,y_2],\ \ \Phi(y) \in C^1[y_1,y_2], \tag{4}$$
де для заданих вектор-функцій
$$\Phi_r(x) := (\varphi_{r,i}(x)),$$
$$\Phi(y) := (\varphi_i(y)),\ \ \psi(x) := (\psi_i(x)),\ \ i = \overline{1,n},$$
виконуються умови узгодженості
$$\begin{gathered}\Phi_1(x_0) = \Phi_2(x_0),\\ \Phi_1(x_1) = \Phi(y_1),\\ \Phi'(y_1) = \psi(x_1),\end{gathered} \tag{5}$$
а $\theta(x,y) := (\theta_i(x,y))$ – вектор-функція, $\theta_i(x,y) := y - \tau_i(x,y)$, $i = \overline{1,n}$, де $\tau_i(x,y) \ge 0$ – задані неперервні функції, які визначають початкові множини
$$\overline{E}_{1,i} = \{(x,y) \mid x \in [x_1,x_0],\ \theta_i(x,y) \le y \le g_1(x), (x,y) \in D^*\},$$
$$\overline{E}_{2,i} = \{(x,\overline{y}) \mid x \in [x_0,x_2],\ \theta_i(x,y) \le \overline{y} \le g_2(x), (x,y) \in \overline{D}_2\},\ \ i = \overline{1,n}.$$

Нехай

$$\overline{E}_1 = \cup_i \overline{E}_{1,i},\ \overline{E}_2 = \cup_i \overline{E}_{2,i},\ \overline{E} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$$

і

$$U(x,y)\big|_{\overline{E}} = \Omega(x,y),\ (x,y)\in \overline{E}, \tag{6}$$

$\Omega(x,y) := (\omega_i(x,y)) \in C^1(\overline{E})$ − задана вектор-функція.

Очевидно

$$\begin{gathered} \Omega(x, g_1(x)) = \Phi_1(x), \\ \Omega_y(x, g_1(x)) = \psi(x),\ x\in[x_1, x_0], \\ \Omega(x, g_2(x)) = \Phi_2(x),\ x\in[x_0, x_2]. \end{gathered} \tag{7}$$

Розіб'ємо область D^* характеристикою $y = y_1$ на дві області D_1 і D_3, $D^* = D_1 \cup D_3$.

Тоді розв'язок задачі (1) − (7)

$$U(x,y) = U_s(x,y),\ (x,y)\in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

$U_s(x,y) := (u_{s,i}(x,y))$ − вектор-функції, де $U_1(x,y)$ − розв'язок задачі Коші (1), (2), (6) при $(x,y)\in \overline{D}_1$, $U_2(x,y)$ − розв'язок задачі Дарбу (1), (3), (5), (6) $(x,y)\in \overline{D}_2$ і $U_2(x_0,y) = U_1(x_0,y)$, $y\in[y_0,y_1]$, а $U_3(x,y)$ − розв'язок задачі Гурса (1), (4), (5) при $(x,y)\in \overline{D}_3$ і $U_3(x,y_1) = U_1(x,y_1)$, $x\in[x_1,x_0]$.

Надалі вважатимемо, що

$$f[U(x,y)]\in C(\overline{B}),\ f: B\to R^n,\ \overline{B}\subset R^{2(n+1)},$$

$$A_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D),\ A_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D),$$

а

$$A_{1_x}(x,y) = A_{2_y}(x,y),\ (x,y)\in D. \tag{8}$$

При виконанні умови (8) задачу (1)-(7) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$U_s(x,y) = \begin{cases} \Omega(x,y),(x,y)\in E_s, E_3 := E_1, \\ \Omega_s(x,y) + T_s F[U_s(\xi,\eta)], (x,y)\in \overline{D}_s, s = 1,2,3, \end{cases} \tag{9}$$

де $\Omega_s(x,y) := (\omega_{s,i}(x,y))$ − вектор-функції,

$$\omega_{1,i}(x,y) := \varphi_{1,i}(x)\exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) + \int_{g_1(x)}^{y}\left[\psi_i\left(g_1^{-1}(\eta)\right) + a_{i,i}^{(1)}\left(g_1^{-1}(\eta),\eta\right)\varphi_{1,i}\left(g_1^{-1}(\eta)\right)\right]k_{i,i}\left(x,y;g_1^{-1}(\eta),\eta\right)d\eta,$$

$(x,y)\in \overline{D}_1$, $K(x,y;\xi,\eta) = (\delta_{i,j}k_{i,j}(x,y;\xi,\eta))$ − матриця,

$$k_{i,i}(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int_x^{\xi} a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau + \int_y^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right),$$

$$F[U_s(x,y)] = (F_i[U_s(x,y)]) := \left(f_i[U_s(x,y)] + \left(a_{i,i_y}^{(2)}(x,y) + a_{i,i}^{(1)}(x,y)a_{i,i}^{(2)}(x,y)\right)u_{s,i}(x,y)\right),\ s = 1,2,3\ -$$

вектор-функція,

$$T_1 F[U_1(\xi,\eta)] := \int_{g_1(x)}^{y}\int_{g_1^{-1}(\eta)}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\ (x,y)\in \overline{D}_1,$$

$$\omega_{2,i}(x,y) := \varphi_{2,i}(x)\exp\left(\int\limits_{y}^{g_2(x)} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) + \int\limits_{g_2(x)}^{y}\left[\psi_i\left(g_1^{-1}(\eta)\right) + a_{i,i}^{(1)}\left(g_1^{-1}(\eta),\eta\right)\varphi_{1,i}\left(g_1^{-1}(\eta)\right)\right]k_{i,i}\left(x,y;g_1^{-1}(\eta),\eta\right)d\eta +$$

$$+ T_{1,1}F_i[U_1(\xi,\eta)],\ i=\overline{1,n},\ (x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$T_2F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[U_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$T_{1,1}F_i[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{g_1^{-1}(\eta)}^{x_0} k_{i,i}(x,y;\xi,\eta)F_i[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$\omega_{3,i}(x,y) := \int\limits_{y_1}^{y}\exp\left(\int\limits_{x}^{x_1} a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau + \int\limits_{y}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)\left[\varphi_i'(\eta) + a_{i,i}^{(1)}(x_1,\eta)\varphi_i(\eta)\right]d\eta +$$

$$+\omega_{1,i}(x,y_1)\exp\left(\int\limits_{y}^{y_1} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) + T_{1,2}F_i[U_1(\xi,\eta)],\ i=\overline{1,n},\ (x,y)\in\overline{D}_3,$$

$$T_3F[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{y_1}^{y}\int\limits_{x_1}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[U_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Позначимо

$$\rho_i(x_0) = \varphi_{2,i}'(x_0) - \varphi_{1,i}'(x_0) + (g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\psi_i(x_0).$$

Лема 1. *Нехай $f[U(x,y)]\in C(\overline{B})$, виконується умова (8), а задача (1)-(7) має розв'язок в області $\overline{D}$.*

Якщо $\rho_i(x_0)=0$ для всіх $i=\overline{1,n}$, то розв'язок задачі (1)-(7) $U(x,y)\in C^*(\overline{D})$ (буде регулярним), у супротивному випадку має місце рівність

$$u_{2,i_x}(x_0,y) - u_{1,i_x}(x_0,y) = \rho_i(x_0)\exp\left(\int\limits_{y}^{y_0} a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)d\eta\right)\ y\in[y_0,y_1]$$

і розв'язок

$$U(x,y)\in C^{(1.1)}(D\setminus I)\cap C^{(0.1)}(D)\cap C(\overline{D}),\ I=\{(x_0,y)\mid y\in[y_0,y_1]\}$$

(розв'язок буде регулярним).

Означення. Будемо говорити, що вектор-функція $f[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, якщо вона задовольняє наступні умови:

1) $f[U(x,y)]\in C(\overline{B})$;
2) у просторі функцій

$$C(\overline{B}_1),\ \overline{B}_1\subset R^{2(2n+1)},\ Пр_{xOy}\overline{B}_1=\overline{D},$$

існує така вектор-функція $H[U(x,y),V(x,y)]$, що

a) $H[U(x,y),V(x,y)]\equiv F[U(x,y)]$;
b) для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари вектор-функцій $U(x,y),V(x,y)\in\overline{B}_1$, які задовольняють умову

$$U(x,y)\geq V(x,y),(x,y)\in\overline{D},$$

в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)] \le H[V(x,y);U(x,y)];$$

3) вектор-функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області B_1 задовольняє умову Ліпшиця, тобто для всяких з простору $C(\overline{D})$ вектор-функцій $U_r(x,y)$, $V_r(x,y)\in \overline{B}_1$, $r=1,2$, виконується умова

$$\begin{aligned}&|H[U_1(x,y);V_1(x,y)]-H[U_2(x,y);V_2(x,y)]| \le \\ &\le L(|U_1(x,y)-U_2(x,y)|+|V_1(x,y)-V_2(x,y)|+ \\ &+|U_1(x,\theta(x,y))-U_2(x,\theta(x,y))|+|V_1(x,\theta(x,y))-V_2(x,\theta(x,y))|),\end{aligned}$$

де $L=(\delta_{i,j}l_{i,j})$ – матриця Ліпшиця, $l_{i,j}\ge 0$, $i=\overline{1,n}$.

Встановимо достатні умови існування та єдності регулярного (ірегулярного) розв'язку задачі (1)-(8).

З цією метою побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ згідно формул

$$Z_{s,p+1}(x,y)=\begin{cases}\Omega(x,y),(x,y)\in \overline{E}_s, \overline{E}_3:=\overline{E}_1,\\ \Omega_s^p(x,y)+T_s f_s^p(\xi,\eta),(x,y)\in \overline{D}_s\end{cases}\qquad s=1,2,3, \tag{10}$$

$$V_{s,p+1}(x,y)=\begin{cases}\Omega(x,y),(x,y)\in \overline{E}_s, \overline{E}_3:=\overline{E}_1,\\ \Omega_{s,p}(x,y)+T_s f_{s,p}(\xi,\eta),(x,y)\in \overline{D}_s,\end{cases}$$

$$f_s^p(x,y):=H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)],$$

$$f_{s,p}(x,y):=H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)],$$

$$\Omega_1^p(x,y)=\Omega_{1,p}(x,y)=\Omega_1(x,y) \text{ для } \forall p\in N,\ (x,y)\in \overline{D}_1,$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_s^p(x,y)&=\left(\omega_{s,i}(x,y)\big|_{F_i[U_1(\xi,\eta)]=f_{s,i}^p(\xi,\eta)}\right),\\ \Omega_{s,p}(x,y)&=\left(\omega_{s,i}(x,y)\big|_{F_i[U_1(\xi,\eta)]=f_{s,i,p}(\xi,\eta)}\right)\end{aligned}\right\}\ (x,y)\in \overline{D}_s,\ s=2,3,$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y)\in \overline{B}_1$ вибираємо довільні вектор-функції з простору $C(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови

$$\begin{aligned}&Z_{s,0}(x,y)\ge V_{s,0}(x,y),\\ &Z_{s,0}(x,y)-\Omega_s^0(x,y)-T_s f_s^0(\xi,\eta)\ge 0,\\ &V_{s,0}(x,y)-\Omega_{s,0}(x,y)-T_s f_{s,0}(\xi,\eta)\le 0,\ (x,y)\in \overline{D}_s,\\ &Z_{s,0}(x,y)|_{\overline{E}_s}=V_{s,0}(x,y)|_{\overline{E}_s}=\Phi(x,y),\ (x,y)\in \overline{E}_s,\ s=1,2,3.\end{aligned} \tag{11}$$

Лема 2. *Нехай $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ і інтегральні рівняння (9) в просторі вектор-функцій $C(\overline{D}_s)$, $s=1,2,3$, мають розв'язки, які при $(x,y)\in \overline{D}_s$ задовольняють умови*

$$V_{s,0}(x,y)\le U_s(x,y)\le Z_{s,0}(x,y),\ (x,y)\in \overline{D}_s,\ s=1,2,3, \tag{12}$$

де $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y)\in C(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють умови (2)-(6).

Тоді при $(x,y)\in \overline{D}_s$ справедливі нерівності (11).

Лема 3. *Якщо $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, то множина вектор-функцій нульового наближення*

$$Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y)\in C(\overline{D}_s),\quad s=1,2,3,$$

які задовольняють умови (11), не порожня.

Теорема. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$*, а вектор нульового наближення*

$$Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s) \quad s=1,2,3$$

задовольняють умови (11).

Тоді послідовності вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$, побудовані згідно формул (10), при виконанні умови

$$Z_{s,0}(x,y) \geq V_{s,1}(x,y)$$
$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y), \quad s=1,2,3 \tag{13}$$

a) збігаються рівномірно в області $\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, *до єдиного в просторі* $C^*(\overline{D}_s)$ *розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9);*

b) мають місце оцінки

$$\left\| Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y) \right\| \leq \frac{1}{p!}\left[klqn(y-y_0+x-x_1)\right]^p d,$$

$$l = \|L\|, \ \sup_s \left\| Z_{s,0}(x,y) - V_{s,0}(x,y) \right\| = d,$$

$$\left\| K(x,y;\xi,\eta) \right\| \leq 0{,}25k\,;$$

c) в області $\overline{B_1}$ *виконуються нерівності*

$$V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq U_s(x,y) \leq$$
$$\leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s=1,2,3,$$

для $\forall p = 0,1,2,\ldots$, *де* $U_s(x,y)$ *– єдиний в просторі* $C^*(\overline{D}_s)$ *розв'язок відповідного інтегрального рівняння із (9) при* $(x,y) \in D_s \quad s=1,2,3$.

Наслідок 1. Якщо $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і виконуються умови (13), то нерівності (11) є необхідними і достатніми умовами для виконання в області $\overline{B}$ нерівностей (12).

Наслідок 2. Нехай крайові умови (2)-(4) є однорідними і $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, причому $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$.

Тоді, якщо $F[0] \leq (\geq) 0$ в області $\overline{B}$, то розв'язок крайової задачі (1) - (8) задовольняє нерівності

$$U(x,y) \leq (\geq) 0.$$

Зауваження. Якщо $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$, то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (1)-(8) достатньо будувати одну послідовність вектор-функцій $Z_{s,p}(x,y)$, що вдвічі зменшує кількість операцій при реалізації двостороннього методу (10)-(11).

Список джерел:

1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.- 448 с.
2. Маринець В. В. Деякі підходи побудови наближеного розв'язку узагальненої задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // УМЖ.- 1995.- Т. 47, №12.- С. 1667-1675.
3. В.В. Маринець, А. В. Добридень. Про одну задачу Коші-Дарбу для квазілінійного рівняння гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформатика.- 2008.- Вип. 16.- С. 101-109.