НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ім. Г. В. КАРПЕНКА

МЕХАНІКА І ФІЗИКА РУЙНУВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ

Збірник наукових праць

Випуск 10

За загальною редакцією Й. Й. Лучка

Львів
Каменяр
2014

УДК 517.946

В. В. Маринець[1], *К. В. Маринець*[1]

Дослідження крайової задачі Гурса – Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу

У роботі за допомогою побудованої модифікації двостороннього методу досліджується крайова задача для хвильового рівняння на площині, коли край області зміни незалежних змінних має складну структуру. Одержано достатні умови існування, єдиності та знакосталості регулярного (іррегулярного) розв'язку досліджуваної задачі, доведено теорему про диференціальні нерівності.

В. В. Маринец, К. В. Маринец

Исследование краевой задачи Гурса – Дарбу для нелинейного уравнения гиперболического типа

В работе с помощью построенной модификации двустороннего метода исследуется краевая задача для волнового уравнения на плоскости в случае, когда граница области изменения независимых переменных имеет сложную структуру. Получены достаточные условия существования, единственности и знакопостоянства регулярного (иррегулярного) решения исследуемой задачи, доказано теорему о дифференциальных неравенствах.

V. V. Marynets, K. V. Marynets

The investigation of the Hyrsa–Darby boundary-value problem for the non–linear equation of the hyperbolic type

We investigate solutions of the boundary–value problem for a wave–equation on the plain with the help of the modification of the double–side method, when the bound of the domain has difficult structure. We get sufficient conditions of existence, uniqueness and alternation of the regular (irregular) solution of the problem and prove theorem about differential inequalities.

У даній роботі узагальнюються одержані в [1,2] результати і дається один підхід побудови модифікації двостороннього

---

[1] Ужгородський національний університет.

методу прискореної збіжності наближеного інтегрування крайової задачі для нелінійного рівняння другого порядку гіперболічного типу на площині, коли область зміни незалежних змінних обмежена "вільними" кривими та характеристиками заданого диференціального рівняння [3].

В R^2 розглянемо область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де $D_1 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g_1(x))\}$,
$D_3 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_2], \ y \in (g_2(x), y_1]\}$,
а $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_i(x)$ $(x = k_i(y))$, $i = 1,2$ — "вільні" криві, причому $g_1(x_{i-1}) = y_i$, $g_2(x_i) = y_{i-1}$, $g_i'(x) > 0$, $i = 1,2$.

Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(\bar{D}) := C^{(1.1)}(D) \cup C(\bar{D})$ знайти розв'язок рівняння

$$L_2 U(x,y) = f\left(x, y, U(x,y)\right) := f[U(x,y)], \tag{1}$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} U(x_0, y) = \psi(y), \ U(x, y_0) = \varphi(x), \ (x,y) \in \bar{D}_1, \\ \psi(y) \in C^1[y_0, y_1], \varphi(x) \in C^1[x_0, x_1]; \end{gathered} \tag{2}$$

$$U(x, g_i(x)) = \omega_i(x), \ \ x \in [x_{i-1}, x_i], \ \ \omega_i(x) \in C^1[x_{i-1}, x_i], \ \ i = 1,2, \tag{3}$$

причому виконуються умови узгодженості

$$\psi(y_0) = \varphi(x_0), \ \ \omega_1(x_0) = \psi(y_1), \ \ \omega_2(x_1) = \varphi(x_1), \tag{4}$$

а

$$L_2 U(x,y) := U_{xy}(x,y) + a_1(x,y) U_x(x,y) + a_2(x,y) U_y(x,y),$$

де $a_i(x,y) \in C(D)$ — задані функції.

Очевидно, розв'язок задачі (1)–(4) $U(x,y) = U_s(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, де $U_1(x,y)$ − розв'язок задачі Гурса (1), (2), (4) при $(x,y) \in \bar{D}_1$, а $U_s(x,y)$, $s = 2,3$ − розв'язки задач Дарбу (1), (3), (4) при $i = 1,2$ і, відповідно, $U_2(x, y_1) = U_1(x, y_1)$, $U_3(x_1, y) = U_1(x_1, y)$.

Надалі будемо вважати, що $a_1(x,y)\in C^{(0.1)}(D_1\cup D_3)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D_1\cup D_2)$, $f[U(x,y)]\in C(\bar{B})$, $f:\bar{B}\to R$, $\bar{B}\in R^3$..

Не важко довести, що задачу (1)–(4) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$U_s(x,y)=\Omega_s(x,y)+\delta_s T_{1,s}F[U_1(\xi,\eta)]+T_sF[U_s(\xi,\eta)], \qquad (5)$$

$$(x,y)\in\bar{D}_s,\quad s=1,2,3,$$

де

$$\delta_s=\begin{cases}0, & s=1,\\ 1, & s=2,3;\end{cases}\qquad F[U(x,y)]:=\begin{cases}F_1[U(x,y)], & (x,y)\in D_1\cup D_2,\\ F_2[U(x,y)], & (x,y)\in D_3;\end{cases}$$

$$F_1[U(x,y)]:=f[U(x,y)]+[a_{2y}(x,y)+a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y),$$

$$F_2[U(x,y)]:=f[U(x,y)]+[a_{1x}(x,y)+a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y),$$

$$T_1F[U_1(\xi,\eta)]:=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,(x,y)\in\bar{D}_1,$$

$$\Omega_1(x,y):=\psi(y)\exp\left(\int_x^{x_0}a_2(\xi,\eta)d\xi\right)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}K_1(x,y;\xi,y_0)[\varphi'(\xi)+a_2(\xi,y_0)\varphi(\xi)]d\xi,$$

$$K_1(x,y;\xi,\eta):=\exp\left(\int_x^{\xi}a_2(\tau,y)d\tau+\int_y^{\tau}a_1(\xi,\tau)d\tau\right),$$

$$T_2F[U_2(\xi,\eta)]:=\int_{k_1(y)}^{x}\int_{y_1}^{y}K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi,(x,y\in\bar{D}_2),$$

$$T_{1,2}F[U_1(\xi,\eta)]:=\int_{k_1(y)}^{x}\int_{y_0}^{y_1}K_1(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$

$$\Omega_2(x,y):=\omega_1(k_1(y))\exp\left(\int_x^{k_1(y)}a_2(\xi,y)d\xi\right)+$$

$$+\int_{k_1(y)}^{x}K_1(x,y;\xi,y_0)[\varphi'(\xi)+a_2(\xi,y_0)\varphi(\xi)]d\xi,$$

$$T_3F[U_3(\xi,\eta)]:=\int_{g_2(x)}^{y}\int_{x_1}^{x}K_2(x,y;\xi,\eta)F[U_3(\xi,\eta)]d\eta,(x,y\in\bar{D}_3),$$

$$\Omega_3(x,y):=\omega_2(x)\exp\left(\int_{y}^{g_2(x)}a_1(x,\eta)d\eta\right)+$$

$$+\int_{g_2(x)}^{y}K_2(x,y;x_0,\eta)[\psi'(\eta)+a_1(x_0,\eta)\psi(\eta)]d\eta,$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta):=\exp\left(\int_{x}^{\xi}a_2(\tau,\eta)d\tau+\int_{y}^{\eta}a_1(x,\tau)d\tau\right),$$

$$T_{1,3}F[U_1(\xi,\eta)]:=\int_{g_2(x)}^{y}\int_{x_0}^{x_1}K_2(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi.$$

Зауваження 1. Якщо $a_{1x}(x,y)=a_{2y}(x,y)$, $(x,y)\in D$, то $\bar{F}_1[U(x,y)]\equiv F_2[U(x,y)]$ і $K_1(x,y;\xi,\eta)\equiv K_2(x,y;\xi,\eta)$.

Згідно з постановкою задачі $U_{1x}(x,y_1)=U_{2x}(x,y_1)$ і $U_{1y}(x_1,y)=U_{3y}(x_1,y)$ при $x\in[x_0,x_1], y\in[y_0,y_1]$, а

$$\begin{aligned}U_{1y}(x,y_1)-U_{2y}(x,y_1)&=\rho_1\exp\left(\int_{x}^{x_0}a_2(\xi,y_1)d\xi\right),x\in[x_0,x_1],\\ U_{1x}(x_1,y)-U_{3x}(x_1,y)&=\rho_2\exp\left(\int_{y}^{y_0}a_1(x_1,\eta)d\eta\right),y\in[y_0,y_1],\end{aligned}\qquad(6)$$

$$\rho_1=\psi'(y_1)-k_{1'}(y_1)\{\omega_{1'}(x_0)+a_2(x_0,y_1)\omega_1(x_0)-[a_2(x_0,y_0)\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int_{y_1}^{y_0}a_1(x_0,\eta)d\eta\right)-\int_{y_0}^{y_1}F_1(x_0,\eta,\psi(\eta))\exp\left(\int_{y_1}^{\eta}a_1(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta\},$$

$$\rho_2=\varphi'(x_1)-\omega_{2'}(x_1)-g_{2'}(x_1)\{a_1(x_1,y_0)\omega_2(x_1)-[a_1(x_0,y_0)\varphi(y_0)+\psi'(y_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int_{x_1}^{x_0}a_2(\xi,y_0)d\xi\right)-\int_{x_0}^{x_1}F_2(\xi,y_0,\varphi(\xi))\exp\left(\int_{x_1}^{\xi}a_2(\tau,y_0)d\tau\right)d\xi\}.$$

Таким чином, слушна наступна лема:

Лема 1. Нехай $f[U(x,y)]\in C(\bar{B})$, $a_i(x,y)\in C(D)$, $i=1,2$, $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D_1\cup D_3)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D_1\cup D_2)$ і задача (1)–(4) має розв'язок.

Тоді, якщо $\rho_1=\rho_2=0$, розв'язок задачі (1)–(4) належатиме простору $C^*(\bar{D})$ (буде регулярним).

У супротивному випадку виконуються рівності (6) і

$$U(x,y)\in C^{(1.1)}(D)\cap C^{(1.0)}(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)\cap C^{(0.1)}(\bar{D}_1\cup\bar{D}_3),$$
$$I=I_1\cup I_2,\ \ I_1=\{(x,y)\,|\,y=y_1,\ \ x\in[x_0,x_1]\},$$
$$I_2=\{(x,y)\,|\,x=x_1,\ \ y\in[y_0,y_1]\}$$
(розв'язок буде іррегулярним).

Означення 1. Будемо вважати, що $F[U(x,y)]\in C_1(\bar{B})$, якщо функція $F[U(x,y)]$ задовольняє наступні умови [4]:

1. $F[U(x,y)]\in C(\bar{B})$;

2. в просторі функцій $C(\bar{B}_1)$, $\bar{B}_1\subset R^4$, $\bar{B}_1=\bar{D}$ існує така функція $H(x,y,U(x,y),\ \ V(x,y)):=H[U(x,y);V(x,y)]$, що

а) $H[U(x,y);\ \ U(x,y)]\equiv F[U(x,y)]$,

б) для довільної з простору $C(\bar{D})$ пари функцій $U(x,y)$, $V(x,y)\in\bar{B}_1$, які задовольняють умову $U(x,y)\geq V(x,y)$, $(x,y)\in\bar{D}$, в області $\bar{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)]-H[V(x,y);\ \ U(x,y)]\geq 0,(x,y)\in\bar{D};\qquad(7)$$

3. функція $H[U(x,y);\ V(x,y)]$ в області $\bar{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких з простору $C(\bar{D})$ функцій $U_i(x,y),V_i(x,y)\in\bar{B}_1$, $i=1,2$, виконується умова

$$|\,H[U_1(x,y);V_1(x,y)]-H[U_2(x,y);V_2(x,y)]|\leq L\big(|\,W_1(x,y)\,|+|\,W_2(x,y)\,|\big),$$
$$(x,y)\in D,$$

де L − стала Ліпшіца, а $W_i(x,y):=U_i(x,y)-V_i(x,y)$, $i=1,2$.

Очевидно, якщо функція $f[U(x,y)]\in C(\bar{B})$ і має в області $\bar{B}$ обмежену частинну похідну першого порядку по $U(x,y)$, то $F[U(x,y)]$ завжди належить простору $C_1(\bar{B})$.

З'ясуємо достатні умови існування та єдиності регулярного (іррегулярного) розв'язку задачі (1)–(4) в області $\bar{D}$.

Нехай $Z_{p,s}$, $V_{p,s}\in C(\bar{D}_s)$ належать області $\bar{B}_1$, $s=1,2,3$, $p\in N$.

Введемо позначення:

$$
\begin{gathered}
W_{p,s} := Z_{p,s} - V_{p,s}, (x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \\
f_s^p(x,y) := H[Z_{p,s}(x,y); V_{p,s}(x,y)], \; f_{p,s}(x,y) := H[V_{p,s}^{\cdot}(x,y), Z_{p,s}(x,y)], \\
\alpha_{p,s}^*(x,y) := Z_{p,s}(x,y) - \Omega_s(x,y) - \delta_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta), \\
\beta_{p,s}^*(x,y) := V_{p,s}(x,y) - \Omega_s(x,y) - \delta_s T_{1,s} f_{p,1}(\xi,\eta) - \\
- T_s f_{p,s}(\xi,\eta), \quad s = 1,2,3, \\
\bar{Z}_{p,s}(x,y) := Z_{p,s}(x,y) - d_{p,s} W_{p,s}(x,y), \\
\bar{V}_{p,s}(x,y) := V_{p,s}(x,y) + q_{p,s}(x,y) W_{p,s}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, \\
F_s^p(x,y) := H[\bar{Z}_{p,s}; \; \bar{V}_{p,s}], \; F_{p,s}(x,y) := H[\bar{V}_{p,s}; \; \bar{Z}_{p,s}],
\end{gathered}
\tag{8}
$$

де $d_{p,s}(x,y), q_{p,s}(x,y) \in C(\bar{D}_s)$ – довільні функції, які задовольняють умови

$$
0 \le d_{p,s} \le 0,5, \quad 0 \le q_{p,s}(x,y) \le 0,5, (x,y) \in \bar{D}_s \tag{9}
$$

для всіх $p \in N$ і $s = 1,2,3$.

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ згідно з формулою [5]:

$$
\begin{gathered}
Z_{p+1,s}(x,y) = \Omega_s(x,y) + \delta_s T_{1,s} F_1^p(\xi,\eta) + T_s F_s^p(\xi,\eta), \\
V_{p+1,s}(x,y) = \Omega_s(x,y) + \delta_s T_{1,s} F_{p,1}(\xi,\eta) + T_s F_{p,s}(\xi,\eta), (x,y) \in \bar{D}_s,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

де за нульове наближення $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s} \in \bar{B}_0$ вибираємо довільні з простору $C(\bar{D}_s)$ функції, які задовольняють умови відповідно (2)–(4) та нерівності

$$
W_{0,s}(x,y) \ge 0, \;\; \alpha_{0,s}^*(x,y) \ge 0, \;\; \beta_{0,s}^*(x,y) \le 0, \;\; (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3. \tag{11}
$$

Надалі функції $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}(x,y) \in C(\bar{D}_s)$, які належать області $\bar{B}_1$ і задовольняють відповідно умови (2)–(4) та нерівності (11), будемо називати функціями порівняння задачі (1)–(4).

Із (10), при $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, випливає слушність формул:

$$
\begin{aligned}
Z_{p,s}(x,y)-Z_{p+1,s}(x,y)=\alpha_{p,s}(x,y):=Z_{p,s}(x,y)-\Omega_s(x,y)-\\
-\delta_s T_{1,s}F_1^p(\xi,\eta)-T_sF_s^p(\xi,\eta),\\
V_{p,s}(x,y)-V_{p+1,s}(x,y)=\beta_{p,s}(x,y):=V_{p,s}(x,y)-\Omega_s(x,y)-\\
-\delta_s T_{1,s}F_{p,1}(\xi,\eta)-T_sF_{p,s}(\xi,\eta);
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
W_{p+1,s}(x,y)=\delta_s T_{1,s}(F_1^p(\xi,\eta)-F_{p,1}(\xi,\eta))+T_s(F_s^p(\xi,\eta)-F_{p,s}(\xi,\eta)), \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{p+1,s}(x,y)=\delta_s T_{1,s}(F_1^p(\xi,\eta)-F_1^{p+1}(\xi,\eta))+T_s(F_s^p(\xi,\eta)-F_s^{p+1}(\xi,\eta)),\\
\beta_{p+1,s}(x,y)=\delta_s T_{1,s}(F_{p,1}(\xi,\eta)-F_{p+1,1}(\xi,\eta))+\\
+T_s(F_{p,s}(\xi,\eta)-F_{p+1,s}(\xi,\eta)).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Внаслідок (9), (11) маємо

$$V_{0,s}(x,y)\le \bar{V}_{0,s}(x,y)\le \bar{Z}_{0,s}(x,y)\le Z_{0,s}(x,y),\quad (x,y)\in \bar{D}_s,\ \ s=1,2,3,$$

а отже, на підставі (7) $F_s^0(x,y)-F_{0,s}\ge 0$ для всіх $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$, якщо тільки $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}(x,y)\in \bar{B}_1$.

Зазначимо, що $\alpha^*_{0,s}(x,y)\ge 0$, $\beta^*_{0,s}(x,y)\le 0$, то і

$$\alpha_{0,s}(x,y)\ge 0,\ \beta^*_{0,s}(x,y)\le 0,\ (x,y)\in \bar{D}_s, s=1,2,3,.$$

Але тоді із (12) та (13) при $p=0$ одержуємо

$$Z_{0,s}(x,y)-Z_{1,s}(x,y)\ge 0,\quad V_{0,s}(x,y)-V_{1,s}(x,y)\le 0,\quad W_{1,s}(x,y)\ge 0,$$

тобто

$$V_{0,s}(x,y)\le V_{1,s}(x,y)\le Z_{1,s}(x,y)\le Z_{0,s}(x,y),\quad (x,y)\in \bar{D}_s,\quad s=1,2,3,$$

а отже, $Z_{1,s}(x,y)$, $V_{1,s}(x,y)\in \bar{B}_1$.

Вибираємо функції $d_{0,s}(x,y)$ та $q_{0,s}(x,y)$, які задовольняють умови (9), таким чином, щоб при $(x,y)\in \bar{D}_s$ виконувалися умови [6]

$$
\begin{aligned}
Z_{0,s}(x,y)-Z_{1,s}(x,y)-d_{0,s}(x,y)W_{0,s}(x,y)\ge 0,\\
V_{0,s}(x,y)-V_{1,s}(x,y)+q_{0,s}(x,y)W_{0,s}(x,y)\le 0.
\end{aligned}
$$

Тоді внаслідок (7)

$$F_s^0(x,y)-F_s^1(x,y)\ge 0,\quad F_{0,s}(x,y)-F_{1,s}(x,y)\le 0,(x,y)\in \bar{D}_s,\quad s=1,2,3.$$

Але в такому випадку із (14) при $p=0$ маємо

$$\alpha_{1,s}(x,y)\geq 0,\ \ \beta_{1,s}(x,y)\leq 0,\ \ (x,y)\in \bar{D}_s, s=1,2,3.$$

Приймаючи функції $Z_{1,s}(x,y)$, $V_{1,s}(x,y)$ за вихідні і повторюючи здійснені вище міркування, методом математичної індукції переконуємось, що якщо функції $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y),(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3, p\in N$ на кожному кроці ітерації (10) слід вибирати таким чином, щоб виконувалися умови

$$\begin{gathered} Z_{p,s}(x,y)-Z_{p+1,s}(x,y)-d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y)\geq 0,\\ V_{p,s}(x,y)-V_{p+1,s}(x,y)+q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y)\leq 0,\\ (x,y)\in \bar{D}_s, s=1,2,3,\ \ p\in N, \end{gathered} \tag{15}$$

то в області $\bar{B}_1$ мають місце нерівності

$$V_{p,s}(x,y)\leq V_{p+1,s}(x,y)\leq Z_{p+1,s}(x,y)\leq Z_{p,s}(x,y),$$

$$\alpha_{p,s}(x,y)\geq 0,\ \ \beta_{p,s}(x,y)\leq 0,(x,y)\in \bar{D}_s,\ \ s=1,2,3,$$

для всіх $p\in N$.

Зазначимо, що для всіх $p\in N$ $\alpha_{p,s}(x,y)\geq \alpha^*_{p,s}(x,y)$, $\beta_{p,s}(x,y)\leq \beta^*_{p,s}(x,y)$, $(x,y)\in \bar{D}_s$.

Лема 2. Якщо $F[U(x,y)]\in C_1(\bar{B})$ і в області $\bar{B}_1$ існують функції порівняння $Z_{0,s}(x,y)$ та $V_{0,s}(x,y)$, $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$ задачі (1)–(4), тоді множина функцій $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)\in C(\bar{D}_s)$, які задовольняють нерівності (9), (15), не порожня.

Дійсно, вимагатемо на кожному кроці ітерації виконання (10):

$$d_{p,s}(x,y)=\begin{cases}\alpha^*_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y), W_{p,s}(x,y)\neq 0,\\ 0,\ \ W_{p,s}(x,y)=0,(x,y)\in \bar{D}_s,\ \ s=1,2,3,\end{cases}$$

$$q_{p,s}(x,y)=\begin{cases}-\beta^*_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y), W_{p,s}(x,y)\neq 0;\\ 0,\ \ W_{p,s}(x,y)=0,(x,y)\in \bar{D}_s,\ \ s=1,2,3.\end{cases}$$

$$\rho_{p,s}(x,y)=\alpha^*_{p,s}(x,y)-\beta^*_{p,s}(x,y)+W_{p,s}(x,y);\;\; p\in N$$

Очевидно, вибрані таким чином функції $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)$ задовольняють умови (9), а внаслідок (12):

$$Z_{p,s}(x,y)-Z_{p+1,s}(x,y)-d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y)\geq$$
$$\geq\alpha_{p,s}(x,y)\left(1-W_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y)\right)\geq 0,$$
$$V_{p,s}(x,y)-V_{p+1,s}(x,y)+q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y)\leq$$
$$\leq\beta_{p,s}(x,y)\left(1-W_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y)\right)\leq 0,$$
$$(x,y)\in\bar{D}_s,\;\; s=1,2,3,\;\; p\in N.$$

Таким чином, слушна наступна теорема.

Теорема 1. Нехай $F[U(x,y)]\in C_1(\bar{B})$, $a_i(x)\in C(D)$, $i=1,2$, $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D_1\cup D_3)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D_1\cup D_2)$, а в області $\bar{B}_1$ існують функції порівняння $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y)\in C(\bar{D}_s)$, $s=1,2,3$ задачі (1)–(4).

Тоді для функцій $Z_{p,s}(x,y)$, $V_{p,s}(x,y)$, які побудовані згідно із законом (10), де $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)\in C(\bar{D}_s)$, задовольняють умови (9), (15) в області $\bar{B}_1$ виконуються нерівності (16).

Доведемо, що побудовані таким чином послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$, $\{V_{p,s}(x,y)\}$ збігаються рівномірно в області $\bar{D}_s, s=1,2,3$ до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (5). Внаслідок виконання в $\bar{B}_1$ нерівностей (16) для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty}W_{p,s}(x,y)=0$, $(x,y)\in\bar{D}_s$, $s=1,2,3$.

Тоді із (13) методом математичної індукції переконуємося в слушності оцінок

$$\max_s\sup_{\bar{D}_s}W_{p,s}(x,y)\leq\frac{[KLQq(y-y_0+x-x_0)]^p}{p!}d, \qquad (17)$$

а отже,

$$\lim_{p\to\infty} Z_{p,s}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{p,s}(x,y) = U_s(x,y), (x,y)\in \bar{D}_s, s=1,2,3.$$

Переходячи у формулах (10) до границі при $p\to\infty$ переконуємося, що граничні функції $U_s(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (5) при $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$.

Теорема 2. Нехай $F[U(x,y)]\in C_1(\bar{B})$, $a_i(x,y)\in C(D)$, $i=1,2$, $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D_1\cup D_3)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D_1\cup D_2)$ і в області $\bar{B}_1$ існують функції порівняння задачі (1)–(4) $Z_{0,s}, V_{0,s}(x,y)\in C(\bar{D}_s)$, $s=1,2,3$.

Тоді послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$, $\{V_{p,s}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (10), де $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)\in C(\bar{D}_s)$, $s=1,2,3$, а функції (9), (15):

а) збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (5) при $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$;

б) справджуються оцінки (17);

в) в області $\bar{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_{p,s}(x,y)\le V_{p+1,s}(x,y)\le U_s(x,y)\le Z_{p+1,s}(x,y)\le Z_{p,s}(x,y), \quad (18)$$
$$(x,y)\in \bar{D}_s, \quad s=1,2,3$$

для всіх $p\in N$, де $U_s(x,y)$ — єдиний розв'язок відповідного інтегрального рівняння (5) при $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$;

г) збіжність ітераційного методу (10), (9), (15) не повільніша збіжності двостороннього методу Пікара (коли $d_{p,s}(x,y)=q_{p,s}(x,y)\equiv 0$).

Доведення. Єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь (5) при $(x,y)\in \bar{D}_s$, $s=1,2,3$ доводиться методом від супротивного.

Доведемо слушність нерівності (18). Для цього припустимо, що в деякій точці $(x,y)\in \bar{D}_s$ для деякого номера p, наприклад, $U_s(s,y) > Z_{p,s}(x,y)$.

Тоді внаслідок (16) для всіх $n \in N$ у розглядуваній точці $(x,y) \in \bar{D}_s$: $U_s(x,y) > Z_{p,s}(x,y) \geq Z_{p+n,s}(x,y)$, а отже, в даній точці послідовність функцій $Z_{p+n,s}(x,y)$ при $n \to \infty$ не збігається до розв'язку $U_s(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності (18).

Нехай $Z_{p,s}(x,y)$, $V_{p,s}(x,y) \in \bar{B}_1\sqrt{a^2+b^2}$ — двосторонні наближення до розв'язків відповідних інтегральних рівнянь (5) при $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, побудовані за деяким методом і вони задовольняють умови

$$W_{p,s}(x,y) \geq 0, \ \ \alpha^*_{p,s}(x,y) \geq 0, \ \ \beta^*_{p,s}(x,y) \leq 0.$$

Позначимо через $Z^*_{p+1,s}(x,y)$, $V^*_{p+1}(x,y)$ такі наближення, побудовані згідно з двостороннім методом Пікара при $(x,y) \in \bar{D}_s$. Тоді внаслідок (7), (9), маємо

$$Z^*_{p+1,s}(x,y) - Z_{p+1,s}(x,y) = \delta_s T_{1,s}\left(f_1^p(\xi,\eta) - F_1^p(\xi,\eta)\right) +$$
$$+T_s\left(f_s^p(\xi,\eta) - F_s^p(\xi,\eta)\right) \geq 0,$$
$$V^*_{p+1,s}(x,y) - V_{p+1,s}(x,y) = \delta_s T_{1,s}\left(f_{p,1}(\xi,\eta) - F_{p,1}(\xi,\eta)\right) +$$
$$+T_s\left(f_{p,s}(\xi,\eta) - F_{p,s}(\xi,\eta)\right) \leq 0,$$

тобто збіжність методу (10), (9), (15) не повільніша від збіжності двостороннього методу Пікара.

Зазначимо, що залежно від вибору функцій $d_{p,s}(x,y)$ та $q_{p,s}(x,y)$ в алгоритмі (10), (9), (15) отримаємо різні модифікації двостороннього методу.

Наслідок 1. Нехай виконуються вимоги Теореми 2.

Тоді розв'язок крайової задачі (1)–(4) в області $\bar{D}$ існує, і він єдиний, причому, при виконанні умов $\rho_1 = \rho_2 = 0$, він буде регулярним, у супротивному випадку — іррегулярним.

Наслідок 2. Нехай $\varphi(x) = \psi(y) = 0$, $(x,y) \in \bar{D}_1$, $\omega_i(x) = 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2$, $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$, причому $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$.

Тоді, якщо $F[0] \le (\ge) 0$ в області $\overline{B}$, то розв'язок задачі (1)–(4) при $(x, y) \in \overline{D}$ задовольняє нерівність

$$U(x, y) \le (\ge) 0.$$

Розглянемо поряд із рівнянням (1) рівняння вигляду

$$L_2 Z(x, y) = f_1(x, y, Z(x, y)) := f_1[Z(x, y)], \qquad (19)$$

$f_1 : \overline{B} \to R$, $\overline{B} \subset R^3$. Надалі будемо вважати, що праві частини рівнянь (1), (19) задовольняють такі умови:

1) $f[U(x, y)] \in C_1(\overline{B})$;

2) функція $f_1[Z(x, y)] \in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має обмежену частинну похідну першого порядку по $Z(x,y)$, яка задовольняє умови

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1[Z(x, y)]}{\partial Z(x, y)} + a_{2y}(x, y) + a_1(x, y) a_2(x, y) \ge 0, (x, y) \in D_1 \cup D_2, \\ &\frac{\partial f_1[Z(x, y)]}{\partial Z(x, y)} + a_{1x}(x, y) + a_1(x, y) a_2(x, y) \ge 0, (x, y) \in D_1 \cup D_3; \end{aligned} \qquad (20)$$

3) для всякої з простору $C^*(\overline{D})$ функції $V(x, y) \in \overline{B}$

$$f_1[V(x, y)] \ge (\le) f[V(x, y)]. \qquad (21)$$

Теорема 3. Нехай $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D_1 \cup D_3)$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D_1 \cup D_2)$, а праві частини рівнянь (1), (19) $f[U(x, y)]$ та $f_1[Z(x, y)]$ задовольняють вищенаведені умови (1)–(3) і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задач (1)–(4), (19), (2)–(4).

Тоді для розв'язків цих задач при $(x, y) \in \overline{D}$ виконуються нерівності

$$U(x, y) \le (\ge) Z(x, y). \qquad (22)$$

Доведення. Згідно теоремою 2 і наслідком 1, розв'язки задач (1)–(4), (19), (2)–(4) існують і вони єдині (регулярні або іррегулярні), а отже, позначивши $W(x, y) := Z(x, y) - U(x, y)$ і використавши теорему Лагранжа про скінчені простори, матимемо

$$L_2 W(x, y) = b_1(x, y) W(x, y) + f_1[U(x, y)] - f[U(x, y)],$$

де $b(x,y)$ — частинна похідна першого порядку від функції $f_1[Z(x,y)]$ по $Z(x,y)$ при деякому його фіксованому значенні, що належить $\overline{B},(x,y)\in\overline{D}$.

Очевидно, функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2)–(4), а

$$F_2[W(x,y)]:=[b(x,y)+a_{2y}(x,y)+a_1(x,y)a_2(x,y)]W(x,y)+$$
$$+f_1[U(x,y)-f[U(x,y)]],$$
$$F_1[W(x,y)]:=[b(x,y)+a_{1x}(x,y)+a_1(x,y)a_2(x,y)]W(x,y)+$$
$$+f_1[U(x,y)-f[U(x,y)]],$$

тобто внаслідок (20), (21) $F[W(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ і $F[W(x,y)]\equiv H[W(x,y);0]$, а $f[0]\geq(\leq)0$. На підставі наслідку 2 $W(x,y)\geq(\leq)0$ при $(x,y)\in\overline{D}$, тобто справедливі нерівності (22).

Висновки. В роботі отримано достатні умови існування, єдиності та знакосталості регулярного (іррегулярного) розв'язку досліджуваної задачі, доведено теорему про диференціальні нерівності.

1. *Маринець В. В., Маринець Т. Й., Добридень А. В.* Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці Міжнародного симпозіуму ПО–XXXV ім. В. М. Глушкова НАНУ. — 2009. — Т. 2. — С. 79–84.
2. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Про одну крайову задачу для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун–ту. Сер. Математика і інформатика. — 2010. — Вип. 20. — С. 79–89.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Мир, 1969. — 448 с.
4. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Про один підхід до дослідження задач з параметрами у крайових умовах // Нелінійні коливання. — 2008. — № 3. — Т. 1. — С. 348–364.
5. *Маринець В. В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними прохідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журнал. — 1995. — Т. 1. — № 3. — С. 1667–1675.
6. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближённое решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.