

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД**  
**«Ужгородський національний університет»**

**В.М. Бенца, А.А. Горват, Ю.М. Височанський**

**МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

**Електрика і магнетизм**

**Навчальний посібник**

**Рекомендовано**  
**Міністерством освіти і науки України**  
**для студентів вищих навчальних закладів**

**Ужгород «ІВА» 2010**

УДК 53 (075.8)  
Б–67  
ББК В 365 я73

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1/11-8690 від 17.09.2010 р.)*

У посібнику подано короткі теоретичні відомості, якісні питання, наведено приклади розв'язування задач з детальним аналізом їх фізичного змісту, а також задачі для аудиторної і самостійної роботи та приклади типових залікових контрольних робіт з відповідних розділів курсу „Електрика і магнетизм”, які відповідають дисципліні "Загальна фізика" для фізичних факультетів університетів.

Посібник призначений для використання при проведенні практичних занять та для самостійної роботи студентів, які навчаються за напрямками підготовки фахівців "Фізика", "Прикладна фізика" та деякими інженерними спеціальностями, а також може бути корисним молодим викладачам вузів та вчителям загальноосвітніх закладів з поглибленим вивченням фізики.

Рецензенти:

ШПЕНИК О.Б., академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук,  
професор, директор Інституту електронної  
фізики НАН України  
СТАСЮК З.В., доктор фіз.-мат. наук, професор Львівського  
національного університету імені Івана Франка  
ТРУБИЦІН М.П., доктор фіз.-мат. наук професор Дніпропет-  
ровського національного університету  
імені Олеся Гончара  
ЛУКІЯНЕЦЬ Б.А., доктор фіз.-мат. наук, професор Національного  
університету "Львівська політехніка"  
ЧОРНІЙ З.П., доктор фіз.-мат. наук, професор Національного  
лісотехнічного університету України

©Бенца В.М., Горват А.А.,  
Височанський Ю.М., 2010

©ТОВ «ІВА», 2010

ISBN 978-617-501-032-7

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	5
<b>РОЗДІЛ 1. ВЗАЄМОДІЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ. НАПРУЖЕ- НІСТЬ ТА ПОТЕНЦІАЛ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ</b> ..8	
1.1. Короткі теоретичні відомості .....	8
1.2. Методичні вказівки і поради .....	14
1.3. Якісні задачі та запитання .....	17
1.4. Приклади розв'язування задач .....	18
1.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	34
<b>РОЗДІЛ 2. ПРОВІДНИКИ ТА ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ</b> .....	40
2.1. Короткі теоретичні відомості .....	40
2.2. Методичні вказівки і поради .....	47
2.3. Якісні задачі та запитання .....	49
2.4. Приклади розв'язування задач .....	50
2.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	59
<b>РОЗДІЛ 3. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ. КОНДЕНСАТОРИ</b> .....	65
3.1. Короткі теоретичні відомості .....	65
3.2. Методичні вказівки і поради .....	69
3.3. Якісні задачі та запитання .....	71
3.4. Приклади розв'язування задач .....	72
3.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	82
<b>РОЗДІЛ 4. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ</b> .....	89
4.1. Короткі теоретичні відомості .....	89
4.2. Методичні вказівки і поради .....	93
4.3. Якісні задачі та запитання .....	95
4.4. Приклади розв'язування задач .....	97
4.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	105
<b>РОЗДІЛ 5. ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ</b> .....	112
5.1. Короткі теоретичні відомості .....	112
5.2. Методичні вказівки і поради .....	121
5.3. Якісні задачі та запитання .....	123
5.4. Приклади розв'язування задач .....	125
5.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	136

<b>РОЗДІЛ 6. МАГНІТНЕ ПОЛЕ. МАГНЕТИКИ</b> .....	145
6.1. Короткі теоретичні відомості .....	145
6.2. Методичні вказівки і поради .....	157
6.3. Якісні задачі та запитання .....	160
6.4. Приклади розв'язування задач .....	162
6.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	170
<b>РОЗДІЛ 7. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ</b> .....	176
7.1. Короткі теоретичні відомості .....	176
7.2. Методичні вказівки і поради .....	179
7.3. Якісні задачі та запитання .....	182
7.4. Приклади розв'язування задач .....	183
7.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	198
<b>РОЗДІЛ 8. РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНОМУ І МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ</b> .....	204
8.1. Короткі теоретичні відомості .....	204
8.2. Методичні вказівки і поради .....	206
8.3. Якісні задачі та запитання .....	207
8.4. Приклади розв'язування задач .....	208
8.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	221
<b>РОЗДІЛ 9. ЗМІННИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ</b> .....	227
9.1. Короткі теоретичні відомості .....	227
9.2. Методичні вказівки і поради .....	233
9.3. Якісні задачі та запитання .....	236
9.4. Приклади розв'язування задач .....	238
9.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи .....	248
<b>РОЗДІЛ 10. ПРИКЛАДИ ЗАЛІКОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ</b> .....	257
10.1. Контрольна робота № 1 .....	257
10.2. Контрольна робота № 2 .....	259
10.3. Контрольна робота № 3 .....	260
10.4. Самостійна робота № 4 .....	261
<b>ВІДПОВІДІ</b> .....	263
<b>ДОВІДКОВІ ТАБЛИЦІ</b> .....	278
<b>ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА</b> .....	283
<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК</b> .....	285

## ПЕРЕДМОВА

Розв'язування фізичних задач у навчальному процесі вузу – важливий метод об'єднання теорії з практикою. Крім розкриття основних понять і величин сучасної фізики у процесі розв'язування фізичних задач з'ясовуються взаємозв'язок і функціональні залежності між ними та способи їх вираження; набувається досвід “бачення” захованих фізичних залежностей в конкретних умовах, виявляються межі їх застосування. Це суттєві ознаки оволодіння знаннями фізики.

Кожна реальна задача, поставлена перед людиною, є збудником мислення. Відомо, що *фізична задача – це фізичне явище (або сукупність явищ), точніше – його словесна форма, з деякими відомими і невідомими фізичними величинами, що характеризують це явище (або сукупність явищ)*. Розв'язати фізичну задачу – це значить знайти (відновити) невідомі причинно-наслідкові зв'язки між фізичними величинами, самі фізичні величини та інше.

Розв'язування задач вимагає зосередженості і повної віддачі сил, це процес творчості, який веде до збагачення знань і почуття задоволення від успіху. У процесі розв'язування фізичних задач одночасно з набуттям умінь і навичок утверджуються вольові і цілеспрямовані риси характеру. Ці мотиви з часом стають домінуючими в процесі навчання студента. За висловом угорського вченого і педагога Д. Пойї: “Велике наукове відкриття дає розв'язок великої проблеми, але і розв'язок довільної задачі містить маленьку частинку відкриття... Якщо ви розв'яжете її власними зусиллями, то ви зможете відчути напруження розуму, яке приводить до відкриття, і насолодитись радістю перемоги”.

Студенти-фізики повинні навчитись глибоко розуміти і аналізувати кожну фізичну задачу, набути навичок правильного підходу до їх розв'язування.

У цьому навчальному посібнику представлено типові задачі, які використовуються авторами при проведенні практичних занять із студентами фізичного факультету з курсу “Електрика і магнетизм”, його структура і зміст відповідають програмі дисципліни “Загальна фізика” для університетських спеціальностей. Він складається з дев'яти основних розділів, які,

у свою чергу, містять короткі теоретичні відомості, якісні задачі, приклади розв'язку задач і завдання для аудиторної та самостійної роботи; розділу, в якому представлено варіанти типових підсумкових контрольних робіт з використанням, як правило, тривірневих задач. У навчальний посібник відібрано тільки ті задачі із величезного їх арсеналу, які здавались найбільш цікавими з фізичної точки зору.

Практичне заняття з розв'язування фізичних задач є ефективним способом інтерактивної роботи студентів над предметом, способом розвитку їх творчого мислення. Винесення фізичних задач на домашнє завдання є засіб активізації самостійної роботи студентів. Для викладача задачі є одним із найбільш ефективних способів перевірки знань, визначення наскільки глибоко студент розуміє предмет, чи не є його знання тільки простим відтворенням накопиченої інформації. Контроль знань студентів за допомогою фізичних задач має перевагу над усним опитуванням у тому, що перевіряються не формальні знання, а вміння користуватись знаннями. Виконання самостійних завдань та проведення контрольних робіт із кожного розділу предмета сприяє неперервній роботі студента над навчальним матеріалом, взамін “штурмового” його повторення до семестрового екзамену.

При розв'язуванні задач доцільно користуватись такими порадами:

1. Перш за все необхідно добре вникнути в умову задачі, запам'ятати її зміст і вміти його усно переказати. Якщо дозволяє характер задачі, обов'язково виконати малюнок, схему, які пояснюють її суть.

2. Практично довільна задача містить опис одного чи кількох фізичних процесів або станів. Тому аналіз задачі слід починати з того, що є об'єктом вивчення і які величини визначають його параметри. Тільки після цього можна встановити, яким фізичним законам підчиняються досліджувані у задачі явища. Такий аналіз дозволить вибрати оптимальні шляхи розв'язку поставленої задачі. Це і буде фізичний етап розв'язку задачі.

3. Математичний етап розв'язку задачі зводиться до вираження у загальному вигляді (тобто в буквених позначеннях)

шуканої величини (або величин) з використанням основних формул, та законів, які стосуються суті явищ задачі. Необхідно перевірити правильність розв'язку (різними методами, в тому числі за розмірністю шуканої величини) і дослідити розв'язок у граничних випадках.

4. Переконавшись у правильності загального розв'язку, підставляють у нього числові значення величин в одній системі, переважно в системі СІ, і проводять обчислення, при необхідності використовуючи метод наближених обчислень.

5. Отримавши числову відповідь, необхідно оцінити її правдоподібність. Така оцінка може в окремих випадках виявити помилку отриманого результату.

Зауважимо, однак, що виробити єдину методику розв'язку всіх типів фізичних задач та надати методичні рекомендації до розв'язку довільної задачі практично неможливо і, напевно, недоцільно. Тому автори ставили за мету на прикладі достатньо великої кількості розв'язаних задач показати, як послідовно підходити до конкретної задачі і як вибирати методику її розв'язування.

Посібник буде корисним, у першу чергу, студентам фізичних спеціальностей університетів, а також може бути використаний при проведенні практичних занять із студентами деяких інженерних спеціальностей та навчальних закладів із поглибленим вивченням фізики.

**ВЗАЄМОДІЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ТІЛ. НАПРУЖЕНІСТЬ ТА ПОТЕНЦІАЛ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ**

**1.1. Короткі теоретичні відомості**

Між тілами, які входять у замкнену систему, заряди можуть перерозподілятися в результаті дотику тіл. Тому в будь-якій замкненій системі заряджених тіл алгебраїчна сума зарядів залишається сталою

$$\sum_i q_i = \text{const.} \quad (1.1 \text{ a})$$

Це твердження називається законом збереження зарядів. Інше формулювання цього закону: електричні заряди не виникають і не зникають, вони можуть лише передаватися від одного тіла до іншого, або переміщатися всередині даного тіла. Тому алгебраїчна сума зарядів, які виникають у будь-якому електричному процесі, на всіх тілах, що беруть участь у цьому процесі, завжди дорівнює нулю, тобто:

$$\sum q_i = 0. \quad (1.1 \text{ б})$$

Заряджені тіла, розміри яких набагато менші, ніж відстань між ними, умовно називають точковими зарядами. Два точкових заряди  $q_i$  та  $q_j$ , які перебувають на відстані  $r_{ij}$ , згідно із законом Кулона, взаємодіють із силою

$$\vec{F}_{ij} = k \frac{q_i q_j}{\epsilon r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad (1.2)$$

де  $\vec{F}_{ij}$  – сила, що діє між зарядами;  $\vec{r}_{ij}$  – радіус-вектор, що з'єднує ці заряди і напрямлений від  $q_i$  до  $q_j$ ;  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища, в якому перебувають заряди;  $k = 1$  в системі СГСЕ та  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$  в системі СІ, де  $\epsilon_0$  – електрична стала або діелектрична проникність вакууму і дорівнює  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  або  $(\text{Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2)$ .

Відповідно до **принципу суперпозиції**: а) сила взаємодії двох точкових зарядів не змінюється при наявності інших зарядів; б) сила, що діє на точковий заряд з боку двох і більше зарядів, дорівнює векторній сумі сил, що діють на нього з боку кожного із точкових зарядів при відсутності інших. Тоді сила

взаємодії точкового заряду  $q'$  з  $N$  дискретно розподіленими точковими зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_N$  дорівнює векторній сумі попарних взаємодій (принцип суперпозиції):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N k \frac{q' q_i}{\epsilon r_i^3} \vec{r}_i. \quad (1.2 \text{ a})$$

Сила взаємодії точкового заряду  $q'$  з неперервно розподіленим зарядом на тілі неточкової форми

$$\vec{F} = \int_{(i)} d\vec{F}_i = \int k \frac{q' dq_i}{\epsilon r_i^3} \vec{r}_i. \quad (1.2 \text{ б})$$

Сила взаємодії двох систем з дискретним розподілом зарядів

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} k \frac{q_i q_j}{\epsilon r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}. \quad (1.2 \text{ в})$$

Сила взаємодії двох заряджених систем з неперервним розподілом зарядів на тілах неточкової форми

$$\vec{F} = \iint_{i,j} d\vec{F}_{i,j} = \iint_{(i)(j)} k \frac{dq_i \cdot dq_j}{\epsilon r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}. \quad (1.2 \text{ г})$$

Основними характеристиками електростатичного поля, через яке відбувається електрична взаємодія, є напруженість і потенціал. Напруженість електростатичного поля – це векторна величина:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}}, \quad (1.3)$$

де  $\vec{F}$  – сила, з якою поле діє на позитивний пробний заряд  $q_{np}$ , що перебуває в даній точці поля, тобто  $\vec{E}$  дорівнює силі, що діє на одиничний точковий заряд.

Із закону Кулона випливає, що напруженість поля точкового заряду  $q$  на відстані  $r$  від нього

$$\vec{E} = k \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \text{ а за модулем } E = k \frac{q}{\epsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.3 \text{ а})$$

Напруженість поля, яке створене системою зарядів, дорівнює:

а) при дискретному розподілі зарядів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N k \frac{q_i}{\epsilon r_i^3} \vec{r}_i; \quad (1.3 \text{ б})$$

б) при неперервному розподілі зарядів

$$\vec{E} = \int_{(V)} d\vec{E} = \int_{(V)} k \frac{dq}{\epsilon r^3} \vec{r}. \quad (1.3 \text{ в})$$

Потенціал електростатичного поля в даній точці:

$$\varphi = \frac{W}{q_{np}}, \quad (1.4)$$

де  $W$  – потенціальна енергія пробного заряду  $q_{np}$ , тобто  $\varphi$  – це енергія одиничного пробного заряду в даній точці поля.

Потенціал поля точкового заряду  $q$  на відстані  $r$  від заряду, а також зарядженої кулі (для точок, які перебувають поза кулею):

$$\varphi = k \frac{q}{\epsilon r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (1.4 \text{ а})$$

Потенціал поля, створеного системою зарядів, дорівнює:

а) при дискретному розподілі зарядів

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \sum_{i=1}^N k \frac{q_i}{\epsilon r_i}; \quad (1.4 \text{ б})$$

б) при неперервному розподілі зарядів

$$\varphi = \int_{(V)} d\varphi = \int_{(V)} k \frac{dq}{\epsilon r}. \quad (1.4 \text{ в})$$

Різниця потенціалів між двома точками поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_{np}}, \quad (1.4 \text{ г})$$

де  $A_{12}$  – робота переміщення пробного заряду між цими точками, тобто  $\varphi_1 - \varphi_2$  – це робота, яка виконується при переміщенні одиничного точкового заряду із точки 1 у точку 2.

Робота, виконувана силами поля для переміщення заряду  $q$  з точки 1, потенціал якої  $\varphi_1$ , в точку 2 з потенціалом  $\varphi_2$ :

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -\Delta W = q \int E_l dl, \quad (1.4 \text{ д})$$

де  $E_l$  – проекція вектора  $\vec{E}$  на переміщення  $dl$ . У випадку однорідного поля  $A = qEl \cos \alpha$ , де  $\alpha$  – кут між напрямками векторів напруженості поля  $\vec{E}$  та переміщення  $\vec{l}$ .

Зв'язок між напруженістю і потенціалом поля виражається формулою:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (1.5)$$

де оператор градієнта

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

( $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – одиничні вектори вздовж осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ).

Зокрема, при переміщенні вздовж лінії  $l$

$$E(l) = -d\varphi/dl, \quad (1.5 \text{ а})$$

$$\int_1^2 d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_1^2 E_l dl. \quad (1.5 \text{ б})$$

Потік вектора напруженості поля  $\vec{E}$  через поверхню  $S$  визначається інтегралом

$$N = \int E_n dS, \quad (1.6 \text{ а})$$

де  $E_n$  – проекція вектора  $\vec{E}$  на напрям нормалі до площі  $dS$ .

Наслідком закону Кулона є теорема Остроградського-Гауса, згідно з якою потік вектора  $\vec{E}$  через замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, обмежених даною поверхнею, поділеній на  $\epsilon_0\epsilon$ , тобто:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum q_i, \quad \text{або} \quad \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int_V dq, \quad (1.6 \text{ б})$$

де  $dq = \rho dV + \sigma dS + \tau dl$  ( $\rho = \frac{dq}{dV}$  – об'ємна густина заряду,  $\sigma = \frac{dq}{dS}$

– поверхнева густина заряду,  $\tau = \frac{dq}{dl}$  – лінійна густина заряду).

У диференціальній формі теорема Остроградського-Гауса і рівняння Пуассона мають вигляд:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \quad (1.6 \text{ в}), \quad \text{і} \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (1.6 \text{ г}),$$

де оператори дивергенції та Лапласа

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{і} \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

В області простору, де  $\rho(x, y, z) = 0$ , рівняння Пуассона переходить у рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1.6 \text{ д})$$

Користуючись теоремою Остроградського-Гауса та принципом суперпозиції, можна розрахувати напруженість та потенціал, створювані розподіленими електричними зарядами.

Зокрема, напруженість електричного поля:

1. а) рівномірно зарядженої нескінченної площини дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (1.7 \text{ а})$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду на площині;

б) між двома різнойменними зарядженими паралельними нескінченими площинами, дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}; \quad (1.7 \text{ б})$$

в) у точці, яка перебуває на перпендикулярі, поставленому до центра диска радіуса  $R$ , на відстані  $r$  від нього:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right); \quad (1.7 \text{ в})$$

2. а) рівномірно об'ємно зарядженої кулі радіуса  $R$  ( $\rho$  – об'ємна густина заряду) на відстані  $r$  від центра:

$$\text{для } r < R \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_1} r, \quad (1.8 \text{ а})$$

$$\text{для } r = R \quad E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0\varepsilon_1}, \quad (1.8 \text{ б})$$

$$\text{для } r > R: \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2}; \quad (1.8 \text{ в})$$

б) сфери радіуса  $R$ , заряд  $q$  якої рівномірно розподілений на її поверхні, на відстані  $r$  від центра сфери:

$$\text{для } r < R \quad E = 0, \quad (1.8 \text{ г})$$

$$\text{для } r = R \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (1.8 \text{ д})$$

$$\text{для } r > R \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon r^2}; \quad (1.8 \text{ е})$$

3. а) створеного нескінченно довгим рівномірно зарядженим циліндром (ниткою):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, \quad (1.9 \text{ а})$$

де  $\tau$  – лінійна густина заряду на циліндрі (нитці),  $\sigma$  – поверхнева густина заряду на циліндрі,  $R$  – радіус циліндра, а  $r$  ( $r > R$ ) – відстань від осі циліндра (нитки) до розглядуваної точки;

б) якщо циліндр (нитка) має скінченну довжину, то напруженість поля в точці, яка розміщена на перпендикулярі, поставленому із середини нитки на відстані  $r$  від неї, дорівнює:

$$E = \frac{\tau \sin \alpha}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad (1.9 \text{ б})$$

де  $\alpha$  – кут між напрямком нормалі до нитки і радіусом-вектором, проведеним із розглядуваної точки до кінця нитки.

Потенціал поля:

1. а) рівномірно зарядженої нескінченної площини:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \left( \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \right) x, \quad (1.10 \text{ а})$$

де  $\varphi(0)$  – потенціал на зарядженій площині ( $x=0$ ),  $x$  – довільна точка на перпендикулярі до площини,  $\sigma$  – поверхнева густина позитивних зарядів на площині;

б) між двома різнойменно зарядженими паралельними нескінченими площинами:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \right) x; \quad (1.10 \text{ б})$$

2. а) сфери радіуса  $R$ , рівномірно зарядженої по поверхні:

$$\text{для } r < R \quad \varphi(r) = \varphi(R) = \text{const}, \quad (1.11 \text{ а})$$

$$\text{для } r > R \quad \varphi(r) = \varphi(R) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \quad (1.11 \text{ б})$$

де  $\varphi(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0\varepsilon} = \text{const}$ ,  $r$  – відстань від центра сфери до розглядуваної точки;

б) кулі радіуса  $R$ , рівномірно зарядженої з об'ємною густиною заряду  $\rho$ :

$$\text{за межами кулі } (r > R), \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_2\epsilon_0 r} \quad (1.11 \text{ в})$$

$$\text{всередині кулі } (r < R) \varphi(r) - \varphi(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_1\epsilon_0} (r^2 - R^2), \text{ звідки } \varphi(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon\epsilon_0},$$

$$\text{а} \quad \varphi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_1\epsilon_0} (3R^2 - r^2), \quad (1.11 \text{ г})$$

де  $\epsilon_1$  – діелектрична стала речовини кулі,  $\epsilon_2$  – діелектрична стала середовища поза кулею;

3. довгого циліндра радіуса  $R$ , рівномірно зарядженого з об'ємною густиною  $\rho$ :

за межами зарядженого циліндра ( $r > R$ ):

$$\varphi(r) = \varphi(R) - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}; \quad (1.12 \text{ а})$$

усередині циліндра ( $r < R$ )

$$\varphi(r) = \varphi(R) + \frac{\rho}{4\epsilon_1\epsilon_0} (R^2 - r^2). \quad (1.12 \text{ б})$$

## 1.2. Методичні вказівки і поради

1. Силу взаємодії між зарядженими тілами довільної форми, з певним розподілом на них зарядів, можна визначити двома способами: а) за законом Кулона і принципом суперпозиції (формули 1.2); б) використавши співвідношення  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Формула (1.2) справедлива тільки для точкових зарядів. У більшості випадків заряд на тілі не є точковим (розподілений на нитці, площині, сфері та ін.) і для визначення сили взаємодії неточкових зарядів використовується метод диференціювання та інтегрування (ДІ), тобто, принцип суперпозиції. Подвійне інтегрування (формула 1.2 г), як правило, буває громіздким, а тому простіше визначити розподіл напруженості поля, яке створене одним зарядженим тілом і діє на розподілені заряди  $dq$  другого тіла. Потім, використавши формулу (1.3) у

диференціальній формі,  $dF = Edq$ , виконують інтегрування  $F = \int dF$  і отримують результат. Інтегрування векторних величин має свої особливості і, тому, діють так. Вибравши систему координат, наприклад декартову  $x, y, z$ , потрібно визначити проекції сили  $\vec{F}$  на декартові осі  $dF_x, dF_y, dF_z$ . Потім інтегруванням визначають  $F_x, F_y, F_z$ , модуль сили  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  та косинуси направляючих кутів:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

2. Якщо в умові задачі не вказано середовище, в якому взаємодіють заряджені тіла, то вважають його вакуумом ( $\epsilon = 1$ ) або повітрям, діелектрична проникність якого близька до одиниці (1,00058). При обчисленнях у системі СІ доцільно користуватись значенням коефіцієнта пропорційності  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2/\text{Кл}^2$ , а

не окремо значенням  $\epsilon_0$ .

3. Якщо визначити силу взаємодії між зарядженими тілами неточкової форми за законом Кулона згідно з формулами (1.2) складно, тоді краще користуватись другим методом, за формулами (1.3). Задача при цьому зводиться до розрахунку напруженості поля одного зарядженого тіла в тому місці, де перебуває друге заряджене тіло. Задачі, в яких необхідно визначити напруженість поля, створеного системою зарядів, можна розв'язати трьома методами: 1) за допомогою формули напруженості поля точкового заряду (1.3 а) та принципу суперпозиції; 2) за допомогою теореми Остроградського-Гауса (1.6 б); 3) якщо відомий просторовий розподіл потенціалу в неоднорідному полі, формула зв'язку напруженості і потенціалу електричного поля (1.5) дозволяє знайти напруженість поля (визначити похідну легше, ніж взяти інтеграл).

Задача спрощується у випадку симетричних полів, коли заздалегідь відомий напрямок вектора  $\vec{E}$ , і при цьому достатньо взяти похідну від потенціалу по координаті в даному напрямку.

При розв'язуванні задач на визначення напруженості поля, якщо задано розподіл зарядів, що створюють дане поле, можуть



бути такі випадки: 1) поле створено одним або кількома точковими зарядами (формули 1.3 а, 1.3 б); 2) поле створено неточковими зарядами, які розподілені рівномірно на плоских, сферичних і циліндричних поверхнях (формули 1.3 в, 1.7 – 1.9); 3) якщо заряджене тіло неправильної геометричної форми, то для визначення напруженості поля необхідно використати метод Ді, розбивши тіло на диференціальні елементи із зарядом  $dq$ , та за формулою (1.3 в) знайти напруженість  $dE$  поля, створюваного в даній точці кожним елементом, а потім просумувати всі елементи напруженості  $dE$ . При цьому необхідно врахувати напрямок складових вектора  $d\vec{E}$ . У випадку, якщо всі вони напрямлені однакою, то геометрична сума замінюється на арифметичну. Тоді отримаємо, що  $E = \int dE$ , а інтегрування проводиться по всьому об'єму зарядженого тіла (по довжині, поверхні чи об'єму, залежно від розподілу заряду). Коли складові вектора  $d\vec{E}$  мають різні напрямки, необхідно вяснити, чи не характеризується поле зарядженого тіла симетрією. Це може значно спростити розв'язок задачі.

У загальному випадку, коли неможливо використати умову симетрії, діють, як і у випадку визначення сили, таким чином. Вибирають координатні осі  $x, y, z$ , потім інтегрують проєкції  $dE_x, dE_y, dE_z$  вектора  $d\vec{E}$  на дані осі, отримавши тим самим проєкції вектора  $\vec{E}$  на координатні осі, тобто  $E_x = \int dE_x, E_y = \int dE_y, E_z = \int dE_z$ , і модуль вектора  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ , а косинуси направляючих кутів

$$\cos\alpha = \frac{E_x}{E}, \quad \cos\beta = \frac{E_y}{E}, \quad \cos\gamma = \frac{E_z}{E}.$$

При розгляді дії поля на заряд суттєво відмітити, що формула  $\vec{F} = q'\vec{E}$  у загальному випадку справедлива для точкових заряджених тіл, а для тіл довільних розмірів і форми – тільки в однорідному полі, причому заряд на них повинен бути настільки малим за величиною, щоб не спотворювати поле, тобто не викликати перерозподіл зарядів на заряджених тілах, що створюють поле. Ця умова відпадає, якщо джерело поля – точковий заряд.

Інтегральною формою теореми Остроградського-Гауса (формула 1.6 б) вигідно користуватись тоді, коли з умови симетрії можна заздалегідь вказати напрям силових ліній і обрати поверхню правильної форми (куля, циліндр), яка охоплює заряди. При цьому необхідно завжди пам'ятати, що модуль напруженості поля в кожній точці такої поверхні повинна бути однаковою.

Другою важливою характеристикою електростатичного поля є потенціал (скалярна величина). Задачі на визначення потенціалу і різниці потенціалів при заданій конфігурації зарядів можна розв'язати двома способами: 1) використовуючи метод Ді та принцип суперпозиції (формули 1.4 б, в); 2) спочатку знайти напруженість поля  $E(x, y, z)$  і, скориставшись формулою (1.5 а, б), шукати різницю потенціалів  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \int E dl$ , або потенціал в якій-небудь точці. Перший метод визначення потенціалу  $\varphi$  можна використати і коли заряд розподілений неперервно в просторі, тобто для будь-якого зарядженого тіла (формула 1.4 в). Такий метод визначення потенціалу для точок поля, утвореного нескінченною довгою рівномірно зарядженою ниткою, або нескінченною рівномірно зарядженою пластинкою, приводить до значення потенціалу, який дорівнює нескінченності. У дійсності, неможливо створити нескінченні нитки (циліндри) або пластинки. А тому, використовуючи такий метод визначення потенціалу, отримаємо результат, який не має фізичного змісту. Отже, визначити потенціал або різницю потенціалів можна, використовуючи зв'язок  $\vec{E}$  і  $\varphi$  (формули 1.6). Крім розглянутих методів, потенціал електричного поля  $\varphi(x, y, z)$  можливо визначити, розв'язуючи рівняння Пуассона (1.6 г).

### 1.3. Якісні задачі та запитання

1.1. Чому, тримаючи в руці ебонітову паличку, її можна наелектризувати тертям, а латунний стрижень ні?

1.2. Пояснити результати досліду: заряджена паличка притягує кусочки сухого подрібненого корка, які після дотику до палички відштовхуються від неї.

1.3. Іноді досліди з електростатики не вдаються і лектор посилається на високу вологість повітря. Чи правильне таке пояснення невдалого експерименту?

1.4. Людина, стоячи на ізолюваній підставці, дотикається до зарядженого ізолюваного провідника. Чи розрядиться при цьому провідник повністю?

1.5. Величина елементарного електричного заряду або квант заряду дорівнює  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Чи існує відповідний йому квант маси?

1.6. Алгебраїчна сума зарядів всередині замкненої поверхні дорівнює нулю. Чи буде дорівнює нулю напруженість та потенціал поля у всіх точках всередині даної поверхні?

1.7. У яких випадках для розрахунку напруженості електростатичних полів можна застосувати теорему Остроградського-Гауса?

1.8. а) При переливанні бензину з однієї цистерни в іншу він може спалахнути. Чому? Як запобігти цьому?

б) Навіщо при промисловому виготовленні порошу його покривають графітом?

1.9. Чому центрами конденсації пари в повітрі є заряджені пилінки або іони?

1.10. Чи можуть перетинатися силові лінії та еквіпотенціальні поверхні? Пояснити.

### 1.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 1.11.** Два однакові позитивні точкові заряди розташовані на відстані 10 см один від одного. Знайти на прямій, перпендикулярній до відрізка, що сполучає ці заряди і є віссю їх симетрії: 1) напруженість поля як функцію відстані  $x$  від середини між зарядами, побудувати графік залежності  $E(x)$ ; 2) точки, в яких напруженість поля має максимум, мінімум; 3) потенціал поля як функцію відстані  $x$  від середини між зарядами; побудувати графік залежності  $\varphi(x)$ .

**Розв'язання.** 1). Напруженість поля  $\vec{E}$  у довільній точці на прямій  $Ox$  дорівнює векторній сумі напруженостей, створюваних у цій точці обома зарядами:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . При цьому очевидно, що скла-дові векторів  $\vec{E}_1$  та  $\vec{E}_2$  вздовж осі  $Ox$  (на рис.1.1.а не показано) взаємно компенсуються. У точці  $O$   $E_1 = E_2$

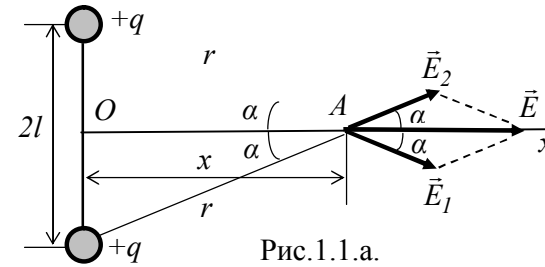


Рис.1.1.а.

за модулем і напрямлені в протилежні боки, тому  $E_0 = 0$  (рис. 1.1.б). При віддаленні точки  $A$  вздовж осі  $Ox$  у нескінченність  $E_1$  і  $E_2$ , згідно з формулою (1.3 а),

прямують до нуля, отже їх сума теж буде дорівнювати нулю. Модуль напруженості поля в довільній точці  $A$ , яка перебуває на відстані  $x$  від початку координат (точка  $A$ ), дорівнює:

$$E = 2E_1 \cos \alpha, \quad (а)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{E}_1$  ( $\vec{E}_2$ ) та віссю  $Ox$ . Очевидно, що  $r^2 = l^2 + x^2$  і  $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ . Тоді

$$E = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(l^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (б)$$

2). Щоб знайти екстремум функції  $E(x)$ , знайдемо похідну від виразу (б) по  $x$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dE_m}{dx} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(l^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2(l^2 + x^2)^{1/2}]}{(l^2 + x^2)^3} = 0.$$

Звідки знаходимо, що  $x_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{2}} = \pm 3,5$  см.

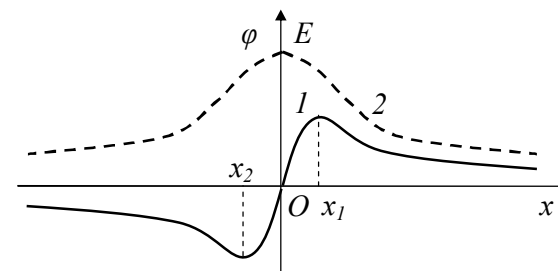


Рис. 1.1.б.

Два значення  $x = x_{1,2}$  відповідають двом точкам, розміщеним з обох боків від початку координат (точки  $O$ ), на відстані 3,5 см від неї. Додаткове дослідження (значення другої похідної для цих точок) указує на

максимум функції  $E(x)$  у даній точці. Графік залежності  $E(x)$  має вигляд кривої 1 (суцільна лінія) на рис.1.1.б.

3). Потенціал поля  $\varphi$  у точці  $A$  дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, що створені окремими зарядами у цій точці:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2}}. \quad (в)$$

Щоб знайти, чи має екстремум функція  $\varphi(x)$ , необхідно знайти похідну по  $x$  від виразу (в) і прирівняти її до нуля. Оскільки напруженість поля є градієнтом потенціалу, то можна прирівняти до нуля вираз (б). Звідки випливає, що функція  $\varphi(x)$  має максимум у точці  $x=0$ , а при значеннях  $x$  від  $0$  до  $\pm\infty$  монотонно спадає. Графік залежності  $\varphi(x)$  зображений на рис.1.1.б кривою 2 (пунктирна лінія).

**Задача 1.12.** Диск радіуса  $R$  заряджений рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma$ . Визначити: 1) напруженість поля в довільній точці, яка перебуває на перпендикулярі до диска, що проходить через його центр, на відстані  $x$  від нього; 2) побудувати графік залежності  $E(x)$ ; 3) визначити потенціал пол, як функцію  $x$ ; 4) побудувати графік залежності  $\varphi(x)$ .

**Розв'язання.** 1). Електричне поле зарядженого диска має осьову симетрію і також симетричне відносно площини диска. Однак для розв'язку задачі теорему Остроградського-Гауса застосувати неможливо, а тому використаємо більш загальний метод Ді, розбивши поверхню диска на диференціальні поверхні

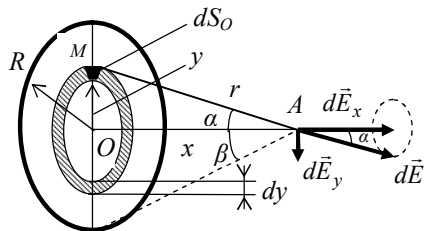


Рис. 1.2.а.

$dS_0$ , які являють собою частини кільця радіусом  $y$  та шириною  $dy$  (рис. 1.2.а).

Напруженість поля на відстані  $x$  від центра диска, створюваного зарядом на поверхні  $dS_0$  з внутрішнім радіусом  $y$  та шириною  $dy$ , виражається формулою:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (AM)^2} = \frac{\sigma dS_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (а)$$

Як видно із рисунка, складові напруженості поля вздовж осі  $Oy$  взаємно компенсуються, а тому  $E_y = 0$  (див. попередню задачу).

Проекція напруженості поля, створюваного зарядом, розташованим на поверхні  $dS_0$ , на вісь  $Ox$  дорівнює:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{\sigma dS_0 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (б)$$

а площа кільця  $dS = \sum dS_0 = 2\pi y dy$ . Напруженість поля, створювана зарядом всього кільця, дорівнює:

$$dE'_x = dE_x dS = dE_x 2\pi y dy = \frac{2\pi\sigma(\cos \alpha)y dy}{4\pi\epsilon_0 \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sigma y (\cos^3 \alpha) dy}{2\epsilon_0 x^2}. \quad (в)$$

Оскільки в даній формулі дві змінні ( $y$  та  $\alpha$ ), то перейдемо до однієї змінної, використавши тригонометричні формули:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, \text{ а } dy = \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \text{ Тоді } dE'_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha, \text{ а}$$

$$E = E_x = \int_0^\beta dE'_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\beta \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \beta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right). \quad (г)$$

Формулу (г) можна проаналізувати для граничних випадків:

а) для малих  $x$  ( $x \ll R$ )  $E \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{R}\right)$ . Якщо  $x \rightarrow 0$ , то

остання формула переходить у формулу напруженості поля нескінченної рівномірно зарядженої площини (формула 1.7 а);

б) якщо  $x \gg R$ , тоді вираз  $\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1}} \cong 1 - \frac{R^2}{2x^2}$ , а

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{2x^2}\right)\right] = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}, \text{ тобто переходить у}$$

формулу для напруженості поля точкового заряду (вираз 1.3 а).

2). Щоб побудувати якісну залежність  $E(x)$ , необхідно визначити, чи має вона екстремальні значення, взявши похідну і

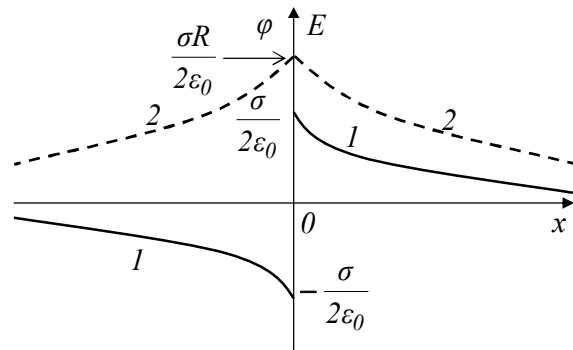


Рис.1.2. б.

прирівнявши її до нуля. Аналіз вказує, що максимумів та мінімумів немає, тобто залежність  $E(x)$  гладка і спадна. Якщо  $x \rightarrow 0$ , то  $E(0) \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , а якщо  $x \rightarrow \infty$ , то  $E(\infty) \rightarrow 0$ , оскільки  $\frac{R^2}{2x^2} \rightarrow 0$ , і

$E(x) \rightarrow 0$ . Графік залежності  $E(x)$  зображено на рис.1.2. б кривою 1 (суцільна лінія).

3). Для визначення потенціалу поля в довільній точці на осі  $Ox$  використаємо два методи: метод ДІ та зв'язок  $E$  і  $\varphi$  (формули 1.5). Спочатку використаємо метод ДІ, розбивши площу диска (рис.1.2.а) на елементарні кільця радіусом  $y$  та шириною  $dy$ , а отже, площею  $dS=2\pi y dy$  із зарядом  $\sigma 2\pi y dy$ . Потенціал поля кільця дорівнює:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi y dy}{\sqrt{y^2 + x^2}}. \quad (д)$$

Потенціал поля зарядженого диска в точці  $A$  дорівнює:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right). \quad (е)$$

Другий метод визначення  $\varphi(x)$  ґрунтується на використанні зв'язку між  $\vec{E}$  і  $\varphi$ , тобто  $\vec{E} = -grad\varphi$ , і формули (г):

$$d\varphi = -E dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) dx.$$

Звідки  $\varphi(x) = -\int E dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right)$ , що збігається з формулою (е).

4). Аналогічно до пункту 2 цієї задачі, щоб побудувати якісну залежність  $\varphi(x)$ , необхідно вивчити, чи має вона екстремальні значення, взявши похідну  $d\varphi/dx$  і прирівнявши її до нуля. Однак така похідна дорівнює  $-E(x)$ . Аналіз вказує, що функція  $E(x)$  максимумів та мінімумів не має, тобто ця залежність гладка і спадна. Щоб це було очевидно, перетворимо вираз

$$\left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right) = x \left( \sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1} - 1 \right), \text{ і тоді } \varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \left( \sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1} - 1 \right).$$

Якщо  $x \rightarrow 0$ , то  $\varphi(0) \rightarrow \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ . Якщо  $x \rightarrow \infty$ , то  $\varphi(x) \rightarrow 0$ .

Графік залежності  $\varphi(x)$  зображений на рис.1.2.б кривою 2 (пунктирна лінія).

**Задача 1.13.** Довгий прямий циліндричний стрижень радіуса  $R=2$  см заряджений з об'ємною густиною заряду  $\rho=2$  мкКл/м<sup>3</sup>. Визначити: 1) розподіл напруженості поля всередині та поза циліндром; 2) розподіл потенціалу всередині та поза циліндром; 3) значення напруженості та потенціалу поля в точках на відстані 1 см та 3 см від осі циліндра; 4) побудувати графіки залежності  $E(r)$  та  $\varphi(r)$ ; 5) розподіл напруженості та потенціалу всередині та поза циліндром, якщо циліндр обмеженої довжини.

**Розв'язання.** У силу симетрії задачі неважко здогадатись, що для безмежно довгого циліндричного стрижня вектор напруженості електричного поля може бути напрямлений тільки вздовж радіуса циліндра, причому його модуль має бути однаковим для всіх точок, які розташовані на однакових відстанях від осі циліндра.

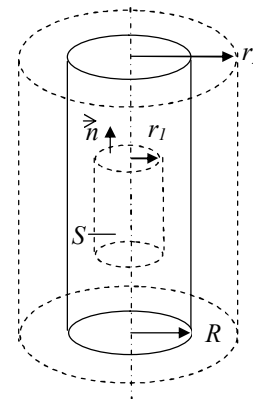


Рис. 1.3.а.

1). Для визначення розподілу напруженості поля всередині циліндра ( $r \leq R$ ) використаємо теорему Остроградського-Гауса (формула 1.6 б). Для цього

опишемо навколо осі циліндричну поверхню площею  $S=2\pi rh$ , вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  до якої всюди перпендикулярний. Враховуючи, що потік напруженості через основи циліндра дорівнює нулю (рис.1.3.а), оскільки вектори напруженості  $\vec{E}$  і нормалі  $\vec{n}$  до основи взаємно перпендикулярні, з використанням формули (1.6.б) одержимо:

$$E_1 \cdot S = \frac{\rho V_1}{\epsilon_0}, \quad (а)$$

де враховано, що  $\epsilon$  для циліндра дорівнює 1. Або

$$E_1(r) \cdot 2\pi rh = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}, \text{ звідки}$$

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}. \quad (б)$$

Якщо ж  $r > R$ , то  $\sum q_i = \rho \pi R^2 h$  і  $E_2(r) \cdot 2\pi rh = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$ .

Звідки

$$E_2(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}. \quad (в.1)$$

Якщо циліндр заряджений тільки поверхнево, то при  $r \leq R$   $E_1=0$ , а при  $r > R$ :  $\sum q_i = \sigma 2\pi R h = \tau h$ , де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду, а  $\tau$  – лінійна густина заряду. Звідки

$$E_2(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}. \quad (в.2)$$

2). Для визначення розподілу потенціалу можна використати зв'язок між напруженістю та потенціалом (формули 1.5), звідки  $\varphi(r) = -\int E(r) dr + const = -\int \frac{\rho r dr}{2\epsilon_0} + const$ . Сталу інтегрування зручно вибрати за потенціал поверхні циліндра ( $r=R$ ). Тоді

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2). \quad (г)$$

За межами циліндра ( $r > R$ )  $d\varphi = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r}$ , а

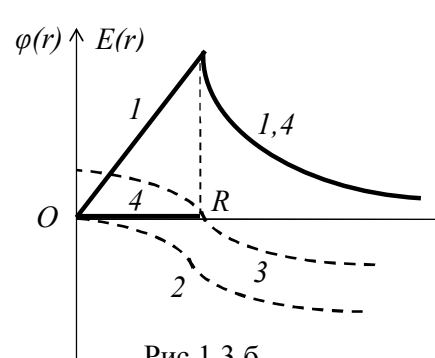


Рис.1.3.б.

$$\varphi(r) = \varphi(R) - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \quad (д)$$

3). Значення напруженості поля, для відстані від осі циліндра  $r_1=1$  см, становить  $E_1=1,1 \cdot 10^3$  Н/Кл (В/м), а для відстані  $r_2=3$  см (за межами циліндра)  $1,5 \cdot 10^3$  Н/Кл (В/м). Різниця потенціалів між поверхнями з радіусами  $r_1$  та  $r_2$

дорівнює:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r_1^2 + 2R^2 \ln \frac{r_2}{R}) = 35 \text{ (В)}.$$

4). Щоб побудувати графіки залежностей  $E(r)$  та  $\varphi(r)$ , необхідно використати формули (б, в) та (г, д). Залежність  $E(r)$  (крива 1), та  $\varphi(r)$  (крива 2) зображено на рис.1.3.б. Початок потенціалу взято за нуль на осі циліндра, а крива 3 – нуль потенціалу взято на поверхні циліндра. Коли циліндр заряджений по поверхні, то залежність  $E(r)$  зображена лінією 4.

5). Якщо циліндричний стрижень обмеженої довжини, то теорему Остроградського-Гауса неможливо застосувати і залишається використати тільки принцип суперпозиції.

Розбивши довжину стрижня на елементарні довжини  $dy$ , на яких буде заряд

$$dq = \tau dy = \sigma \cdot 2\pi R dy,$$

можна визначити напруженість поля в довільній точці за межами циліндра. У точці А (рис. 1.3.в) модуль вектора елементарної напруженості, дорівнює:

$$dE = k \frac{\tau dy}{r^2} \quad (е.1)$$

і має складові вздовж осі  $Ox$  та  $Oy$ :

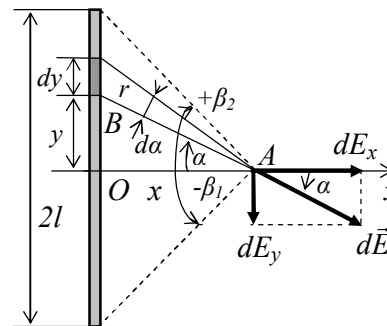


Рис.1.3.в.

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad \text{а} \quad dE_y = dE \sin \alpha. \quad (\text{е.2})$$

Із трикутника  $OAB$ , використавши очевидні формули:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$dy = \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}$$

та підставивши їх у вирази (е.1), (е.2), одержимо:

$$dE = k \frac{\tau da}{r \cos \alpha} = k \frac{\tau da}{x}, \quad (\text{е})$$

$$\text{та} \quad dE_x = k \frac{\tau \cos \alpha da}{x} \quad \text{і} \quad dE_y = k \frac{\tau \sin \alpha da}{x}. \quad (\text{ж})$$

Вирази для  $dE_x$  та  $dE_y$  можна використати для будь-якого положення точки  $A$ .

*1-й випадок.* Точка  $A$  розміщена не на однакових відстанях від кінців стрижня довжиною  $2l$ . Інтегруючи вирази для  $dE_x$  та  $dE_y$  (формули (ж)) в межах від  $-\beta_1$  до  $+\beta_2$ , одержимо:

$$E_x = \int_{-\beta_1}^{+\beta_2} k \frac{\tau \cos \alpha da}{x} = k \frac{\tau}{x} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2), \quad (\text{з.1})$$

$$E_y = \int_{-\beta_1}^{+\beta_2} k \frac{\tau \sin \alpha da}{x} = k \frac{\tau}{x} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \quad (\text{з.2})$$

Модуль напруженості поля в точці  $A$  дорівнює:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = k \frac{\tau}{x} \sqrt{(\sin \beta_1 + \sin \beta_2)^2 + (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)^2} \quad (\text{з.3})$$

*2-й випадок.* Точка  $A$  рівновіддалена від кінців стрижня, тобто  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Тоді:

$$E_y = 0, \quad \text{а} \quad E_x = k \frac{2\tau}{x} \sin \beta, \quad (\text{й})$$

тобто напруженість поля в точці  $A$  напрямлена вздовж осі  $Ox$ , яка перпендикулярна стрижню.

Аналіз формули (й) показує, що для випадків:

а)  $x \gg 2l$ , заряд стрижня можна вважати точковим і тоді

$$E_x = E = k \frac{2\tau}{x} \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} \cong k \frac{2l}{x^2} = k \frac{q}{x^2}, \quad \text{як формула 1.3 а.}$$

б)  $x \ll 2l$ . Точка  $A$  розташована поблизу тонкого нескінченно

довгого стрижня, і тоді  $E = k \frac{2\tau}{x} \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} \cong k \frac{2\tau}{x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}$ , як формула 1.9 а.

*3-й випадок.* Точка  $A$  лежить навпроти одного із кінців стрижня, наприклад  $\beta_1 = 0^\circ$ , а  $\beta_2 = \beta$ . Тоді:

$$E_x = k \frac{\tau}{x} \sin \beta = k \frac{\tau}{x} \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} = k \frac{\tau l}{x \sqrt{l^2 + x^2}}, \quad (\text{к.1})$$

$$\text{а} \quad E_y = k \frac{\tau}{x} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right). \quad (\text{к.2})$$

Модуль напруженості поля дорівнює:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = k \frac{\tau}{x} \sqrt{\sin^2 \beta + (1 - \cos \beta)^2}. \quad (\text{к.3})$$

*4-й випадок.* Точка  $A$  лежить навпроти одного із кінців дуже довгого циліндричного стрижня, тобто  $\beta_1 = 0^\circ$  а  $\beta_2 = 90^\circ$ . Тоді:

$$E_x = k \frac{\tau}{x} = E_y, \quad (\text{л.1})$$

$$\text{а модуль вектора} \quad E = \sqrt{2} k \frac{\tau}{x}. \quad (\text{л.2})$$

**Задача 1.14.** Тонка нескінченно довга пряма циліндрична нитка та відрізок аналогічної нитки, перпендикулярний їй, довжиною  $l = 30$  см, рівномірно заряджені електрикою з лінійною густиною  $\tau = 1$  мкКл/м, розміщені в одній площині. Ближній кінець відрізка перебуває на відстані  $r_0 = 30$  см від довгої нитки. Визначити силу взаємодії між ними.

**Р о з в' я з а н н я.** Для розв'язку цієї задачі використаємо формулу (1.9 а) для напруженості електричного поля, створеного безмежно довгою зарядженою ниткою, та метод ДІ, за допомогою якого можна визначити силу взаємодії між даними

неточковими зарядженими тілами. Для цього розіб'ємо довжину нитки скінченної довжини на відрізки  $dx$ , заряди на яких  $dq = \tau dx$

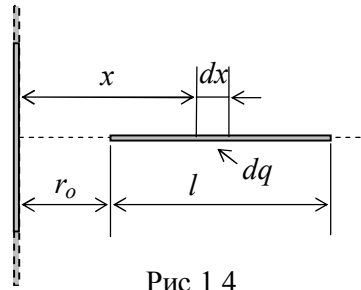


Рис.1.4.

і які перебувають на відстані  $x$  від довгої нитки (рис. 1.4). Напруженість поля безмежно довгої нитки на відстані  $x$ , де перебуває заряд  $dq$ , дорівнює  $E(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x}$ , а сила з якою дане поле діє на заряд  $dq$ , який можна вважати точковим, дорівнює:

$$dF = E(x)dq = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x} \tau dx = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx}{x}. \quad (a)$$

Сумарну силу взаємодії двох ниток знайдемо інтегруванням виразу (а) у межах від  $r_0$  до  $r_0+l$ :

$$F = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{dx}{x} = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0+l}{r_0}. \quad (б)$$

Підстановка числових значень дає  $F = 6,238 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cong 6,2 \text{ мН}$ .

За наведеною схемою можна сформулювати та розв'язати задачу з будь-якою формою заряджених тіл, як великих, так і скінченних розмірів.

**Задача 1.15.** Півколо радіуса  $R = 2 \text{ м}$  рівномірно заряджене зарядом  $q = 1 \text{ мкКл}$ . Визначити силу, з якою діє поле такого заряду на точковий заряд  $q_1 = 1 \text{ нКл}$ , розташований в геометричному центрі півкола, та його потенціальну енергію.

**Розв'язання.** Заряд на півкільці не точковий, оскільки він перебуває на тілі, розміри якого  $\pi R$  порівнянні з відстанню  $R$ . Тому неправильним було б використання формул взаємодії точкових зарядів. Використання теореми Остроградського-Гауса теж є неможливим. Отже, раціонально використати метод диференціювання та інтегрування (ДІ). Оскільки сила і потенціальна енергія точкового заряду  $q_1$  відповідно дорівнює:

$$\vec{F} = q_1 \vec{E} \quad \text{та} \quad W = q_1 \varphi, \quad (a)$$

визначимо напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\varphi$  поля створеного зарядом кільця в його геометричному центрі. Для цього розділимо півколо на малі частки дуги  $dl$ , щоб заряди на них

$dq = \frac{q}{\pi R} dl$  можна було вважати точковими (рис. 1.5).

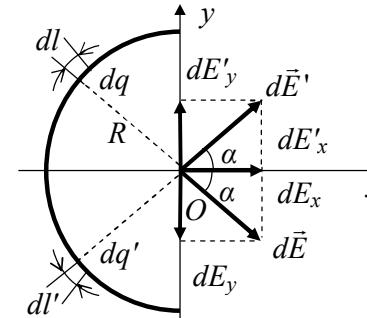


Рис. 1.5.

Заряд  $dq$  у верхній півплощині створює напруженість  $dE$ , яка в точці  $O$  утворює кут  $\alpha$  з віссю  $Ox$ . Очевидно, що для будь-якого точкового заряду у верхній півплощині знайдеться симетрично розміщений заряд  $dq'$  в нижній півплощині. Складові векторів  $d\vec{E}$  на вісь  $Oy$  взаємно компенсуються, і залишаються тільки проєкції векторів напруженості поля на вісь  $Ox$ :

Складові векторів  $d\vec{E}$  на вісь  $Oy$  взаємно компенсуються, і залишаються тільки проєкції векторів напруженості поля на вісь  $Ox$ :

$$dE_x = dE \cos \alpha = k \frac{dq}{R^2} \cos \alpha = k \frac{q \cos \alpha}{\pi R^3} dl. \quad (б)$$

Таким чином, отримано диференціальний вираз шуканої величини – перший етап методу ДІ. Виконаємо другий етап (інтегрування, сумування). При цьому необхідно обрати змінну величину інтегрування. Положення точкового заряду  $dq$  на півплощині визначається кутом  $\alpha$ , який і буде змінною величиною. Із рис. 1.5 знаходимо, що  $dl = R d\alpha$ , тоді

$$dE_x = k \frac{q \cos \alpha R}{\pi R^3} d\alpha = k \frac{q \cos \alpha}{\pi R^2} d\alpha. \quad (в)$$

Інтегруючи цей вираз по куту  $\alpha$ , отримаємо:

$$E_x = E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} k \frac{q \cos \alpha}{\pi R^2} d\alpha = k \frac{2q}{\pi R^2} = \frac{q}{2\epsilon_0 \pi^2 R^2}. \quad (г)$$

Обчислення показують, що  $E = 1,4 \text{ В/м}$ .

Якщо замінити заряд  $q$  через лінійну густину заряду на півкільці  $\tau$  ( $q = \tau\pi R$ ), то отримаємо, що формула (г) матиме вигляд  $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}$ , тобто збігається з формулою напруженості поля рівномірно зарядженої тонкої прямої нескінченно довгої нитки.

Використавши метод Ді, можна визначити і потенціал у центрі півкола:  $d\varphi = k \frac{dq}{R}$ , а

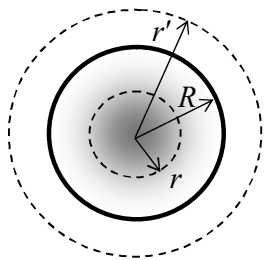
$$\varphi = \frac{k}{R} \int dq = k \frac{q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (д)$$

Обчислення показують, що  $\varphi_0 = 4,5$  В.

Таким чином, користуючись одержаними значеннями напруженості і потенціалу в центрі кільця та виразами (а), знаходимо:  $F = 1,4$  нН;  $W = 4,5$  нДж.

Цю задачу можна ускладнити для розрахунку параметрів електричного поля у довільній точці на осі півкільця, у площині півкільця або в точках на осі, яка перпендикулярна площині півкільця.

**Задача 1.16.** Куля радіуса  $R$  має позитивний заряд, об'ємна густина якого залежить тільки від відстані  $r$  до його центра за законом:



$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , де  $\rho_0$  – стала величина, а

$\epsilon = 1$  всюди. Знайти: 1) модуль напруженості поля всередині і поза кулю як функцію  $r$ ; 2) максимальне значення модуля напруженості поля  $E_{MAX}$  і відповідне йому значення  $r_{MAX}$ ; 3) потенціал поля всередині і поза кулю як функцію  $r$ .

Рис.1.6.а.

**Р о з в' я з а н н я.** 1) Для розв'язку задачі скористаємось теоремою Остроград-ського-Гауса. Очевидно, що розподілений у кулі заряд створить напруженість поля, модуль якої, як і потенціал поля, залежить тільки від відстані до центру кулі. Напрямок вектора напруженості електричного поля завжди буде

збігаються із радіусом і, отже, буде перпендикулярним до поверхні довільних концентричних сфер, центри яких збігаються із центром кулі. Таким чином, за поверхню інтегрування доцільно вибрати сферу (рис.1.6.а), оскільки вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний її поверхні і має однаковий модуль  $E$  у всіх її точках. При цьому відмітимо, що для точок, які лежать усередині

кулі  $r < R$ :  $\int_S E dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ . Після інтегрування одержимо:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^r \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3}{4R} r\right). \quad (а)$$

$$\text{Звідки} \quad E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \left(1 - \frac{3}{4R} r\right). \quad (б)$$

За межами кулі:  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$ , де  $q$  – загальний заряд кулі,

який можна визначити таким чином:

$$q = \int \rho dV = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}. \quad (в)$$

$$\text{Тоді} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}, \quad \text{а} \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}. \quad (г)$$

2) Максимальне значення модуля напруженості поля можна визначити, використавши вирази (б) і (г). Взв'язавши похідну  $dE/dr$  із виразу (б) і прирівнявши її до нуля, отримаємо:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left(r - \frac{3}{4R} r^2\right) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 R} (2R - 3r),$$

звідки

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad 2R - 3r_{MAX} = 0, \quad \text{а} \quad r_{MAX} = \frac{2}{3} R.$$

Таким чином, при значенні  $r = r_{MAX}$  напруженість поля всередині кулі матиме екстремальне (після перевірки знака другої похідної – максимальне) значення і становитиме  $E_{MAX.B} = \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} R$ .



Аналіз формули (г) вказує, що за межами кулі напруженість поля спадає за законом  $1/r^2$ , як у випадку точкового заряду. За межами кулі максимальне значення  $E$  буде на поверхні кулі, коли  $r = R$ , і дорівнюватиме  $E_{MAX.3} = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0} R$ , а при  $r \rightarrow \infty$  напруженість поля спадає до нуля. Якісна залежність  $E(r)$  подана на рис 1.6.б кривою 1 (суцільна лінія).

3) Потенціал поля всередині кулі та за її межами найпростіше можна визначити, використавши зв'язок  $\vec{E}$  та  $\varphi$  ( $\vec{E} = -grad \varphi$ ), оскільки  $E(r)$  в обох випадках вже відоме. Всередині кулі:  $\varphi = -\int E(r)dr + const$ , оскільки  $E$  залежить тільки від  $r$ . Звідси

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= const + \int_0^r d\varphi = \varphi_0 - \int_0^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{3}{4R} r^2 \right) dr = \\ &= \varphi_0 - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 \left( 1 - \frac{r}{2R} \right), \end{aligned} \quad (д)$$

де  $\varphi_0$  – потенціал поля у центрі кулі.

За межами кулі:  $\int_{(R)}^{(r)} d\varphi = -\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0} \int_{R^2}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ , звідки:

$$\varphi(r) = \varphi(R) + \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \varphi_0 - \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} \left( 2 - \frac{R}{r} \right), \quad (е)$$

де  $\varphi(R)$  – потенціал на поверхні кулі. Якісна залежність  $\varphi(r)$  подана на рис. 1.6. б кривою 2 (пунктирна лінія).

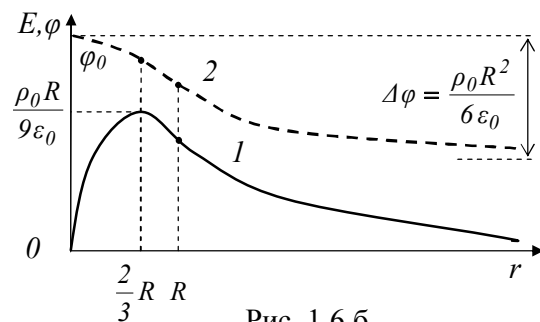


Рис. 1.6.б.

Відмітимо, що скалярний потенціал електричного поля  $\varphi$  завжди визначається із точністю до деякої адитивної константи, тобто необхідно вибрати точку із потенціалом  $\varphi_0$ , відносно якої визна-

чається ця величина. У розглядуваній задачі за таку точку вибрано центр кулі і тому потенціал поля при безмежному віддаленні від центра кулі становить  $\varphi_\infty = \varphi_0 - \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0}$ . Якщо ж вважати, що при безмежному віддаленні від центра кулі потенціал електричного поля, створюваного його зарядом, прямує до нуля ( $\varphi_\infty = 0$ ), то потенціал  $\varphi_0$  у центрі кулі буде дорівнювати  $\frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0}$ .

**Задача 1.17.** Визначити різницю потенціалів між двома однаковими металічними кульками радіуса  $r_0 = 0,5$  см, які перебувають на відстані  $r = 1,5$  м одна від одної, якщо заряд однієї кульки  $q_1 = +1,5$  нКл, а другої  $q_2 = -1,5$  нКл.

Розв'язання. При  $r \gg r_0$  можна прийняти рівномірний розподіл заряду на поверхні кульок і розв'язок задачі спрощується. На основі формули (1.8 е) і принципу суперпозиції

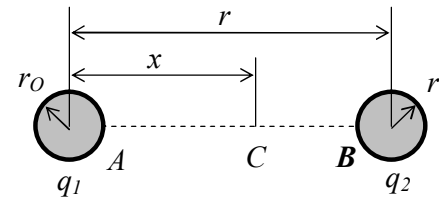


Рис.1.7.

можна обчислити напруженість поля в довільній точці між кульками (рис.1.7), а за формулою (1.5) знайти шукану різницю потенціалів між кульками. Вектори напруженості полів обох кульок у всіх точках прямої

$AB$  напрямлені від  $A$  до  $B$ , а результуюча напруженість у точці  $C$ , яка перебуває на відстані  $x$  від центра лівої кульки, дорівнює:

$$E = k \left[ \frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(r-x)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(r-x)^2} \right], \quad (а)$$

де  $q = |q_1| = |-q_2|$  – абсолютне значення кожного заряду. На основі формули 1.5 б, прийнявши  $E_1 = E$ , визначимо шукану різницю потенціалів:

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_{r_0}^{r-r_0} E dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r-r_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(r-x)^2} \right] dx =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(r-2r_0)}{r_0(r-r_0)}. \quad (6)$$

Враховуючи, що  $r \gg r_0$ , отримаємо наближену формулу, але більш просту, тобто  $U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r_0}$ . Обчислення показують, що  $U = 5,4 \cdot 10^3 \text{ В} = 5,4 \text{ кВ}$ .

**Примітка.** Цю систему двох різнойменно заряджених кульок можна розглядати як заряджений конденсатор і, знаючи заряд  $q$  на кульках та різницю потенціалів між ними, можна визначити електроємність такого конденсатора:  $C = \frac{q}{U} \cong \frac{q4\pi\epsilon_0 r_0}{2q} = 2\pi\epsilon_0 r_0$ , а точніше  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 r_0 (r - r_0)}{(r - 2r_0)}$ .

Розглянутий метод визначення різниці потенціалів між двома різнойменно зарядженими кульками можна застосувати і для заряджених тіл будь-якої форми, наприклад двох циліндрів, кульки і циліндра, кульки і площини, циліндра і площини і т.д.

### 1.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

1.18. Три однойменних заряди 5 нКл кожний розташовані у вершинах рівностороннього трикутника із стороною 1 см. Визначити: а) напруженість та потенціал поля в центрі трикутника, б) силу, яка діє з боку двох зарядів на третій, в) заряд протилежного знака, який потрібно розмістити в центрі трикутника, щоб система перебувала в рівновазі, г) роботу, яку потрібно виконати, щоб один із зарядів перемістити з вершини трикутника в його центр, д) роботу, яку потрібно виконати, щоб заряд пункту в) перемістити із центра в нескінченність.

1.19. Чотири позитивних точкових заряди 7 нКл кожний розміщені у вершинах квадрата із стороною 2 см. Визначити: а) напруженість та потенціал в центрі квадрата, б) силу, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий, в) негативний заряд, який потрібно розмістити у центрі квадрата, щоб система перебувала в рівновазі, г) роботу, яку потрібно виконати, щоб негативний

заряд із центра перенести у нескінченність, д) роботу, яку потрібно виконати, щоб один заряд із вершини перемістити в центр.

1.20. У вершинах шестикутника із стороною 10 см розміщені позитивні точкові заряди  $q, 2q, 3q, 4q, 5q, 6q$  ( $q=0,1 \text{ мкКл}$ ), відповідно. Визначити: а) напруженість та потенціал поля в центрі шестикутника; б) роботу, яку необхідно виконати, щоб заряд  $6q$  перемістити із вершини в центр шестикутника.

1.21. Електрон рухається вздовж колової орбіти радіусом 53 пм навколо ядра атома водню. Визначити: а) відношення кулонівської сили взаємодії електрона і протона до їх гравітаційної взаємодії, б) напруженість і потенціал, створений ядром атома, на орбіті електрона, в) енергію взаємодії електрона і протона.

1.22. Довга пряма і тонка нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною 5 мкКл/м. На відстані 10 см від середини нитки розміщений заряджений тонкий стрижень довжиною 20 см. Визначити силу взаємодії довгої нитки і стрижня, якщо стрижень: а) паралельний нитці, б) перпендикулярний до нитки і відстань від ближнього кінця стрижня до середини нитки становить 10 см.

1.23. Два довгих прямих і тонких провідники заряджені різнойменними зарядами з лінійною густиною  $\tau = 5 \text{ мкКл/м}$ , розміщені паралельно на відстані  $r_0 = 5 \text{ см}$  один від одного. Визначити: а) напруженість та потенціал поля в точці, що розташована у площині симетрії на відстані  $x$  від площини, в якій перебувають провідники, б) напруженість та потенціал поля в точках, де  $x = 1 \text{ м}, 5 \text{ см}, 2 \text{ м}$ .

1.24. Тонкий диск радіуса 10 см заряджений зарядом 10 мкКл. На осі диска, яка перпендикулярна до його площини, розміщений тонкий заряджений стрижень довжиною 20 см, заряд якого 5 мкКл. З якою силою вони взаємодіють, якщо ближній кінець стрижня розташований на відстані 5 см від диска?

1.25. Точковий заряд 1 мкКл перебуває на відстані 1 см від великої рівномірно зарядженої пластинки навпроти її середини. Яка поверхнева густина заряду, якщо їх сила взаємодії дорівнює 0,060 Н? Яку роботу потрібно виконати, щоб перемістити заряд на відстань, вдвічі більшу від попередньої?

1.26. Заряд 100 нКл рівномірно розподілений вздовж тонкого кільця радіуса 3 см. а) Визначити силу, з якою поле заряду кільця діє на точковий заряд 1 нКл, що перебуває на відстані 8 см від центра кільця вздовж його осі. б) Яку роботу потрібно виконати, щоб перемістити заряд на 16 см, 32 см від центра кільця? в) Визначити силу, з якою поле заряду кільця діє на заряджену нитку довжиною 10 см, розміщену на осі кільця, заряд якої 5 нКл, а ближній кінець перебуває на відстані 8 см від центра кільця. г) Яка сила взаємодії заряджених кільця і нитки, якщо нитка дуже довга і кінець її перебуває в центрі кільця, а лінійна густина заряду нитки дорівнює 10 нКл/м?

1.27. Два коаксіальні кільця із тонкої дротини кожне радіуса  $R$ , розташовані на відстані  $l$  одне від одного і мають заряди  $+q_1$  та  $-q_2$ . Знайти напруженість та потенціал поля кілець на осі системи, як функцію абсциси  $x$  від середини кілець. Побудувати якісні графіки залежностей  $E(x)$  та  $\varphi(x)$ .

1.28. Дві безмежні площини, які розташовані одна від одної на відстані  $l$ , заряджені з поверхневою густиною  $+\sigma$  та  $-\sigma$ . Площини мають коаксіальні отвори радіуса  $R$ , причому  $l \ll R$ . Взявши координатну вісь  $x$  з початком відліку посередині між площинами, знайти потенціал і проекцію напруженості електричного поля  $E_x$  на вісь системи як функцію абсциси  $x$ . Зобразити якісні графіки  $\varphi(x)$  та  $E_x(x)$ . Який характер руху матиме електрон при русі вздовж координатної осі  $Ox$ ?

1.29. Куля із діелектрика ( $\epsilon \approx 1$ ) просвердлена вздовж діаметра. Із даної порожнини викачане повітря. В порожнину поміщено електрон. Який позитивний заряд необхідно надати кулі, щоб при його рівномірному об'ємному розподілі  $\rho$  електрон здійснював в порожнині гармонічні коливання з частотою  $\nu_0$ ? Прийняти, що площа поперечного перерізу порожнини  $S \ll \pi R^2$ , де  $R$  – радіус кулі. Який розподіл напруженості та потенціалу всередині кулі як функція  $r$  – відстані від центра кулі?

1.30. Металева куля радіуса 2 см оточена сферичною металічною оболонкою радіуса 4 см, концентричною з кулею. На кулі розміщений заряд  $+0,2$  нКл, а на оболонці  $-0,2$  нКл. Визначити: а) напруженість поля на відстанях 3 та 5 см від центра кулі; б) потенціал поля на відстані 3 та 5 см від центра кулі.

1.31. Різниця потенціалів між довгими коаксіальними циліндрами ( $R_1=3$  см і  $R_2=10$  см), зарядженими різнойменними зарядами, дорівнює 450 В. Визначити: а) заряд, що припадає на одиницю довжини циліндрів; б) поверхневу густина зарядів на кожному циліндрі; в) напруженість поля поблизу внутрішнього циліндра, на середині відстані між циліндрами та поблизу поверхні зовнішнього циліндра.

1.32. Дві однакові провідні кульки підвішені на нитках однакової довжини  $l = 1$  м в одній точці і дотикаються одна до одної. Після надання кулькам заряду 0,4 мкКл нитки розійшлися на кут  $\alpha_1=60^\circ$ . Визначити силу тяжіння, яка діє на кожен кульку. Яка густина матеріалу кульок, якщо при зануренні кульок у трансформаторне масло кут розходження ниток став  $\alpha_2=54^\circ$ .

1.33. Три однакові маленькі кульки масою 0,1 г підвішені в одній точці на шовкових нитках довжиною 20 см. Які однакові заряди треба надати кулькам, щоб кожна нитка утворювала з вертикаллю кут  $30^\circ$ ?

1.34. У точці, рівновіддаленій від усіх точок кола на відстані 3 см від його площини, розміщений заряд 7 нКл. Визначити потік напруженості електричного поля через площу кола радіуса 5 см. Яка напруженість і потенціал поля у центрі кола?

1.35. Точковий заряд 50 нКл займає положення на осі прямого колового циліндра на відстані 5 см від його основи. Знайти потік напруженості електричного поля через його бічну поверхню та одну основу, якщо висота циліндра 10 см, а радіус основи 5 см. Яка напруженість і потенціал поля в центрі основи?

1.36. У центрі колового конуса на його осі на відстані 5 см від вершини розміщений точковий заряд 100 нКл. Висота конуса 10 см, радіус основи 5 см. Визначити, наскільки потік напруженості електричного поля через бічну поверхню конуса менший від загального потоку, створеного точковим зарядом. Яка напруженість та потенціал у вершині конуса?

1.37. Два точкові заряди  $+q$  та  $-q$  розміщені на відстані  $2a$  один від одного. Знайти потік вектора напруженості поля через поверхню, обмежену колом радіуса  $R$ , центр якої перебуває посередині між зарядами, а її площина перпендикулярна лінії, що з'єднує заряди. Розглянути випадки, коли  $R_1=a$  та  $R_2=a/2$ .

1.38. Визначити напруженість електричного поля, потенціал якого залежить від координат за законом: а)  $\varphi=a(x^2-y^2)$ ; б)  $\varphi=axu$ ; в)  $\varphi=a(x^2+y^2)+b z^2$ , де  $a$  і  $b$  – сталі величини. Який напрямок векторів напруженості електричного поля у цих випадках? Для випадків а) та б) зобразити якісний вигляд цих полів за допомогою ліній напруженості в площині  $xOy$  та за допомогою екіпотенціальних ліній.

1.39. Простір заповнено зарядом, об'ємна густина якого змінюється за законом  $\rho=\rho_0/r$ , де  $\rho_0$  – стала величина,  $r$  – відстань від початку координат. Знайти: а) напруженість поля  $\vec{E}$  як функцію радіуса-вектора  $\vec{r}$ ; дослідити характер ліній напруженості (область поблизу початку координат виключити із розгляду); б) потенціал поля  $\varphi$  як функцію радіус-вектора  $\vec{r}$ ; в) яка форма екіпотенціальних поверхонь?

1.40. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить тільки від відстані  $r$  до його центра, як  $\varphi=ar^2+b$ , де  $a$  і  $b$  – сталі величини. Знайти розподіл об'ємної густини заряду. Який розподіл напруженості поля  $E$  всередині кулі і яка форма екіпотенціальних поверхонь?

1.41. Простір заповнено зарядом з об'ємною густиною  $\rho=\rho_0 \exp(-ar^3)$ , де  $\rho_0$  і  $a$  – сталі величини,  $r$  – відстань від центра даної системи. Знайти модуль вектора напруженості  $E$  електричного поля як функцію  $r$ . Дослідити одержаний вираз при малих і великих  $r$ , тобто при  $ar^3 \ll 1$  та  $ar^3 \gg 1$ .

1.42. Визначити потенціал  $\varphi(x,y,z)$  електростатичного поля, напруженість поля якого має вигляд  $\vec{E}=ay\vec{i}+(ax+bz)\vec{j}+by\vec{k}$ , де  $a$  і  $b$  – сталі величини,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти осей  $x,y,z$ . Який вигляд екіпотенціальних ліній в площині  $xOy$ ?

1.43. Дві однаково заряджені кульки, які підвішені на нитках однакової довжини, опущені в гас. Якою повинна бути густина матеріалу кульок, щоб кут розходження ниток у гасі був таким самим як і у повітрі? Прийняти густину гасу  $800 \text{ кг/м}^3$ , а його діелектричну проникність  $2,0$ .

1.44. Лінійний заряд з густиною  $\tau$  рівномірно розподілений вздовж нитки, яка займає частину осі  $z$  від  $z_1 = -l_1$  до  $z_2 = l_2$ . Знайти вираз напруженості поля для точок, які лежать у площині  $xOy$ .

1.45. Дуже тонке кільце радіуса  $R$  рівномірно заряджене з лінійною густиною  $\tau$ . Обчислити потенціал та напруженість електричного поля у точці, яка лежить на осі кільця на відстані  $z$  від його центра. Знайти, в яких точках  $\varphi$  та  $E$  мають екстремальні значення. Побудувати якісні залежності  $E(z)$  і  $\varphi(z)$  для  $R=5 \text{ см}$ ,  $\tau=2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}$ .

1.46. Півсфера радіуса  $R$  рівномірно заряджена електрикою з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Визначити напруженість і потенціал поля в центрі півсфери.

1.47. Тонке кільце радіуса  $r$  має заряд  $q$ . Яким буде приріст радіальної сили що діє на одиницю довжини кільця, якщо в його центр помістити однойменний заряд  $q_0$ ?

## ПРОВІДНИКИ ТА ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

### 2.1. Короткі теоретичні відомості

При поміщенні ізолюваного провідника, в якому наявні вільні заряди, в електростатичне поле на його поверхні з'являються заряди, однак в цілому провідник залишається електронейтральним. Переміщення вільних зарядів у провіднику на макроскопічній відстані буде тривати до тих пір, поки поле, створене ними, не зрівноважить зовнішнє поле, тобто напруженість електричного поля у провіднику:

$$\vec{E} = 0, \quad (2.1 \text{ а})$$

а отже, згідно з формулою (1.5), потенціал

$$\varphi = \text{const} \quad (2.1 \text{ б})$$

Явище, яке полягає в електризації незарядженого провідника у зовнішньому електростатичному полі шляхом просторового розділення позитивних і негативних зарядів, які є в цьому провіднику в однакових кількостях, називають електризацією через вплив, або електростатичною індукцією.

В однакових однорідних електричних полях поверхнева густина індуктованих зарядів на кулях обернено пропорційна їхнім радіусам, тобто:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.2)$$

Якщо в електричному полі замінити яку-небудь екіпотенціальну поверхню провідником такої ж форми і створити на цьому провіднику потенціал, що дорівнює потенціалу розглядуваної екіпотенціальної поверхні, то електричне поле не зміниться. На цьому твердженні ґрунтується метод „дзеркального зображення”, який полягає в тому, що сила притягання заряду  $+q$  до провідної площини дорівнює силі, яка діє на цей заряд з боку заряду  $-q$ , що є його „дзеркальним зображенням”.

Найбільш простою системою зв'язаних зарядів є диполь. Диполь – це система двох точкових, однакових за абсолютним

значенням і протилежних за знаком зарядів, які перебувають на деякій фіксованій відстані  $l$  один від одного. Вектор  $\vec{l}$ , проведений від негативного до позитивного заряду, називається плечем диполя, а добуток за абсолютним значенням заряду на плече диполя називається дипольним моментом:

$$\vec{P}_d = |q| |\vec{l}|. \quad (2.3 \text{ а})$$

Якщо об'ємна густина заряду  $\rho$  в одних частинах об'єму  $V$  позитивна, а в інших – негативна, то хоч в цілому заряд в об'ємі  $V$  дорівнює нулю, система характеризується дипольним моментом.

У випадку дискретного розподілу зарядів (наприклад, у молекулі) дипольний момент

$$\vec{P}_d = |q| (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = |q| \vec{l}, \quad (2.3 \text{ б})$$

де  $\vec{r}_+$  та  $\vec{r}_-$  – радіуси-вектори для „центра мас” позитивних і негативних зарядів, які визначаються за формулами:

$$\vec{r}_+ = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum q_i^+} = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{(+q)}; \quad \vec{r}_- = \frac{\sum q_j^- \vec{r}_j^-}{\sum q_j^-} = \frac{\sum q_j^- \vec{r}_j^-}{(-q)}. \quad (2.3 \text{ в})$$

Радіуси-вектори  $\vec{r}_+$  та  $\vec{r}_-$  відраховуються від довільної точки, прийнятої за початок відліку,  $\vec{l} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$  – плече диполя.

Дипольний момент неперервно розподіленого заряду визначається за формулою

$$\vec{P}_d = \int \rho \vec{r} dV. \quad (2.3 \text{ г})$$

Диполь називається точковим, якщо плече диполя  $l$  набагато менше ніж відстані  $r$  від центра диполя до розглядуваної точки, в якій потрібно визначити напруженість поля. Для такого випадку:

а) компонента напруженості поля диполя напрямлена вздовж радіуса-вектора  $\vec{r}$

$$E_r = \frac{2P_d \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad (2.4 \text{ а})$$

б) компонента напруженості поля диполя перпендикулярна до радіуса-вектора  $\vec{r}$

$$E_\alpha = \frac{P_d \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad (2.4 \text{ б})$$

## 2. Провідники та діелектрики в електростатичному полі

в) модуль напруженості поля точкового диполя

$$E = \frac{P_{\delta}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}, \quad (2.4 \text{ в})$$

де  $P_{\delta} = |\vec{P}_{\delta}|$  – модуль електричного моменту диполя,  $r$  – абсолютне значення радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного від центра диполя до точки, в якій визначається напруженість поля;  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{r}$  та  $\vec{l}$ ;

г) потенціал поля точкового диполя

$$\varphi = \frac{P_{\delta} \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; \quad (2.4 \text{ г})$$

д) вектор моменту сил, який діє на диполь, розташований в однорідному електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$ , дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{P}_{\delta} \times \vec{E}], \quad \text{а його модуль} \quad M = P_{\delta} E \sin\alpha, \quad (2.4 \text{ д})$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{P}_{\delta}$  та  $\vec{E}$ ;

е) сила, яка діє на диполь в неоднорідному електричному полі в напрямку осі  $Ox$  дорівнює:

$$F_x = P_{\delta} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \cos\alpha, \quad (2.4 \text{ е})$$

де  $\frac{\partial E}{\partial x}$  – частинна похідна напруженості поля в напрямку осі  $Ox$ .

При  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$  сила  $F_x$  додатна, що означає втягування диполя під дією даної сили в область більшої напруженості поля;

є) енергія диполя в електричному полі напруженості  $\vec{E}$  дорівнює:

$$W = -(\vec{E}_{\delta} \cdot \vec{E}) = -P_{\delta} E \cos\alpha. \quad (2.4 \text{ є})$$

При поміщенні діелектрика в електричне поле на його поверхні також з'являються заряди, однак при цьому вони зміщуються на мікроскопічні відстані, тобто вони є зв'язаними із атомами і (або) молекулами діелектрика. При цьому діелектрик набуває макроскопічного дипольного моменту, однак напруженість електричного поля у діелектриках, на відміну від провідників,  $\vec{E} \neq 0$ . Це явище має назву поляризації діелектрика. Кількісною мірою поляризації діелектрика є вектор поляризації,

## 2. Провідники та діелектрики в електростатичному полі

або поляризованість – дипольний момент одиниці об'єму діелектрика, який у першому наближенні можна вважати пропорційним напруженості електричного поля:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \vec{P}_j = \chi\epsilon_0 E, \quad (2.5 \text{ а})$$

де  $N$  – число диполів в об'ємі  $V$  діелектрика,  $\vec{P}_j$  – електричний дипольний момент  $j$ -го диполя,  $\chi$  – діелектрична сприйнятливості діелектрика.

Поряд із сприйнятливостю  $\chi$  діелектрики характеризуються відносною діелектричною проникністю  $\epsilon$ , які пов'язані між собою співвідношенням:

$$\epsilon = 1 + \chi. \quad (2.5 \text{ б})$$

У разі ізотропного однорідного діелектрика напруженість поля в такому діелектрику

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}, \quad (2.5 \text{ в})$$

де  $E_0$  – напруженість поля у вакуумі.

Зв'язок векторів індукції  $\vec{D}$ , напруженості поля  $\vec{E}$  і поляризації  $\vec{P}$  виражається формулами:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.5 \text{ г}) \quad \text{або} \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (2.5 \text{ д})$$

Теорема Остроградського-Гауса для вектора індукції в інтегральній та диференціальній формах відповідно має, вигляд:

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV, \quad \text{div} \vec{D} = \rho. \quad (2.5 \text{ є})$$

Відмітимо, що як  $\chi$ , так і  $\epsilon$  у загальному випадку є тензорами другого рангу і тільки у випадку ізотропних середовищ вони характеризуються одним значенням.

На межі вакуум–діелектрик поверхнева густина зв'язаного заряду діелектрика:

$$\sigma' = P_n, \quad (2.6 \text{ а})$$

де  $P_n$  – нормальна складова вектора поляризації діелектрика на межі з вакуумом. Зв'язок між поверхневою густиною  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на поверхні діелектрика і поверхневою густиною  $\sigma$  вільних зарядів на пластинах конденсатора

виражається формулою:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma. \quad (2.6 б)$$

У разі неоднорідної поляризації діелектрика об'ємна густина зв'язаного заряду дорівнює:

$$\rho' = -\operatorname{div} P. \quad (2.6 в)$$

На межі двох діелектриків, поміщених в електричне поле, появляются зв'язані заряди. Зв'язок поверхневих густин зв'язаних зарядів на межі двох діелектриків з діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$  виражається формулою:

$$\frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = \frac{(\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_2}. \quad (2.6 г)$$

Заломлення ліній векторів напруженості та індукції електричного поля на межі двох діелектриків описується такими співвідношеннями:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (2.6 д)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина вільних зарядів, індекси  $n$  і  $t$  – нормальні та тангенціальні складові векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$ .

Якщо за відсутності електричного поля дипольні моменти молекул діелектрика  $\vec{P}_0 = 0$ , то їх називають неполярними, а якщо  $\vec{P}_0 \neq 0$  – молекули полярні. Відповідно, і діелектрики називають неполярними або полярними, залежно від типу молекул і атомів, що входять до його складу. Однак в електричному полі і неполярні атоми та молекули набувають дипольного моменту  $\vec{P}_i$ , який називається індукованим.

У разі поляризованого діелектрика з неполярними молекулами (наприклад, з електронною поляризацією) вектор поляризації:

$$\vec{P} = n \vec{P}_i, \quad \text{т} \quad (2.7 а)$$

де  $n$  – кількість диполів у одиниці об'єму (їх концентрація),  $\vec{P}_i$  – середній індукований (наведений) дипольний момент атома або молекули,  $\vec{P}_i = \beta_{ел} \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\beta_{ел}$  – поляризуємість окремого атома

(молекули), яка дорівнює  $\beta_{ел} = 4\pi a^3$ , де  $a$  – радіус орбіти електрона. Тоді модуль вектора поляризації:

$$P = n \varepsilon_0 \beta_{ел} E = \chi_{ел} \varepsilon_0 E, \quad (2.7 б)$$

де  $\chi_{ел} = n \beta_{ел}$  – електронна складова діелектричної сприйнятливості речовини.

Для діелектриків з полярними молекулами дипольна (орієнтаційна) складова діелектричної сприйнятливості дорівнює:

$$\chi_{дип} = n \beta_{дип} = \frac{n P_0^2}{3 \varepsilon_0 k T}, \quad (2.7 в)$$

де  $n$  – концентрація диполів,  $\beta_{дип} = \frac{P_0^2}{3 \varepsilon_0 k T}$  – поляризуємість дипольних молекул,  $P_0$  – їх сталий електричний дипольний момент,  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.

Залежність

$$\chi = \frac{A}{T}, \quad (2.7 г)$$

де  $A = \frac{n P_0^2}{3 \varepsilon_0 k}$ , виражає закон Кюрі для полярних діелектриків.

Окрім розглянутих електронної та орієнтаційної (дипольної) поляризації, у діелектриках існують і інші види поляризації, зокрема – іонна, яка зумовлена зміщенням додатних і від'ємних іонів діелектрика в електричному полі. Тому загальна поляризуємість  $\beta$  дорівнює сумі електронної, дипольної та інших видів поляризуємість.

Наведені вище вирази для діелектричної сприйнятливості  $\chi = n \beta$  і, відповідно, для діелектричної проникності  $\varepsilon = 1 + \chi = 1 + n \beta$  є дуже наближеними і можуть застосовуватись тільки для газів ( $\varepsilon \approx 1$ ), оскільки поляризований у зовнішньому полі діелектрик

стає джерелом внутрішнього електричного поля:  $\vec{E}' = \frac{\vec{P}}{3 \varepsilon_0}$  (див.

задачу 2.14.). Тому поле всередині поляризованого діелектрика, яке діє на його молекули, буде відмінне від зовнішнього поля  $E$ : результуюча напруженість поля, яка діє на молекули в діелектрику, (це поле називають локальним) дорівнює:

$$E_n = E + \frac{P}{3\varepsilon_0}. \quad (2.8 \text{ а})$$

З урахуванням виразу (2.8 а) одержана формула Клаузіуса-Моссотті, яка пов'язує макроскопічний параметр діелектрика – його відносну діелектричну проникність  $\varepsilon$  із мікроскопічним параметром  $\beta$  – поляризуємістю молекул діелектрика:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3}(\beta_{el} + \beta_{ion} + \beta_{dip}), \quad (2.8 \text{ б})$$

де  $\beta_{el}$  – електронна,  $\beta_{ion}$  – іонна та  $\beta_{dip}$  – орієнтаційна поляризуємості.

Поляризація діелектриків, крім електричного поля, може зумовлюватись і іншими зовнішніми факторами або появлятись самовільно (спонтанно). Для піроелектриків (речовин, в яких зміни поляризації, а отже, і виникнення електричних зарядів на поверхні відбуваються при їхньому нагріванні або охолодженні) поверхнева густина зв'язаних зарядів пропорційна зміні температури  $\Delta T$ :

$$\Delta P = \sigma' = \gamma \Delta T, \quad (2.9 \text{ а})$$

де  $\gamma$  – піроелектричний коефіцієнт, значення якого має порядок величини  $10^{-3}$  Кл/(м<sup>2</sup>·К).

Поляризація  $P$ , а отже, і поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma'$ , які виникають на гранях п'єзоелектриків (речовин, в яких виникнення поляризації відбувається при їхній деформації під дією механічних напружень), пропорційні механічній нарузі  $f = F/S$ :

$$P = \sigma' = d \cdot f, \quad (2.9 \text{ б})$$

де  $d$  – п'єзоелектрична стала, яка в загальному випадку теж є тензорною величиною.

Діелектрична проникність  $\varepsilon$  сегнетоелектриків, поляризація в яких виникає спонтанно, залежить від температури і для багатьох із них описується законом Кюрі-Вейса:

$$\varepsilon = \frac{C}{T - T_K}, \quad (2.9 \text{ в})$$

де  $C$  – стала Кюрі-Вейса (різна для різних сегнетоелектриків),  $T_K$  – температура Кюрі-Вейса, яка є температурою фазового переходу, вище якої сегнетоелектрики поведуть себе як полярні

діелектрики. Нижче температури  $T_K$  поляризація діелектрика є нелінійною функцією напруженості зовнішнього електричного поля, причому така залежність характеризується гістерезисною кривою, параметрами якої є залишкова поляризація (поляризація при  $E=0$ ) та коерцитивне поле (поле, при якому  $P=0$ ).

## 2.2. Методичні вказівки і поради

А. Якщо в електростатичне поле внести провідник, то під дією сил поля на поверхні провідника, яка розміщена ближче наелектризованого тіла, з'явиться заряд протилежного знаку, а на іншій – однойменний заряд (згідно з явищем електростатичної індукції). У середині провідника, внесеного в електростатичне поле, напруженість поля дорівнює нулю. Звідси випливає, що потенціал всіх точок провідника і простору всередині нього, якщо провідник порожнистий, буде однаковим. Рівність нулю напруженості поля всередині провідника використовується при розв'язуванні задач з визначення величини індукованого заряду на поверхні провідника.

У результаті електростатичної індукції провідники притягують вільні електричні заряди, які перебувають поблизу. У більшості задач, де потрібно визначити силу притягання, немає потреби визначати точний розподіл індукованих зарядів, оскільки індуковані на провіднику заряди створюють за межами провідника таке ж поле, яке було б створене „електричним зображенням” вільного заряду в провіднику. „Електричне зображення” заряду або системи зарядів у провіднику можна знайти, записавши умову еквіпотенціальності поверхні провідника. Але для визначення і величини, і положення заряду, еквівалентного індукованому на поверхні провідника, єдиної умови еквіпотенціальності часто буває недостатньо. Тому, виходячи із конкретних даних задачі, необхідно використати інші додаткові умови. Розв'язуючи задачі даного типу, слід розрізняти два випадки: а) провідник заземлений; б) провідник ізольований. У першому випадку заряд провідника  $q$ , а його потенціал дорівнює нулю. В другому випадку сумарний заряд провідника дорівнює нулю, а його потенціал дорівнює  $\varphi$ . З'ясуємо зв'язок



між задачами, що відповідають цим двом випадкам. Позначимо поверхневу густину заряду в цих двох випадках відповідно через  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ . Допустимо, що першу задачу розв'язано, тобто визначені  $q$  і  $\sigma_1$ , а потенціал дорівнює нулю. Розв'язання другої задачі буде мати місце в тому випадку, якщо додати до заряду  $q$ , розподіленого на провіднику за умови  $\varphi = 0$ , ще заряд  $(-q)$ , розподіливши його на провідникові так, як при умові розподілу на ізолюваному провіднику без дії на нього зовнішнього електричного поля (найчастіше рівномірного). У цьому випадку густина заряду в різних точках дорівнює  $\sigma$ . Тоді шукана густина  $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$ . Якщо ж, навпаки, розв'язана друга задача, тобто відомі  $\sigma_2$  та  $\varphi$ , причому  $\int \sigma_2 dS = 0$ , то для визначення  $\sigma_1$  спочатку треба знайти заряд  $q = C\varphi$ , поверхнева густина якого на провіднику  $\sigma$ . Тоді  $\sigma_1 = \sigma_2 - \sigma$ .

Б. Для розрахунків електричних полів при наявності діелектриків вводять вектор електричної індукції (електричного зміщення)  $\vec{D}$ . У задачах, як правило, розглядаються діелектрики, які задовольняють такі умови: 1) вони однорідні та ізотропні; 2) мають форму, при якій їх обмежуючі поверхні збігаються з екіпотенціальними поверхнями зовнішнього поля (тобто перпендикулярні до силових ліній поля). Це діелектрики між обкладинками плоского, сферичного, циліндричного конденсаторів (як одношарових, так і багатшарових). Якщо такий діелектрик з діелектричною проникністю  $\epsilon$  внести в електричне поле постійного заряду, то будуть виконуватись такі правила: 1) вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  є однаковим в усіх точках поля, як всередині, так і ззовні діелектрика; 2) вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля зменшується в  $\epsilon$  раз у просторі, зайнятому діелектриком, і залишається без зміни поза діелектриком.

Для визначення потенціалу  $\varphi$  і напруженості поля  $\vec{E}'$ , створеного поляризованим діелектриком, для даного розподілу в ньому вектора поляризації  $\vec{P}$  використовуються формули (2.8) для  $\sigma'$  та  $\rho'$ .

Формули для напруженості і потенціалу поля відповідно точкового заряду, диполя, сфери, циліндра і площини у вакуумі

залишаються дійсними для заряджених тіл, поміщених в однорідний діелектрик, тільки в знаменнику цих формул  $\epsilon_0$  замінюється на множник  $\epsilon\epsilon_0$ .

### 2.3. Якісні задачі та запитання

2.1. Як, маючи від'ємно заряджений провідник, наелектризувати позитивним зарядом інший провідник, не змінюючи заряд першого?

2.2. Чому при внесенні незарядженого провідника в електричне поле останнє спотворюється?

2.3. Щоб розрядити електроскоп, як правило, дотикаються до його стрижня пальцем. Чи завжди так можна розрядити електроскоп?

2.4. У деякій частині простору електричне поле відсутнє, але коли туди помістили заряджену кульку, виникло електричне поле, яке діє на цю кульку з деякою силою. Чому воно з'явилося?

2.5. В електростатичне поле помістили незаряджену металічну кульку. Чи буде це поле діяти на неї з деякою силою?

2.6. В установці для виловлювання пилинок повітря пропускають крізь металічну трубу, уздовж осі якої протягнута металічна дротина. Між дротиною і трубою створюють сильне електричне поле, причому дротині надають від'ємний потенціал, а труба заземлюється. Як будуть поводити себе пилинки: а) не заряджені; б) заряджені позитивно або негативно?

2.7. Позитивний і негативний точкові заряди притягуються один до одного із силою  $F$ . Зменшиться чи збільшиться ця сила, якщо помістити між зарядами скляну кулю?

2.8. Як впливатиме на незаряджену металеву стрілку компаса розміщений збоку від вістря позитивний електричний заряд?

2.9. У чому різниця між явищем електростатичної індукції у провіднику і поляризацією діелектриків?

2.10. У чому полягає різниця в поляризації діелектриків із полярними і неполярними молекулами?

2.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 2.11.** Точковий заряд  $q=+2 \cdot 10^{-9}$  Кл розташований на відстані  $l=3$  см від металічної пластинки, з'єднаної із Землею. Знайти поверхневу густину заряду на пластинці: 1) у точці, найближчій до заряду  $+q$ ; 2) у точці, яка перебуває на відстані  $l_1 = 5$  см від заряду. 3). Визначити також загальну величину заряду, індукованого на поверхні пластинки, та силу взаємодії між зарядом  $q$  та пластинкою.

**Розв'язання.** Заряд  $+q$  індукує на поверхні металевої пластинки від'ємні заряди, поверхнева густина яких симетрично зменшується, починаючи від максимального значення в точці, найближчій до заряду  $+q$  (точка  $O$ ) (рис.2.1). У довільній точці поблизу поверхні металічної пластинки напруженість поля дорівнює векторній сумі напруженостей поля  $\vec{E}_q$  заряду  $+q$  та поля  $\vec{E}_\sigma$  індукованого заряду  $\sigma$  на поверхні провідника поблизу обраної точки:

$$\vec{E}_q + \vec{E}_\sigma = \vec{E}.$$

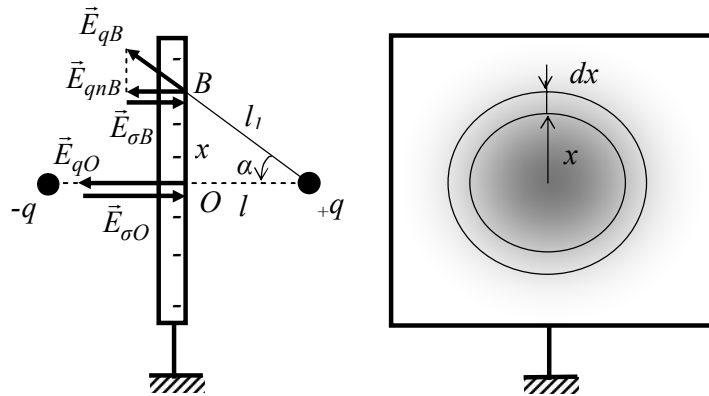


Рис. 2.1.

1) Усередині провідника напруженість поля згідно з формулою (2.1. а) дорівнює нулю, а тому для точки  $O$  із врахуванням формул (1.3 а) для напруженості електричного поля точкового заряду та (1.7 а) – зарядженої площини:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} + \frac{\sigma_O}{2\epsilon_0} = 0. \tag{а}$$

Звідки поверхнева густина індукованого заряду в точці  $O$ :

$$\sigma_O = -\frac{q}{2\pi l^2} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл/м}^2\text{)}. \tag{б}$$

2) Аналогічно судженням п. 1), для точки  $B$ , яка розташована на відстані  $l_1$  від заряду  $+q$ , нормальна складова  $E_{qn} = E_q \cos \alpha$  напруженості  $\vec{E}_q$  компенсується полем  $\vec{E}_\sigma$ , а тангенціальна (на рис 2.1 не показана) – неоднорідним розподілом індукованого на поверхні заряду. Тому умова рівності нормальних складових напруженостей полів запишеться так:

$$\frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 l_1^2} + \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} = \frac{q l}{4\pi\epsilon_0 l_1^3} + \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} = 0, \tag{в}$$

де  $\sigma_B$  – поверхнева густина індукованого заряду в точці  $B$ , а  $\cos \alpha = \frac{l}{l_1}$ . Звідки

$$\sigma_B = -\frac{q l}{2\pi l_1^3} = -7,64 \cdot 10^{-8} \text{ (Кл/м}^2\text{)}. \tag{г}$$

3) Щоб визначити загальний заряд, індукований на поверхні пластинки, встановимо залежність поверхневої густини індукованого заряду як функцію відстані  $x$  від точки  $O$ . Очевидно, що:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + l^2}. \tag{д}$$

Із (г) та (д) випливає, що:

$$\sigma(x) = \frac{q l}{2\pi(x^2 + l^2)^{3/2}}. \tag{е}$$

Розглянемо вузьке кільце радіуса  $x$  з точкою  $O$  в центрі і шириною  $dx$ . Поверхневу густину заряду на цьому тонкому кільці можна вважати сталою. Оскільки площа цього кільця  $dS=2\pi x dx$ , то заряд на кільці  $dq' = \sigma dS = \sigma 2\pi x dx$ . Тобто заряд  $dq'$  на кільці радіуса  $x$ , шириною  $dx$  дорівнює:

$$dq' = \sigma dS = \frac{ql2\pi x dx}{2\pi(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qlx dx}{(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (e)$$

Повний заряд на всій пластинці дорівнює:

$$q' = \int_0^{\infty} dq' = -ql \int_0^{\infty} \frac{x \cdot dx}{(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = -ql \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right) \Big|_0^{\infty} = -q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ (Кл)}.$$

Отже, загальний заряд  $q'$  на пластинці за модулем дорівнює величині точкового заряду  $q$ .

Для визначення сили взаємодії заряду  $q$  і пластинки, використаємо метод „електричних (дзеркальних) зображень”. Згідно з формулою (2.1.6) потенціал пластинки у всіх її точках має бути однаковим, тобто пластинку можна розглядати як еквіпотенціальну поверхню. Такий й же розподіл поля можна одержати, розмістивши на відстані  $l$  заряд  $-q$  із протилежного боку пластинки. Отже, взаємодію заряду  $+q$  і пластинки можна замінити взаємодією точкових зарядів  $+q$  і  $-q$ , розташованих на відстані  $2l$  один від одного. Тобто

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2l)^2} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ (Н)}.$$

**Задача 2.12.** Визначити, з якою силою притягується точковий заряд  $+q=3 \cdot 10^{-8}$  Кл до провідної кулі радіуса  $R=0,5$  см, який перебуває на відстані  $l=70$  см від центра кулі. Розглянути випадки: 1) куля з'єднана із Землею; 2) куля ізольована від Землі.

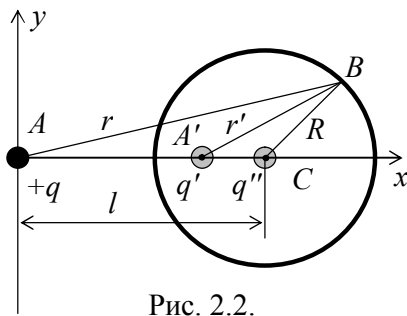


Рис. 2.2.

**Р о з в' я з а н н я.** 1) Використовуючи метод „електричних зображень” визначимо величину і положення заряду, еквівалентного індукованому на кулі (наприклад, у точці  $A'$ , рис. 2.2) величиною  $q'$ . Оскільки поверхня кулі – еквіпотенціальна поверхня, з потенціалом  $\varphi = 0$  (куля

з'єднана із Землею), тому для будь-якої точки  $B$  на поверхні кулі справедливе співвідношення:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0, \quad (a)$$

де  $r=AB$  та  $r'=A'B$ . Величину індукованого на поверхні кулі заряду легко визначити, використовуючи умову рівності нулю потенціалу в центрі кулі, що дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів вільного заряду  $q$  та індукованого заряду на поверхні кулі  $q'$ . Для центра кулі маємо:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} + \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = 0, \quad (б)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина індукованого заряду на елементі поверхні кулі  $dS$ . Звідки:

$$q' = \int \sigma dS = -\frac{R}{l} q. \quad (в)$$

Із рівнянь (а) та (в) маємо:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\frac{R}{l} q}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0, \quad (г)$$

звідки  $\frac{r'}{r} = \frac{R}{l}$ . Поверхня, яка задовольняє дану умову, є куля з центром, який лежить на прямій  $AC$  (рис.2.2). Дійсно, згідно з рис.2.2,  $r^2 = x^2 + y^2$  та  $(r')^2 = (x-a)^2 + y^2$ , де  $x$  та  $y$  – координати точки  $B$ ;  $AA' = a$ . Тоді:  $\frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{R^2}{l^2}$ . Це і є рівняння кола з

центром на осі  $x$ . Якщо обрати точку  $A'$  так, щоб  $a = \frac{R^2}{l}$ , тобто

між точками  $A$  і  $C$  на відстані  $\frac{R^2}{l}$  від центра кулі, то одержимо рівняння кола радіуса  $R$  з центром в точці  $C$ . Еквіпотенціальна поверхня з  $\varphi = 0$  збігається з поверхнею кулі. Величина заряду  $q' = -\frac{R}{l} q$  в точці  $A'$  і буде „електричним зображенням” вільного

## 2. Провідники та діелектрики в електростатичному полі

заряду в провідній кулі. А далі силу взаємодії між вільним зарядом і кулею легко визначити за законом Кулона:

$$F = -\frac{q \frac{R}{l} q}{4\pi\epsilon_0 \left(l - \frac{R^2}{l}\right)^2} = -\frac{q^2 R l}{4\pi\epsilon_0 (l^2 - R^2)^2}. \quad (д)$$

Якщо радіус кулі  $R \ll l$ , то сила взаємодії

$$F \cong -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 l^3} = -1,2 \cdot 10^{-7} \text{ (Н)}.$$

2). Розглянемо випадок, коли куля ізольована від Землі, а  $\varphi = \text{const} \neq 0$ . В цьому випадку заряд, індукований на ізольованій провідній кулі, можна замінити двома зарядами. Величина і розміщення першого заряду визначається з умови, що  $\varphi = 0$  (провідна куля з'єднана із Землею), а величина другого заряду визначається із умови, що він розміщений так, ніби він розподілений на ізольованій кулі, яка перебуває поза впливом електростатичного поля вільного заряду. При такій умові заряд розподілився б на ізольованій кулі рівномірно. Таким чином, індукований на поверхні ізольованої кулі заряд можна замінити двома еквівалентними зарядами. Один із них  $q' = -\frac{R}{l} q$

розміщений в точці  $A'$ , а другий  $q'' = \frac{R}{l} q$  – у центрі кулі, і відстань між ними  $A'C = \frac{R^2}{l}$ . Тепер легко визначити силу взаємодії між вільним зарядом та ізольованою провідною кулею, що перебуває в полі даного заряду. Використовуючи закон Кулона, маємо:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{q^2 \frac{R}{l}}{4\pi\epsilon_0 \left(l - \frac{R^2}{l}\right)^2} + \frac{q^2 \frac{R}{l}}{4\pi\epsilon_0 l^2} =$$

## 2. Провідники та діелектрики в електростатичному полі

$$= \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{l^2} - \frac{l^2}{(l^2 - R^2)^2} \right] = \frac{q^2 R^3 (R^2 - 2l^2)}{4\pi\epsilon_0 l^3 (l^2 - R^2)^2}.$$

Якщо радіус кулі  $R \ll l$ , то  $F \cong -\frac{q^2 R^3}{2\pi\epsilon_0 l^5} = -1,2 \cdot 10^{-11} \text{ (Н)}$ .

**Задача 2.13.** В гасі на глибині  $h=3\text{см}$  від вільної поверхні розміщений точковий заряд  $q = +2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ . Визначити густину заряду на поверхні гасу: 1) у точці  $A$  над зарядом; 2) у точці  $B$ , яка розташована на відстані  $l=5 \text{ см}$  від заряду; 3) загальну величину заряду на поверхні гасу.

**Розв'язання.** Необхідно скласти рівняння, в яке входила б поверхнева густина зв'язаних зарядів, використавши умову на межі двох діелектриків (формули 2.6 д):

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}, \quad (а)$$

де  $\epsilon_1$  та  $E_{1n}$  – діелектрична проникність і напруженість поля в повітрі, а  $\epsilon_2$  та  $E_{2n}$  – відповідно в гасі. Поле вектора  $\vec{E}$  визначається як вільними, так і зв'язаними зарядами (рис. 2.3).

1) Напруженість поля точкового заряду в точці  $A$  над зарядом дорівнює  $E_{qA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2}$

і напрямлена перпендикулярно поверхні вгору. Напруженість поля зв'язаних зарядів, як поля зарядженої площини, дорівнює  $E_{\sigma A} = \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0}$  і напрямлена також

до поверхні гасу: в гасі – вниз, у повітрі – вгору. Отже:

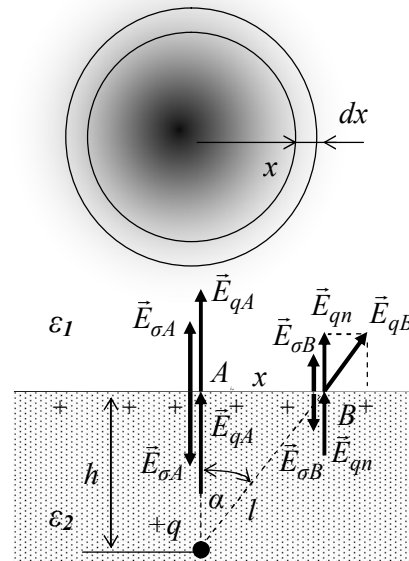


Рис. 2.3.

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} + \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0}, \quad (a) \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} - \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0}. \quad (б)$$

За умови перпендикулярності напруженості поля до поверхні гасу  $E_{1n} = E_1$  та  $E_{2n} = E_2$ . Тому рівність нормальних складових вектора електричного зміщення (гранична умова на межі розділу двох діелектриків) описується рівнянням:

$$\left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} + \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 \epsilon_1 = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} - \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 \epsilon_2, \quad (в)$$

звідки  $\sigma_A = \frac{q}{2\pi h^2} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) = 1,18 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл/м}^2\text{)}$ .

2) У точці  $B$  (рис. 2.3) напруженість поля точкового заряду дорівнює  $E_{qB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$  і напрямлена не перпендикулярно поверхні, а під кутом  $\alpha$  (рис. 2.3), косинус якого з нормаллю становить  $h/l$ . Тому нормальна складова напруженості дорівнюватиме:

$$E_{qn} = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0 l^3}. \quad (г)$$

Напруженість поля зв'язаних зарядів дорівнює  $E_{\sigma B} = \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0}$  і перпендикулярна до поверхні розділу та напрямлена в повітрі вгору, а в гасі – вниз, тобто:

$$E_{1n} = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0 l^3} + \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0}, \quad \text{а} \quad E_{2n} = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0 l^3} - \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0}. \quad (д)$$

Рівність нормальних складових вектора електричного зміщення (гранична умова) запишеться так:

$$\left( \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} + \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 \epsilon_1 = \left( \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} - \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 \epsilon_2. \quad (е)$$

Звідки  $\sigma_B = \frac{qh}{2\pi l^3} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \cong 0,708 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл/м}^2\text{)}$ .

3) Щоб визначити загальну величину заряду на поверхні гасу, розглянемо нескінченно вузьке кільце радіуса  $x$ , ширина якого  $dx$  з центром у точці  $A$  і площею  $dS = 2\pi x dx$ . Враховуючи, що  $l^2 = h^2 + x^2$ , заряд на цьому кільці дорівнюватиме:

$$dq' = \sigma(x) dS = \frac{qh 2\pi x dx}{2\pi (h^2 + x^2)^2} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}. \quad (е)$$

Інтегруючи дане рівняння в межах від 0 до  $\infty$ , матимемо:

$$q' = \frac{qh(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \int_0^\infty \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^2} = q \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \cong 0,67 \cdot 10^{-8} \text{ (Кл)}$$

**Задача 2.14.** У середовищі з діелектричною сталою  $\epsilon$  створено однорідне електростатичне поле напруженістю  $E_0$ . У середовищі є сферична порожнина. Знайти напруженість поля в центрі сфери, створюваною зарядами, індукованими на поверхні діелектрика, та локальне поле, що діє на молекули діелектрика.

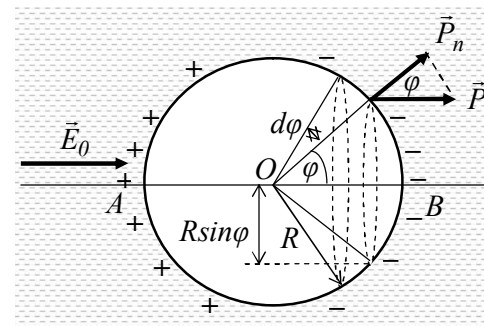


Рис. 2.4.

**Розв'язання.** У результаті поляризації діелектрика, який перебуває в зовнішньому полі, сам діелектрик стає джерелом електричного поля з напруженістю  $E'$ . Разом із зовнішнім полем  $E_0$  воно створює поле, яке називається локальним. Напруженість поля  $E'$  в центрі сферичної порож-

нини можна визначити, виходячи із таких суджень:

а) на поверхні порожнини, виділеній у поляризованому діелектрику, будуть зв'язані заряди, поверхнева густина яких в точках  $A$  і  $B$  найбільша і дорівнює, згідно з формулою (2.8 а), вектору поляризації діелектрика (див. рис. 2.4);

б) в інших точках поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma_{зв}$  пропорційна нормальній складовій поляризації із зовнішнього боку поверхні:

$$\sigma' = P \cos \varphi. \quad (a)$$

Виділимо на поверхні сфери (рис. 2.4) радіус якої  $R$ , кільце радіусом  $R \sin \varphi$  і шириною  $R d\varphi$ . Площа його поверхні буде:

$$dS = 2\pi(R \sin \varphi)R d\varphi = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi. \quad (б)$$

Заряд кільця  $dq' = \sigma' dS$  можна розглядати як сукупність точкових (диференціальних) зарядів, рівномірно розподілених на кільці, а напруженість поля в центрі сфери дорівнює сумі проєкцій цих напруженостей на напрямок напруженості поля  $\vec{E}_0$ :

$$\begin{aligned} dE' &= \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \varphi = \\ &= \frac{P \cdot 2\pi R^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{P}{2\epsilon_0} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (в)$$

Напруженість поля зв'язаних зарядів усієї сферичної поверхні визначається інтегралом:

$$E' = \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (г)$$

Таким чином, результуюча напруженість поля всередині діелектрика дорівнює:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ .

**Задача 2.15.** Із кристала тригліцинсульфату вирізана пластинка товщиною  $h = 1 \text{ мм}$  та площею  $S = 1 \text{ см}^2$ . Піроелектричний коефіцієнт тригліцинсульфату  $\gamma = 0,36 \text{ мКл}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , а діелектрична проникність  $\epsilon = 25$ . Визначити: а) який заряд виникне на поверхнях пластини при її рівномірному нагріванні на  $\Delta T = 10 \text{ К}$ ; б) яка різниця потенціалів виникне між плоскими гранями пластинки; в) що зміниться, якщо замість нагрівання пластинку охолодити на  $10 \text{ К}$ ?

**Розв'язання.** а) У відповідності із рівнянням піроефекту (2.9 а) поверхнева густина заряду на гранях п'єзоелектрика:

$$\Delta P = \sigma' = \gamma \Delta T. \quad (a)$$

Для плоского однорідного діелектрика при рівномірному нагріванні загальний заряд на одній поверхні становитиме:

$$q = \sigma' S = \gamma \Delta T \cdot S = 0,33 \text{ (мкКл)}. \quad (б)$$

б) На протилежній поверхні піроелектрика виникне такий же за модулем але протилежний за знаком заряд  $-q$ . Така система розподілених на плоских поверхнях зарядів являтиме собою плоский конденсатор ємністю  $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{h}$ . Використовуючи

взаємозв'язок між зарядом  $q$  конденсатора, його ємністю  $C$  та різницею потенціалів  $U = \varphi_2 - \varphi_1$  між його обкладками  $C = q/U$ , знаходимо:

$$U = \frac{\gamma \Delta T S}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{\gamma \Delta T h}{\epsilon \epsilon_0} = 1,63 \cdot 10^4 \text{ (В)}. \quad (б)$$

в) Якщо пластинку охолоджувати, то знаки поверхневих зарядів і полярність напруги зміняться на протилежні.

## 2.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

2.16. Невелика кулька висить над горизонтальною металічною площиною на непровідній пружній нитці жорсткістю  $k$ . Після того, як кульку зарядили, вона опустилась на відстань  $x$  і її відстань до провідної площини стала дорівнювати  $l$ . Знайти заряд кульки.

2.17. Знайти силу, що діє на точковий заряд  $q$ , який розміщений на бісектрисі прямого двогранного кута між двома провідними площинами. Відстань між зарядом і вершиною двогранного кута дорівнює  $d$ . Як зміниться відповідь, якщо провідні площини утворюють непрямий двогранний кут, а, наприклад, кут  $60^\circ$ ?

2.18. На відстані  $h$  від провідної нескінченної площини розміщений точковий заряд  $+q$ . Визначити: а) напруженість та потенціал у точці А, яка перебуває від площини і від заряду на відстані  $h$ . б) Яка різниця потенціалів між точкою А і точкою В, яка міститься на площині, і в) яку роботу потрібно виконати, щоб віддалити цей заряд на подвійну відстань від площини; на дуже велику відстань від площини?

2.19. Знайти силу притягання  $F$  між точковим електричним диполем  $P$  і нескінченною металічною пластинкою, якщо дипольний момент  $P$  перпендикулярний до пластинки, а відстань диполя до пластинки дорівнює  $d$ . Визначити також роботу  $A_{12}$ , яку необхідно виконати, щоб віддалити диполь від пластинки з відстані  $d_1$  до  $d_2$ .

2.20. Точкові заряди  $q_1$  та  $q_2$  розташовані на відстані  $r$  один від одного. Визначити сили  $F_1$  та  $F_2$ , які будуть діяти на ці заряди після того, як посередині між ними буде розміщена нескінченна металічна пластинка товщиною  $r/2$ .

2.21. Металічна незаряджена сфера радіуса  $r$  вноситься в однорідне електричне поле напруженістю  $E_0$ . Знайти точки простору, в яких поле стало дорівнює: а)  $2E_0$ ; б)  $E_0/3$ .

2.22. Тонка нескінченна довга нитка рівномірно заряджена електрикою з лінійною густиною  $\tau$  і розміщена паралельно нескінченній провідній площині на відстані  $a$  від неї. Знайти: а) модуль вектора сили, що діє на одиницю довжини нитки; б) розподіл поверхневої густини заряду  $\sigma(x)$  на площині ( $x$  – відстань від проекції нитки на площину).

2.23. Дуже довга пряма нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною  $\tau$ , розміщена перпендикулярно нескінченній провідній площині, і не доходить до цієї площини на відстань  $d$ . Нехай точка  $O$  – слід нитки на площині. Визначити поверхневу густину індукованого заряду на площині: а) в точці  $O$ ; б) залежно від відстані  $r$  до точки  $O$ .

2.24. Тонке кільце радіуса  $R$ , рівномірно заряджене зарядом  $q$ , і провідна сфера розміщені так, що центр сфери  $O$  лежить на осі кільця на відстані  $d$  від площини кільця. Визначити потенціал сфери. Як зміниться відповідь, якщо заряд  $q$  на кільці розподілений нерівномірно?

2.25. На колбі невеликої електролампочки, що висить на висоті  $l = 2$  м над центром круглого металевого заземленого стола радіусом  $R = 2$  м, розміщена заряд  $q = 1$  мкКл. Обчислити густину поверхневого заряду на столі під лампочкою, на краю стола і повне значення індукованого заряду.

2.26. Два однакові позитивні заряди  $q$  розташовані на однаковій відстані  $d$  від нескінченної провідної площини з одного боку від неї. Відстань між зарядами дорівнює  $2d$ . Знайти

величину і напрям вектора напруженості поля на середині відстані між зарядами. Який потенціал поля в даній точці?

2.27. На висоті  $h = 1$  см над горизонтальною площиною металічного листа розміщено рівномірно заряджений диск радіуса  $r = 1$  см із зарядом  $q = 10^{-9}$  Кл. Площина диска паралельна площині листа. Знайти поверхневу густину індукованого заряду в точці на листі під центром диска.

2.28. Два точкових заряди  $-q$  та  $+q$  розміщені в точках з координатами  $(-a, -a)$  та  $(+a, +a)$  відповідно. Знайти: а) дипольний момент  $P$  цих зарядів; б) наближені вирази для напруженості та потенціалу поля в точках А та В з координатами  $(10a, 0)$  та  $(10a, 10a)$  відповідно.

2.29. Чотири однакові за величиною (два позитивних та два негативних) заряди  $q$ , розміщені в площині  $xOy$ . Координати позитивних зарядів  $(-a, 0)$  та  $(+a, 0)$ , а негативних  $(0, +a)$  та  $(0, -a)$ . а) Як називається така система зарядів? б) Чому дорівнює дипольний момент такої системи зарядів? в) Знайти наближений вираз для потенціалу  $\varphi$  поля в точках А, В та С з координатами  $(r, 0)$ ;  $(0, r)$ ;  $(r, r)$  відповідно. У всіх випадках  $r \gg a$ .

2.30. Вздовж осі  $Ox$  від точки  $(0, 0)$  до точки  $(2a, 0)$  неперервно розподілений позитивний заряд  $+q$  з лінійною густиною  $\tau = kx$ , а в точці з координатами  $(-a, 0)$  розміщений негативний заряд  $-q$ . Знайти: а) електричний дипольний момент  $P$  системи; б) наближені вирази для напруженості та потенціалу поля в точках А, В та С з координатами  $(r, 0)$ ;  $(0, r)$ ;  $(r, r)$  відповідно. У всіх випадках  $r \gg a$ .

2.31. Уздовж тонкого кільця радіуса  $R$  розподілений заряд  $-q$ . В центрі кільця розміщено точковий заряд  $+q$ . а) Який дипольний момент  $P$  даної системи зарядів? б) Приймавши вісь  $Ox$  за вісь кільця, початок якої розміщено в центрі кільця, знайти потенціал  $\varphi$  та напруженість поля  $E$  для довільної точки осі  $Ox$  при умові, що  $x \gg R$ .

2.32. Неполлярна молекула з поляризуемістю  $\beta$  розташована на великій відстані  $l$  від полярної молекули з дипольним моментом  $P_0$ . Знайти модуль вектора сили взаємодії цих молекул, якщо вектор  $P_0$  орієнтований вздовж прямої, яка проходить через обидві молекули.

2.33. На осі тонкого рівномірно зарядженого кільця радіуса  $R$  розташована неполярна молекула. На якій відстані  $x$  від центра кільця модуль сили  $F$ , що діє на дану молекулу дорівнює нулю?

2.34. Одній із пластин плоского конденсатора площею  $0,2 \text{ м}^2$  надали заряд  $1 \text{ нКл}$  (друга пластина з'єднана із Землею). Відстань між пластинами  $2 \text{ мм}$ . Між пластинами, паралельно їм, розташовані скляна і фарфорова пластинки, товщини яких відповідно  $0,5$  та  $1,5 \text{ мм}$ . Визначити: а) напруженість та індукцію електричного поля у склі і фарфорі; б) поверхневу густину зв'язаних зарядів на пластинках; в) розподіл потенціалу в пластинках.

2.35. Металічна куля радіуса  $5 \text{ см}$ , яка має заряд  $2 \text{ нКл}$ , покрита шаром однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon=6$ ) товщиною  $1 \text{ см}$ . Знайти: а) напруженість та індукцію поля в точках, віддалених від центра кулі відповідно на  $5,5 \text{ см}$  та  $7 \text{ см}$ ; б) потенціал поля в даних точках; в) поверхневу густину зв'язаних зарядів на внутрішній та зовнішній поверхні діелектрика.

2.36. Спочатку простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений повітрям і напруженість поля між його пластинами дорівнює  $E_0$ , а електричне зміщення  $D_0$ . Потім половину щілини між пластинами заповнено однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . Знайти модулі векторів  $E$  та  $D$  в обох частинах щілини, якщо при введенні діелектрика: а) напруга між пластинами не змінюється; б) заряди на обкладках залишались незмінними. Розглянути два випадки заповнення щілини: паралельно та перпендикулярно до площин обкладок конденсатора.

2.37. Всередині кулі із однорідного діелектрика з проникністю  $\epsilon=5$  створено однорідне електричне поле напруженістю  $100 \text{ В/м}$ . Радіус кулі  $5 \text{ см}$ . Знайти максимальну поверхневу густину зв'язаних зарядів і повний зв'язаний заряд одного знака.

2.38. Визначити густину зв'язаних зарядів на поверхнях слюдяної пластинки товщиною  $0,2 \text{ мм}$ , яка служить ізолятором у плоскому конденсаторі, підключеному до напруги  $400 \text{ В}$ .

2.39. Нескінченний однорідний та ізотропний діелектрик, в якому створено однорідне поле напруженістю  $E_0$ , має сферичну

порожнину радіуса  $R$ . В центрі порожнини розміщено точковий диполь з моментом  $P_e$ . Визначити період малих коливань диполя, якщо момент інерції диполя відносно осі обертання дорівнює  $I_0$ .

2.40. У воді електричне поле напруженістю  $1 \text{ кВ/см}$  створює сумарну поляризацію, еквівалентну правильній орієнтації тільки однієї з молекул. Знайти число молекул. Дипольний момент молекули води  $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Кл}\cdot\text{м}$ .

2.41. Два дуже довгих тонкостінних коаксіальних циліндри радіусами  $5$  та  $10 \text{ см}$  рівномірно заряджені електрикою з поверхневими густинами зарядів  $+10 \text{ нКл/м}^2$  та  $-3 \text{ нКл/м}^2$ . Простір між циліндрами заповнено парафіном ( $\epsilon=2$ ). Визначити величини напруженостей, індукції та потенціалу в точках, які перебувають на відстані  $2 \text{ см}$ ,  $6 \text{ см}$ ,  $15 \text{ см}$  від осі циліндрів відповідно.

2.42. Дві металічні концентричні сфери радіусів  $4 \text{ см}$  і  $10 \text{ см}$  мають відповідно заряди  $-2 \text{ нКл}$  та  $+3 \text{ нКл}$ . Простір між сферами заповнено ебонітом ( $\epsilon=3$ ). Визначити напруженість, індукцію та потенціал поля на відстанях а)  $2 \text{ см}$ , б)  $6 \text{ см}$  та в)  $20 \text{ см}$  від центра сфер. г) Які поверхневі густини зв'язаних зарядів на внутрішній та зовнішній поверхнях ебоніту?

2.43. Скляна ( $\epsilon=7$ ) товстостінна порожниста куля заряджена з об'ємною густиною заряду  $1,5 \text{ мкКл/м}^3$ . Внутрішній радіус кулі  $2 \text{ см}$ , зовнішній –  $6 \text{ см}$ . Знайти розподіл напруженості, індукції та потенціалу в склі, а також обчислити потенціали зовнішньої, внутрішньої поверхонь і центра кулі. Яка напруженість та індукція поля в цих точках?

2.44. Достатньо довгий круглий циліндр із однорідного та ізотропного діелектрика з відомою діелектричною сталою  $\epsilon$  розміщений в однорідному полі з напруженістю  $E_0$  так, що вісь циліндра збігається з напрямом  $E_0$ . Визначити напруженість та індукцію поля всередині і зовні циліндра.

2.45. Довгий діелектричний циліндр круглого перерізу поляризований так, що вектор поляризації  $P=ar$ , де  $a$  – стала позитивна величина,  $r$  – відстань від осі циліндра. Знайти об'ємну густину  $\rho'$  зв'язаних зарядів як функцію відстані  $r$  від осі циліндра.



2.46. Нескінченно велика пластинка із однорідного діелектрика з проникністю  $\epsilon$  заряджена рівномірно зарядом з об'ємною густиною  $\rho$ . Товщина пластинки  $2d$ . Знайти: а) модулі векторів напруженості та індукції і потенціал електричного поля, як функцію відстані від середини пластинки (потенціал в середині пластинки прийняти таким, що дорівнює нулю); взяти координатну вісь  $Ox$  перпендикулярно до поверхні пластинки і зобразити наближені графіки залежностей  $E(x)$ ,  $D(x)$  векторів  $E$  і  $D$  та потенціалу  $\varphi(x)$ ; б) поверхневу і об'ємну густину зв'язаних зарядів.

2.47. Тепловий приймач, установлений на супутнику Землі, який виготовлений із матеріалу з піроелектричним коефіцієнтом  $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$  Кл/(м<sup>2</sup>К) і має робочу поверхню  $S = 2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>. При пролітанні над об'єктом, який має температуру вищу за фонову, температура датчика за час  $\Delta t$  збільшилась на  $\Delta T = 0,25$  К. Який середній струм при цьому буде зафіксований у колі датчика?

2.48. На пластинку із п'єзоелектричного кварцу товщиною  $h=1$  мм перпендикулярно до її поверхні діє механічна напружка  $f = 10^5$  Н/м<sup>2</sup>. Визначити різницю потенціалів на протилежних гранях пластинки, якщо у напрямку дії сили п'єзомодуль має значення  $d = 2,3 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н. Діелектрична проникність кварцу  $\epsilon=4,6$ .

2.49. Спонтанна поляризація монокристалів титанату барію при кімнатній температурі  $0,25$  Кл/м<sup>2</sup>. Допускаючи, що причиною виникнення спонтанної поляризації є тільки зміщення іона титану із центра елементарної кубічної комірки, визначити це зміщення. Іон титану має заряд  $+4e$ , період кубічної ґратки  $0,4$  нм.

2.50. Для дослідження сегнетоелектричного кристала тригліцинсульфату тонку пластинку з нього помістили в плоский конденсатор з площею пластин  $10$  мм<sup>2</sup> та відстанню між пластинами  $1$  мм. При цьому виявилось, що за температури  $50^\circ\text{C}$  ємність такого конденсатора становить  $153$  пФ, а за температури  $56^\circ\text{C}$  –  $45$  пФ. Знайти за цими даними: а) діелектричну проникність за вказаних температур; б) температуру Кюрі-Вейса; в) сталу Кюрі-Вейса.

**ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ.  
КОНДЕНСАТОРИ**

**3.1. Короткі теоретичні відомості**

**А. Енергія електростатичного поля**

Енергія  $W$  точкового заряду  $q$ , який міститься в електростатичному полі з потенціалом  $\varphi$ , визначається як

$$W = q\varphi = \int \varphi dq. \quad (3.1)$$

Енергія заряду  $q$ , що перебуває в полі інших точкових зарядів  $q_1, q_2, q_3, \dots$  дорівнює добутку заряду  $q$  на результуючий потенціал поля всіх інших зарядів у точці, де перебуває заряд  $q$ , тобто:

$$W = kq \left( \frac{q_1}{\epsilon r_1} + \frac{q_2}{\epsilon r_2} + \dots \right) = \frac{kq}{\epsilon} \sum \frac{q_i}{r_i}, \quad (3.2)$$

де  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $r_i$  – відстані між зарядом  $q$  та зарядами  $q_i$ .

Енергія системи  $N$  взаємодіючих зарядів визначається формулою:

$$W = \frac{1}{2} \sum W_{ij} = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \left( \sum_{j=1}^{(N-1)} \varphi_j \right) = \frac{1}{2} k \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{\epsilon r_{ij}} \quad (i \neq j), \quad (3.3)$$

де  $W_{ij}$  – енергія  $j$ -го заряду в полі  $N-1$  інших зарядів.

Об'ємна густина енергії електростатичного поля дорівнює

$$w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0}, \quad (3.4)$$

де  $E$  – напруженість поля в середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon$ ,  $D$  – індукція поля.

Енергія електростатичного поля в довільному об'ємі простору

$$W = \int w(x,y,z) dV = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \int_V E^2 dV, \quad (3.5)$$

де  $w(x,y,z)$  – об'ємна густина енергії, яка є функцією координат.

### 3. Енергія електростатичного поля. Конденсатори

Повна електрична енергія системи з неперервним розподілом заряду (власна енергія) дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad (3.6)$$

де  $\rho$  – об'ємна густина заряду,  $\varphi$  – потенціал поля.

Енергія поля поверхневих зарядів дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS, \quad (3.7)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду.

Якщо два заряджених тіла створюють в навколишньому просторі електричне поле, перше – напруженості  $E_1$ , а друге –  $E_2$ , то повна енергія даної системи зарядів становитиме:

$$W = W_1 + W_2 + W_{1,2} = \int \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} dV + \int \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} dV + \int \frac{\varepsilon_0 E_1 E_2}{2} dV, \quad (3.8)$$

де  $W_1$  та  $W_2$  – власні енергії тіл, а  $W_{1,2}$  – енергія їх взаємодії.

Енергія диполя в зовнішньому електричному полі

$$W_\partial = -(\vec{P}_\partial \vec{E}) = -P_\partial E \cos \alpha, \quad (3.9)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами дипольного моменту  $\vec{P}$  і напруженості електричного поля  $\vec{E}$ .

Під енергією поля в діелектрику потрібно розуміти всю енергію, яку необхідно затратити на збудження електричного поля: вона складається із власної електростатичної енергії і тієї роботи, яка виконується при поляризації діелектрика. Робота поляризації об'єму  $V$  з вектором поляризації  $P$  дорівнює:

$$A = -\frac{1}{2} \int EP dV. \quad (3.10)$$

Об'ємна густина енергії у діелектрику

$$w = w_{\text{вл}} + w_n = \frac{ED}{2}, \quad (3.11 \text{ а})$$

тобто включає в себе власну енергію поля

$$w_{\text{вл}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (3.11 \text{ б})$$

та енергію, пов'язану з поляризацією діелектрика

### 3. Енергія електростатичного поля. Конденсатори

$$w_n = \frac{EP}{2}. \quad (3.11 \text{ в})$$

Енергія системи заряджених тіл та сила, що діє на систему, пов'язані співвідношенням:

$$\vec{F} = -\text{grad}W. \quad (3.12)$$

#### Б. Конденсатори

Для кожного відокремленого провідника відношення величини заряду  $q$  до потенціалу  $\varphi$  поверхні провідника є величина стала:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (3.13)$$

і називається електроємністю відокремленого провідника (або просто ємністю).

Система з двох провідників-обкладок, відокремлених прошарком діелектрика, називається конденсатором. Відношення абсолютної величини заряду до різниці потенціалів між обкладками називається електроємністю конденсатора, тобто

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (3.14)$$

Електроємність плоского, сферичного і циліндричного конденсаторів визначається формулами:

$$C_{\text{пл}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \quad (3.15 \text{ а})$$

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (3.15 \text{ б})$$

$$C_{\text{цил}} = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (3.15 \text{ в})$$

де  $S$  – площа пластин плоского конденсатора,  $d$  – відстань між ними,  $l$  – довжина циліндричного конденсатора,  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси циліндричних і сферичних обкладок, відповідно.

Електроємність відокремленої металічної сфери (кулі) радіуса  $R$  дорівнює

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R \quad (3.16 \text{ а})$$

Електроємність двопровідної лінії (два паралельні циліндричні провідники радіусами  $r$  і відстанню між їхніми осями –  $d$  та спільною довжиною  $l$ ), дорівнює

$$C = \frac{\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r}{r}\right)}, \quad (3.16 \text{ б})$$

якщо  $d \gg r$ , то  $C \cong \frac{\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (3.16 \text{ в})$

Електроємності батареї конденсаторів при їх паралельному та послідовному з'єднанні відповідно дорівнюють:

$$C_{\text{нар}} = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (3.17 \text{ а}) \quad \frac{1}{C_{\text{осц}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (3.17 \text{ б})$$

Електроємність плоского конденсатора, заповненого  $N$  шарами різних діелектриків з товщиною  $d_i$  кожний та відповідною діелектричною проникністю  $\epsilon_i$  (багатошаровий конденсатор), дорівнює

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\epsilon_i}}. \quad (3.18)$$

Сила взаємного притягання між різнойменно зарядженими пластинами плоского конденсатора

$$F = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon \epsilon_0}, \quad (3.19)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду на пластині,  $S$  – їх площа.

Різниця потенціалів між обкладками конденсаторів:

а) плоского  $U = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} d, \quad (3.20 \text{ а})$

де  $d$  – відстань між обкладками,  $\sigma$  – поверхнева густина зарядів на обкладках;

б) циліндричного  $U = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.20 \text{ б})$

де  $\tau$  – лінійна густина заряду на циліндрах,  $R_1$  та  $R_2$  – радіуси

внутрішньої і зовнішньої обкладок;

в) сферичного  $U = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.20 \text{ в})$

де  $q$  – заряд на обкладках,  $R_1$  та  $R_2$  – радіуси внутрішньої і зовнішньої обкладок.

Різниця потенціалів між довільною (уявною) поверхнею, яка перебуває між обкладками конденсатора  $U_x$ , та поверхнею однієї з обкладок (внутрішньою):

а) плоского  $U_x = U_0 \cdot \frac{x}{d}; \quad (3.21 \text{ а})$

б) циліндричного  $U_x = U_0 \cdot \frac{\ln \frac{x}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad (3.21 \text{ б})$

в) сферичного  $U_x = U_0 \cdot \frac{(1/R_1 - 1/x)}{(1/R_1 - 1/R_2)}. \quad (3.21 \text{ в})$

Енергія зарядженого ізолюваного провідника

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\phi}{2} = \frac{C\phi^2}{2}, \quad (3.22)$$

де  $q$ ,  $\phi$ ,  $C$  – відповідно, заряд на провіднику, потенціал і електроємність провідника.

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}, \quad (3.23)$$

де  $q$ ,  $U$ ,  $C$  – відповідно, заряд на одній із пластин конденсатора, напруга між обкладками конденсатора та його ємність.

### 3.2. Методичні вказівки і поради

#### А. Енергія електростатичного поля

Для визначення енергії точкового заряду, диполя, а також неперервного розподілу заряду в зовнішньому полі і діючих на них сил, використовують співвідношення, які визначають енергію точкового заряду, тобто формули (3.1), (3.2), (3.3),

диполя (формула 3.9), неперервного розподілу заряду (формули 3.6 і 3.7) та інші. Також використовують формулу (3.12), яка пов'язує енергію з силою, що діє на заряд чи систему зарядів.

При розрахунках власної електричної енергії заданого розподілу зарядів і енергії електричного поля цього заряду в об'ємі використовують формули (3.3), (3.6), (3.7).

### **Б. Конденсатори**

При розрахунку електроємності провідника довільної форми допускається наявність заряду  $q$  на провіднику і визначається потенціал  $\varphi$  провідника, всі точки якого є екіпотенціальними. Використовуючи формулу (3.13) і визначають електроємність провідника.

Для визначення електроємності конденсатора, заповненого однорідним ізотропним діелектриком, використовуються формули, які визначають електроємність конденсатора (формули 3.15 а, б, в та 3.16 а, б, в), заповненого одним або кількома однорідними діелектриками.

Найбільше значення мають задачі, в яких потрібно визначити зміну енергії внаслідок, наприклад, видалення або введення в конденсатор діелектрика, атакох при зміні відстані між обкладками та ін. При цьому слід мати на увазі два випадки:

1) конденсатор відключено від джерела напруги до проведення вказаних дій (при цьому заряд  $q$  на обкладках не змінюється);

2) конденсатор залишається весь час приєднаним до джерела (при цьому напруга  $U$  на обкладках конденсатора не змінюється).

У першому випадку енергія конденсатора змінюється тільки за рахунок роботи прикладених зовнішніх сил, тому збільшення енергії конденсатора однозначно відповідає додатній роботі зовнішніх сил, тобто  $\Delta W = W_2 - W_1 = A'$ . Тут  $\Delta W$  – зміна енергії конденсатора,  $W_2$  і  $W_1$  – відповідно кінцеве і початкове значення енергії конденсатора,  $A'$  – робота зовнішніх сил. У другому випадку зміна енергії конденсатора буде визначатись роботою зовнішніх сил  $A'$  та роботою джерела е.р.с.  $A_{дж}$  за рахунок зміни заряду конденсатора:  $\Delta W = A' + A_{дж}$ . У більшості випадків зміна

енергії  $\Delta W$  і робота джерела можуть бути визначені безпосередньо. Робота джерела буде визначатись згідно за формулою:  $A_{дж} = \Delta q U$ , де  $\Delta q = q_2 - q_1$  – зміна заряду конденсатора (кінцеве і початкове значення),  $U$  – напруга на обкладках конденсатора, яка підтримується сталою в результаті його з'єднання з джерелом напруги. Наведені формули можуть бути застосовані при умові, що вказані дії, наприклад видалення діелектрика, зміна відстані між обкладками конденсатора, відбуваються настільки повільно, що напруга залишається при цьому сталою. Ця умова пояснює, чому в наведених рівняннях, які є рівняннями енергетичного балансу, не враховуються втрати на Джоулеве тепло і енергію магнітного поля, які пропорційні квадрату сили струму. Будь-яке переміщення зарядів являє собою електричний струм, однак коли переміщення заряду до конденсатора (або від нього) відбувається з нехтовно малою швидкістю, то і сила струму є малою, тобто практично прямує до нуля. Допущення про повільність процесів, що зумовлює сталість напруги на обкладках конденсатора і рівність нулю струму у колі, необхідно вказати і використати.

### **3.3. Якісні задачі та запитання**

3.1. Додавши два поля з напруженостями  $\vec{E}_1$  та  $\vec{E}_2$ , дістали в невеликому об'ємі напруженість  $\vec{E}$ . Чи можна сказати, що енергія сумарного поля в цьому об'ємі дорівнює сумі енергій двох полів?

3.2. Який фізичний зміст має знак потенціальної енергії двох однойменних, різнойменних зарядів?

3.3. Повітряний конденсатор заряджають до деякої різниці потенціалів і в зарядженому стані заливають водою. Чому і в скільки разів зміниться енергія конденсатора?

3.4. Конденсатор, відстань між пластинами якого можна змінювати, має заряд  $q$ . Чи можна збільшити енергію конденсатора, не змінюючи його заряду?

3.5. Чи виконуємо ми роботу, виводячи рухомі пластини конденсатора змінної електроємності з нерухомих, під час настроювання приймача на бажану радіостанцію?

3.6. У заряджений конденсатор вставляють край пластинки з діелектрика. Що відбудеться, якщо пластинка стане вільною (тертя не враховувати)?

3.7. Чи зміниться електроємність конденсатора з плоскими обкладками, якщо посередині вставити дуже тонку металеву пластинку, розміри якої перевищують розміри обкладок конденсатора?

3.8. Електрон, який влетів у конденсатор з деякою швидкістю, при виході із нього має більшу швидкість. Як пояснити це явище з точки зору закону збереження енергії? Звідки береться „надлишок” кінетичної енергії в електрона?

### 3.4. Приклади розв’язування задач

**Задача 3.9.** Елементарна комірка кристала кухонної солі являє собою куб із стороною  $d=2,82 \cdot 10^{-10}$  м, у вершинах якого розміщені додатні іони натрію і від’ємні іони хлору. Приймаючи, що заряд іона дорівнює за абсолютною величиною заряду електрона ( $q=e$ ), визначити електростатичну енергію взаємодії іонів ізольованої елементарної комірки кристала.

**Розв’язання.** Енергія системи взаємодіючих зарядів визначається за формулою (3.3), тобто:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_j \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_j q_j \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i, \quad (a)$$

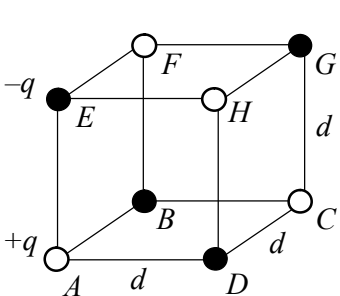


Рис. 3.1.

де  $\sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i$  – сумарний потенціал всіх семи зарядів окрім заряду  $q_j$  у точці, де перебуває даний заряд, а сума в формулі (a) складається із семи виразів, кожний з яких має такий вигляд:

$$\varphi_i = \sum_{i=1}^7 k \frac{q_i}{b_i}, \quad (б)$$

де  $b_i$  відстань від  $i$ -го до  $j$ -го зарядів;

$k \frac{q_i}{d_i}$  – потенціал у точці, де міститься  $j$ -й заряд, зумовлений  $i$ -м

зарядом (рис.3.1). Допустимо, що  $j$ -й заряд є позитивний іон у точці A. Відстань між іонами:

$$AB=AD=AE=d; AC=AH=AF=BG=\sqrt{2}d; AG = \sqrt{3}d, \quad (в)$$

а за умовою задачі:

$$q_A = q_C = q_H = q_F = +q, \text{ та } q_B = q_D = q_E = q_G = -q. \quad (г)$$

Потенціал у точці A, створюваний рештою сьома зарядами, дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_A &= k \left[ \frac{3(-q)}{d} + \frac{3(+q)}{\sqrt{2}d} + \frac{(-q)}{\sqrt{3}d} \right] = k \frac{q}{d} \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= k \frac{q}{d} \left( \frac{3\sqrt{3}(1-\sqrt{2})-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned} \quad (д)$$

Потенціал у точці B

$$\varphi_B = k \left[ \frac{3(+q)}{d} + \frac{3(-q)}{\sqrt{2}d} + \frac{q}{\sqrt{3}d} \right] = k \frac{q}{d} \left[ \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right] \quad (е)$$

Потенціали  $\varphi_C = \varphi_F = \varphi_H = \varphi_A$  та  $\varphi_D = \varphi_E = \varphi_G = \varphi_B$ . Сумарна електростатична енергія взаємодії іонів комірки, згідно з формулою (a), буде дорівнювати

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (4q_A \varphi_A + 4q_B \varphi_B) = 2(q_A \varphi_A + q_B \varphi_B) = 2[(+q)\varphi_A + (-q)\varphi_B] = \\ &= 2q(\varphi_A - \varphi_B) = 2qk \frac{q}{d} \left[ \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left( 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\ &= -4k \frac{q^2}{d} \left( \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right). \end{aligned} \quad (е)$$

Враховуючи, що  $q = |e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $d = 2,82 \cdot 10^{-10}$  м,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , знайдемо числове значення енергії елементарної

комірки кристала кухонної солі  $W = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж. Знак „-“, тобто від’ємне значення енергії, вказує на наявність сил притягання між іонами в елементарній комірці кухонної солі.

Умову даної задачі можна видозмінити зміною конфігурації в розміщенні зарядів та їх величини. Наприклад, обчислити

енергію взаємодії системи електричних зарядів кубічної конфігурації, але у вершинах куба розміщені негативні заряди, величина кожного з яких дорівнює заряду електрона, а в центрі куба міститься позитивний заряд величиною  $2e$ ; ребро куба  $d$  (відповідь у такому випадку  $W = \frac{4,32e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$ ).

**Задача 3.10.** Металева куля радіуса  $R=3\text{см}$  має заряд  $q = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мкКл}$ . Куля оточена шаром парафіну ( $\epsilon = 2$ ) товщиною  $d=2\text{см}$ . Визначити енергію електричного поля, яка зосереджена в шарі діелектрика.

**Р о з в' я з а н н я.** Оскільки поле в шарі діелектрика є неоднорідним, то й енергія поля в шарі діелектрика розподілена нерівномірно. Однак об'ємна густина енергії буде однакою у всіх

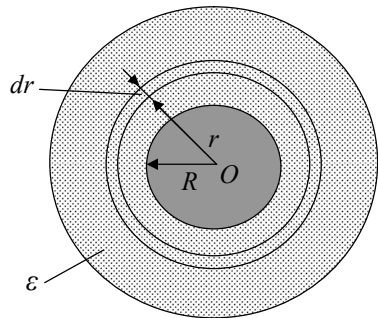


Рис. 3.2.

точках, які перебувають на однакових відстанях від центра сфери, оскільки поле зарядженої кулі характеризується сферичною симетрією. Для розв'язання задачі виразимо енергію у сферичному шарі діелектрика товщиною  $dr$ :

$$dW = w \cdot dV = w \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (a)$$

де  $w$  – об'ємна густина енергії,  $dV$  – об'єм сферичного шару діелектрика (рис.3.2). Об'ємна густина енергії визначається формулою:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2, \quad (б)$$

де  $E$  – напруженість поля всередині шару діелектрика

$$E = k \frac{q}{\epsilon r^2}, \quad (в)$$

а

$$w = \frac{1}{2} k^2 \epsilon_0 \frac{q^2}{\epsilon r^4}. \quad (г)$$

Підставивши вираз (г) у формулу (а) для повної енергії діелектричного шару отримаємо:

$$W = \int_V w dV = \int_R^{R+d} w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\epsilon_0 k^2 q^2}{\epsilon} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 k^2 q^2}{\epsilon} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{(R+d)} \right] = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \epsilon} \cdot \frac{d}{R(R+d)}. \quad (д)$$

Обчислення дають, що  $W = 1,2 \cdot 10^{-5}$  Дж.

Дану задачу можна розширити, наприклад, визначивши енергію поля поза шаром діелектрика.

**Задача 3.11.** Плоский повітряний конденсатор ( $\epsilon=1$ ,  $d_1=0,3\text{см}$ ,  $S=200\text{ см}^2$ ) заряджений до постійної різниці потенціалів  $U=600\text{ В}$ . Яку роботу потрібно виконати зовнішнім силам, щоб збільшити відстань між обкладками до  $d_2=0,5\text{ см}$ . Розглянути два випадки: 1) заряджений конденсатор відключений від джерела е.р.с. при переміщенні пластини; 2) конденсатор залишається підключеним до джерела е.р.с. Як зміниться об'ємна густина енергії електричного поля до і після розсування обкладок?

**Р о з в' я з а н н я.** 1-й випадок. Якщо заряджений конденсатор відключений від джерела е.р.с. (рис. 3.3), то заряд на його обкладках не буде змінюватись при зміні відстані між пластинками, але буде змінюватись електроємність конденсатора і, відповідно, змінюватиметься згідно з формулою (3.23) енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} d. \quad (a)$$

За рахунок роботи зовнішньої сили проти сил притягання між зарядженими обкладками при їх переміщенні збільшується енергія конденсатора, тоді

$$A_1 = \Delta W_1 = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (d_2 - d_1) \quad (б).$$

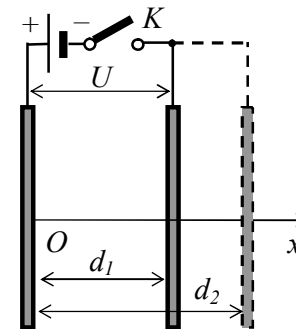


Рис. 3.3

Заряд на конденсаторі

$$q = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U \quad (\text{в})$$

залишається незмінним. Тоді підстановка виразу (в) у формулу (б) приводить до такого виразу для виконаної зовнішніми силами роботи:

$$A_1 = \frac{(C_1 U)^2}{2\varepsilon_0 S} (d_2 - d_1) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1^2} (d_2 - d_1) \cong 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ (Дж)}.$$

2-й випадок. На обкладках конденсатора підтримується стала напруга ( $U = \text{const}$ ), а заряд на обкладках буде змінюватись. Однорідність поля між обкладинками конденсатора дозволяє визначити силу притягання  $F$  пластин. При розсуванні пластин конденсатора зовнішня сила  $F$  дорівнює і протилежна силі притягання, а її робота дорівнює

$$A_2 = \int_{d_1}^{d_2} F dx. \quad (\text{г})$$

З іншого боку, роботу зовнішніх сил можна визначити із рівняння енергетичного балансу:

$$\Delta W_2 = A_2 + A_{\text{дж}}, \quad (\text{д})$$

де  $\Delta W_2$  – зміна енергії конденсатора,  $A_{\text{дж}}$  – робота джерела напруги. Зміна енергії конденсатора визначається за формулою (3.23), тобто:

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2} (C_2 - C_1) U^2, \quad (\text{е})$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – відповідно початкова і кінцева електроємності конденсатора. Робота джерела струму

$$A_{\text{дж}} = \Delta q U, \quad (\text{є})$$

де  $\Delta q$  – заряд, що протікає через джерело напруги і дорівнює зміні заряду на обкладках. Знак роботи визначається знаком  $\Delta q$  і робота джерела напруги позитивна, коли заряд переходить на обкладки конденсатора, і в цьому випадку  $\Delta q > 0$ . Таким чином другий випадок задачі можна розв'язати двома способами.

1-й спосіб. Поле між пластинами конденсатора однорідне і

$$F = q E_1, \quad (\text{ж})$$

де  $E_1$  – напруженість поля, створюваного однією із пластин;  $q$  – заряд другої пластини. Напруженість поля  $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ , звідки  $q = 2\varepsilon_0 S E_1$ , а сила  $F$ , згідно з формулою (ж) дорівнює

$$F = 2\varepsilon_0 S E_1^2. \quad (\text{з})$$

Напруженість поля однієї пластинки вдвічі менша віднапруженості  $E$  між обкладками конденсатора. Завдяки однорідності поля між обкладинками конденсатора  $U_0 = E d = 2 E_1 d$ , звідки  $E_1 = \frac{U_0}{2d}$ . Підставивши даний вираз у (з),

отримаємо, що  $F = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2d^2}$ . Використавши вираз (г), взявши вісь

$Ox$  в напрямку переміщення однієї пластини конденсатора, отримаємо:

$$A_2 = \int_{d_1}^{d_2} F dx = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right). \quad (\text{и})$$

2-й спосіб. Із рівняння (д) робота  $A_2 = \Delta W_2 - A_{\text{дж}}$ . Оскільки  $U_0 = \text{const}$ , то зміна заряду конденсатора  $\Delta q = (C_2 - C_1) U_0$ , а робота джерела струму:

$$A_{\text{дж}} = \Delta q U_0 = (C_2 - C_1) U_0^2. \quad (\text{і})$$

Використавши вирази (є) та (і), отримаємо:

$$A_2 = -\frac{(C_2 - C_1)}{2} U_0^2.$$

Зміна електроємності конденсатора

$$(C_2 - C_1) = \varepsilon_0 S \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right),$$

тоді  $A_2 = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$ , яка аналогічна формулі (и).

Обчислення дають, що  $A_2 = -4,2 \cdot 10^{-6}$  (Дж).

Зауваження. При використанні цих методів необхідно допустити повільний рівномірний рух пластин. Це дозволяє вважати, що зовнішня сила за модулем дорівнює силі взаємодії пластин (перший випадок) і не враховувати втрати енергії на

джоулеве тепло та магнітну енергію (другий випадок). При зміні електроємності зарядженого конденсатора електричні сили виконують роботу, що дорівнює зменшенню енергії конденсатора у випадку сталості заряду на його пластинах, і дорівнює приростові енергії конденсатора у випадку сталості напруги на пластинах.

Об'ємна густина енергії електростатичного поля обчислюється за формулою:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U}{d} \right)^2.$$

До зміни відстані між пластинами:

$$w_{\text{поч}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U_1^2}{d_1^2},$$

а після їх розсування:

$$w_{\text{кінець}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U_2^2}{d_2^2}.$$

Згідно з умовою задачі  $d_2 = \kappa \cdot d_1$ ,  $\kappa = 5/3$ .

У першому випадку,  $q = \text{const}$ , і  $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$ . Тоді із умови  $\frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} U_2$  можна визначити, що

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 1000 \text{ (В)},$$

$$\text{а } w_{1\text{кінець}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_2}{d_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_1}{d_1} \right)^2 = w_{1\text{поч}},$$

тобто об'ємна густина енергії конденсатора при цьому не змінюється.

У другому випадку,  $U_0 = U_1 = U_2$ , а  $w_{2\text{поч}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_1}{d_1} \right)^2$  та

$$w_{2\text{кінець}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_2}{d_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_1}{\kappa d_1} \right)^2 = \frac{w_{2\text{поч}}}{\kappa^2}.$$

Обчислення дають, що  $w_{2\text{поч}} = 0,54 \text{ Дж/м}^3$ , а  $w_{2\text{кінець}} = 0,127 \text{ Дж/м}^3$ .

**Задача 3.12.** Батарея з двох послідовно з'єднаних конденсаторів електроємністю  $C_1 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$  і  $C_2 = 13 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$  заряджається до різниці потенціалів  $U = 1800 \text{ В}$ . Потім конденсатори, не розряджаючи, відключають від джерела е.р.с. і сполучають паралельно так, що обкладки, заряджені однойменно, з'єднуються між собою. Визначити, яка кількість тепла виділяється при цьому в розряді.

**Р о з в' я з а н н я.** За умовою задачі при переключенні конденсаторів обкладки, заряджені однойменно, з'єднуються між собою. При цьому кожна пара з'єднаних між собою обкладок матиме заряд  $2q_0$ , де  $q_0$  – заряд, який був на кожній обкладці конденсаторів, з'єднаних послідовно. Батарея паралельно з'єднаних конденсаторів має більшу електроємність, ніж батарея послідовно з'єднаних конденсаторів. Тому при переключенні відбудеться частковий перерозподіл зарядів між конденсаторами, при якому зміниться напруга на обкладках кожного конденсатора і, відповідно, енергія системи.

Роботу розряду визначимо як різницю енергій  $W_1$  (до переключення конденсаторів) і  $W_2$  (після переключення конденсаторів). Енергія до переключення заряджених конденсаторів визначається так:

$$W_1 = \frac{C' U^2}{2}, \quad (\text{а})$$

$$\text{де } C' = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)}. \quad (\text{б})$$

Підставивши значення  $C'$  у формулу (а), матимемо:

$$W_1 = \frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (\text{в})$$



Енергію паралельно з'єднаних конденсаторів виразимо через заряд на їх обкладках  $q$ :

$$W_2 = \frac{q^2}{2C''}, \quad (г)$$

де  $q = 2q_0$  і  $C'' = C_1 + C_2$ . (д)

Заряд  $q_0$  визначається з основного співвідношення:  $q_0 = C'U$ , і після використання формули (б), матиме вигляд:

$$q_0 = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} U. \quad (е)$$

Тоді, підставивши в рівняння (г) значення  $C''$  та  $q$ , а потім і  $q_0$  із формул (д) та (е), отримаємо вираз:

$$W_2 = \frac{2(C_1 C_2)^2}{(C_1 + C_2)} U^2. \quad (є)$$

Отже, кількість тепла  $Q$ , яка виділяється в іскрі, при переключенні конденсаторів:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C_1 C_2 (C_1 - C_2)^2}{2(C_1 + C_2)} U^2. \quad (ж)$$

Обчислення дають, що  $Q \cong 4,3 \cdot 10^{-22}$  Дж.

**Задача 3.13.** Визначити електроємність двох прямолінійних циліндричних провідників, відстань між осями яких  $2d$ , а радіус кожного провідника  $R$ . Впливом земної поверхні на електроємність можна знехтувати.

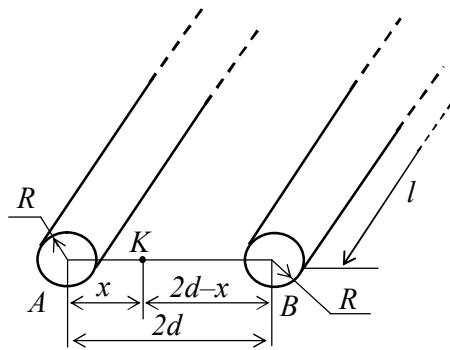


Рис. 3.4.

**Розв'язання.** Для визначення електроємності системи циліндричних провідників необхідно визначити різницю потенціалів між провідниками. Нехай на провіднику  $A$  є заряд з лінійною густиною  $+\tau$ , а на провіднику  $B$   $-\tau$  (рис. 3.4). Напруженість поля в точці  $K$  на прямій, що з'єднує осі провідників, визначається

за формулою:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0(2d-x)}.$$

Різниця потенціалів між провідниками визначається інтегралом:

$$U = \int_R^{2d-R} E dx = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \int_R^{2d-R} \frac{dx}{x} + \int_R^{2d-R} \frac{dx}{(2d-R)} \right] = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{(2d-R)}{R}. \quad (а)$$

Електроємність одиниці довжини провідників, дорівнює

$$C = \frac{C_1}{l} = \frac{\tau l}{Ul} = \frac{\tau}{U} = \frac{\tau}{\frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{(2d-R)}{R}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{(2d-R)}{R}}. \quad (б)$$

**Задача 3.14.** Плоский конденсатор, площа кожної пластинки якого  $400 \text{ см}^2$ , заповнено двома шарами різних діелектриків. Межа між ними паралельна обкладкам. Товщина першого шару  $0,2 \text{ см}$  ( $\epsilon_1 = 2$ ), а другого  $0,3 \text{ см}$  ( $\epsilon_2 = 7$ ). Визначити електроємність такого конденсатора.

**Розв'язання.** Дану задачу можна розв'язати двома методами.

**1-й метод.** В конденсаторі електричне поле практично локалізоване між його обкладками і створюється зарядами  $+q$  та  $-q$  на відповідних обкладках (рис. 3.5). Напряга між обкладками конденсатора дорівнює сумі напруг на кожному шарі:

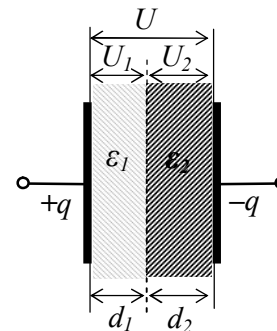


Рис. 3.5.

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} d_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right). \quad (а)$$

Електроємність конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} = \frac{\epsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)}. \quad (б)$$

2-й метод. На межі розділу діелектриків можна уявити безмежно тонку металічну пластинку. Тоді двошаровий конденсатор можна розглядати як два послідовно включені конденсатори і, використавши формулу (3.17 б), визначити електроємність такого конденсатора:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ , звідки:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad \text{а} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} \quad \text{та} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}. \quad (\text{в})$$

Після підстановки значення  $C_1$  та  $C_2$  одержимо вираз:

$$C = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}}{\left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2} \right)} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}, \quad (\text{г})$$

який аналогічний виразу (б). Отриману формулу можна поширити для  $N$  шарів діелектриків між обкладками конденсатора і отримати формулу (3.18):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\varepsilon_i}}, \quad \text{або вираз для одного шару: } d_1 + d_2 = d, \quad \text{та } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Тоді  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ , що збігається з формулою (3.15 а).

### 3.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

3.15. Три точкових заряди розміщені у вершинах трикутника ABC із сторонами  $AB=0,3$  м,  $BC=0,5$  м, та  $AC=0,6$  м. Середовище між зарядами заповнене гасом, а заряди мають величини:  $q_A = +3$  мкКл,  $q_B = +5$  мкКл,  $q_C = -6$  мкКл відповідно. Визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб віддалити заряди один від одного на відстані, при яких їхньою взаємодією можна знехтувати.

3.16. У необмеженому лінійному ланцюжку точкових зарядів, модуль яких  $q$ , знаки по чергово змінюються. Визначити енергію взаємодії довільного заряду цього ланцюжка з усіма іншими. Відстань між сусідніми зарядами  $\pm q$  дорівнює  $a$ .

3.17. Визначити сумарну енергію взаємодії однакових за величиною точкових зарядів  $q$ , розміщених у вершинах квадрата із стороною  $a$  в системах: а) всі чотири заряди однойменні (позитивні); б) два заряди у вершинах вздовж діагоналі позитивні, а вздовж іншої діагоналі – негативні; в) два заряди з однієї сторони квадрата позитивні, а з протилежної сторони – негативні. Яка з цих трьох конфігурацій розміщення точкових зарядів у вершинах квадрата відповідає мінімальній енергії?

3.18. Точковий заряд  $q$  розташований на відстані  $a$  від безмежної провідної площини. Знайти: а) енергію взаємодії цього заряду із зарядами, індукованими на площині; б) власну енергію зарядів, індукованих на площині.

3.19. Система складається із двох концентричних тонких металевих оболонок з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , відповідними зарядами  $q_1$  і  $q_2$ . Знайти власну енергію  $W_1$  і  $W_2$  кожної оболонки, енергію взаємодії  $W_{12}$  оболонок і повну електричну енергію  $W$  системи.

3.20. Заряд  $q$  розподілений рівномірно в об'ємі кулі радіуса  $R$ . Приймаючи, що діелектрична проникність дорівнює 1, знайти: а) електричну енергію  $W_1$ , зосереджену всередині кулі; б) відношення енергії  $W_1$  всередині кулі до енергії  $W_2$  в навколишньому просторі за межами кулі.

3.21. Точковий заряд  $3$  мкКл розташований в центрі кульового шару з однорідного діелектрика з проникністю, яка дорівнює 3. Внутрішній радіус шару  $a=250$  мм, зовнішній  $b=500$  мм. Знайти електричну енергію в даному шарі.

3.22. Площа пластин плоского повітряного конденсатора  $100$  см<sup>2</sup>. Визначити густину енергії поля  $w$  конденсатора, якщо сила притягання між пластинами  $30$  мН.

3.23. Три конденсатори ємностями  $2$  мкФ,  $4$  мкФ,  $6$  мкФ з'єднані послідовно і підключені до джерела з е.р.с.  $100$  В. Визначити енергію другого конденсатора, першого конденсатора та батареї конденсаторів.

3.24. Між пластинами зарядженого плоского конденсатора міститься твердий діелектрик. Визначити густину енергії електричного поля всередині конденсатора, якщо тиск, створений пластинами на діелектрик, дорівнює  $2$  Па. Якою буде енергія зарядженого конденсатора, якщо площа його пластин  $10$  см<sup>2</sup>, а відстань між пластинами  $5$  мм.

3.25. У просторі між обкладками плоского конденсатора, площа яких  $100 \text{ см}^2$ , розміщена плоскопаралельна скляна пластинка. Визначити: а) тиск, який створюють обкладки конденсатора на діелектрик; б) силу, яку необхідно прикласти до обкладок, щоб відірвати їх від діелектрика. Об'ємна густина енергії електричного поля дорівнює  $2,9 \text{ Дж/м}^3$ .

3.26. Простір між пластинами плоского конденсатора, площа яких  $100 \text{ см}^2$ , заповнено діелектриком ( $\epsilon=5$ ). Відстань між пластинами  $2 \text{ мм}$ . Визначити енергію конденсатора і силу притягання між пластинами, якщо: а) конденсатор відключено від джерела напруги після того, як йому надали заряд  $5 \text{ нКл}$ ; б) конденсатор підключено до джерела постійної напруги  $280 \text{ В}$ .

3.27. Плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого  $2 \text{ мм}$ , одним кінцем занурено в спирт. На яку висоту підніметься спирт, якщо до конденсатора прикласти напругу  $3 \text{ кВ}$ ? Чи можна використати даний конденсатор, як вольтметр? Запропонуйте конструкцію такого вольтметра і яке рівняння шкали буде для даного вольтметра?

3.28. Капілярний вольтметр складається з капілярної скляної трубки з металізованою напівпрозорою внутрішньою поверхнею, яка служить однією з обкладок циліндричного конденсатора. Другою обкладкою є тонка металічна дротина, коаксіальна з внутрішньою циліндричною поверхнею трубки. Визначити висоту підняття меніска води  $h$  вольтметра при прикладанні до обкладок напруги  $100 \text{ В}$ , якщо внутрішній діаметр капіляра  $0,5 \text{ мм}$ , діаметр дротини  $0,05 \text{ мм}$ , а густина води  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

3.29. Нерухомі пластинки конденсатора змінної ємності перебувають у деякому середньому положенні. Який момент сили  $M$  діє (внаслідок взаємодії зарядів на пластинках) на систему рухомих пластинок конденсатора при різниці потенціалів між пластинками  $300 \text{ В}$ , якщо число “робочих” проміжків між пластинами конденсатора дорівнює  $20$ ? Кожна пластинка має форму півкола радіуса  $8 \text{ см}$  і відстань між пластинками  $0,5 \text{ мм}$ .

3.30. Сферична оболонка заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma$ . Скориставшись законом збереження енергії, знайти модуль електричної сили, яка діє на одиницю поверхні оболонки.

3.31. Під кутом  $\alpha=10^\circ$  до пластин плоского конденсатора, на який подано постійну різницю потенціалів  $U=180 \text{ В}$ , влітає електрон. Довжина пластин  $6 \text{ см}$ , відстань між ними  $1 \text{ см}$ . Визначити швидкість електрона, якщо відомо, що електрон при виході з конденсатора рухається паралельно до його пластин.

3.32. Електрон відірвався від середини металевго стрижня діаметром  $0,1 \text{ мм}$  і довжиною  $1 \text{ м}$ . На стрижні рівномірно розподілений заряд  $q$ . Визначити величину цього заряду, вважаючи початкову швидкість електрона малою, якщо його кінетична енергія на відстані  $2 \text{ см}$  від стрижня дорівнює  $4 \text{ пДж}$ .

3.33. Різниця потенціалів  $60 \text{ кВ}$  на батареї з  $5$  послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю  $400 \text{ пФ}$  кожний підтримується сталою. При цьому один із конденсаторів пробивається. Визначити: а) зміну енергії батареї; б) роботу розряду; в) роботу джерела напруги.

3.34. Протон і електрон, як точкові заряди, розташовані на відстані  $5 \cdot 10^{-9} \text{ см}$ . Знайти об'ємну густина енергії електричного поля в точці, яка лежить посередині між зарядами. Яка енергія їх взаємодії?

3.35. Між пластинами плоского конденсатора паралельно введено металеву пластинку товщиною  $1 \text{ см}$ . Визначити ємність конденсатора, якщо відстань між його пластинами  $2 \text{ см}$ , площа кожної пластини  $100 \text{ см}^2$ . Якою буде різниця потенціалів між пластинами, якщо заряд на пластинах конденсатора  $5 \text{ мкКл}$ ? Як зміниться ємність конденсатора, якщо вийняти металеву пластинку? Яка була енергія зарядженого конденсатора до виймання металеві пластинки та якою вона стане після виймання?

3.36. Знайти електроємність відокремленої металеві кулі радіуса  $5 \text{ см}$ . Який буде потенціал кулі, якщо її зарядити зарядом  $10 \text{ мкКл}$ ? Якою буде електроємність даної кулі, якщо її наполовину занурити в гас, воду, спирт відповідно?

3.37. Два довгих паралельних провідники, діаметром  $2 \text{ см}$  кожен, заряджені з лінійною густиною заряду  $+\tau$  та  $-\tau$ , перебувають на відстані  $20 \text{ см}$  один від одного. Визначити електроємність, що припадає на одиницю довжини провідників у повітрі та в трансформаторному маслі. Якою буде енергія одиниці довжини такого конденсатора, якщо його зарядити до

напруги 100 В і яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити відстань між провідниками вдвічі?

3.38. Дві кульки радіусами 5 см розташовані на відстані 0,5 м одна від одної в середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon = 6$ . Знайти їхню електроємність. Якою буде енергія такого конденсатора, якщо до кульок прикласти різницю потенціалів 50 В, і яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити відстань між кульками до 1 м?

3.39. Радіус внутрішньої сфери повітряного конденсатора 9 см, зовнішньої – 10 см. Зовнішня сфера заземлена, а внутрішня має потенціал 5 кВ. Якщо в простір між сферами налити трансформаторне масло, напруга на конденсаторі спаде. Щоб одержати попереднє значення напруги, внутрішній сфері необхідно додатково надати заряд  $\Delta q$ . Визначити величину цього заряду та зміну енергії конденсатора при цьому.

3.40. Десять заряджених кульок ртуті радіуса 1 мм із зарядом 70 фКл кожна зливаються в одну велику кулю. Визначити потенціал утвореної кулі, її електроємність та енергію.

3.41. Конденсатор складається з трьох пластин площею  $6 \text{ см}^2$  кожна, розділених двома шарами слюди, кожний товщиною 0,1 мм. Крайні пластини з'єднані між собою. Яка електроємність такого конденсатора?

3.42. Два конденсатори зарядили до напруги відповідно 300 В і 100 В та з'єднали паралельно. Знайти відношення ємностей  $C_1/C_2$ , якщо різниця потенціалів між обкладками конденсаторів стала дорівнювати 250 В.

3.43. Конденсатор ємністю 1 мкФ, заряджений до напруги 110 В, підключили паралельно до кінців системи з двох послідовно з'єднаних незаряджених конденсаторів, ємності яких 2 мкФ та 3 мкФ. Який заряд пройде при цьому у з'єднувальних провідниках? Чи виконується закон збереження енергії конденсаторів після підключення до першого конденсатора незаряджених двох конденсаторів?

3.44. Три конденсатори ємностями 2 мкФ, 3 мкФ, 4 мкФ з допустимими напругами 1000 В, 450 В, 250 В, відповідно, з'єднані послідовно в батарею. Яку найбільшу напругу можна подати на таку батарею конденсаторів? Чому дорівнює електроємність батареї?

3.45. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнена послідовно двома діелектричними шарами 1 та 2 з товщинами  $d_1$  і  $d_2$  та проникностями  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ . Площа кожної обкладки дорівнює  $S$ . Знайти: а) електроємність конденсатора; б) густину поверхневих зв'язаних зарядів  $\sigma'$  на межі розділу діелектричних шарів, якщо напруга на конденсаторі дорівнює  $U$  і електричне поле напрямлено від шару 1 до шару 2.

3.46. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено ізотропним діелектриком, проникність  $\epsilon$  якого змінюється в перпендикулярному до обкладок напрямку за лінійним законом від  $\epsilon_1$  до  $\epsilon_2$ , причому  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . Площа кожної обкладки  $S$ , відстань між ними  $d$ . Знайти електроємність конденсатора.

3.47. Знайти ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладок якого дорівнюють  $a$  і  $b$ , причому  $a < b$ , якщо простір між обкладками заповнено: а) однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ ; б) діелектриком, проникність якого залежить від відстані  $r$  до центра конденсатора як  $\epsilon = \kappa/r$ , де  $\kappa$  – стала величина.

3.48. Те ж саме, що і в задачі 3.47, але конденсатор циліндричний довжиною  $l$  і в пункті б)  $r$  – відстань до осі системи. Крайовими ефектами знехтувати.

3.49. Довгий прямий провідник розміщений паралельно безмежній провідній площині. Радіус перерізу провідника  $a$ , відстань між віссю провідника і провідною площиною  $b$ . Знайти взаємну ємність даної системи на одиницю довжини провідника за умови, що  $a \ll b$ .

3.50. Визначити взаємну електроємність системи, що складається із металічної кульки радіуса  $a$  і безмежної провідної площини, і перебуває від центра кульки на відстані  $l$ , якщо  $l \gg a$ .

3.51. Конденсатор ємності  $C_1 = 1,0$  мкФ витримує напругу не більше 6,0 кВ, а конденсатор ємності  $C_2 = 2,0$  мкФ – не більше 12 кВ. Яку напругу може витримати система із цих двох конденсаторів при їх послідовному з'єднанні, при паралельному з'єднанні?

3.52. Два конденсатори зарядили до напруг  $U_1 = 200$  В і  $U_2 = 50$  В відповідно та з'єднали паралельно. Чому стала дорівнювати різниця потенціалів між обкладками, якщо  $C_1 = 2C_2$ ?

3.53. Ебонітова куля радіуса  $R$  рівномірно заряджена електрикою з об'ємною густиною заряду  $\rho$ . Сфера якого радіуса  $R_1$  ділить кулю на дві частини, енергії яких однакові?

3.54. Конденсатор електроємністю  $C_1 = 2$  мкФ, заряджений до напруги  $U_1 = 600$  В, приєднали паралельно до незарядженого конденсатора електроємністю  $C_2 = 1$  мкФ. Скільки виділиться енергії при утворенні іскри, яка проскочила при сполученні конденсаторів?

3.55. Використавши початкові умови задачі 3.11, не змінюючи відстань між пластинами, визначити зміну енергії конденсатора і роботу сил поля при заповненні конденсатора рідким діелектриком ( $\varepsilon = 4$ ). Розглянути обидва випадки.

3.56. Знайти енергію, зосереджену в циліндричному двошаровому конденсаторі довжиною  $l$ , обкладки якого мають заряд  $q$ . Внутрішній і зовнішній радіуси циліндрів конденсатора дорівнюють  $r_1$  та  $r_2$ , а діелектричні проникності внутрішнього та зовнішнього шарів  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ , радіус межі між двома шарами  $a$ .

3.57. Розжарена нитка-катод радіолампи випускає електрони, які під дією електричного поля прискорено рухаються до циліндричного анода, вісь симетрії якого збігається з віссю катода. Циліндр і нитка зроблені з одного і того ж металу. Їх діаметри відповідно 10 та 0,1 мм. Напруга між циліндром і ниткою дорівнює 91 В. Початкова швидкість електронів, що вилітають з нитки-катода, мала. Визначити прискорення і швидкість електронів у точці, яка перебуває від нитки на відстані 3,5 мм.

3.58. Три електрони в стані спокою розміщені у вершинах правильного трикутника із стороною  $a = 1$  см. Вони починають рухатись під дією взаємного відштовхування. Визначити їх максимальну швидкість.

3.59. Прямий дуже довгий циліндр радіуса  $R=10$  см рівномірно заряджений електрикою з поверхневою густиною заряду  $\sigma = 1 \cdot 10^{-12}$  Кл/м<sup>2</sup>. Циліндр є джерелом електронів, які з нього вилітають. Вектор швидкості електронів перпендикулярний поверхні циліндра. Яка повинна бути швидкість електронів, які вилітають із поверхні, щоб вони змогли віддалитись від осі циліндра на відстань  $r_0=10^3$  м?

## ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

## 4.1. Короткі теоретичні відомості

Під електричним струмом розуміють напрямлений рух заряджених частинок. Кількісною характеристикою електричного струму є сила струму  $I$  та густина струму  $j$ .

Сила електричного струму  $I$  вимірюється кількістю електричного заряду  $q$ , що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу, тобто є скалярною величиною:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (4.1)$$

або для постійного струму:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (4.2)$$

Густина струму є відношення сили струму  $I$  до площі поперечного перерізу  $S$  провідника, перпендикулярного до напруженості електричного поля в ньому. Густина струму – величина векторна. Напрямок її збігається з напрямком напруженості поля. Числове значення густини струму в загальному вигляді визначається формулою:

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (4.3)$$

а для струму, який рівномірно розподілений у поперечному перерізі провідника:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (4.4)$$

Опір провідника  $R$ , довжина якого  $l$  і площа поперечного перерізу  $S$ , визначається формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.5)$$

де  $\rho$  – питомий опір матеріалу провідника. Величина, обернена до опору провідника, називається його провідністю  $A$ :

$$A = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} = \lambda \frac{S}{l}, \quad (4.6)$$

де  $\lambda = \rho^{-1}$  – питома провідність матеріалу провідника.

Закон Ома для однорідної ділянки кола:

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} = \frac{U}{R}, \quad (4.7)$$

де  $\varphi_2 - \varphi_1 = U$  – різниця потенціалів між кінцевими перерізами ділянки провідника.

У диференціальній формі закон Ома для ділянки кола має вигляд:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad (4.8)$$

де  $E$  – напруженість електричного поля. У загальному випадку  $\lambda$  є тензорною величиною і тільки для ізотропних середовищ характеризується одним значенням.

Закон Ома для повного кола:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (4.9)$$

де  $\mathcal{E}$  – електрорушійна сила (е.р.с.),  $r$  – внутрішній опір джерела струму.

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола:

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + \sum_i \mathcal{E}_i}{\sum_j R_j}, \quad (4.10)$$

де  $\varphi_2 - \varphi_1$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки,  $\sum_i \mathcal{E}_i$  – алгебраїчна сума всіх е.р.с., які містяться на даній ділянці,  $\sum_j R_j$  – сума всіх опорів ділянки.

При паралельному сполученні  $n$  однакових елементів (з е.р.с.  $\mathcal{E}$  і внутрішнім опором  $r$  кожний) сила струму в електричному колі дорівнює:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}. \quad (4.11)$$

При послідовному сполученні  $n$  однакових елементів сила струму дорівнює:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}. \quad (4.12)$$

При мішаному сполученні в  $k$  паралельних рядів по  $m$  послідовно сполучених елементів ( $mk = n$ ) сила струму дорівнює:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{kR + mr}. \quad (4.13)$$

Опір кола, що складається з послідовно сполучених ділянок з опором  $R_1, R_2, \dots$ :

$$R = R_1 + R_2 + \dots = \sum_i R_i. \quad (4.14)$$

Опір системи паралельно ввімкнених провідників з опором  $R_1, R_2, \dots$ :

$$R = \frac{I}{\sum_i \frac{I}{R_i}}. \quad (4.15)$$

Для розрахунку струмів, спадів напруг та опорів складних кіл, які містять розгалуження і кілька контурів, використовують правила Кірхгофа.

Перше правило Кірхгофа (правило вузлів): алгебраїчна сума всіх струмів у точці розгалуження дорівнює нулю:

$$\sum_j I_j = 0. \quad (4.16)$$

Друге правило Кірхгофа (правило контурів): в усякому замкненому контурі будь-якого складного кола сума всіх спадів напруг дорівнює сумі всіх е.р.с., які діють у цьому контурі, тобто:

$$\sum_m I_m R_m = \sum_j \mathcal{E}_j. \quad (4.17)$$

Робота  $A$  електричних сил на ділянці кола з опором  $R$ :

$$A = qU = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (4.18)$$

Повна робота джерела струму в усьому замкненому колі:

$$A_3 = \mathcal{E} I t. \quad (4.19)$$

Якщо за рахунок енергії струму не виконується механічна робота та не відбуваються хімічні процеси, то вся робота переходить у тепло, яке обчислюється за формулою Джоуля–Ленца:

$$Q = qU = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (4.20)$$

У диференціальній формі закон Джоуля-Ленца має вигляд:

$$w = \lambda E^2 = jE = \rho j^2, \quad (4.21)$$

де  $w$  – кількість тепла, яка виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму провідника.

Коефіцієнт корисної дії (к.к.д.)  $\eta$  джерела струму:

$$\eta = \frac{A}{A_3} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r}. \quad (4.22)$$

К.к.д. лінії електропередачі від джерела до споживача:

$$\eta = \frac{U_{cn}}{U_{джс}} = \frac{R_{cn}}{R_{cn} + R_l}, \quad (4.23)$$

де  $R_{cn}$  – опір споживача електроенергії,  $R_l$  – опір лінії передачі.

У деяких електричних колах, які крім резисторів, містять конденсатори і (або) котушки, струми не є постійними у часі, але мають однакоке значення у всіх частинах кола. Такі струми називають квазістаціонарними. У найбільш простому випадку для кола, яке містить джерело постійної е.р.с.  $\varepsilon$ , резистор опором  $R$  та конденсатор ємністю  $C$  заряд конденсатора у процесі його зарядки і розрядки змінюється за такими залежностями:

$$\text{– для зарядки } q = C \varepsilon \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (4.24)$$

$$\text{– для розрядки } q = C \varepsilon \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (4.25)$$

де  $\tau = RC$  – час релаксації,  $R$  – опір, через який проходить процес зарядки (розрядки) конденсатора із ємністю  $C$ .

Використовуючи формули (4.24, 4.25 та 3.14), можна визначити зміну у часі напруги  $U_C$  на конденсаторі  $U_C = q/C$  та силу струму в колі при зарядці і розрядці конденсатора:

$$I = \pm \frac{\varepsilon}{R} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

## 4.2. Методичні вказівки і поради

Для обчислення сили струму та густини струму а також розрахунку опорів за наявності однорідних провідників застосовують закон Ома в інтегральній (4.7) або диференціальній (4.8) формі. Інтегральну форму закону Ома, як правило, зручно застосовувати при розрахунках, пов'язаних із струмами в провідниках. Для обчислення ж струмів і опорів за наявності провідних середовищ (наприклад, випадки заземлення) практично незамінною є диференціальна форма закону Ома. Суттєво, що напруженість електричного поля  $E$  за наявності струму можна обчислити методами електростатики, оскільки вона збігається (за умови постійності сили струму і однорідності середовища) із напруженістю такого електростатичного поля, яке буде при тій же напрузі між електродами, якщо середовище стане непровідним. Використовуючи ці положення легко показати, що опір середовища між двома провідниками, які є одночасно обкладками конденсатора ємністю  $C$ , дорівнює

$$R = \frac{\rho \varepsilon \varepsilon_0}{C}, \quad (4.26)$$

де  $\rho$  – питомий опір та  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища.

Зокрема, опір між двома кульками радіуса  $a$ , віддаленими одна від одної на відстань  $d$  дорівнює

$$R = \frac{\rho(d - 2a)}{2\pi a(d - a)}. \quad (4.26.a)$$

Якщо відстань  $d \gg a$ , то формула (4.26.a) матиме вигляд:

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}. \quad (4.26.б)$$

Із використанням формул (3.15.б,в) та (4.26) можна знайти опір середовища між обкладками:

– сферичного конденсатора з радіусами  $a$  і  $b$ :

$$R_{сф} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right); \quad (4.27)$$

– циліндричного конденсатора з радіусами  $a$  і  $b$  та довжиною  $l$ :

$$R_{\text{цил}} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (4.28)$$

Щоб безпомилково застосовувати закон Ома для ділянки кола, що містить е.р.с., необхідно дотримуватися таких правил:

а) намалювати схему і позначити на ній полюси всіх джерел, а також вказати напрям струму в колі (якщо він невідомий, то треба вказати передбачуваний напрям);

б) струм вважати позитивним на заданій ділянці 1–2, якщо він тече від точки 1 до точки 2;

в) е.р.с. вважати позитивною на ділянці 1–2, якщо вона підвищує потенціал у напрямі від 1 до 2, тобто при уявному русі вздовж шляху 1–2 спочатку зустрічається негативний полюс джерела, а потім позитивний.

Закон Ома визначає силу струму за спадом напруги або спад напруги за силою струму для найпростішого нерозгалуженого кола струму. Для обчислення струмів у більш складних розгалужених колах зручно користуватися двома правилами Кірхгофа. Перед складанням рівнянь за правилами Кірхгофа треба:

а) вибрати довільно напрями струмів у кожній вітці розгалуженого кола і вказати їх стрілками;

б) вибрати також довільно напрям обходу замкненого контуру (це потрібно тільки для складання рівнянь за другим правилом Кірхгофа).

При цьому слід завжди мати на увазі, що довільно обраний напрям обходу в даній задачі за пунктом а) повинен бути однаковим для всіх контурів розгалуженого кола.

За першим правилом Кірхгофа слід складати на одне рівняння менше, ніж число вузлів, що є в колі, тому що рівняння для останнього вузла не буде незалежним, а тільки наслідком попередніх рівнянь: його можна знайти їх додаванням.

При складанні рівнянь за першим правилом Кірхгофа слід дотримуватись правила знаків: струм, що надходить до вузла, у рівнянні (4.16) позначається знаком “+”, а струм, що йде від вузла, – знаком “–”.

Число незалежних рівнянь, які можна скласти за другим правилом Кірхгофа, також менше від числа замкнених контурів. Щоб скласти потрібну кількість незалежних рівнянь, обов’язково треба дотримуватися такого правила: для рівнянь вибрати контури так, щоб до кожного нового контура входила хоча б одна вітка, що не використовувалась у жодному з попередніх контурів.

Складаючи рівняння за другим правилом Кірхгофа, слід дотримуватися такого правила знаків:

а) якщо напрям струму збігається з вибраним напрямом обходу контурів, то відповідний добуток сили струму на опір входить у рівняння із знаком “+”, а якщо ні, то цей добуток входить у рівняння із знаком “–”;

б) е.р.с. беруть із знаком “+”, якщо при обході контуру в додатному напрямі перший електрод джерела буде – негативний, а другий – позитивний незалежно від того, куди напрямлений струм у відповідній ділянці контуру, тобто якщо переходить від “–” до “+” всередині джерела.

Загальне число рівнянь для вузлів і контурів має відповідати числу невідомих у задачі. Далі слід розв’язати систему рівнянь відносно шуканих величин. Для цього зручно користуватися методом детермінантів, який дає можливість безпосередньо визначати шукані величини.

У результаті розв’язування складених рівнянь шукані величини можуть вийти від’ємними. Якщо визначене значення сили струму – від’ємне, то це вказує тільки на те, що справжній напрям струму на цій ділянці кола протилежний вибраному. Якщо ж визначають опори, то від’ємне значення вказує на неправильний результат (через те, що омічний опір завжди додатний). У такому разі треба змінити напрям струму в цьому опорі і розв’язувати задачу заново при цих самих умовах.

### 4.3. Якісні задачі та запитання

4.1. Які необхідні умови існування струму в електричному колі?

4.2. Поясніть, чому опір амперметра повинен бути малим у порівнянні з опором кола, а опір вольтметра великим у порівнянні з опором ділянки кола, на якому вимірюється спад напруги?



4.3. В якому випадку джерела струму вигідно включати паралельно і в якому послідовно?

4.4. Чи вигідно добиватись такого використання гальванічного елемента, при якому його коефіцієнт корисної дії буде близьким до одиниці?

4.5. Як виміряти невідомий опір  $R_x$ , використовуючи джерело з е.р.с.  $\mathcal{E}$ , амперметр і вольтметр, якщо внутрішні опори джерела живлення та вимірних приладів невідомі?

4.6. Струм входить в один куток квадратного листа міді і виходить із протилежного. Намалуйте приблизну картину ліній струму у квадраті, щоб вони могли дати уявлення про відносні значення густини струму.

4.7. Дві залізні дротини мають однакові маси і довжини  $l_1$  та  $l_2$  ( $l_1 = 2l_2$ ). Знайти відношення  $R_1/R_2$  їх опорів.

4.8. На скільки однакових частин потрібно розрізати дротину з опором 48 Ом, щоб при паралельному з'єднанні цих частин одержати опір 3 Ом?

4.9. Струм тече у провіднику, форма якого показана на рис. 4.1. Однакова чи різна напруженість поля у широкій та вузькій частинах провідника?

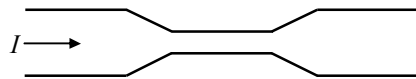


Рис. 4.1.

4.10. Побудувати якісні графіки залежностей потенціалу  $\varphi$  та напруженості поля  $E$  на ділянці 1–2 схем, які зображені на рис. 4.2. Вважати, що  $\varphi_2 > \varphi_1$

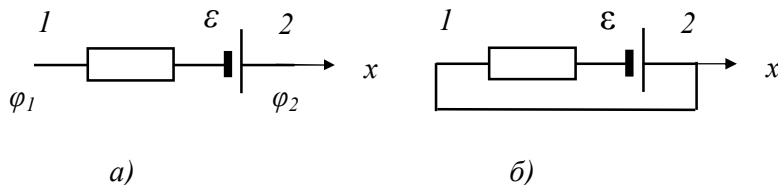


Рис. 4.2.

## 4.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 4.11.** Напруга на клеммах електричного кола, яка спочатку дорівнювала  $U_0 = 120$  В, рівномірно спадає, зменшуючись на 0,01 В за секунду. Одночасно з цим опір кола зростає також із сталою швидкістю 0,1 Ом за секунду. Крім того, в колі є постійний опір  $R_0 = 12$  Ом. Який електричний заряд пройде через коло за час  $\tau = 180$  с?

**Розв'язання.** Спочатку визначимо закони зміни з часом напруги і опору. Згідно з умовою задачі, швидкість зміни напруги

$$\frac{dU}{dt} = -0,01 \text{ (В/с)}$$

(знак мінус вказує на зменшення напруги). Звідси напруга на клеммах електричного кола в довільний момент часу  $t$  буде:

$$\int_{U_0}^U dU = -\int_0^t 0,01 dt \quad \text{або} \quad U(t) = U_0 - 0,01t \text{ (В)}.$$

Швидкість зміни величини опору:

$$\frac{dR}{dt} = 0,1 \text{ (Ом/с)}.$$

Звідси, із врахуванням початкових умов, визначаємо залежність опору від часу:

$$\int_{R_0}^R dR = \int_0^t 0,1 dt \quad \text{або} \quad R(t) = R_0 + 0,1t \text{ (Ом)}.$$

За умовою задачі  $U_0 = 120$  В,  $R_0 = 12$  Ом, тому, для будь-якого моменту часу сила струму в колі за законом Ома дорівнює:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R(t)} = \frac{U_0 - 0,01t}{R_0 + 0,1t} = \frac{120 - 0,01t}{12 + 0,1t}.$$

Оскільки  $I = \frac{dq}{dt}$ , то останнє рівняння можна записати у такому вигляді:

$$dq = \frac{120 - 0,01t}{12 + 0,1t} dt.$$

Інтегруючи це рівняння в межах від нуля до 180 с, визначимо величину заряду, який пройшов через коло:

$$q = \int_0^{180} \frac{120 - 0,01t}{12 + 0,1t} dt = \left[ (10 \cdot 120 + 12) \ln \frac{12 + 0,1t}{12} - \frac{0,01}{0,1} t \right]_0^{180} \approx 1100 \text{ (Кл)}.$$

**Задача 4.12.** Простір між обкладками сферичного конденсатора з радіусами  $a$  і  $b$  заповнено слабопровідним однорідним середовищем із питомим опором  $\rho$ . Визначити силу струму стікання через конденсатор, якщо різниця потенціалів між обкладками  $U$ . Яка енергія розсіюється в конденсаторі за одиницю часу?

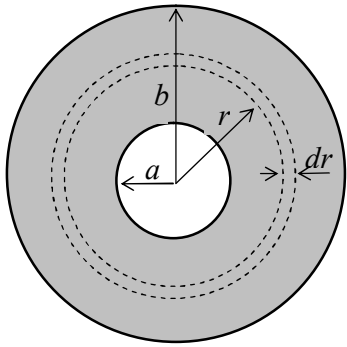


Рис. 4.3.

Проте якщо уявно виділити всередині конденсатора елементарний кульовий шар радіуса  $r$  і завтовшки  $dr$  (рис. 4.3), то, враховуючи, що лінії струму у всіх елементах цього шару перпендикулярні його поверхні, цей шар можна замінити на еквівалентний відносно опору провідником, що має довжину  $dr$  і площу поперечного перетину  $4\pi r^2$ .

Тоді згідно з формулою (4.5) опір елементарного кульового шару

$$dR = \rho \frac{dr}{S} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2} \quad (\text{а})$$

**Розв'язання.** Для розв'язку задачі можна застосувати закон Ома в інтегральній (4.7) або диференціальній (4.8) формі.

*1-й спосіб.* Щоб за допомогою закону Ома (4.7) знайти силу струму через конденсатор, необхідно заздалегідь визначити опір середовища між обкладками. Очевидно, застосувати безпосередньо формулу (4.5), виведену для провідника постійного поперечного перерізу, уздовж якого тече струм, тут неможливо.

Кульові шари з'єднані послідовно, тому інтегруючи цей вираз вздовж всієї відстані між обкладками конденсатора, одержимо повний опір міжелектродного проміжку:

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (\text{б})$$

Сила струму стікання через конденсатор

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi U}{\rho \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}. \quad (\text{в})$$

*2-й спосіб.* Врахуємо, що розподіл потенціалу за наявності струму збігається (за умови однорідності середовища) із потенціалом такого електростатичного поля, яке буде при тій же напрузі між електродами, якщо середовище стане непровідним. Скористаємось формулами ємності сферичного конденсатора (3.15.6), розподілу потенціалу між обкладками такого конденсатора (1.11) та врахуємо, що  $q = CU$ . Тоді

$$\varphi = \frac{U}{\left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)} \cdot \frac{1}{r}. \quad (\text{г})$$

Враховуючи, що напруженість поля  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ , одержимо

$$E = \frac{U}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (\text{д})$$

Густина струму на відстані  $r$  від центра дорівнює

$$j = \lambda E = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (\text{е})$$

а отже, струм стікання

$$I = jS = \frac{4\pi U}{\rho \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}. \quad (\text{е})$$

Для визначення потужності  $P$ , яка розсіюється у конденсаторі, скористаємось законом Джоуля-Ленца у диференціальній

формі  $w = \lambda E^2 = \rho j^2$ . Тоді загальна розсіювана потужність

$$P = \int_V w dV = \int_V \lambda E^2 dV = \int_V j^2 \rho dV.$$

У силу сферичної симетричності задачі  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Отже,

$$P = \int_a^b j^2 \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi U^2}{\rho} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi U^2}{\rho} \cdot \frac{ab}{b-a}.$$

**Задача 4.13.** У коло, що складається з мідного дроту площею поперечного перерізу  $S_1 = 3 \text{ мм}^2$ , ввімкнено свинцевий запобіжник площею поперечного перерізу  $S_2 = 1 \text{ мм}^2$ . На яке максимальне підвищення температури проводів при короткому замиканні кола розраховано цей запобіжник? Вважати, що при короткому замиканні внаслідок короткочасності процесу все тепло, що виділяється, йде на нагрівання проводів. Початкова температура запобіжника  $T_0 = 17^\circ\text{C}$ .

Розв'язання. Кількість тепла, що виділяється в мідному проводі при короткому замиканні:

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta T = D_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T, \quad (a)$$

де  $D_1$  – густина міді,  $l_1$  – довжина проводу,  $S_1$  – площа поперечного перерізу,  $c_1$  – питома теплоємність міді,  $\Delta T$  – підвищення температури проводу.

Кількість тепла, яке необхідне для повного розплавлення свинцевого запобіжника:

$$Q_2 = m_2 (c_2 \Delta t + r) = D_2 l_2 S_2 [c_2 (T_{\text{пл}} - T_0) + r], \quad (б)$$

де  $D_2$  – густина свинцю,  $l_2$  – довжина запобіжника,  $S_2$  – площа його поперечного перерізу і  $c_2$  – питома теплоємність свинцю,  $r$  – питома теплота плавлення свинцю,  $T_{\text{пл}}$  – температура плавлення свинцю.

Оскільки мідний провід і запобіжник увімкнені в коло послідовно, то сила струму через них проходить однакова, отже:

$$Q_1 = I^2 R_1 t = I^2 \frac{\rho_1 l_1}{S_1} t \quad \text{і} \quad Q_2 = I^2 R_2 t = I^2 \frac{\rho_2 l_2}{S_2} t,$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  – питомі опори міді і свинцю. Із наведених рівнянь маємо:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1 S_2 \rho_1}{l_2 S_1 \rho_2}.$$

Враховуючи рівняння (а) і (б), отримаємо:

$$\frac{D_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T}{D_2 l_2 S_2 [c_2 (T_{\text{пл}} - T_0) + r]} = \frac{l_1 S_2 \rho_1}{l_2 S_1 \rho_2}.$$

Звідси шукане зростання температури

$$\Delta T = \frac{\rho_1 D_2 S_2^2 [c_2 (T_{\text{пл}} - T_0) + r]}{\rho_2 D_1 S_1^2 c_1}.$$

Підставивши числові дані, знайдемо  $\Delta T = 1,8 \text{ К}$ .

**Задача 4.14.** Знайти опір  $R$  між точками  $A$  і  $B$  для кола, яке зображене на рис. 4.4. Опори окремих віток показані на рисунку.

Розв'язання. Увімкнемо в коло джерело струму з е.р.с.  $\mathcal{E}$  і застосуємо правила Кірхгофа.

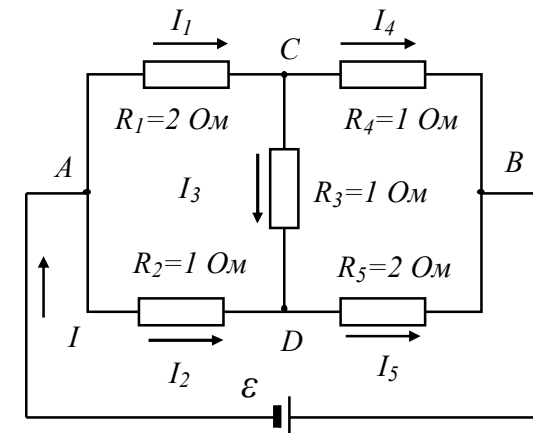


Рис. 4.4.

Напрями струмів в окремих вітках показані на рисунку стрілками, а їх величини позначено буквою  $I$  з відповідним індексом. На основі першого правила Кірхгофа маємо:

#### 4. Постійний електричний струм

$$\text{для вузла } A: \quad I - I_1 - I_2 = 0; \quad (\text{а})$$

$$\text{для вузла } C: \quad I_1 - I_3 - I_4 = 0; \quad (\text{б})$$

$$\text{для вузла } D: \quad I_2 + I_3 - I_5 = 0. \quad (\text{в})$$

Згідно з другим правилом Кірхгофа маємо:

$$\text{для контуру } ACDA: \quad I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0; \quad (\text{г})$$

$$\text{для контуру } CBDC: \quad I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = 0; \quad (\text{д})$$

$$\text{для контуру } ADBEA: \quad I_2 R_2 + I_5 R_5 = -\varepsilon. \quad (\text{е})$$

При складанні останнього рівняння враховано, що внутрішнім опором джерела струму можна знехтувати.

Отже, з урахуванням значень опорів, одержуємо таку систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} I - I_1 - I_2 &= 0; \\ I_1 - I_3 - I_4 &= 0; \\ I_2 + I_3 - I_4 &= 0; \\ 2I_1 + I_3 - I_2 &= 0; \\ I_4 - 2I_5 - I_3 &= 0; \\ I_2 + 2I_5 &= -\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ж})$$

У матричній формі цю систему рівнянь можна представити у вигляді:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad (\text{з})$$

#### 4. Постійний електричний струм

Розв'язавши цю систему із шести рівнянь, знаходимо вираз для величини сили струму в колі:

$$I = \frac{5}{7} \varepsilon.$$

Порівнюючи останню формулу з законом Ома  $I = \frac{\varepsilon}{R}$ , остаточно знайдемо опір  $R$  між точками  $A$  і  $B$ :  $R = 1,4$  Ом.

**Задача 4.15.** Визначити закон зміни з часом напруги на обкладках конденсатора при замиканні ключа  $K$  (рис.4.5). Через який час від моменту замикання ключа, напруга досягне 99% від свого найбільшого значення, якщо  $R_1 = 30$ кОм,  $R_2 = 15$ кОм,  $C = 0,2$  мкФ?

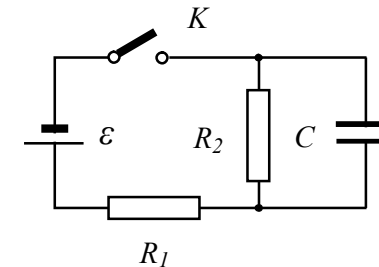


Рис. 4.5.

**Розв'язання.** При замиканні ключа у колі  $\varepsilon$   $R_1$   $R_2$  піде струм і розпочнеться процес зарядки конденсатора. У будь-який момент часу напруга  $U(t)$  на обкладках конденсатора дорівнює напрузі на резисторі  $R_2$ , тобто різниці потенціалів  $\varphi_2 - \varphi_1$ :

$$U(t) = I_2(t) \cdot R_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (\text{а})$$

де  $I(t)$  – сила струму, що проходить у резисторі  $R_2$  у процесі зарядки конденсатора. Сила струму, що проходить через резистор  $R_1$ , на підставі першого правила Кірхгофа

$$I_1(t) = I_2 + I_C, \quad (\text{б})$$

де  $I_C = dq/dt$  – сила струму, що зумовлює зарядку конденсатора.

Коли процес зарядки закінчиться ( $I_C = 0$ ), напруга досягне свого найбільшого значення  $U_C$ . Струм йтиме тільки у колі  $\varepsilon R_1 R_2$ , і, за законом Ома, для контуру  $\varepsilon$   $R_1$   $R_2$   $\varepsilon$

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{R_1 + R_2} \varepsilon$$

(внутрішнім опором джерела нехтуємо). Тоді найбільша напруга на конденсаторі

$$U_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon. \quad (\text{в})$$

Очевидно, що чим більший опір резистора  $R_1$ , тим повільніше відбувається процес зарядки.

Щоб знайти залежність  $U(t)$ , слід застосувати узагальнений закон Ома для ділянки  $\varepsilon R_2 R_1 \varepsilon$  для довільного моменту часу.

Розглянемо ділянку кола  $\varepsilon R_2 R_1 \varepsilon$  при несталих значеннях сил струмів:

$$I_1(t)R_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) = \varepsilon.$$

Або, з урахуванням формул (а) і (б)

$$\left( \frac{U}{R_2} + \frac{dq}{dt} \right) R_1 + U = \varepsilon.$$

Оскільки заряд конденсатора  $q = CU$ , то цей вираз можна переписати у такому вигляді:

$$R_1 C \frac{dU}{dt} = \varepsilon - \frac{R_1 + R_2}{R_2} U, \quad (\text{г})$$

що є диференціальним рівнянням першого порядку для шуканої змінної  $U(t)$ . Після розділення змінних одержимо

$$\frac{dU}{\varepsilon - \frac{R_1 + R_2}{R_2} U} = \frac{dt}{R_1 C}.$$

При зміні часу від  $0$  до довільного моменту  $t$  напруга змінюється від  $0$  до  $U$ . Проводячи інтегрування у вказаних межах, одержуємо

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \ln \frac{\varepsilon - \frac{R_1 + R_2}{R_2} U}{\varepsilon} = -\frac{t}{R_1 C},$$

$$\text{або} \quad U = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t \right) \right]. \quad (\text{д})$$

Аналіз цього виразу показує, що  $U$  зростає з часом і асимптотично наближається до свого найбільшого значення, заданого рівнянням (в).

Щоб знайти час  $t^*$ , після закінчення якого  $U = 0,99U_C$  підставимо це значення напруги в рівняння (г):

$$0,99U_C = U_C \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t^* \right) \right], \quad (\text{е})$$

Звідки

$$\exp \left( -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t^* \right) = 0,01 \quad \text{або} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t^* = \ln 100.$$

Остаточно

$$t^* = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \ln 100 = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ (с)}.$$

Проведений розрахунок показує, що процес зарядки конденсатора при заданих значеннях опорів і електроємності відбувається досить швидко.

#### 4.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

4.16. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом  $I = 4 + 2t$ ,  $I$  виражено в амперах,  $t$  – в секундах. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від  $t_1 = 2$  с до  $t_2 = 6$  с? При якій силі постійного струму за цей же час пройде така ж кількість електрики?

4.17. Яка кількість електрики переноситься у колі, якщо струм змінюється від 18 А до 0 А, причому за кожні 0,01 секунди він зменшується у два рази?

4.18. Визначити густину струму в мідній дротині довжиною 10 м, якщо різниця потенціалів на її кінцях 12 В.

4.19. Дві квадратні пластини зі стороною 300 мм, які закріплені на відстані 3,0 мм одна від одної, утворюють плоский конденсатор і підключені до джерела постійного струму 250 В. Розташовані вертикально пластини занурюють у посудину з гасом ( $\varepsilon = 2$ ) зі швидкістю 5 мм/с. Знайти силу струму, який тече у підвідних провідниках.

4.20. Із ніхромової стрічки завтовшки 0,2 мм і шириною 3 мм потрібно виготовити реостат опором 25 Ом. Якої довжини потрібно взяти стрічку і яку максимальну напругу можна подати на цей реостат, якщо допустима густина струму для ніхрому  $j = 0,2 \text{ А/мм}^2$ ?

4.21. Як зміниться опір мідного дроту завдовжки  $l$ , якщо його розтягнути на 0,1%?

4.22. Визначити опір мотка мідного дроту перетином  $0,1 \text{ мм}^2$ , якщо маса мотка 0,3 кг.

4.23. Провідник питомим опором  $\rho$  має форму прямого зрізаного конуса, висота якого  $h$ , а радіуси верхньої і нижньої основ  $r_1$  і  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ). Визначити опір цього провідника між його основами.

4.24. До великого металевого листа товщиною  $a$  приварені на відстані  $b$  один від одного два циліндричні провідники радіусом  $r_0$  (рис. 4.6). Знайти опір  $R$  між провідниками, якщо  $a \ll r_0 \ll b$ . Вважати, що питома провідність  $\lambda_1$  провідників значно більша за питому провідність  $\lambda$  матеріалу листа.

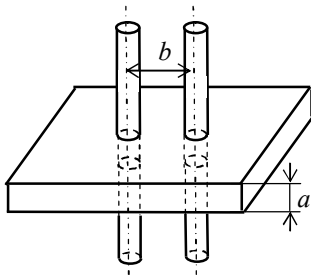


Рис. 4.6.

4.25. На поверхні двох однакових діелектричних конусів, дотичних основами, діаметр яких  $D$ , нанесений тонкий провідний шар товщиною  $\delta$  з питомою провідністю  $\lambda$ . До вершин конусів припаяні циліндричні електроди діаметром  $d$ . Визначити опір  $R$  між вершинами, якщо  $\delta \ll d$ . Твірна конусу дорівнює  $l$ . (Розміри конусів указані на рис. 4.7.)

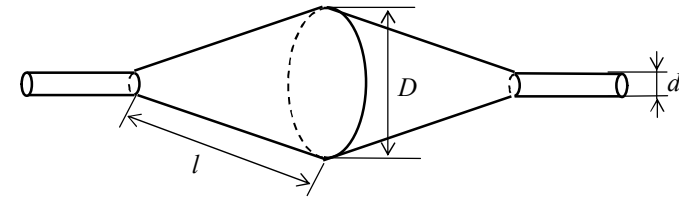


Рис. 4.7.

4.26. До центрів протилежних торців тонкостінної циліндричної банки діаметром  $D$  і висотою  $l$  припаяні провідники діаметром  $d$  (рис. 4.8). Визначити опір  $R$  банки, якщо вона зроблена із фольги завтовшки  $\delta \ll d$  з питомою провідністю  $\lambda$ .

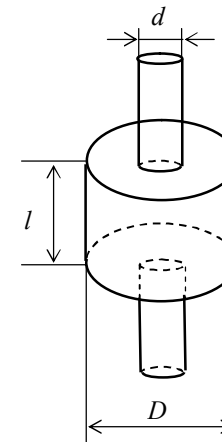


Рис. 4.8.

4.27. Простір між двома концентричними сферами заповнений діелектриком, провідність якого залежить тільки від відстані до сфер. Знайти закон зміни питомої провідності  $\lambda(r)$ , якщо об'ємна густина джоулевих втрат при проходженні струму однакова в усіх точках.

4.28. Простір між двома коаксіальними циліндрами заповнений діелектриком, який має деяку провідність. Знайти закон зміни питомої провідності  $\lambda(r)$ , якщо за наявності деякої різниці потенціалів напруженість електричного поля між циліндрами однакова.

4.29. Заземлення кінців телеграфної лінії здійснене за допомогою металевих куль радіусами  $r$ , дуже глибоко заритих у ґрунт. Питома провідність ґрунту поблизу них дорівнює  $\lambda$ . Знайти опір  $R$  ґрунту між кулями. Як зміниться відповідь, якщо радіуси куль  $r_1$  і  $r_2$ , а питома провідність ґрунту біля них  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . Вважати ґрунт навколо кожної кулі однорідним на відстанях  $r \gg r_1$  і  $r_2$ .

4.30. Ділянка електричного кола складається з двох опорів, один із яких  $R_1 = 50$  Ом постійний, а інший  $R_2$  може змінюватися від нуля до 100 Ом. Покажіть графічно, як мінатиметься повний опір ділянки залежно від зміни  $R_2$  у двох випадках: а)  $R_1$  і  $R_2$  з'єднані паралельно; б)  $R_1$  і  $R_2$  з'єднані послідовно.

4.31. Визначити опір сітки (рис. 4.9) в таких випадках: струм тече від точки  $A$  до точки  $B$ ; струм тече від точки  $C$  до точки  $D$ . Опір кожної з ланок сітки прийняти таким, що дорівнює  $r$ .

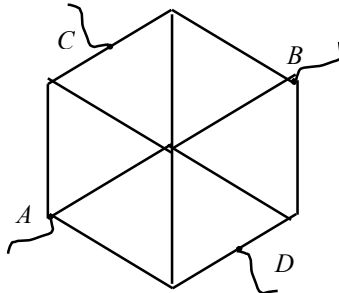


Рис. 4.9.

4.32. Визначити опір дротяного каркасу, який має форму куба, якщо він включений у коло протилежними вершинами. Опір кожного ребра каркасу 3 Ом.

4.33. Коли батарею, що має малий внутрішній опір  $r$  і невідому е.р.с.  $\varepsilon$ , приєднують до опору  $R$ , амперметр у колі показує струм 4 А. Якщо послідовно з  $R$  включають опір 10 Ом, струм падає до 3 А. Визначити  $\varepsilon$  і  $R$ . Які досліди потрібно виконати, щоб визначити  $\varepsilon$ ,  $R$  і  $r$ , якщо батарея має внутрішній опір  $r$ , яким не можна знехтувати?

4.34. Батарея гальванічних елементів замкнена на зовнішній опір  $R_1=10$  Ом і дає струм  $I_1=3$  А. Якщо замість опору  $R_1$  включити опір  $R_2=20$  Ом, то струм стане  $I_2=1,6$  А. Знайти е.р.с. і внутрішній опір батареї.

4.35. Зашунтований амперметр вимірює струми до 10 А. Який найбільший струм може виміряти цей прилад без шунта, якщо опір амперметра 0,02 Ом і опір шунта 0,005 Ом? Якої довжини потрібно взяти мідну дротину перерізом 0,2 мм<sup>2</sup>, щоб виготовити шунт, що зменшує чутливість амперметра в 5 разів?

4.36. Міліамперметр опором  $R = 9,9$  Ом, призначений для вимірювання струмів не більше 10 мА. Що потрібно зробити для того, щоб цим приладом вимірювати а) струми до 1 А; б) напруги до 1 В?

4.37. Скільки ламп потужністю 300 Вт кожна, розрахованих на напругу  $U = 110$  В, можна встановити в будівлі, якщо проводка від магістралі зроблена мідним дротом загальною довжиною  $l = 100$  м і перетином  $S = 9$  мм<sup>2</sup>, а напруга в магістралі підтримується такою, що дорівнює  $U_0 = 122$  В?

4.38. Електричний чайник із 0,6 л води при 9°C, опір нагрівника якого 16 Ом, забули виключити. Через який час вся вода в чайнику википить? Напруга в мережі 120 В, к.к.д. чайника 60%.

4.39. Яка робота струму на ділянці, що не містить джерел і має опір 12 Ом, якщо струм протягом 5 с рівномірно збільшувався від 2 до 10 А?

4.40. Батарея складається з п'яти послідовно з'єднаних елементів. Кожен елемент має е.р.с. 1,5 В і внутрішній опір 0,3 Ом. При якому навантаженні корисна потужність батареї буде максимальною? Який при цьому струм у навантаженні? Яка при цьому повна потужність батареї?

4.41. Батарея елементів при замиканні на резистор опором 5 Ом дає струм 1 А, а струм короткого замикання дорівнює 6 А. Визначити, яку найбільшу корисну потужність може дати батарея?

4.42. Визначити е.р.с. батареї, внутрішній опір якої 0,5 Ом, якщо при навантаженні 2 Ом вона має корисну потужність 4,5 Вт. Чи можна підібрати такий опір навантаження, щоб корисна потужність, що віддається батареєю, збільшилася вдвічі?

4.43. Електрорушійна сила елемента та його внутрішній опір дорівнюють відповідно 1,6 В і 0,5 Ом. Визначити коефіцієнт корисної дії елемента при струмі 2,4 А.

4.44. Який внутрішній опір одного акумулятора, якщо при змішаному з'єднанні акумуляторів у дві групи, по чотири

акумулятори в кожній групі, на опорі  $R = 3$  Ом виділяється така ж потужність, як і у разі послідовного з'єднання акумуляторів, замкнених на той же опір?

4.45. При якому опорі зовнішнього кола джерело е.р.с. 10 В і внутрішнім опором 20 Ом віддаватиме максимальну потужність? Яка величина цієї потужності?

4.46. Нагрівник електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо включена одна секція, вода закипає через 10 хвилин, якщо друга, то через 20 хвилин. Через скільки хвилин закипить вода у чайнику, якщо обидві секції включити а) послідовно; б) паралельно? Напругу на клеммах кип'ятильника і коефіцієнт корисної дії вважати в обох випадках однаковими.

4.47. Дві мідні дротини довжиною 1 м і діаметрами 0,1 мм та 0,2 мм підключаються (почергово) до клем джерела струму, нагріваються до однакової температури. Визначити внутрішній опір джерела. Вважати, що віддача тепла дротинами в навколишнє середовище при постійній різниці температур пропорційна площі їх поверхні.

4.48. Три гальванічні елементи з е.р.с. 1,3 В, 1,4 В та 1,5 В і внутрішніми опорами 0,3 Ом кожний з'єднані паралельно один до одного і замкнені на зовнішній опір 0,6 Ом. Визначити силу струму в кожному елементі.

4.49. Гальванічні елементи з е.р.с. 1,6 В, 1,4 В та 1,1 В з'єднані паралельно і замкнені на зовнішній опір 1 Ом. Чому дорівнюють їх внутрішні опори, якщо сили струмів через елементи відповідно 0,8 А, 0,6 А та 0,2 А?

4.50. Генератор постійного струму з е.р.с. 12 В та внутрішнім опором 0,2 Ом заряджає батарею акумуляторів з е.р.с. 10 В і внутрішнім опором 0,6 Ом. Паралельно до батареї підключена лампочка опором 3 Ом. Визначити силу струму в батареї акумуляторів і в лампочці.

4.51. У схемі, показаній на рис. 4.10 е.р.с джерел живлення  $\varepsilon_1 = 20$  В,  $\varepsilon_2 = 25$  В, опори  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом. Визначити: а) роботу, здійснену джерелами, і повну кількість теплоти, що виділилася в колі за інтервал часу  $\Delta t = 0,5$  с при  $R_3 = 82$  Ом; б) опір  $R_3$ , при якому теплова потужність, що виділяється на цьому резисторі, максимальна. Внутрішні опори джерел нехтовно малі.

4.52. У схемі, зображеній на рис. 4.11,  $\varepsilon_1 = 10$  В,  $\varepsilon_2 = 20$  В,  $\varepsilon_3 = 30$  В,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 4$  Ом,  $R_5 = 5$  Ом,  $R_6 = 6$  Ом,  $R_7 = 7$  Ом. Внутрішній опір джерел живлення нехтовно малий. Знайти сили струмів  $I_1, I_2, I_3$ .

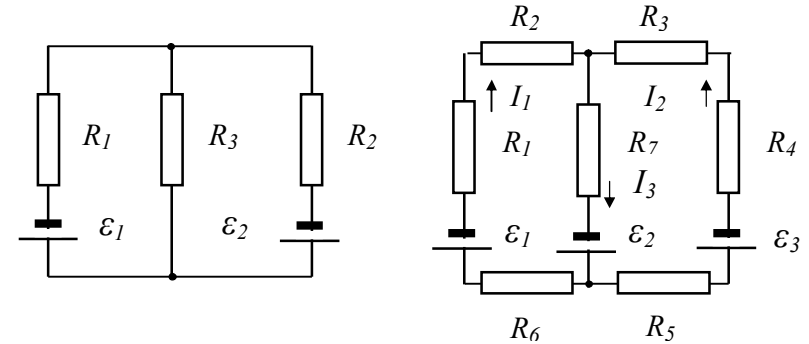


Рис. 4.10.

Рис. 4.11.

4.53. Конденсатор ємністю 30 мкФ заряджається від батареї з е.р.с. 100 В через резистор опором 1,5 МОм. Яка стала часу релаксації? Визначити різницю потенціалів на конденсаторі, якщо з початку зарядки пройшов час, що дорівнює часу релаксації? Яку частину е.р.с. становитиме ця різниця потенціалів?

4.54. Конденсатор ємністю 20 мкФ заряджається від батареї з е.р.с. 70 В через опір 1 МОм. Побудувати наближений графік залежності різниці потенціалів на конденсаторі від часу. Якою буде різниця потенціалів на конденсаторі через 20 секунд після початку зарядки?

4.55. Постійна часу розряду плоского масляного конденсатора через деякий резистор дорівнює  $\tau_1$ . Після того, як масло конденсатора відсиріло, постійна часу розряду через той же резистор виявилася рівною  $\tau_2$ . Визначити питомий опір  $\rho$  масла, яке відсиріло, якщо його діелектрична проникність  $\varepsilon$  не змінилася.

4.56. Сферичний конденсатор радіусами сфер  $r_1$  і  $r_2$  заповнений слабопровідним середовищем. Ємність конденсатора дорівнює  $C$ , а різниця потенціалів на конденсаторі після відключення його від батареї зменшилася у два рази за час  $t$ . Визначити діелектричну проникність  $\varepsilon$  середовища і його питомий опір  $\rho$ .



## ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ

## 5.1. Короткі теоретичні відомості

Певна частина електронів у метали та напівпровіднику є вільними, тобто не зв'язані з атомами кристалічної ґратки, і перебуває у стані безперервного хаотичного руху, і в цьому розумінні сукупність електронів у них являє собою “електронний газ”. В електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$  на цей хаотичний тепловий рух накладається напрямлений рух електронів із середньою швидкістю  $\vec{v}_\partial$ , яку називають дрейфовою, причому вона в першому наближенні пропорційна напруженості електричного поля  $E$ :

$$\vec{v}_\partial = b\vec{E}, \quad (5.1)$$

де величина  $b$  – дістала назву рухливості і має фізичний зміст середньої швидкості напрямленого руху в полі одиничної напруженості.

За звичайних умов середня направлена швидкість руху вільних електронів  $\vec{v}_\partial$  набагато менша від швидкості їх теплового хаотичного руху  $v_T$ , яка визначається температурою провідника.

Густина струму в метали:

$$\vec{j} = en\vec{v}_\partial, \quad (5.2)$$

де  $e$  – заряд,  $n$  – концентрація електронів.

Закон Ома у диференціальній формі (для густини струму):

$$\vec{j} = \lambda\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}, \quad (5.3)$$

де  $\lambda$  та  $\rho$  – відповідно питома провідність та опір.

Згідно з класичною теорією електропровідності для металів:

$$\lambda = enb = \frac{e^2 n \tau}{m^*}, \quad (5.4)$$

де  $m^*$  – ефективна маса,  $\tau = l^*/v_T$  – середній час вільного пробігу,  $l^*$  – середня довжина вільного пробігу електронів.

Для напівпровідників:

$$\lambda = en^-b^- + en^+b^+, \quad (5.5)$$

де  $b^-$ ,  $b^+$  – рухливості,  $n^-$ ,  $n^+$  – концентрації відповідно електронів і дірок у напівпровіднику.

Температурна залежність питомого опору металів  $\rho_M$  та напівпровідників  $\rho_S$  описується відповідно такими формулами:

$$\rho_M = \rho_{M0}(1 + \alpha\Delta T) = \rho_{M0}[1 + \alpha(T - T_0)]; \quad (5.6)$$

$$\rho_S = \rho_0 \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right), \quad (5.7)$$

де  $\rho_{M0}$  – питомий опір металу при температурі  $T_0$ ,  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору металів,  $E_a$  – енергія активації провідності напівпровідника,  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.

Вирази (5.6) та (5.7) справедливі лише в обмежених інтервалах температур і не описують явище надпровідності при низьких температурах в металах, сплавах та деяких кераміках, а також існування одночасно власної та домішкової провідності в напівпровідниках.

У провіднику із струмом, поміщеному в магнітне поле, перпендикулярно до напрямку струму і індукції магнітного поля виникає різниця потенціалів. Це явище дістало назву ефекту Холла, причому холлівська різниця потенціалів:

$$U_X = R_X B j d = \frac{1}{ne} B j d, \quad (5.8)$$

де величина  $R_X = 1/ne$  дістала назву сталої Холла,  $B$  – індукція магнітного поля,  $d$  – відстань між холлівськими електродами.

Зазвичай метали з високою питомою електропровідністю  $\lambda$  мають також і високий коефіцієнт теплопровідності  $\kappa$ . Відношення цих величин залежить тільки від температури і одержало назву закону Відемана-Франца:

$$\frac{\kappa}{\lambda} = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \quad (5.9)$$

Між двома металами, розташованими у вакуумі виникає зовнішня різниця потенціалів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e}, \quad (5.10 \text{ а})$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – робота виходу електронів із першого та другого металів.

Між двома металами, які мають однакову температуру і з'єднані між собою безпосередньо або за допомогою інших металів, існує внутрішня контактна різниця потенціалів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}, \quad (5.10 \text{ б})$$

де  $n_{01}$  і  $n_{02}$  – концентрація вільних електронів у першому і другому металах.

Якщо електричне коло складається з різних металів, місця контактів яких мають температури  $T_1$  і  $T_2$ , то між ними виникає термоелектрорушійна сила:

$$\mathcal{E}_T = \frac{k}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}} (T_1 - T_2) = \beta (T_1 - T_2), \quad (5.11)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – температури спаїв термопари,  $\beta$  – стала термопари.

В таблиці наведені коефіцієнти термо-е.р.с. деяких металів відносно платини.

Таблиця коефіцієнтів термо-е.р.с. деяких металів відносно платини

Метал	$\beta$ , мкВ/К
Вісмут	-65
Залізо	+16
Мідь	+7,4
Нікель	-16,4
Сурма	+47,0
Константан	-34,4

Виникнення термо-е.р.с. між двома різними металами (напівпровідниками) дістало назву явища Зеєбека і є одним із трьох основних термоелектричних явищ поряд з явищем Пельтьє та явищем Томсона.

Явище Пельтьє, обумовлене різною енергією електронів у металах або напівпровідниках, полягає в тому, що під час

пропускання струму залежно від його напрямку на контакті різних металів (напівпровідників) виділяється або поглинається додаткове (понад джоулеве) тепло. Кількість теплоти, яка виділяється або поглинається на контакті, на відміну від теплоти Джоуля-Ленца, пропорційна заряду, що проходить через контакт, тобто

$$Q_{\Pi} = \Pi q = \Pi It, \quad (5.12)$$

де  $\Pi$  – коефіцієнт Пельтьє, який залежить від природи провідників, що перебувають у контакті, та їх температури. Для металів коефіцієнт Пельтьє має порядок  $10^{-2} - 10^{-3}$  В, а для напівпровідників  $5 \cdot 10^{-1} - 10^{-2}$  В.

Явище Томсона. У хімічно однорідному, однак нерівномірно нагрітому, провіднику за наявності електричного струму залежно від його напрямку, додатково до джоулевого, виділяється або поглинається тепло. Кількість теплоти, яка виділяється або поглинається в одиниці об'єму провідника за одиницю часу за рахунок явища Томсона, пропорційна градієнту температури  $dT/dx$  та густині струму  $j$ , тобто

$$w = \frac{Q_T}{Vt} = K \cdot \frac{dT}{dx} j, \quad (5.13 \text{ а})$$

де  $Q_T$  – теплота Томсона,  $V$  – об'єм провідника,  $t$  – час пропускання струму,  $K$  – коефіцієнт Томсона, який залежить від природи провідника та його стану. В інтегральній формі рівняння (5.13 а) має вигляд

$$Q_T = K \cdot \Delta T It, \quad (5.13 \text{ б})$$

де  $Q_T$  – теплота Томсона, що виділяється у провіднику за час  $t$  при пропусканні струму  $I$ , якщо на його кінцях підтримується різниця температур  $\Delta T$ . Величина коефіцієнта Томсона мала і становить, наприклад, для вісмуту  $K \approx 10^{-5}$  В/К.

На відміну від металів та напівпровідників проходження електричного струму через електроліти і газовий проміжок супроводжується, крім перенесення заряду, виділенням на електродах речовини. Ці середовища дістали назву провідників другого роду.

Маса речовини  $m$ , яка виділяється на електроді, пропорційна кількості електрики  $q$ , що проходить через електрод, і визначається за першим законом Фарадея:

$$m = k_X q = k_X \int_0^t Idt, \quad (5.14)$$

де  $k_X$  – електрохімічний еквівалент речовини, який чисельно дорівнює масі даної речовини, що виділяється під час електролізу при проходженні через електроліт одного Кулона електрики.

За другим законом Фарадея, електрохімічний еквівалент речовини прямо пропорційний її хімічному еквіваленту, тобто:

$$k_X = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z}, \quad (5.15)$$

де  $\mu$  – маса одного моля,  $z$  – валентність елемента,  $F$  – число Фарадея, яке дорівнює  $9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль.

Хімічний еквівалент – це відношення атомної маси речовини  $A$  до її валентності  $z$ . Число Фарадея  $F$  показує, яка кількість електрики повинна пройти через електроліт для того, щоб виділився на електроді один моль одновалентної речовини.

Згідно з об'єднаним законом Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} q = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z} \int Idt \quad (5.16)$$

Питома електропровідність електроліту визначається за формулою:

$$\lambda = \kappa z e n (b^- + b^+), \quad (5.17)$$

де  $\kappa = n'/n$  – коефіцієнт дисоціації, тобто частка молекул розчиненої речовини, які розпались на іони,  $n$  – концентрація молекул розчиненої речовини,  $z$  – валентність,  $b^+$  і  $b^-$  – рухливості відповідно додатних і від'ємних іонів. Рухливості іонів, як електронів, так і дірок, є фізична величина, що чисельно дорівнює швидкості, яку набуває іон того чи іншого знака в полі з напруженістю, що дорівнює одиниці. Коефіцієнт дисоціації  $\kappa = n'/n$  – це відношення числа дисоційованих молекул  $n'$  в одиниці об'єму до числа всіх молекул  $n$  розчиненої речовини в цьому об'ємі.

Зазвичай питома електропровідність електролітів з підвищенням температури зростає, що зумовлено збільшенням коефіцієнта дисоціації  $\kappa$  та рухливостей  $b^-$  і  $b^+$  іонів.

Електроліти часто характеризують еквівалентною концентрацією  $\eta$ , під якою розуміють кількість молів розчиненої

речовини в одиниці об'єму розчину,  $\eta = n/N_A$ ,  $n$  – число молекул розчиненої речовини в одиниці об'єму,  $N_A$  – число молекул в одному молі. Оскільки  $eN_A = F$ , то вираз (5.17) матиме вигляд

$$\lambda = \kappa z \eta F (b^- + b^+). \quad (5.17 \text{ а})$$

Відношення питомої електропровідності  $\lambda$  до еквівалентної концентрації розчиненої речовини  $\eta$  називають еквівалентною електропровідністю  $A$

$$A = \frac{\lambda}{\eta} = \kappa z F (b^- + b^+). \quad (5.17 \text{ б})$$

Для нескінченно розбавленого розчину ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) еквівалентна електропровідність

$$A_\infty = \frac{\lambda}{\eta} = z F (b^- + b^+), \quad (5.17 \text{ в})$$

$$\text{Отже,} \quad \kappa = A/A_\infty. \quad (5.17 \text{ г})$$

Вимірюючи еквівалентну електропровідність за формулою (5.17 г), можна обчислити коефіцієнт дисоціації  $\kappa$  та визначити суму рухливостей іонів ( $b^+ + b^-$ ).

За нормальних умов газу є діелектриками, тому електричний струм у них, який називається газовим розрядом, можливий тільки за умови штучного створення в ньому додатних і від'ємних іонів, які будемо вважати однозарядними. Залежно від механізму іонізації розряди поділяють на несамостійні і самостійні. Несамостійний розряд виникає тільки під дією зовнішнього іонізатора (ультрафіолетового, рентгенівського випромінювання чи інших джерел енергії), а з припиненням його дії розряд зникає. Процес утворення додатних і від'ємних іонів називається іонізацією газу і характеризується потужністю іонізації  $\Delta n$ , яка дорівнює кількості пар іонів, які створюються в одиниці об'єму газу за одиницю часу. Внаслідок хаотичного руху додатні і від'ємні іони зазнають зіткнень, при цьому вони перетворюються в нейтральні атоми і молекули. Цей процес називається рекомбінацією і характеризується коефіцієнтом рекомбінації  $\gamma$ . При цьому вважається, що число пар іонів, які зазнають рекомбінації в одиниці об'єму за одиницю часу  $\Delta n_1$ , пропорційне як концентрації додатних  $n^+$ , так і негативних  $n^-$  іонів, тобто  $\Delta n_1 = \gamma n^2$ . Тут враховано, що  $n^+ = n^- = n$ , оскільки в

цілому газ є електро-нейтральним. За наявності в газі частинок пилу, диму і т.п. з концентрацією  $n'$  рекомбінація в значній мірі проходить на них. У такому випадку  $\Delta n_1 = \gamma'n'$ . За наявності електричного струму відбувається зменшення концентрації іонів у газі за рахунок їх нейтралізації на електродах, при цьому швидкість їх зменшення  $\Delta n_2$  становить:

$$\Delta n_2 = \frac{I}{Sde} = \frac{j}{de},$$

де  $S$  – площа,  $d$  – відстань,  $I$  – струм між електродами ( $j$  – густина струму).

Рівняння балансу іонів у газі (кінематичне рівняння) при постійній дії іонізатора і за наявності електричного струму матиме вигляд:

$$\frac{dn}{dt} = \Delta n - \Delta n_1 - \Delta n_2. \quad (5.18)$$

В умовах динамічної рівноваги  $\frac{dn}{dt} = 0$ , або

$$\Delta n = \Delta n_1 + \Delta n_2. \quad (5.19)$$

Якщо густина струму незначна і газ вільний від пилинок,

тобто  $\frac{j}{de} \ll \gamma n^2$ , то

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n}{\gamma}}. \quad (5.20)$$

Густина електричного струму в газі при постійній концентрації носіїв  $n$ :

а) при струмі, далекому від насичення:

$$j = en(b^+ + b^-)E, \quad (5.21 \text{ а})$$

де  $e$  – заряд іонів,  $b^-$  і  $b^+$  – їх рухливості (як і в електролітах);

б) при насиченні, тобто при незначній рекомбінації у

газі  $\frac{j}{de} \gg \gamma n^2$ :

$$j = j_H = \Delta n ed, \quad (5.21 \text{ б})$$

де  $d$  – відстань між електродами (у випадку плоских електродів).

Найменша кінетична енергія частинки, при якій можлива ударна іонізація молекули газу, дорівнює:

$$W_K = A_I \left( 1 + \frac{m}{M} \right), \quad (5.22)$$

де  $A_I$  – робота іонізації молекули газу,  $m$  і  $M$  – маси частинки і молекули газу.

При підвищенні напруги між електродами, розміщеними у газі, іони, які необхідні для підтримання електропровідності газу, створюються самим розрядом внаслідок процесів, що відбуваються в ньому. По-перше, іонізація електронним ударом може забезпечити утворення значної кількості іонів у газорозрядному проміжку, коли під дією зовнішнього електричного поля електрон на шляху вільного пробігу набуває енергії, більшої за енергію іонізації атомів (молекул) газу, і виникають позитивний іон та один новий електрон. При наступному непружному ударі двох електронів з атомами виникає ще додатково два нових іони та електрони і т.д. Такий процес виникнення електронів та іонів називають електронною або іонною лавиною. Кількість електронів, що досягають одиницю площі анода за одиницю часу, дорівнює  $n_a = n_0 e^{ad}$ , де  $n_0$  – кількість електронів, що вивільняється з одиниці площі катода під дією іонізатора,  $a$  – коефіцієнт ударної іонізації, і чисельно дорівнює кількості пар іонів і електронів, що утворюються внаслідок непружного удару електрона з атомами (молекулами) газу на одиниці довжини в газі. Тільки іонізація молекул газу ударом електронів у нейтральні атоми (молекули) не може привести до самостійного розряду, оскільки при  $n_0 = 0$ ,  $n_a$  також дорівнюватиме нулю. Для самостійного розряду необхідно, щоб електронні лавини підтримували самі себе, тобто у газі відбувався ще хоча б один процес з утворенням нових електронів.

По-друге, необхідно врахувати процес вторинної електронної емісії з катода при його бомбардуванні додатними іонами (або процес іонно-електронної емісії з катода). Якщо кількість електронів, що вивільняються з одиниці поверхні катода за одиницю часу під дією зовнішнього іонізатора і внаслідок іонно-електронної емісії із катода, становить  $n_k$ , тоді густина потоку електронів на аноді буде  $n_a = n_k e^{ad}$ . (5.23)

Унаслідок ударної іонізації атомів кількість електронів, що виникає в лавині, дорівнює кількості позитивних іонів, які при цьому утворюються, тобто

$$n_a - n_k = n_k(e^{ad} - 1). \quad (5.24)$$

При одночасній дії зовнішнього іонізатора і вторинної електронної емісії з катода можна записати, що

$$n_k = n_o + \beta n_k(e^{ad} - 1). \quad (5.25)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт іонно-електронної емісії з катода.

Звідки

$$n_k = \frac{n_o}{1 - \beta n_k(e^{ad} - 1)}, \quad \text{а} \quad n_a = \frac{n_o e^{ad}}{1 - \beta n_k(e^{ad} - 1)}. \quad (5.26)$$

Густина струму в розряді

$$j = en_a = \frac{en_o e^{ad}}{1 - \beta n_k(e^{ad} - 1)}. \quad (5.27)$$

Із (5.27) випливає, що коли  $1 - \beta(e^{ad} - 1) = 0$ , то густина струму не дорівнює нулю ( $j \neq 0$ ) навіть при припиненні дії зовнішнього іонізатора ( $n_o = 0$ ). Отже, умовою виникнення самостійного розряду є рівність

$$1 = \beta(e^{ad} - 1). \quad (5.28)$$

Напруга, при якій виконується умова (5.28) називається напругою пробою газу, або напругою запалювання газового розряду.

У вакуумі електричний струм можливий тільки за умови емітування електронів за рахунок, наприклад, термо-, фото- або вторинно-електронної емісії. Сила термоелектронного струму у вакуумі визначається за законом Богуславського-Ленгмюра:

$$I = bU^{\frac{3}{2}}, \quad (5.29)$$

де  $U$  – анодна напруга,  $b$  – стала, яка залежить від форми та розмірів електродів і їх взаємного розташування. Для діода з плоскими електродами площею  $S$ , розташованими на відстані  $d$  один від одного,

$$b = \frac{4}{9} \varepsilon_o \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}},$$

де  $e$  – заряд та  $m$  – маса електрона.

Густина анодного струму насичення термоелектронної емісії у вакуумі визначається за формулою Річардсона-Дешмана:

$$j = BT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right), \quad (5.30)$$

де  $B$  – емісійна стала катода,  $e\phi = A$  – робота виходу електрона з катода,  $T$  – абсолютна температура катода.

## 5.2. Методичні вказівки і поради

У цьому розділі розглянуті задачі, пов'язані із природою електропровідності в металах, напівпровідниках, у вакуумному проміжку, електролітах і газах. При цьому вважається, що носії струму є класичними частинками, зокрема, прийнято, що маса електронів у металах та напівпровідниках відповідає масі вільного електрона у вакуумі.

У деяких задачах необхідно врахувати, що електрони при проходженні електричного струму, поряд з перенесенням заряду, переносять вздовж провідників і свою кінетичну енергію теплового руху, яка визначається температурою провідника (ефект Томсона). З іншого боку, при проходженні струму через контакт двох металів або напівпровідників електрони проходять через потенціальний бар'єр, внаслідок чого на такому контакті виділяється або поглинається додаткове (понад Джоулеве) тепло (ефект Пельтьє).

У напівпровіднику поряд із власною може існувати і домішкова електропровідність з енергією активації меншою, ніж при власній, тому вона проявляється при менших (низьких) температурах.

При проходженні термоелектронного струму у вакуумі електрони, що вилітають із катода, забирають у нього енергію, яка необхідна для подолання потенціального бар'єра на межі метал – вакуум (робота виходу), що приводить до охолодження катода. Тому щоб відновити температуру катода, необхідно підвищити струм його нагрівання.

Сила струму у нерозгалужених ділянках кола в довільному середовищі однакова. Це є наслідком закону збереження заряду.

Зокрема, сила струму в електроліті дорівнює силі струму у підвідних проводах, незважаючи на те, що в електроліті струм складається із двох частин, які відповідають руху від'ємних і додатних іонів. Кожний від'ємний іон, підходячи до анода, віддає йому свій заряд у вигляді надлишкового електрона, який далі рухається вздовж проводів. Одночасно додатні іони, віддаляючись від анода, залишають біля нього некомпенсовані від'ємні іони, які також віддають аноду свої надлишкові електрони. Аналогічні процеси відбуваються біля катода. В результаті сумарний заряд, який переноситься за одиницю часу через поперечний переріз підвідних проводів електронами, виявляється таким, що дорівнює сумарному заряду, який переноситься через поперечний переріз електроліту додатними і від'ємними іонами.

За відсутності електричного поля (різниці потенціалів) між електродами в електролітах та іонізованих газах концентрація додатних і від'ємних іонів (катионів і аніонів) практично однакова у всьому об'ємі провідного середовища. При прикладенні зовнішньої різниці потенціалів виникає струм, зумовлений рухом катионів до катода та аніонів до анода. В результаті області, які прилягають до електродів, виявляються збідненими іонами того знака, який має електрод. Від анода віддаляються катиони, а від катода – аніони. Тому поблизу анода виникає надлишковий від'ємний об'ємний заряд, а поблизу катода – додатний, що приводить до спотворення електричного поля, тобто його неоднорідності і, як наслідок, порушення закону Ома.

На додаток, у задачах, де розглядається струм у газах, потрібно розрізняти два крайніх випадки: струм далекий від насичення і струм близький або такий, що дорівнює струму насичення. В першому випадку з певними застереженнями допускається застосування закону Ома. В другому ж випадку цей закон застосовувати не можна: при збільшенні напруги на електродах сила струму в газі залишається незмінною. Більше того, при постійній напруженості поля  $E$  згідно з формулою (5.28) густина струму буде змінюватись при зміні відстані між електродами, що суперечить закону Ома в диференціальній формі (4.8).

### 5.3. Якісні задачі та запитання

5.1. У досліді Толмена і Стюарта котушка з проводом, довжина якого  $l$ , приводиться у швидке обертання, а потім різко гальмується. При цьому в колі, що містить котушку і вимірний прилад, протікає імпульс струму, зумовлений різницею потенціалів, що виникає на кінцях котушки. Якщо записати цю різницю потенціалів  $U$  на запам'ятовуючому осцилографі, то можна отримати криву, подібну тій, що наведена на рис. 5.1, де вздовж осі абсцис відкладений час. Як, знаючи початкову кутову швидкість обертання котушки  $\omega$ , її діаметр  $D$  та вхідний опір  $R$  осцилографа, за даними графіка визначити відношення заряду електрона до його маси?

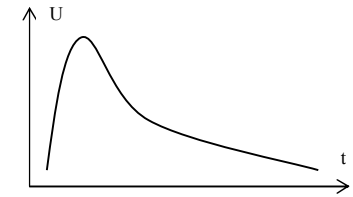


Рис.5.1.

5.2. Ділянка провідника між точками  $a$  і  $b$  нагрівається. Чи викличе це нагрівання зміну розподілу потенціалу вздовж провідника, в якому протікає струм у напрямку, показано стрілкою? Чи викличе протікання струму зміну розподілу температури?

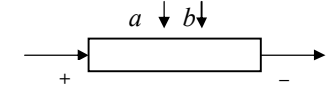


Рис.5.2.

5.3. Провідник і напівпровідник з'єднані паралельно. При деякій напрузі на клеммах джерела живлення по них тече однаковий струм, тобто амперметри на схемі, зображеній на рис.5.3, показують однакові значення. Чи збережуться однакові показання на амперметрах, якщо збільшити напругу джерела струму?

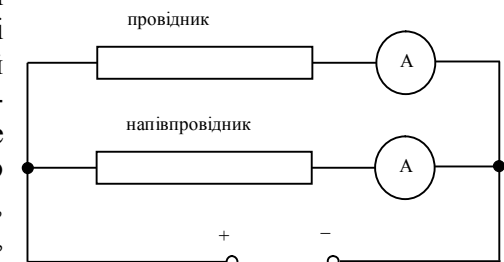


Рис. 5.3.

5.4. Залежність логарифму електропровідності напівпровідника від  $1/T$  (де  $T$  – абсолютна температура) представлена на рис. 5.4. У якого із цих напівпровідників заборонена зона ширша?

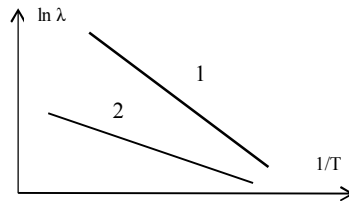


Рис. 5.4.

5.5. Яка з ділянок залежності логарифму електропровідності напівпровідника від  $1/T$  (де  $T$  – абсолютна температура), представлена на рис. 5.5, відповідає власній (домішкковій) провідності?

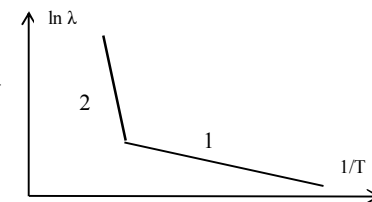


Рис. 5.5.

5.6. Залежності логарифму електропровідності двох напівпровідників від  $1/T$  (де  $T$  – абсолютна температура) представлені на рис. 5.6. Чим відрізняються один від одного ці напівпровідники?

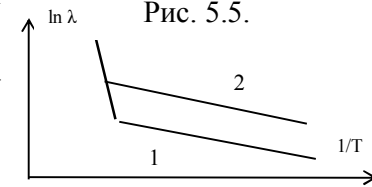


Рис. 5.6.

5.7. Чи буде відрізнятися е.р.с. термопари, якщо її кінці зварені або запаєні?

5.8. Чим зумовлений електричний опір провідника? Як пояснити явище надпровідності?

5.9. Яким чином можна підсилити термоелектронний струм з катода не змінюючи його температуру та розміри?

5.10. Чому число іонів у газі при дії іонізатора постійної інтенсивності після його включення збільшується тільки до певної величини, а потім стає постійним?

5.11. Що відбудеться з електричною дугою, якщо охолодити катод? Анод?

5.12. Чому іскровий розряд виникає при напрузі у кілька кіловольт, а для дугового розряду достатньо напруги 40–50 В?

5.13. З якою метою послідовно із ділянкою кола, в якій створюється дуговий розряд, включають реостат?

5.14. Чому збільшення діаметра проводів високовольтної лінії електропередачі приводить до зменшення втрат на коронний розряд.

5.15. Електричний струм пропускають через електроліт, який міститься між двома плоскопаралельними пластинами, лінійні розміри яких набагато більші, ніж відстань між ними. Чим пояснити неоднорідність електричного поля між пластинами?

#### 5.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 5.16.** Котушка, яка містить  $n=590$  витків мідного проводу діаметром  $d_1 = 0,3$  мм, обертається навколо своєї осі, здійснюючи  $f=33$  оберти за секунду. Діаметр витків котушки  $d_2 = 14$  см. Кінці котушки з'єднані з балістичним гальванометром, внутрішній опір якого  $R_0=130$  Ом. Яка кількість електрики пройде у колі при різкому гальмуванні котушки?

**Розв'язання.** Поки котушка обертається, електрони в проводі мають швидкість впорядкованого руху, яка дорівнює лінійній швидкості проводу котушки, віддаленої від осі обертання на  $d_2/2$ :

$$v_0 = 2\pi f \frac{d_2}{2}.$$

При гальмуванні котушки електрони деякий час продовжують рухатись за інерцією, в результаті чого в провіднику виникає імпульс струму і переноситься заряд:

$$q = \int_0^t Idt. \quad (a)$$

При гальмуванні котушки електрони відносно провідника набувають прискорення  $-\frac{dv}{dt}$ . Таке ж прискорення можна надати електронам у нерухомому провіднику, якщо створити в ньому електричне поле:

$$E = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt},$$

тобто прикласти до кінців провідника довжиною  $l$  різницю потенціалів:

$$U = lE = -l \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} = -n\pi d_2 \frac{m}{e} \frac{dv}{dt},$$

де  $l=n\pi d_2$ .

У цьому випадку в електричному колі потече струм:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{n\pi d_2 m}{R e} \frac{dv}{dt}, \quad (6)$$

де під опором  $R$  треба розуміти сумарний опір гальванометра  $R_0$  та мідного проводу  $R_M$ :

$$R_M = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4n\pi d_2}{\pi d_1^2}.$$

Отже:

$$R = R_0 + R_M = R_0 + \rho \frac{4n\pi d_2}{\pi d_1^2}. \quad (7)$$

Враховуючи формули (а), (б) і (в), отримаємо:

$$q = \int_0^t \left( -\frac{Im}{Re} \frac{dv}{dt} \right) dt = \int_{v_0}^0 \left( -\frac{n\pi d_2 m}{Re} \right) dv = \frac{m}{e} \cdot \frac{\pi^2 n d_2^2 f}{R_0 + 4\rho \frac{nd_2}{d_1^2}}.$$

Підстановка числових значень дає  $q = 1,1 \cdot 10^{-10}$  Кл. З останнього виразу можна визначити питомий заряд електрона.

**Задача 5.17.** Визначити сумарний імпульс електронів у прямому провіднику довжиною 10 км при силі струму 400 А.

**Розв'язання.** Струм у металі являє собою напрямлений рух електронів. Він характеризується певним імпульсом, або кількістю руху. Щоб визначити цей імпульс  $K$ , просумуємо імпульси всіх електронів. При цьому врахуємо, що сумарний імпульс, зумовлений тепловим рухом електронів зі швидкістю  $v_T$ , внаслідок його хаотичності дорівнює нулю. Тобто, вклад у  $K$  дає тільки дрейфовий рух електронів із швидкістю  $v_d$ , яку можна вважати для всіх електронів однаковою, оскільки провідник, в якому вони рухаються за умовою задачі, є прямим. Тоді:

$$K = \sum_{i=1}^N m v_i = m \sum_{i=1}^N v_i = m N v_d,$$

де  $m$  – маса електрона,  $N$  – число вільних електронів у провіднику.

Швидкість  $v_d$  виразимо з формули (5.2) та врахуємо, що  $n = N/V$ , а  $j = I/S$ , де  $V = lS$  – об'єм провідника,  $S$  – його поперечний переріз:

$$v_d = \frac{j}{en} = \frac{I}{S} \cdot \frac{V}{eN} = \frac{Il}{eN}.$$

Тоді

$$K = m N v_d = \frac{m I l}{e}.$$

Враховуючи табличні дані значення заряду та маси електрона, одержимо:

$$K \approx 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

**Задача 5.18.** Металевий диск, радіус якого  $R = 10$  см, рівномірно обертається з частотою  $f = 50$  об/с. Визначити різницю потенціалів між центром і краями диска.

**Розв'язання.** При рівномірному обертанні диска з кутовою швидкістю  $\omega$  на вільні електрони, які являють собою електронний газ, на відстані  $r$  від осі обертання діє відцентрова сила інерції  $F_B = m\omega^2 r$ , що переміщуватиме електрони до країв диска. Таке переміщення триватиме до тих пір, поки відцентрова сила не зрівноважиться електростатичною силою  $F_E = eE$ , яка виникає за рахунок нерівномірного розподілу електронів у диску. Тут  $m$  і  $e$  – маса і заряд електрона,  $E$  – напруженість електричного поля. Враховуючи, що  $\omega = 2\pi f$ , одержимо:

$$4\pi^2 m f^2 r = eE,$$

звідки

$$E = \frac{m}{e} \cdot 4\pi^2 f^2 r.$$

Для того щоб знайти різницю потенціалів  $U$  між центром і краями диска, скористаємось формулою (1.5), яка задає взаємозв'язок між  $U$  і  $E$ :  $U = \int_1^2 E dl$ . Враховуючи симетрію задачі, очевидно, що інтегрування необхідно вести вздовж радіуса диска в межах від  $0$  до  $R$ :

$$U = \int_0^R E dr = \int_0^R \frac{m}{e} \cdot 4\pi^2 f^2 r dr = \frac{m}{e} \cdot 2\pi^2 f^2 R^2.$$

Підставляючи числові значення, одержимо  $U \approx 2,8 \cdot 10^{-9}$  В. Вимірявши величину  $U$ , можна визначити питомий заряд електрона.



**Задача 5.19.** У срібному провіднику, діаметр якого  $d = 2$  мм, протікає струм  $4$  А. Обчислити середню швидкість упорядкованого руху електронів у провіднику, якщо вважати, що кожний атом срібла віддає один вільний електрон.

**Р о з в' я з а н н я.** За означенням сила струму:

$$I = q/t, \quad (\text{а})$$

де  $q$  – кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника площею  $S$  за час  $t$ . За цей же час  $t$  електрони у провіднику під дією електричного поля змістяться на середню відстань  $L = v_{\partial}t$ , де  $v_{\partial}$  – середня швидкість упорядкованого (дрейфового) руху електронів. Отже, поперечний переріз провідника перетнуть електрони, які розташовані на відстані  $L$  від нього, тобто перебувають в об'ємі  $V = LS$ . Нехай в одиниці об'єму провідника міститься  $n$  електронів. Тоді загальний заряд  $q$ , який за час  $t$  перетне поперечний переріз  $S$ , дорівнює:

$$q = Ne = nVe = nLSe = env_{\partial}tS = env_{\partial}t \frac{\pi d^2}{4}, \quad (\text{б})$$

де  $d$  – діаметр провідника.

Кількість вільних електронів у одиниці об'єму можна визначити таким чином. Позначимо атомну (молярну) масу срібла через  $\mu$ . В одному молі є  $N_A$  атомів, а значить, згідно з умовою задачі,  $N_A$  вільних електронів. Маса ж одиниці об'єму являє собою густину речовини  $D$ . Із пропорції:

$$\begin{array}{l} \mu - N_A \\ D - n \end{array}$$

знаходимо:

$$n = \frac{D}{\mu} N_A. \quad (\text{в})$$

Підставляючи одержані вирази (б) і (в) у вираз (а)

$$\text{одержимо:} \quad I = e \frac{D}{\mu} N_A v_{\partial} \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\text{звідки:} \quad v_{\partial} = \frac{4I\mu}{\pi d^2 e N_A D}.$$

Враховуючи, що для срібла  $\mu = 0,108$  кг/моль,  $D = 1,05 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>, одержимо, що  $v_{\partial} \approx 0,136 \cdot 10^{-3}$  м/с.

**Задача 5.20.** Термопара мідь–константан і гальванометр з'єднані послідовно і підключені до точок  $A$  і  $C$  потенціометра (рис. 5.7). На потенціометр подано напругу від акумулятора з електрорушійною силою  $\mathcal{E} = 1,4$  В. Повний опір потенціометра  $R = 10$  кОм. Холодний спай термопари поміщений у посудину Дюара, яка заповнена сумішшю води і льоду. Яка температура гарячого спаю термопари, якщо струм у колі гальванометра дорівнює нулю

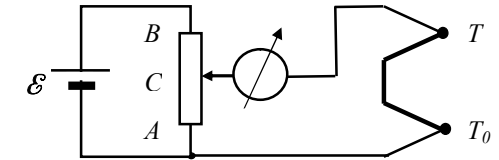


Рис. 5.7.

при такому положенні повзунка потенціометра, коли опір частини  $AC$   $R_I = 167,2$  Ом? Внутрішнім опором акумулятора та підвідних проводів можна знехтувати. Оцініть відношення концентрації електронів у міді та константані.

**Р о з в' я з а н н я.** Якщо струм у колі гальванометра відсутній, то це значить, що різниця потенціалів на ділянці  $AC$  потенціометра компенсує е.р.с. термопари:

$$\mathcal{E}_T = U_{AC} = IR_I.$$

За відсутності струму в колі гальванометра струм у всіх ділянках потенціометра один і той же і дорівнює:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Тоді:

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E} \frac{R_I}{R}. \quad (\text{а})$$

За умовою задачі холодний спай термопари розташований у суміші води і льоду. Це означає, що його температура  $T_0$  постійна і дорівнює 273 К (0°C). Термоелектрорушійна сила залежить від різниці температур:

$$\mathcal{E}_T = \beta(T - T_0). \quad (\text{б})$$

Користуючись таблицею термо-е.р.с. металів відносно платини, визначимо  $\beta$  для термопари мідь–константан:

$$\beta = (7,4 - (-34,4)) \cdot 10^{-6} \text{ В/К} = 41,8 \text{ мкВ/К}.$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (а) і (б), одержимо:

$$T = T_0 + \mathcal{E} \frac{R_1}{\beta R}.$$

Розрахунок числових значень дає  $T = 833 \text{ K} = 560^\circ\text{C}$ .

Із формули (5.11) очевидно, що

$$\beta = \frac{k}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}},$$

звідки

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \exp\left(\frac{\beta e}{k}\right) \approx 1,62.$$

**Задача 5.21.** При дослідженні опору напівпровідникового терморезистора виявилось, що його опір зменшується вдвічі при його нагріванні на  $\Delta T = 20 \text{ K}$ . Визначити енергію активації провідності, якщо початкова температура терморезистора становила  $T_1 = 273 \text{ K}$ .

**Розв'язання.** Оскільки температура зразка змінюється незначно, можемо вважати, що його лінійні розміри не змінюються і, отже, зміна опору зумовлена тільки зміною питомого опору. Тоді для двох температур  $T_1$  і  $T_2 = T_1 + \Delta T$  згідно з формулою (5.7)

$$\rho_1 = \rho_0 \exp\left(\frac{E_a}{kT_1}\right), \quad (\text{а})$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{2} = \rho_0 \exp\left(\frac{E_a}{kT_2}\right). \quad (\text{б})$$

Розділимо вираз (а) на вираз (б) і прологарифмуємо:

$$\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{E_a}{k} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

звідки

$$E_a = \frac{k \cdot \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}.$$

Підстановка числових значень із врахуванням того, що  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , дає  $E_a = 0,38 \text{ eV}$ .

**Задача 5.22.** У скільки разів буде більший струм насичення термоелектронної емісії з торійованого вольфрамового катода при робочій температурі  $T = 1800 \text{ K}$  ніж струм насичення з чистого вольфрамового катода при тій самій температурі? Емісійні сталі та роботи виходу для чистого вольфраму і торійованого вольфраму відповідно становлять  $B_1 = 60 \text{ A}/(\text{cm}^2 \text{ K}^2)$ ,  $B_2 = 3 \text{ A}/(\text{cm}^2 \text{ K}^2)$ ,  $A_1 = 4,54 \text{ eV}$ ,  $A_2 = 2,63 \text{ eV}$ .

**Розв'язання.** Густина струму насичення при термоелектронній емісії згідно з формулою (5.30) для вольфрамового катода:

$$j_1 = B_1 T^2 \exp\left(-\frac{A_1}{kT}\right), \quad (\text{а})$$

а торійованого вольфрамового катода:

$$j_2 = B_2 T^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT}\right). \quad (\text{б})$$

Розділивши рівняння (б) на (а), дістанемо:

$$K = \frac{j_2}{j_1} = \frac{B_2}{B_1} \exp\left(\frac{A_2 - A_1}{kT}\right). \quad (\text{в})$$

Підставляючи числові значення у (в), одержимо:

$$K = 1,1 \cdot 10^4 \text{ раз}.$$

**Задача 5.23.** Визначити коефіцієнт дисоціації  $\kappa$  водного розчину хлористого калію (KCl) з концентрацією  $c = 0,10 \text{ г/см}^3$ . Питомий опір такого розчину за кімнатної температури ( $18^\circ\text{C}$ )  $\rho = 7,36 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Розв'язання.** Коефіцієнт дисоціації показує, яка частка всіх молекул KCl розпалась на іони:

$$\kappa = \frac{n'}{n}, \quad (\text{а})$$

тому число пар іонів, які обумовлюють провідність електроліту,  $n' = \kappa n$ . Якщо концентрація розчиненої речовини  $c$ , то в одиниці об'єму розчину міститься  $\frac{c}{\mu}$  моль хлористого калію, і оскільки один моль містить  $N_A$  молекул, то

$$n = \frac{c}{\mu} N_A. \quad (\text{б})$$

Від концентрації пар іонів  $n'$  залежить електропровідність електроліту (див. формулу (5.17)):

$$\lambda = zen'(b^- + b^+) = \frac{I}{\rho},$$

звідки

$$n' = \frac{I}{\rho} \cdot \frac{1}{ze(b^- + b^+)}. \quad (в)$$

Підставляючи (б) і (в) в (а), одержимо:

$$\kappa = \frac{\mu}{\rho ze(b^- + b^+)cN_a}. \quad (г)$$

З таблиць знаходимо:

$$\mu = (0,039 + 0,035) = 0,074 \text{ (кг/моль)},$$

для  $K^+$   $b^+ = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{с} \cdot \text{В}),$

для  $Cl^-$   $b^- = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{с} \cdot \text{В}).$

Після підстановки всіх числових значень у (г) одержимо:  $\kappa = 0,77$ .

**Задача 5.24.** Через водний розчин соляної кислоти пропускають протягом 1 хвилини струм 1 А. Яка маса гримучого газу утвориться при цьому?

**Розв'язання.** При пропусканні постійного електричного струму через підкислену воду на одному з електродів виділяється водень, а на другому кисень, суміш яких являє собою гримучий газ. Тому його маса дорівнює сумі мас водню  $m_1$  і кисню  $m_2$ :

$$m = m_1 + m_2. \quad (а)$$

Масу речовини, яка виділяється при електролізі, можна знайти за об'єднаним законом Фарадея (5.16):

$$m_1 = \frac{I}{F} \cdot \frac{\mu_1}{z_1} It, \quad m_2 = \frac{I}{F} \cdot \frac{\mu_2}{z_2} It, \quad (б)$$

де  $\mu_1, \mu_2$  – молярні маси водню та кисню,  $z_1, z_2$  – їх валентності.

Підставляючи вирази (б) у рівняння (а), одержимо:

$$m = \frac{I}{F} \cdot \left( \frac{\mu_1}{z_1} + \frac{\mu_2}{z_2} \right) It.$$

Враховуючи, що  $\mu_1 = 0,001 \text{ кг/моль}$ ,  $\mu_2 = 0,016 \text{ кг/моль}$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2$ , одержимо, що  $m = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ .

**Задача 5.25.** В іонізаційній камері, заповненій газом, розташовані два плоских електроди площею  $S = 100 \text{ см}^2$ , які віддалені один від одного на відстань  $d = 5 \text{ см}$ . Під дією рентгенівського випромінювання в камері утворюються додатні і від'ємні одновалентні іони, рухливості яких  $b^+ = b^- = 1,0 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , а коефіцієнт рекомбінації має значення  $\gamma = 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ . Струм насичення між електродами камери становить  $10^{-7} \text{ А}$ . Який струм протікатиме між електродами, якщо до них прикладена різниця потенціалів  $U = 2,0 \text{ В}$ ? Через який час після припинення дії іонізатора концентрація іонів у камері зменшиться у двічі?

**Розв'язання.** Користуючись формулою (5.21 б)  $j_H = \Delta n q d$ , знаходимо струм насичення:

$$I_H = j_H S = \Delta n q d S,$$

Звідки потужність іонізатора, тобто кількість пар іонів, що утворюються в одиниці об'єму за одиницю часу:

$$\Delta n = \frac{I_H}{edS} = 12,5 \cdot 10^8 (\text{см}^{-3} \text{с}^{-1}). \quad (а)$$

Тут враховано, що іони одновалентні, тобто їх заряд  $q$  дорівнює заряду електрона  $e$ .

Тоді рівноважна концентрація іонів у камері згідно з формулою (5.20):

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n}{\gamma}} = 3,5 \cdot 10^8 (\text{см}^{-3}). \quad (б)$$

Електропровідність такого газу:

$$\lambda = en(b^+ + b^-) = 1,1 \cdot 10^{-10} (\text{Ом}^{-1} \text{см}^{-1}). \quad (в)$$

Враховуючи, що напруженість електричного поля у газовому проміжку  $E = U/d$ , знайдемо величину струму в ньому:

$$I = jS = \lambda ES = \frac{\lambda US}{d} = 0,45 \cdot 10^{-8} (\text{А}). \quad (г)$$

Як бачимо, одержане значення струму більш ніж на порядок менше струму насичення, тому застосування закону Ома для його розрахунку було правомірним.

Нехай у момент часу  $t_0$  дія іонізатора припиняється. В цей момент часу рівноважна концентрація іонів у газі  $n = \sqrt{\frac{\Delta n}{\gamma}}$ , яку

позначимо через  $n_0$ , а через  $dn$  – позначимо число іонів які нейтралізуються за час  $dt$ . Тоді величина  $dn/dt$  являтиме собою швидкість зникнення (зменшення) кількості іонів у газі. Очевидно, що вона повинна бути пропорційна як кількості додатних  $n^+ = n$ , так і кількості від'ємних  $n^- = n$  іонів, тобто

$$-\frac{dn}{dt} = \gamma n^2, \quad (д)$$

або

$$\frac{dn}{n^2} = -\gamma dt. \quad (е)$$

Тут знак « $\leftrightarrow$ » означає, що число іонів зменшується.

Інтегруванням рівняння (е), із врахуванням початкових умов  $n(t_0) = n_0$ , одержимо:

$$-\int_{n_0}^n \frac{dn}{n^2} = \int_{t_0}^t \gamma dt,$$

або

$$t - t_0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} \right).$$

За умовою задачі в момент часу  $t_1$   $n(t_1) = \frac{n_0}{2}$ , тому

$$t_1 - t_0 = 0,4 \text{ (с).}$$

**Задача 5.26.** Газ між двома плоскими електродами, відстань між якими  $d$ , іонізується. Поблизу електродів рекомбінація не відбувається, оскільки всі утворені там іони досягають електродів скоріш, ніж встигнуть рекомбінувати. Виходячи із цього, покажіть, що формула для густини струму  $j = qn(b^+ + b^-)E$  при струмі, далекому від насичення, переходить у формулу для густини струму насичення  $j_H = \Delta n q d$ , як тільки буде досягнута така швидкість іонів, при якій рекомбінація не відбуватиметься ніде в просторі між електродами.

**Р о з в' я з а н н я.** Середню тривалість існування (час життя) іона можна визначити, як

$$\tau = \frac{n}{\Delta n},$$

де  $n$  – рівноважна концентрація іонів,  $\Delta n$  – швидкість їх утворення.

Врахуємо, що середня швидкість направлено (дрейфового) руху додатних і від'ємних іонів у електричному полі:

$$v_{\delta}^+ = b^+ E = b^+ \frac{U}{d} \quad \text{та} \quad v_{\delta}^- = b^- E = b^- \frac{U}{d}.$$

Тоді за час  $\tau$  іони встигнуть до рекомбінації зміститись на відстань

$$\Delta l^+ = v_{\delta}^+ \tau^* = b^+ E \tau^* = b^+ \frac{U n}{d \Delta n}$$

$$\text{та} \quad \Delta l^- = v_{\delta}^- \tau^* = b^- E \tau^* = b^- \frac{U n}{d \Delta n}.$$

Тобто з області  $A$  (див. рис. 5.8.) шириною  $\Delta l^+$  всі від'ємні іони потраплять на анод без рекомбінації, а з області  $B$  шириною  $\Delta l^-$  всі додатні іони потраплять на катод. Рекомбінація іонів буде мати місце в середній області  $C$ . При одержанні струму насичення область  $C$  зникає, а загальна ширина областей  $A$  і  $B$  зростає і дорівнюватиме  $d$ :

$$\Delta l^+ + \Delta l^- = b^+ \frac{U n}{d \Delta n} + b^- \frac{U n}{d \Delta n} = \frac{U n}{d \Delta n} (b^+ + b^-) = d.$$

Врахуємо, що

$$j = qn(b^+ + b^-)E = qn(b^+ + b^-) \frac{U}{d}.$$

Із двох останніх виразів випливає

$$j = j_H = \Delta n q d,$$

що і треба було довести.

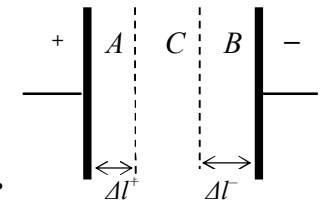


Рис. 5.8.

## 5.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

5.27. У мідному провіднику тече струм густиною  $1,0 \text{ А/мм}^2$ . Уважаючи, що кожному атому міді відповідає один вільний електрон, оцінити, який шлях пройде електрон при його переміщенні вздовж провідника на  $10 \text{ мм}$ .

5.28. Приймаючи до уваги, що кожному атому міді і вольфраму відповідає один вільний електрон, визначити для цих металів відношення: а) концентрацій вільних електронів; б) часів вільного пробігу електронів при кімнатній температурі; в) середніх швидкостей упорядкованого руху електронів при однаковій густині струму.

5.29. У мідному провіднику довжиною  $2 \text{ м}$  і площею поперечного перерізу  $0,4 \text{ мм}^2$  протікає електричний струм. Потужність, яка виділяється у провіднику,  $0,35 \text{ Вт}$ . Визначити число електронів, що проходять за  $1 \text{ с}$  через поперечний переріз цього провідника, та напруженість електричного поля у провіднику.

5.30. У залізному провіднику тече струм із густиною  $0,01 \text{ А/мм}^2$ . Уважаючи, що кожному атому металу відповідає один вільний електрон, визначити: а) середню швидкість упорядкованого (дрейфового) руху електронів; б) механічний імпульс електронів в одиниці об'єму.

5.31. Чому дорівнює відношення концентрації вільних електронів у вісмуті і сурмі, якщо при нагріванні одного із спайів термопар, виготовленої із цих металів, на  $100 \text{ К}$  виникає електрорушійна сила  $11 \text{ мВ}$ . В якому металі концентрація вільних електронів більша, якщо струм через нагрітий спай іде від вісмуту до сурми?

5.32. Термопара вісмут-залізо опором  $5 \text{ Ом}$  під'єднана до гальванометра, опір якого  $110 \text{ Ом}$ . Який струм покаже гальванометр, якщо один спай термопар помістити в пари води, яка кипить при нормальних умовах, а другий – в суміш води і льоду?

5.33. Для визначення температури в печі в неї поміщають термопару нікель-ніхром з постійною  $\beta = 5 \cdot 10^{-7} \text{ В/К}$ , яка під'єднана до гальванометра з внутрішнім опором  $2 \cdot 10^3 \text{ Ом}$  і чутливістю  $10^{-8} \text{ А/под}$ . При температурі холодного спаю  $15^\circ\text{C}$

стрілка гальванометра відхиляється на  $25$  поділок. Яка температура в печі? Опором термопар можна знехтувати.

5.34. З якою мінімальною швидкістю повинен летіти електрон, щоб при ударі об вольфрамову пластинку вирвати з неї новий електрон, якщо робота виходу електронів із вольфраму становить  $4,5 \text{ еВ}$ ?

5.35. Стрижень (див. рис. 5.9) складається із трьох частин: частини АВ і CD виготовлені з вісмуту, частина BC – із сурми. Як зміняться температури контактів В і С, якщо в стрижні протікатиме струм у вказаному на рис. напрямку?

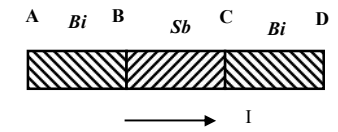


Рис. 5.9.

5.36. Через поперечний переріз мідної пластинки товщиною  $0,5 \text{ мм}$  і висотою  $10 \text{ мм}$  тече струм  $20 \text{ А}$ . Пластинка поміщена у магнітне поле, вектор індукції якого дорівнює  $1 \text{ Тл}$  і напрямлений паралельно до товщини пластинки. При цьому виникає поперечна різниця потенціалів  $3,1 \cdot 10^{-6} \text{ В}$ . Визначити концентрацію електронів провідності у міді.

5.37. Через поперечний переріз алюмінієвої пластинки товщиною  $0,1 \text{ мм}$  тече струм  $5 \text{ А}$ . Пластинка поміщена у магнітне поле, вектор індукції якого  $0,5 \text{ Тл}$  і напрямлений паралельно до товщини пластинки. Визначити поперечну різницю потенціалів, якщо вважати, що концентрація електронів провідності дорівнює концентрації атомів.

5.38. Пластинка напівпровідника товщиною  $0,2 \text{ мм}$  поміщена у магнітне поле, перпендикулярне до площини пластинки. Питомий опір напівпровідника  $10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , а індукція магнітного поля  $1 \text{ Тл}$ . Перпендикулярно до магнітного поля вздовж пластинки тече електричний струм  $0,1 \text{ А}$ . При цьому виникає поперечна різниця потенціалів  $3,25 \cdot 10^{-3} \text{ В}$ . Знайти рухливість носіїв заряду у напівпровіднику.

5.39. При спостереженні ефекту Холла в германії виявилось, що холлівська напруга дорівнює нулю. Яка частина струму в зразку переноситься електронами, якщо рухливість електронів у германії  $3500 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , а рухливість дірок –  $1400 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ ?

5.40. Через металічний стрижень, в якому підтримується постійний градієнт температури  $dT/dx = 0,005 \text{ К/м}$ , за деякий час

пройшла кількість теплоти  $5,25 \cdot 10^{-6}$  Дж. Яка кількість електрики пройде через цей стрижень за той же час, якщо в ньому підтримувати градієнт потенціалів  $d\phi/dx = 0,005$  В/м? Середня температура стрижня 300 К.

5.41. Дві залізні дротини, опори яких при  $0^\circ\text{C}$  дорівнюють 1 Ом і 2,5 Ом, з'єднали послідовно і підключили до джерела струму. Першу дrottину нагріли до  $847^\circ\text{C}$ , а температура другої підтримується  $0^\circ\text{C}$ . При цьому виявилось, що потужність, яка виділяється на першій дrottині, не змінилася. Визначити за цими даними температурний коефіцієнт опору заліза. Внутрішнім опором джерела струму можна знехтувати.

5.42. Реостат із залізної дrottини, міліамперметр і джерело струму включені послідовно. При температурі  $0^\circ\text{C}$  опір реостата 200 Ом, а опір міліамперметра 20 Ом. Стрілка міліамперметра показує 30 мА. Яким буде відхилення стрілки міліамперметра, якщо реостат нагріється на  $50^\circ\text{C}$ ? Внутрішнім опором джерела струму можна знехтувати.

5.43. Опір вольфрамової нитки електричної лампочки при  $20^\circ\text{C}$  дорівнює 35,8 Ом. Яка температура нитки лампочки, якщо при включенні її у мережу з напругою 120 В у ній тече струм 0,33 А? Температурний коефіцієнт опору вольфраму  $5,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

5.44. Обмотка котушки із мідної дrottини за температури  $14^\circ\text{C}$  має опір 10 Ом. Після пропускання струму опір обмотки став 12,2 Ом. До якої температури нагрілася обмотка, якщо температурний коефіцієнт опору міді  $4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ?

5.45. У скільки разів зміниться опір напівпровідника при зменшенні температури вдвічі, якщо початкова температура 400 К, а ширина забороненої зони 0,7 еВ?

5.46. У скільки разів зменшиться опір напівпровідника при збільшенні його температури на 10%, якщо початкова температура  $27^\circ\text{C}$ , а ширина забороненої зони 0,6 еВ?

5.47. Знайти максимальну напругу живлення електричного кола, яке містить послідовно з'єднані напівпровідниковий діод і резистор опором 100 кОм, якщо допустимий зворотний струм діода 150 мкА, максимально допустима зворотна напруга на діоді 100 В.

5.48. На аноді двохелектродної лампи за 1 годину роботи виділилось 63 Дж тепла при струмі насичення 6,3 мА. Уважаючи,

що тепло виділяється тільки за рахунок кінетичної енергії електронів, визначити швидкість електронів, які ударяються в анод, та кількість електронів, які покидають катод за 1 секунду.

5.49. Вольфрамова нитка, яка є катодом електронної лампи, розжарюється струмом 1,9 А до деякої температури. На скільки вольт необхідно підвищити напругу на цій нитці, щоб при анодному струмі 0,1 А температура катода залишилась такою ж, як за відсутності анодного струму?

5.50. Вольфрамовий катод електронної лампи нагрівається струмом 10 А до температури  $T_0$ , при цьому напруга, яка прикладена до нитки розжарення, 8 В. Після включення анодної напруги 5000 В температура катода змінюється, що можна помітити за зміною його свічення. Як потрібно змінити напругу живлення нитки розігріву, щоб температура катода знову стала  $T_0$ , якщо потужність, яка розсіюється на аноді при анодній напрузі 5000 В, становить 1,2 кВт?

5.51. Визначити струм насичення в електронній лампі з вольфрамовим катодом довжиною 3 см та діаметром 0,1 мм, якщо температура розжарення нитки  $2700 \text{ K}$ . Емісійна постійна для вольфраму  $60 \text{ A}/(\text{cm}^2 \cdot \text{K}^2)$ , робота виходу електронів із вольфраму 4,54 еВ.

5.52. Яка робота виходу електронів із металу, якщо у двохелектродній лампі підвищення температури нитки розжарення, виготовленої із цього металу, від 2000 К до 2001 К викликає збільшення струму насичення на 1%?

5.53. Як зміниться струм насичення в електронній лампі із вольфрамовим катодом при підвищенні температури нитки розжарення лампи від 2000 К до 2020 К?

5.54. Робота виходу електронів із поверхні барію дорівнює 2,49 еВ. Якою має бути мінімальна кінетична енергія електрона, щоб він міг вилетіти із поверхні барію?

5.55. Робоча температура вольфрамового катода  $2500 \text{ K}$ . Чи можуть електрони, які мають середню кінетичну енергію, що відповідає цій температурі, покидати катод? Робота виходу електронів із вольфраму 4,54 еВ.

5.56. Однорідний пучок протонів у вакуумі, прискорений різницею потенціалів 600 кВ, має круглий поперечний переріз

радіусом 5 мм. Знайти напруженість електричного поля на поверхні пучка і різницю потенціалів між поверхнею і віссю пучка при струмі 50 мкА.

5.57. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. У першій ванні виділився цинк масою 3,9 г, у другій за той же час – залізо масою 2,24 г. Цинк двовалентний. Яка валентність заліза?

5.58. Амперметр, який включений послідовно з електролітичною ванною із розчином  $\text{AgNO}_3$ , показує силу струму 0,9 А. Чи є правильними покази амперметра, якщо за 5 хвилин при проходженні струму виділилось 315 мг срібла?

5.59. При одержанні алюмінію електролізом розчину  $\text{Al}_2\text{O}_3$  в розплавленому кріоліті струм у розчині  $2 \cdot 10^4$  А при різниці потенціалів на електродах 5 В. За який час на одному з електродів виділиться  $10^3$  кг алюмінію? Скільки електроенергії буде при цьому затрачено?

5.60. Яка маса міді виділиться на одному з електродів електролітичної ванни із мідним купоросом, якщо струм у ванні лінійно наростає від нуля до 1 А за час 10 с?

5.61. Нікелювання металічного виробу з поверхнею  $120 \text{ см}^2$  проводилось протягом 5 год. при струмі 0,3 А. Яка товщина шару нікелю? Валентність нікелю 2, густина  $9 \text{ г/см}^3$ , молярна маса 58,7 г/моль.

5.62. Протягом якого часу потрібно проводити електроліз підкисленої води, щоб одержаним воднем заповнити за нормальних умов повітряний шар із підйнятною силою 2000 Н? Струм при електролізі 100 А.

5.63. Електролітична ванна із розчином мідного купоросу приєднана до акумулятора із електрорушійною силою 4 В і внутрішнім опором 0,1 Ом. Визначити кількість міді, яка виділилась за 10 хвилин, якщо е.р.с. поляризації 1,5 В і опір розчину 0,5 Ом. Яке відношення заряду іона міді до його маси? Мідь двовалентна.

5.64. При електролізі розчину сірчаної кислоти витрачається потужність 37 Вт. Визначити опір електроліту, якщо за 500 хвилин виділяється 0,3 г водню.

5.65. Яку кількість електричної енергії треба витратити, щоб при електролізі розчину  $\text{AgNO}_3$  виділилось 500 мг срібла, якщо напруга на електродах електролітичної ванни становить 4 В?

5.66. У розчині мідного купоросу анодом служить мідь, яка містить 12 мол. % домішок. Яку кількість електроенергії треба витратити, щоб одержати 1 кг чистої міді, якщо напруга на електродах електролітичної ванни 6 В? Домішки вважати двовалентними.

5.67. Електропровідність нормального розчину соляної кислоти  $0,035 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ . Визначити коефіцієнт дисоціації. Яке число іонів кожного знака міститься в одиниці об'єму розчину? Рухливість іонів водню  $3,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , хлору –  $6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

5.68. У посудину прямокутної форми, протилежні сторони якої служать електродами, наливо десятипроцентний розчин кухонної солі масою 780 г. Який коефіцієнт дисоціації, якщо опір розчину 6,9 Ом, а відстань між електродами 25 см? Рухливість іонів натрію  $4,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , хлору –  $6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

5.69. При електролізі розчину  $\text{AgNO}_3$  за одну годину виділилось 9,4 г срібла. Визначити е.р.с. поляризації, якщо напруга на клеммах ванни 4,2 В, а її опір 1,5 Ом.

5.70. Повітря між двома пластинами плоского конденсатора іонізується ультрафіолетовими променями. Сила струму насичення  $2 \cdot 10^{-10}$  А. Площа кожної пластини конденсатора  $100 \text{ см}^2$ , а відстань між ними 0,5 см. Визначити число пар іонів, які утворюються за 1 секунду в  $1 \text{ см}^3$  повітря.

5.71. Повітря між двома паралельними пластинами, які розташовані на відстані 20 мм одна від одної, іонізують рентгенівським випромінюванням. Площа кожної пластини  $500 \text{ см}^2$ . Знайти концентрацію позитивних іонів, якщо за напруги 100 В між пластинами протікає електричний струм 3,0 мкА, який значно менший від струму насичення. Рухливість позитивних іонів повітря  $1,37 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , негативних –  $1,91 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

5.72. Іонізатор, який створював  $2,3 \cdot 10^8$  пар іонів у  $\text{см}^3$  за 1 с був вимкнений у певний момент часу  $t_0$ . Уважаючи, що єдиним процесом втрати іонів у повітрі є рекомбінація із швидкістю  $1,67 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$ , знайти, за який час після виключення іонізатора концентрація іонів зменшиться у 2 рази.

5.73. Плоский повітряний конденсатор, відстань між пластинами якого 5 мм, зарядили до різниці потенціалів 90 В. Знайти час, за який різниця потенціалів на конденсаторі зменшиться на 1,0%, враховуючи, що за звичайних умов в одиниці об'єму у повітрі за 1 с утворюється  $5,0 \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$  пар іонів. Задана напруга відповідає струму насичення.

5.74. Концентрація іонів, які зумовлюють провідність атмосферного повітря, в середньому дорівнює  $700 \text{ см}^{-3}$ . Середнє значення напруженості електричного поля Землі 130 В/м. Обчислити густину струму провідності в атмосфері. Рухливість позитивних іонів повітря становить  $1,37 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , а негативних –  $1,91 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

5.75. Іони в газі при зіткненні рекомбінують один із одним. У скільки разів число зіткнень іонів повітря в одиниці об'єму за одиницю часу внаслідок їх електричної взаємодії більше, ніж число зіткнень незаряджених молекул повітря за такої ж концентрації? Температура повітря 17 °С, діаметр молекул повітря прийняти таким, що дорівнює  $3 \cdot 10^{-10}$  м. Коефіцієнт рекомбінації  $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ .

5.76. Число пар іонів, які утворюються в  $1 \text{ см}^3$  за 1 с приймають над океаном рівним приблизно 1 (за рахунок дії космічного випромінювання), а над поверхнею суші – 8 (за рахунок дії космічного випромінювання та радіоактивних речовин, що містяться у ґрунті). Повітря над океаном можна вважати чистим, тобто вільним від пилу, тому коефіцієнт рекомбінації іонів  $\gamma = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ . Повітря над сушею забруднене частинками пилу, тому рекомбінація іонів проходить саме через ці частинки із коефіцієнтом  $\gamma' = 0,01 \text{ с}^{-1}$ . Знайти концентрацію іонів над океаном та над сушею. На яку відстань за час свого існування змістяться додатні і від'ємні іони у повітрі над океаном і сушею, якщо вертикальна складова напруженості електричного поля Землі 130 В/м. Рухливість позитивних іонів повітря  $1,37 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , негативних –  $1,91 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ .

5.77. Число пар іонів, які утворюються в  $1 \text{ см}^3$  повітря при іонізації рентгенівським випромінюванням,  $10^6 \text{ см}^{-3}$ . Через який час після припинення дії іонізатора число пар іонів зменшиться до  $10^4 \text{ см}^{-3}$ , якщо повітря чисте (у якому коефіцієнт рекомбінації

$1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$  і якщо забруднене пилом (при цьому коефіцієнт рекомбінації –  $10 \text{ с}^{-1}$ )?

5.78. При опроміненні посудини з повітрям рентгенівськими променями в кожному кубічному сантиметрі його об'єму щосекунди іонізується  $10^{10}$  молекул. У результаті рекомбінації в посудині встановлюється рівновага, причому в  $1 \text{ см}^3$  міститься  $10^8$  іонів кожного знака. Знайти коефіцієнт рекомбінації. У скільки разів зміниться електропровідність через 1 с після припинення дії іонізатора?

5.79. До джерела високої напруги через резистор, опір якого  $10^6$  Ом, підключений плоский конденсатор ємністю 9 пФ із відстанню між пластинами 3 см. Повітря в просторі між пластинами конденсатора іонізується рентгенівськими променями так, що в  $1 \text{ см}^3$  утворюється  $10^4$  пар іонів за 1 с. Заряд іона дорівнює заряду електрона. Знайти спад напруги на резисторі, враховуючи, що між пластинами конденсатора протікає струм насичення.

5.80. При якій відстані між пластинами плоского конденсатора площею  $100 \text{ см}^2$  струм насичення досягає  $2 \cdot 10^{-10}$  А, якщо кількість пар іонів, що утворюються в  $1 \text{ см}^3$  за 1 с, становить  $6,3 \cdot 10^6$ ?

5.81. Деякий іонізатор (наприклад, рентгенівське випромінювання) створює в одиниці об'єму газу за одиницю часу  $\Delta n_0$  пар однозарядних іонів різних знаків. Коефіцієнт рекомбінації іонів  $\gamma$ . Визначити концентрацію  $n$  пар іонів у момент часу  $t$ , якщо у початковий момент включення іонізатора концентрація іонів дорівнювала нулю.

5.82. Яку мінімальну швидкість повинен мати електрон, щоб іонізувати атом водню, якщо потенціал іонізації водню становить 13,5 В?

5.83. Чи будуть атоми калію, які потрапляють між пластини плоского конденсатора, іонізуватись електронами, якщо різниця потенціалів на пластинах становить 12 кВ, а відстань між пластинами 1,2 см? Середня довжина вільного пробігу електронів у повітрі за звичайних умов 5,0 мкм, а потенціал іонізації атомів калію 4,32 В.



5.84. При якій температурі атоми гелію мають середню кінетичну енергію поступального руху, яка дорівнює їх енергії іонізації? При якій температурі середня кінетична енергія атомів гелію достатня для іонізації нерухомого атома? Потенціал іонізації атомів гелію 24,58 В.

5.85. При якій найменшій відносній швидкості двох молекул кисню при непружному співударі може відбутись однократна іонізація однієї з них? Якою має бути найменша швидкість електрона для одержання такого іона кисню? Потенціал іонізації молекули кисню 12,5 В.

## МАГНІТНЕ ПОЛЕ. МАГНЕТИКИ

## 6.1. Короткі теоретичні відомості

*А. Магнітне поле постійного електричного струму*

Магнітне поле породжується електричними струмами (рухомими зарядженими мікрочастинками або тілами) та постійними магнітами. Наявність у просторі магнітного поля історично вперше визначалось його дією на магнітну стрілку. Однак, характерною властивістю магнітного поля є його силова дія на рухомі заряджені частинки та на провідник із електричним струмом. Уперше магнітну взаємодію струмів, подібно електричній взаємодії зарядів, встановив Ампер, використавши поняття про елемент струму  $I d\vec{l}$ , що рівнює добутку скалярної величини – сили струму  $I$  на векторну величину – елемент довжини  $d\vec{l}$ , тобто елемент струму є векторною величиною. Два елементи струму з модулями  $I_1 dl_1$  та  $I_2 dl_2$  взаємодіють між собою із силою:

$$dF_{12} = k \frac{I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{r_{12}^2}, \quad (6.1)$$

де  $\theta_1$  – кут між першим елементом  $I_1 d\vec{l}_1$  та радіус-вектором  $\vec{r}_{12}$ ,  $\theta_2$  – кут між нормаллю до площини, в якій лежать  $I_1 d\vec{l}_1$  і  $\vec{r}_{12}$  та другим елементом струму  $I_2 d\vec{l}_2$ . У векторній формі закон Ампера має вигляд:

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{[I_2 d\vec{l}_2 \times [I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3} \quad (6.2)$$

і дає можливість визначити напрям сили  $d\vec{F}_{12}$ , з якою перший елемент струму діє на другий: сила, з якою перший елемент струму діє на другий елемент струму перпендикулярна до другого елемента струму і лежить у площині, в якій розміщений перший елемент струму та радіус-вектор, що з'єднує початки цих елементів струму. Коефіцієнт пропорційності  $k$  залежить від вибору системи одиниць. У системі СІ  $k = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}$ , де  $\mu$  – відносна магнітна проникність середовища, в якому перебувають елементи

струму,  $\mu_0$  – магнітна стала, яка дорівнює  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м =  $1,256 \cdot 10^{-6}$  Гн/м. Для вакууму  $\mu = 1$ , для повітря  $\mu \cong 1$ , а добуток  $\mu \cdot \mu_0 = \mu_a$  називається абсолютною магнітною проникністю середовища.

На елемент струму  $Id\vec{l}$  діє сила і з боку магнітного поля, створеного постійними магнітами. Основна задача теорії магнітного поля (як і теорії тяжіння та електростатики) полягає в розрахунку характеристик магнітного поля довільної системи струмів і рухомих електричних зарядів. Силовою характеристикою магнітного поля є вектор його індукції  $\vec{B}$ , який дорівнює силі, що діє на одиничний елемент струму при їх перпендикулярному розташуванні, тобто

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (6.3)$$

Слід зауважити, що вектори  $d\vec{F}$  і  $\vec{B}$  (як і  $Id\vec{l}$  та  $d\vec{F}$ ) взаємно перпендикулярні. Другою характеристикою магнітного поля є вектор його напруженості  $\vec{H}$ , який зв'язаний із вектором індукції  $\vec{B}$  співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (6.4)$$

Очевидно, що у загальному випадку відносна магнітна проникність  $\mu$  є тензорною величиною, оскільки вона пов'язує векторні величини, однак у випадку ізотропних середовищ вона має тільки одне значення.

Формулу (6.3) в інтегральній формі  $F = BIl \sin\theta$ , можна використати для введення одиниці індукції магнітного поля 1 Тесла (Тл): це така індукція магнітного поля, в якій на провідник із струмом 1 А і довжиною 1 м діє сила 1 Н, тобто розмірність  $\vec{B}$   

$$\dim B = \frac{1\text{Н}}{1\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{м}}{1\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Тл.}$$
 У системі Гауса одиницею індукції магнітного поля є Гаус (Гс):  $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$ .

Для розрахунку векторів індукції і напруженості магнітного поля, застосують закон Біо-Савара-Лапласа, згідно з яким індукція магнітного поля  $d\vec{B}$ , створюваного елементом струму  $Id\vec{l}$  у точці, яка задається радіус-вектором  $\vec{r}$  від нього, виражається формулою:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad \text{а за модулем} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}, \quad (6.5)$$

де  $\theta$  – кут між вектором елемента струму і радіус-вектором до розглядуваної точки.

Якщо ж провідник із струмом скінченної довжини, то результуюча індукція магнітного поля в довільній точці визначається згідно принципу суперпозиції, як і в електростатиці, як векторна сума елементарних значень індукцій, створюваних кожним елементом струму:

$$\vec{B} = \int_{(l)} d\vec{B} \quad (6.6 \text{ а})$$

Коли ж напрямки складових значень  $dB_i$  є однаковими, то векторну суму можна замінити алгебраїчною, або інтегралом

$$B = \int_{(l)} dB_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{idl \sin\theta}{r^2} \quad (6.6 \text{ б})$$

Для довільних об'ємних струмів з густиною струму  $j = I/S$ , елемент струму  $Id\vec{l} = \vec{j}Sdl = \vec{j}dV$ , тому формули (6.3) та (6.5) матимуть вигляд:

$$d\vec{F} = [\vec{j} \times \vec{B}]dV \quad \text{та} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3}dV \quad (6.6 \text{ в})$$

Використовуючи принцип суперпозиції та закон Біо-Савара-Лапласа можна розрахувати індукцію і напруженість магнітного поля у певній точці простору для провідників із струмом довільної форми та розмірів. Так, наприклад,

1) для прямолінійного провідника скінченної довжини:

$$H_1 = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{I}{4\pi r_0} (\sin\alpha + \sin\beta), \quad (6.7 \text{ а})$$

де  $r_0$  – відстань від провідника до розглядуваної точки,  $\theta_1$  і  $\theta_2$  – кути між провідником і відрізками, проведеними від кінців провідника до розглядуваної точки,  $\alpha$  і  $\beta$  – кути між  $r_0$  і відрізками проведеними із даної точки до кінців провідника (рис.6.1.).

2) у випадку симетричного розташування кінців провідника відносно точки, в якій визначається значення напруженості поля (тобто,  $\alpha = \beta$ ):

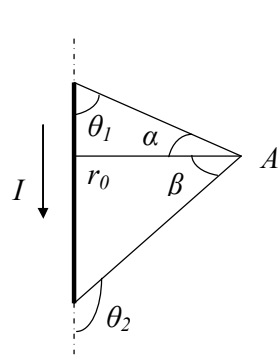


Рис. 6.1

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r_0} \sin \alpha; \quad (6.7 б)$$

3) коли провідник дуже довгий, тоді  $\alpha = \beta = 90^\circ$ :

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r_0}; \quad (6.7 в)$$

4) якщо розглядувана точка міститься на осі колового витка із струмом  $I$  радіуса  $R$  на відстані  $x$  від центра кола, то:

$$H_4 = \frac{2I\pi R^2}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2IS}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{P_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (6.7 г)$$

де  $\vec{P}_m = IS\vec{n}_0$  – магнітний момент витка із струмом, напрям якого визначається за поступальним рухом свердлика, якщо його ручку обертати в напрямі струму, тобто в напрямі нормалі  $\vec{n}_0$ .

У центрі колового струму ( $x = 0$ ):

$$H_5 = \frac{I}{2R}. \quad (6.7 д)$$

Якщо  $x \gg R$ , то:

$$H_6 = \frac{P_m}{2\pi x^3}. \quad (6.7 е)$$

Для плоскої котушки з  $N$  витками

$$H_7 = \frac{NP_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (6.7 ж)$$

Коли  $x = 0$ , то:

$$H_8 = \frac{NI}{2R}; \quad (6.7 з)$$

5) на осі прямого довгого соленоїда ( $l \gg R$ ), якщо кількість витків на одиницю його довжини  $n = \frac{N}{l}$ , а сила струму у витках  $I$ ,

то:

$$H_9 = \frac{nI}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (6.7 к)$$

де  $\theta_1$  – гострий (або прямий) кут між віссю соленоїда і напрямом, проведеним із розглядуваної точки до кінця соленоїда,  $\theta_2$  – тупий кут між віссю соленоїда і напрямом, проведеним із розглядуваної точки до другого кінця соленоїда. Для довгого соленоїда ( $l \gg R$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ):

$$H_{10} = \frac{NI}{l} = nI; \quad (6.7 л)$$

б) для середньої лінії тороїда:

$$H_{11} = \frac{NI}{2\pi r_C}, \quad (6.7 м)$$

де  $N$  – число витків тороїда,  $r_C$  – середній радіус тороїда.

Формули (6.7 а–м) використовують для введення одиниці напруженості магнітного поля:  $\dim H = 1 \text{ А/м}$ . В системі Гауса одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є Ерстед  $1 \text{ А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Е}$  (Ерстед).

Сила взаємодії двох прямих паралельних провідників із постійними струмами  $I_1$  та  $I_2$ :

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l, \quad (6.8)$$

де  $d$  – відстань між провідниками,  $l$  – спільна довжина провідників. Формула (6.8) була використана для встановлення одиниці сили струму 1 Ампер (А) у системі СІ.

На замкнений контур із струмом (виток, рамка, плоска котушка), який характеризується магнітним моментом  $\vec{P}_m$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ , діє обертальний момент сил:

$$\vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}], \quad (6.9 а)$$

який за модулем дорівнює:

$$M = P_m B \sin \alpha, \quad (6.9 б)$$

Цей момент сил намагається повернути контур так, щоб власне магнітне поле контуру збігалось за напрямком із зовнішнім магнітним полем.

У випадку неоднорідного магнітного поля вільно рухомий контур, який довільно орієнтований, повертається до суміщення магнітного моменту  $\vec{P}_m$  з лініями індукції  $\vec{B}$  поля (під дією моменту сил) і втягується в область, де поле сильніше, із силою:

$$F_x = P_m \left( \frac{\Delta B}{\Delta x} \right) \cos \alpha, \quad (6.10)$$

де  $\left( \frac{\Delta B}{\Delta x} \right)$  – градієнт магнітного поля, який характеризує неоднорідність магнітного поля,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{P}_m$  і  $\vec{B}$ .

Потоком вектора магнітної індукції, або магнітним потоком, крізь площадку  $dS$  називають величину, яка дорівнює добутку величини площі і проекції  $B_n$  вектора  $\vec{B}$  на напрям нормалі  $\vec{n}$  до площадки  $dS$ , тобто  $d\Phi = B_n dS = B dS \cos \alpha$ , де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{n}$ . Інтегруючи цей вираз по  $S$ , дістанемо, що повний магнітний потік крізь довільну поверхню дорівнює:

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (6.11)$$

Для магнітного поля: магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю, тобто:

$$\int_S B_n dS = 0, \quad \text{а в диференціальній формі} \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (6.12)$$

Це є наслідком того, що в природі не існує магнітних “зарядів” і лінії будь-якого магнітного поля є замкненими, тобто магнітне поле вихрове. В системі СІ магнітний потік вимірюється у веберах (Вб), а в системі Гауса – у максвелах (Мкс):  $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$ .

Повний магнітний потік крізь усі  $N$  витків котушки,  $\Psi = N\Phi_I$ , де  $\Phi_I$  – магнітний потік крізь один виток, і називається потокозчепленням.

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі замкненого контуру із струмом, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром, тобто:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi, \quad \text{або} \quad A = I(\Psi_2 - \Psi_1) = I \cdot \Delta\Psi. \quad (6.13)$$

Якщо провідник переміщується в протилежному до дії сили Ампера напрямку, то роботу виконують зовнішні сили і знак виконаної роботи зміниться на протилежний.

Циркуляція вектора індукції (або напруженості) магнітного поля постійних струмів вздовж довільного замкненого контуру пропорційна алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \oint_L B_l dl = \oint_L (\mu\mu_0 H d\vec{l}) = \mu\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k = \mu\mu_0 \oint_S j_n dS, \quad (6.14 \text{ а})$$

а в диференціальній формі, що є основним диференціальним рівнянням стаціонарного магнітного поля, виражається через ротор вектора  $\vec{B}$ :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j} \quad (6.14 \text{ б})$$

Нагадаємо, що під ротором розуміють диференціальний оператор

$$\text{rot} \vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

У цій формулі  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – одиничні вектори у напрямку осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Те, що циркуляція вектора  $\vec{B}$ , а відповідно і  $\text{rot} \vec{B}$ , не дорівнює нулю, і є ознакою вихрового (не потенціального) характеру магнітного поля. Нагадаємо, що для потенціального поля, наприклад електростатичного, робота при переміщенні заряду, а отже, і циркуляція вектора напруженості електричного поля по замкненому контуру дорівнюють нулю.

Використання закону повного струму значно спрощує визначення напруженості магнітного поля у деяких частинних випадках. Наприклад, для прямолінійного провідника із струмом:

$$\oint H_l dl = H \cdot 2\pi r_0 = I, \quad \text{звідки} \quad H = \frac{I}{2\pi r_0}, \quad \text{що збігається з формулою}$$

(6.7 в). Легко визначити і напруженість поля всередині довгого провідника циліндричної форми радіуса  $R$  із струмом  $I$ , при  $r < R$ :

$$\oint_l H_l dl = H \cdot 2\pi r = I' = jS = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2,$$

$$\text{звідки} \quad H = \frac{I}{2\pi R^2} r. \quad (6.15)$$

Аналогічно, можна визначити напруженість поля всередині тороїдальної котушки. Такий розгляд приведе до виразу, що збігається з формулою (6.7 м).

### Б. Магнітне поле в магнетиках

Речовини в магнітному полі змінюються так, що самі стають джерелами магнітного поля, і їх називають магнетиками. Набуття магнітних властивостей речовиною під дією магнітного поля називають намагнічуванням магнетиків. Аналогія між магнітними полями постійних магнітів і соленоїдів дала змогу А.Амперу висловити гіпотезу про те, що магнітні властивості постійних магнітів зумовлені мікрострумами, які існують у них. Дійсно, в атомах усіх тіл електрони швидко рухаються вздовж замкнених орбіт, спричиняючи коловий електричний мікрострум

$I = \frac{e}{T} = ef = e \frac{\omega}{2\pi}$ , та подібно до витка із струмом, створюють магнітне поле з магнітним моментом орбітального руху електрона:

$$P_{m0} = IS = e \frac{\omega}{2\pi} \pi R^2 = \frac{e\omega}{2} R^2, \quad (6.16)$$

де  $e$  – заряд,  $T$  – період,  $f$  – частота,  $\omega$  – кутова швидкість орбітального руху електрона,  $R$  – радіус орбіти електрона.

З іншого боку, кожний електрон, що рівномірно обертається вздовж колової орбіти із швидкістю  $\vec{v}$ , має механічний момент кількості руху

$$\vec{L}_0 = m[\vec{R} \times \vec{v}], \quad \text{а за модулем} \quad L_0 = Rmv = R^2 m \omega \quad (6.17)$$

Відношення числового значення  $P_{m0}$  до  $L_0$  дорівнює  $\frac{1}{2} \frac{e}{m} = \Gamma_0$  і називається гіромагнітним відношенням орбітальних моментів. Вектори  $\vec{P}_{m0}$  і  $\vec{L}_0$  напрямлені у взаємно протилежні боки.

Досліди Ейнштейна і де-Гааза (магнітомеханічний ефект) довели, що електрони, крім орбітального, мають власний, або

спіновий, момент імпульсу і відповідний йому спіновий магнітний момент. Тому загалом магнітні властивості речовин зумовлені наявністю в атомах орбітальних  $\vec{P}_{m0}$ , спінових  $\vec{P}_{ms}$  магнітних моментів електронів та магнітного моменту ядра  $\vec{P}_{mn}$ . Магнітні моменти довільного атома являють собою векторну суму орбітальних і спінових моментів електронів та ядра. Це також стосується і механічних моментів. Для атомних моментів у цілому  $\vec{P}_m = -\Gamma \vec{L}$ , тобто теж є справедливим гіромагнітне співвідношення, однак  $\Gamma = \frac{e}{m}$ .

За теорією Бора момент кількості руху  $L$  атома квантується, тобто може мати тільки дискретний ряд значень:  $L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$ , де  $n$  – ціле число, яке може мати значення 1,2,3,..., а  $\hbar$  – приведена стала Планка ( $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с). Аналогічно квантується і магнітний момент електрона, що дорівнює  $P_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \hbar n = P_{m0} n$ , де  $P_{m0} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \hbar$  – магнетон Бора (найменше значення магнітного моменту електрона, яке дорівнює  $0,927 \cdot 10^{-23}$  А·м<sup>2</sup>).

Магнітні моменти протона і нейтрона менші ніж в електрона відповідно у 658 і у 960 разів. Оскільки вони незначні, то можна нехтувати їх впливом на магнітний момент атома.

За відсутності магнітного поля магнітні моменти атомів (молекул) у тілі орієнтовані безладно, і загальний магнітний момент тіла дорівнює нулю – тіло не намагнічене. Якщо ж тіло внести у магнітне поле, то виникає часткова або повна орієнтація магнітних моментів атомів (молекул) і результируючий магнітний момент тіла стає відмінним від нуля, тобто тіло намагнічується. При цьому змінюються властивості самого тіла: у ньому наводиться власне магнітне поле, яке характеризується вектором напруженості магнітного поля  $\vec{H}'$ .

Для кількісної оцінки ступеня намагніченості магнетика вводиться вектор намагніченості –  $\vec{J}$ , який чисельно дорівнює магнітному моментові одиниці об'єму магнетика, тобто:

$$\vec{J} = \frac{\Delta \vec{P}_m}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_{mi} \rightarrow = \frac{d\vec{P}_m}{dV}, \quad (6.18)$$

де  $N$  – кількість частинок в об'ємі  $\Delta V$ ;  $\vec{P}_{mi}$  – магнітний момент  $i$ -ї частинки.

Різні тіла намагнічуються неоднаково, тому всі магнетика поділяють на три групи: парамагнетика, діамагнетика і феромагнетика.

Для неферомагнітних речовин вектор намагніченості пропорційний напруженості зовнішнього магнітного поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (6.19)$$

де  $\chi$  – магнітна сприйнятливості магнетика.

Для парамагнетиків  $\chi$  – додатна величина, для діамагнетиків – від'ємна, а для феромагнетиків вона залежить від напруженості зовнішнього поля і може досягти значень  $10^3$  і більше. Магнітні властивості речовини частіше характеризуються магнітною проникністю  $\mu$ , яка пов'язана з  $\chi$  таким чином:  $\mu = 1 + \chi$ . Тому можна класифікувати магнетика і за значенням  $\mu$ : для парамагнетиків  $\mu > 1$ , для діамагнетиків  $\mu < 1$ , а для феромагнетиків  $\mu \gg 1$  і залежить від напруженості магнітного поля  $H$  та температури  $T$ .

Речовини, частинки яких (атоми, молекули, іони) мають власний магнітний момент  $\vec{P}_{ma}$  за відсутності зовнішнього магнітного поля, називають парамагнетиками, а їхню властивість намагнічуватись у зовнішньому полі у напрямі, що збігається з напрямом цього поля, називають парамагнетизмом.

За теорією П.Ланжевена, парамагнітна сприйнятливості дорівнює:

$$\chi_n = \frac{n P_{ma}^2 \mu_0}{3kT}, \quad (6.20)$$

де  $n$  – концентрація атомів (молекул), або

$$\chi_n = \frac{C}{T}. \quad (6.21)$$

Останній вираз є законом Кюрі і добре узгоджується для газів. Для рідин і твердих речовин, де взаємодія між частинками

велика, що може призвести до суттєвого порушення сферичної симетрії електронних оболонок, є точніша формула:

$$\chi_n = \frac{C'}{T - \Theta}, \quad (6.22)$$

де  $C'$  – стала величина,  $\Theta$  – температура Кюрі.

Речовини, в атомах яких орбітальні і спінові магнітні моменти електронів взаємно компенсовані, називають діамагнетиками. При внесенні діамагнетиків у зовнішнє магнітне поле в електронних оболонках атомів, за законом електромагнітної індукції, виникають індуквані колові струми, які створюють додаткові магнітні моменти атомів, напрямлені за законом Ленца проти напрямку зовнішнього магнітного поля. Властивість речовини намагнічуватись протилежно до зовнішнього магнітного поля називають діамагнетизмом.

Діамагнетизм, або діамагнітний ефект, властивий всім речовинам, оскільки він обумовлений виникненням додаткових колових рухів електронів в атомах речовини і зміною їхньої частоти обертання при внесенні в зовнішнє поле, тобто додаткове обертання з ларморовою частотою

$$\omega_L = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} B, \quad (6.23)$$

яке виникає згідно теоремою Лармора: єдиним наслідком впливу магнітного поля на орбітальний рух електрона в атомі є прецесія орбіти і вектора  $\vec{P}_{mo}$  з кутовою швидкістю  $\omega_L$  навколо осі, що проходить через ядро атома і паралельна вектору напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ . Діамагнітна сприйнятливості

$$\chi_d = -\frac{ne^2 Z S_0 \mu_0}{4\pi m}, \quad (6.24)$$

де  $n$  – концентрація атомів,  $Z$  – кількість електронів у атомі,  $S_0$  – площа проекції орбіти електрона на площину, перпендикулярну до напрямку  $\vec{H}$ . Для найбільш простого випадку  $S_0 = \pi R^2$ , де  $R$  – середнє значення радіуса орбіти електрона.

Атоми феромагнетиків мають некомпенсовані власні магнітні моменти, які внаслідок внутрішніх взаємодій можуть набувати

певної впорядкованої просторової орієнтації, тобто намагніченості. Речовини, які за певних умов мають самодовільну (спонтанну) намагніченість, яка може бути змінена зовнішнім магнітним полем називають феромагнетиками. У цих матеріалах магнітна сприйнятливості залежить від величини напруженості зовнішнього магнітного поля та попередньої історії. Максимальні значення  $\mu$  феромагнетиків дуже великі: для заліза –  $5 \cdot 10^3$ , кременистого заліза (5,3% Si) –  $10^4$ , пермалою –  $10^5$ . Процес намагнічування і перемагнічування феромагнетиків є необоротним процесом і називається магнітним гістерезисом, а те намагнічення, яке зберігається після зникнення зовнішнього магнітного поля, називається залишковим намагніченням. Щоб знищити залишкове намагнічення, необхідно змінити  $H$  у протилежному напрямку. Значення  $H$ , при якому залишкове намагнічення зникає, є мірою стійкості феромагнетика і називається коерцитивною силою.

Магнітна сприйнятливості феромагнетиків залежить від температури за законом Кюрі-Вейса, який є аналогічним виразу (6.22). При температурі Кюрі  $\Theta$  залишкове намагнічення зникає. Це пояснюється досить інтенсивним тепловим рухом молекул феромагнетика і розорієнтацією спінових моментів. З переходом через температуру Кюрі феромагнетик поводить себе в магнітному полі, як парамагнетик, а з точки зору термодинаміки температура Кюрі є температурою фазового переходу.

Для векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  на межі двох магнетиків з проникностями  $\mu_1$  та  $\mu_2$  виконуються такі умови:

$$H_{2t} - H_{1t} = I, \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad (6.25 \text{ а})$$

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (6.25 \text{ б})$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (6.25 \text{ в})$$

де індекс  $n$  відповідає нормальним складовим,  $t$  – тангенціальним складовим векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  на межі поділу,  $I$  – струм провідності на межі,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути між векторами  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$  та нормаллю до межі поділу.

## 6.2. Методичні вказівки і поради

Основними характеристиками магнітного поля є дві векторні величини: магнітна індукція  $\vec{B}$  і напруженість  $\vec{H}$ , пов'язані співвідношенням  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ . Для обчислення значень  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  магнітного поля струму, що протікає вздовж провідника довільної геометричної форми, можна скористатись двома методами:

а) застосовуючи закон Біо-Савара-Лапласа (формули 6.5, 6.6) і принцип суперпозиції;

б) застосовуючи закон повного струму, тобто теорему про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (або  $\vec{B}$ ) (формули 6.14).

При розв'язуванні задач з визначення  $\vec{B}$  або  $\vec{H}$  за першим методом спочатку необхідно виділити на провіднику певний елемент струму довжиною  $dl$ , індукція якого  $d\vec{B}$  визначається згідно з формулою (6.5). Використовуючи принцип суперпозиції знаходять сумарну індукцію (напруженість) поля в даній точці. Слід пам'ятати, що  $d\vec{B}$  ( $d\vec{H}$ ) і  $\vec{B}$  ( $\vec{H}$ ) – векторні величини і вектор  $d\vec{B}$  ( $d\vec{H}$ ) завжди нормальний до площини, яка містить вектори  $d\vec{l}$  та  $\vec{r}$ . Тому якщо провідник із струмом і точка, в якій визначають вектор  $\vec{B}$ , лежать в одній площині, то всі елементарні вектори  $d\vec{B}$  напрямлені вздовж однієї прямої. Тоді геометричне додавання замінюється на алгебраїчне. В інших випадках складові вектора  $d\vec{B}$  не лежать на одній прямій і розв'язок задачі ускладнений. Однак у певних задачах спочатку слід вивчити, чи не має магнітне поле осьової симетрії. Якщо це так і розглядувана точка лежить на даній осі, то і шуканий вектор  $\vec{B}$  напрямлений вздовж даної осі. Його величина визначається інтегруванням, взятим уздовж всієї довжини провідника, що створює магнітне поле.

У загальному випадку, коли неможливо використати умову симетрії, чинять у спосіб. Вибирають координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , визначають компоненти  $dB_x$ ,  $dB_y$ ,  $dB_z$  як проєкції вектора  $d\vec{B}$  на осі координат. Інтегруючи дані вирази, визначають компоненти

$B_x, B_y, B_z$  і модуль  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$  та косинуси напрямляючих кутів  $\cos \alpha = \frac{B_x}{B}$ ;  $\cos \beta = \frac{B_y}{B}$ ;  $\cos \gamma = \frac{B_z}{B}$ .

Другим методом визначення  $\vec{B}$  або  $\vec{H}$  зручно користуватись, коли контур, що охоплює струми, можна вибрати правильної геометричної форми з однаковим значенням  $B$  і  $H$  у кожній точці контуру. У цьому випадку формула (6.14) набуває вигляду:  $H \cdot l = \sum I$ , звідки легко визначити  $H$ .

Якщо потрібно визначити силу, з якою задане магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$  діє на провідник із струмом, то спочатку знаходять силу  $d\vec{F}$ , що діє на елемент струму  $Idl$ , а потім інтегрують одержаний вираз вздовж всієї довжини провідника, враховуючи напрям складових  $d\vec{F}$ .

При обчисленні сили взаємодії між двома провідниками із струмом також використовують формулу сили Ампера, причому під вектором  $\vec{B}$  розуміють індукцію поля, створеного одним із струмів у тому місці, де перебуває другий провідник.

При розв'язку задач, в яких розглядається замкнений контур із струмом, що перебуває в магнітному полі, розрізняють, в основному, два випадки:

1) магнітне поле однорідне, тоді на контур із струмом діє обертовий момент сил, який розраховується за формулою (6.9);

2) магнітне поле неоднорідне, у цьому випадку на контур із струмом, окрім обертального моменту, діє сила згідно з формулою (6.10); дана формула справедлива за таких умов: а) магнітне поле таке, що напрям осі  $Ox$  і вектор  $\vec{B}$  збігаються (таке, наприклад, поле соленоїда в точках, які лежать на його осі поблизу кінців соленоїда); б) контур із струмом достатньо малий для того, щоб у всіх точках площини можна вважати величину вектора  $\vec{B}$  майже однаковою.

Для визначення сили, що діє на контур із струмом в неоднорідному магнітному полі, можна використати і закон збереження енергії.

При розв'язуванні задач на визначення індукції та напруженості магнітного поля у феромагнетиках, необхідно

врахувати, що між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  немає аналітичної залежності в явному вигляді, оскільки  $\mu$  та  $J$  самі є функцією  $H$ . Тому розв'язок таких задач можливий тільки за наявності графіка залежності  $B(H)$  для даного сорту феромагнетиків. Унаслідок явища магнітного гістерезису криві намагнічування незбігаються із кривою розмагнічування. Тому для пошуку зв'язку між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  у феромагнетикові користуються кривою намагнічування тільки в тих випадках, коли відомо, що розглядуваний у задачі стан феромагнетика виник у процесі його намагнічування і на початку цього процесу феромагнетик не мав залишкової намагніченості.

Магнітні кола являють собою послідовність магнетиків, через які проходить магнітний потік. Уявлення про магнітні кола і їхні закони є простим і зручним способом розв'язання багатьох практичних завдань при розрахунках постійних магнітів, електромагнітів, реле, електровимірювальних та інших приладів.

Між електричними і магнітними колами існує формальна аналогія. Тому до магнітних кіл можна застосовувати увесь математичний апарат, розроблений для електричних кіл. Для магнітних кіл аналогом закону Ома є формула:

$$\mathcal{E}_{\text{маг}} = \Phi \cdot R_{\text{маг}}, \quad (6.26)$$

де  $\Phi$  – магнітний потік,  $R_{\text{маг}}$  – магнітний опір,  $\mathcal{E}_{\text{маг}}$  – магніторухійна сила, яка вводиться на основі закону повного струму (формула 6.14 а). Тобто

$$\mathcal{E}_{\text{маг}} = \oint_l (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \oint_l H_l \cdot dl = \sum_{k=1}^N I_k.$$

Для соленоїда довжиною  $l$  та кількістю витків  $N$

$$\mathcal{E}_{\text{маг}} = NI, \quad H = \frac{NI}{l} = \frac{1}{l} \cdot \mathcal{E}_{\text{маг}},$$

$$\text{а} \quad \Phi = B \cdot S = \mu \mu_0 HS = \frac{\mu \mu_0 NIS}{l} = \frac{NI}{\frac{l}{\mu \mu_0 S}} = \frac{1}{R_{\text{маг}}} \cdot \mathcal{E}_{\text{маг}}. \quad (6.27)$$

У цій формулі  $\Phi$  є аналогом сили струму в електричних колах, а

$$R_{\text{маг}} = \frac{l}{\mu \mu_0 S} \text{ – магнітний опір.}$$



Елементи магнітних кіл, як і електричних, можуть з'єднуватись послідовно або паралельно. Закони магнітних кіл використовують для розрахунків магнітних параметрів аналогічно до розрахунків параметрів електричних кіл постійного струму. Зокрема, для складних магнітних кіл застосовують правила Кірхгофа, які мають вигляд:

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k = 0 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^N \Phi_k R_{\text{маг}k} = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{\text{маг}k} \quad (6.28)$$

Маючи на увазі формальну аналогію між магнітними і електричними колами, слід завжди пам'ятати про їхню різну фізичну суть.

### 6.3. Якісні задачі та запитання

6.1. У чому спільність і відмінність між магнітним полем довгого прямолінійного провідника і електричним полем лінійно розподіленого нерухомого заряду?

6.2. Як зміниться індукція всередині довгого соленоїда, якщо подвоїти діаметр витків?

6.3. Як напрямлена сила, з якою магнітне поле Землі діє в північній півкулі на горизонтальний провідник із струмом? Розглянути випадки: а) провідник розміщений в площині магнітного меридіана і струм напрямлений із півночі на південь; б) провідник перпендикулярний площині магнітного меридіана і струм напрямлений із заходу на схід.

6.4. Опишіть взаємодію двох однакових обручів, які мають спільний центр і вільно розміщені один горизонтально, а другий вертикально, якщо струми в них однакової величини і напрямлені за годинниковою стрілкою.

6.5. У горизонтальній площині розміщений виток невизначеної форми із гнучкої дротини. Виток пронизує однорідне магнітне поле, напрямлене вертикально вниз. Яку форму прийме виток, якщо по ньому пропустити струм? Що зміниться, якщо помістити даний виток із струмом в неоднорідне магнітне поле?

6.6. Сферичний конденсатор, заповнений діелектриком і заряджений до деякої різниці потенціалів, розряджається через свій діелектрик. Яким буде магнітне поле струмів розряду в просторі між сферами (форма силових ліній і їх напрям)?

6.7. При якій орієнтації контуру із струмом в зовнішньому магнітному полі поворот контуру на  $180^\circ$  відбувається без виконання роботи?

6.8. Чи зберігається магнітна індукція постійною в точках, які лежать на певній силовій лінії індукції?

6.9. Струм тече у довгій мідній трубі. Чи існує магнітне поле всередині і ззовні труби? Як зміниться індукція магнітного поля всередині мідної труби при збільшенні струму, що тече вздовж труби, у два рази?

6.10. Чи однорідне магнітне поле у всіх точках всередині колового контуру із струмом?

6.11. Чи сильно відрізняється намагнічення до насичення парамагнетика від залишкового намагнічення у феромагнетиках?

6.12. Чому магніт притягує ненамагнічений залізний предмет, наприклад залізні цвяхи?

6.13. Чи буде діяти яка-небудь результуюча сила або обертовий момент на намагнічений залізний стрижень; на постійний штабний магніт, якщо обидва вони поміщені в однорідне магнітне поле.

6.14. На гладкій поверхні стола поблизу сильного магніту лежить прив'язаний до нитки цвях. Будучи вивільненим від зв'язку, цвях притягується до магніту. Яке джерело кінетичної енергії, якої набуває цвях перед ударом у магніт?

6.15. Намагнічену сталю спіцю, кінці якої утримують однакові цвяхи, нагрівають до біла з одного кінця (приблизно до середини спіці) і потім швидко охолоджують. Після цього один кінець спіці не утримує цвяхи, в той час, як другий – їх утримує. Чому?

## 6.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 6.16** Вздовж контуру, зображеного на рис. 6.2, проходить струм силою 10 А. Визначити: 1) магнітну індукцію в точці  $O$ , якщо радіус дуги  $R=10$  см, кут  $\alpha=60^\circ$ ; 2) магнітний момент контуру із струмом; 3) момент сили, що діє на даний контур в однорідному магнітному полі величиною індукції 0,1 Тл, напрям якого лежить у площині рисунка.

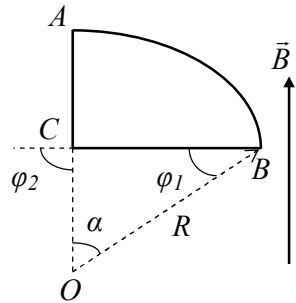


Рис. 6.2.

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{CA} + \vec{B}_{BC}. \quad (a)$$

Визначимо модулі всіх трьох доданків. Оскільки кут  $\alpha=60^\circ$ , то дуга  $AB$  становить 1/6 частину довжини кола, а тому  $B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{12R}$  (згідно з формулою 6.7 д). Використавши формулу (6.7 а), визначимо

$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi \cdot OC} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi R \cos \alpha} = \frac{\mu_0 I \tan \alpha}{2\pi R}. \quad (б)$$

Оскільки точка  $O$  перебуває на продовженні провідника  $CA$ , то  $B_{CA}=0$ . Тоді вираз (а) матиме вигляд:  $B_0 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}$ . Із врахуванням напрямку векторів  $\vec{B}_{AB}$  і  $\vec{B}_{BC}$  модуль вектора  $\vec{B}_0$  дорівнює:  $B_0 = B_{AB} - B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{12R} - \frac{\mu_0 I \tan \alpha}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{6} - \frac{\tan \alpha}{\pi} \right)$ . (в)

Обчислення дають, що  $B_0 = -2,4$  мТл. Знак мінус вказує, що  $B_{BC} > B_{AB}$  і вектор  $\vec{B}_0$  напрямлений перпендикулярно до нас, згідно з правилом правого свердлика.

2) Магнітний момент контура із струмом дорівнює  $\vec{P}_m = IS\vec{n}_0$ , де  $\vec{n}_0$  – нормаль до контуру і напрямлений перпендикулярно до площини контуру. Площа контуру  $ABC$  дорівнює 1/6 площі кола

( $\pi R^2$ ) без площі трикутника  $OCB$ , яка дорівнює  $S_{OCB} = \frac{1}{2} OC \cdot CB = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} R^2 \sin 2\alpha$ . Тоді загальна площа контуру  $ABC$ :  $S = \frac{1}{6} \pi R^2 - \frac{1}{4} R^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} R^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^2\text{)}$ . Отже, магнітний момент контуру із струмом  $P_m = IS = 0,03 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

3) Момент сили, що діє на контур  $ABC$ , згідно з формулою (6.9), дорівнює  $M = P_m B \sin(\vec{P}_m \wedge \vec{B}) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ (Н} \cdot \text{м)}$ .

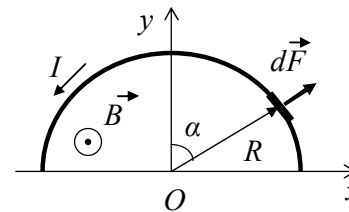


Рис. 6.3.

**Задача 6.17.** В однорідному магнітному полі з індукцією 0,02 Тл у площині, перпендикулярній ліній індукції, розміщено провідникове півкільце довжиною  $l=3$  см, вздовж якого тече струм силою 0,1 А (рис.6.3). Знайти: 1) Результуючу силу, що діє на півкільце. Чи зміниться

сила, якщо провідник розпрямити? 2) Який магнітний потік перетинає контур півкільця? 3) Яку роботу потрібно виконати, щоб контур повернути відносно осі  $Ox$  на кут  $90^\circ, 180^\circ$ ?

**Розв'язання.** 1) Для визначення сили, що діє на півкільце, необхідно використати принцип суперпозиції. Оскільки на кожний елемент струму сили матимуть різний напрям (напрявлені вздовж радіуса півкільця і лежать у площині рисунка), то складові сили  $d\vec{F}$  на осі координат  $Ox$  та  $Oy$ , що діють на елемент струму  $Id\vec{l}$ , різні, а саме:

$$F_x = \int dF_x \quad \text{і} \quad F_y = \int dF_y. \quad (a)$$

Завдяки симетрії провідника відносно осі  $Oy$  обраної системи координат  $F_x=0$ , а результуюча сила, що діє на півкільце,  $F = F_y = \int dF_y$ . Сила

$$dF_y = BIR \cos \alpha d\alpha. \quad (б)$$

При переході від одного елемента  $dl$  до іншого кут  $\alpha$  змінюється від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ , тоді:

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} BIR \cos \alpha d\alpha = BIR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2BI \frac{l}{\pi}. \quad (в)$$

Обчислення дають, що  $F = F_y = 3,8 \cdot 10^{-5}$  Н.

Якщо провідник  $l$  розпрямити, то всі елементарні сили  $d\vec{F}_i$  будуть паралельні між собою і результуюча сила  $F' = BIl$ , яка в  $\pi/2$  раз більша від сили  $F$ , тобто  $F' = 6 \cdot 10^{-5}$  Н.

2) Магнітний потік, що перетинає контур півкільця дорівнює:

$$\Phi = BS = B \frac{\pi R^2}{2} = \frac{Bl^2}{2\pi} = 2,87 \cdot 10^{-6} \text{ (Вб)}. \quad (г)$$

3) Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні контуру із струмом, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром, тобто

$$A_I = I \Delta \Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (д)$$

При повороті контуру на  $90^\circ$  потік  $\Phi_2 = BScos90^\circ = 0$  і робота  $A_I = -I\Phi_1 = -0,287 \cdot 10^{-6}$  Дж. Знак мінус вказує, що роботу виконує зовнішня сила проти сили Ампера. Якщо повернути контур на  $180^\circ$ , то  $\Phi_2 = -\Phi_1$  і  $A_2 = -2I\Phi_1 = -0,574 \cdot 10^{-6}$  (Дж).

**Задача 6.18.** Мідний провідник перерізом  $S=2 \text{ мм}^2$ , зігнутий у вигляді трьох сторін квадрата, може обертатись відносно горизонтальної осі (рис. 6.4). Провідник перебуває в однорідному магнітному полі, напрямленому вертикально. Коли вздовж провідника протікав струм силою  $10 \text{ А}$ , рамка відхилилась на кут  $30^\circ$ . Визначити індукцію магнітного поля.

**Розв'язання.** На кожну із трьох частин рамки діє сила Ампера і сила тяжіння, які відносно осі обертання  $Ox$  спричиняють моменти сил, і при рівновазі сума їх моментів дорівнює нулю. Сили Ампера, що діють на струми, які течуть вздовж сторін  $AD$  і  $BC$ , спрямовані вздовж осі  $Ox$ , однакові за величиною і протилежні за напрямком (ці сили на рис. 6.4 а не показані).

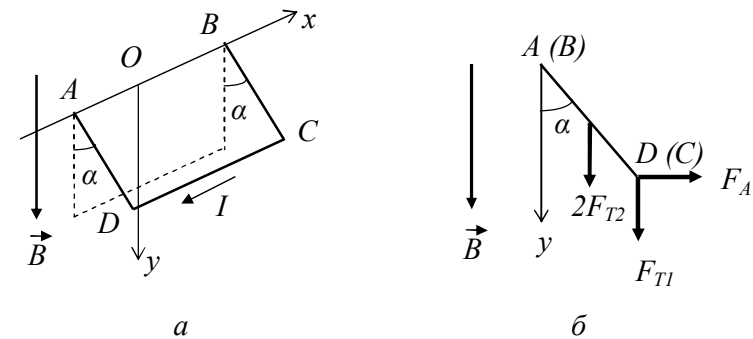


Рис. 6.4.

Тільки сила Ампера  $F_A = BIl$ , що діє на частину провідника  $CD$  (струм напрямлений від  $C$  до  $D$ ), спричиняє відхилення контуру (рис. 6.4.б), оскільки вектори  $\vec{B}$  та  $\vec{I}$  взаємно перпендикулярні ( $l$  – сторона квадрата). Її момент відносно осі  $Ox$ , дорівнює

$$M_1 = F_A l \cos \alpha = BIl^2 \cos \alpha \quad (а)$$

і напрямлений вздовж осі  $Ox$ . У полі сили тяжіння на кожну сторону квадрата діють сили  $F_{T2} = mg = DVg$  ( $D$  – густина міді,  $V = Sl$  – об'єм провідника). Для двох сторін  $AD$  і  $BC$  моменти сил відносно осі обертання  $Ox$  дорівнюють

$$M_2 = M_3 = F_{T2} \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{DSgl^2}{2} \sin \alpha, \quad (б)$$

а для сторони  $CD$  момент  $M_4 = F_{T1} l \sin \alpha = DSgl^2 \sin \alpha$  і напрямлений вздовж осі  $Ox$ . Умова рівноваги:  $M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = 0$ , тобто

$$BIl^2 \sin \alpha = 2 \frac{DSgl^2}{2} \sin \alpha + DSgl^2 \sin \alpha = 2DSgl^2 \sin \alpha,$$

звідки

$$B = \frac{2DSg \sin \alpha}{I \cos \alpha} = \frac{2DSg}{I} \operatorname{tg} \alpha. \quad (в)$$

Обчислення дають, що  $B \cong 0,02$  Тл.

**Задача 6.19.** В одній площині із нескінченно довгим прямим провідником, вздовж якого тече струм силою  $I_1=5$  А, розміщена прямокутна рамка ( $20 \times 10$  см), в якій тече струм сили  $I_2=0,2$  А. Довгі сторони рамки паралельні прямому провідникові, причому ближня сторона розміщена від нього на відстані  $x_0=5$  см і струм в ній протікає в такому самому напрямку, що й струм  $I_1$ . Визначити силу взаємодії прямого провідника із струмом та рамкою і роботу, яку потрібно виконати, щоб повернути рамку на кут  $180^\circ$  відносно дальньої сторони.

**Розв'язання.** У всіх точках контуру  $ABCD$  вектор  $\vec{B}$

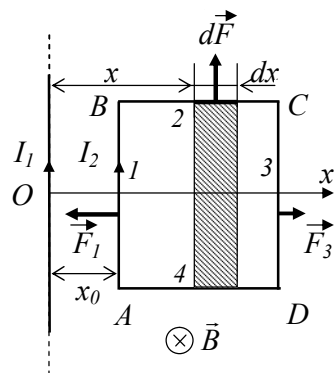


Рис. 6.5.

індукції магнітного поля прямолінійного струму  $I_1$  напрямлений перпендикулярно до площини контуру (рис.6.5). Сторони контуру  $BC$  і  $AD$  однаково розташовані відносно прямолінійного провідника із струмом  $I_1$ , проте напрям струму  $I_2$  в них протилежний. Тому сили  $F_2$  і  $F_4$ , які діють з боку магнітного поля струму  $I_1$  на ділянках  $BC$  і  $AD$  контуру із

струмом  $I_2$ , чисельно дорівнюють один одному і протилежні за напрямком, тобто  $F_2 = -F_4$ , або  $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 0$ . Отже, результуюча сила  $\vec{F}$ , яка діє на контур, дорівнює векторній сумі сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_3$ , прикладених до сторін контуру  $AB$  і  $CD$ , тобто  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$ . Сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_3$  напрямлені в протилежні боки і за формулою (6.8) їх модулі чисельно дорівнюють:

$$F_1 = \frac{\mu_0 2I_1 I_2}{4\pi x_0} a \quad \text{та} \quad F_3 = \frac{\mu_0 2I_1 I_2}{4\pi(x_0 + b)} a. \quad (\text{а})$$

Тут прийняті позначення  $AB=CD=a$ ,  $BC=DA=b$ . Оскільки чисельно  $F_1 > F_3$ , то результуюча сила  $\vec{F}$  напрямлена в бік сили  $\vec{F}_1$  і чисельно дорівнює:

$$F = F_1 - F_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I_1 I_2 a \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + b} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 a \frac{b}{x_0(x_0 + b)}. \quad (\text{б})$$

Обчислення дають, що  $F = 5,3 \cdot 10^{-7}$  Н.

Робота зовнішніх сил при повороті рамки, згідно з формулою (6.13), дорівнює роботі сил поля, але має протилежний знак, тобто:

$$A^* = -A = -I_2(\Phi_2 - \Phi_1) = I_2(\Phi_1 - \Phi_2) = I_2 \Delta\Phi, \quad (\text{в})$$

де  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  – потоки крізь площу рамки до і після її повороту. Через неоднорідність поля прямого провідника для визначення потоків  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  необхідно розглянути елементарний потік  $d\Phi$  через площадку  $dS = a \cdot dx$ , який дорівнює  $d\Phi = B_n dS = B a dx$ . Тоді, враховуючи вираз (6.7 в) для напруженості магнітного поля безмежно довгого провідника:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{(x_0 + b)}{x_0},$$

$$\text{а} \quad \Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_{(x_0+b)}^{(x_0+2b)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{(x_0 + 2b)}{(x_0 + b)}. \quad (\text{г})$$

Робота зовнішніх сил, згідно формули (в) дорівнює:

$$A^* = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln \left[ \frac{(x_0 + b)^2}{x_0(x_0 + 2b)} \right] = 2,35 \cdot 10^{-8} \text{ (Дж)}.$$

**Задача 6.20.** Кусок технічно чистого заліза поміщено в магнітне поле напруженості  $H = 0,1 \cdot 10^3$  А/м. Визначити: 1) магнітну сприйнятливість і проникність заліза; 2) його намагніченість. Магнітні властивості заліза виражені графіком (рис. 6.6).

**Розв'язання.** 1) Магнітна проникність феромагнетиків, зокрема заліза, залежить від напруженості магнітного поля згідно з графіком (рис. 6.6) з якого при заданому  $H$  визначається індукція магнітного поля ( $B=1,5$  Тл), а використавши зв'язок  $B$  і  $H$  ( $B = \mu_0 H$ ) можна визначити відносну статичну магнітну

проникність  $\mu$  заліза:  $\mu_{СТ} = B/\mu_0 H \approx 7961$ , а магнітна сприйнятливість  $\chi = \mu - 1 \approx \mu_{СТ} \approx 7960$ . Крім цього, розрізняють динамічну магнітну проникність  $\mu_D = \Delta B/\mu_0 \Delta H \approx 4 \cdot 10^3$ .

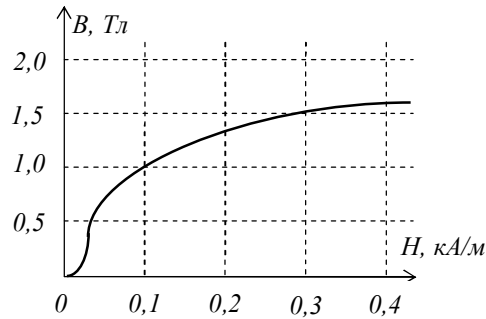


Рис. 6.6.

2) Намагніченість (або вектор намагнічування) можна визначити згідно з формулою (6.19) або із зв'язку векторів  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{H}$ :  $(\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{H}))$ .

Звідки

$$\vec{J} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}.$$

Обчислення дають, що  $J=800$  кА/м.

**Задача 6.21.** Обмотка тонкої тороїдальної котушки, середня довжина якої  $l=20$  см, містить  $N=200$  витків. Залізне осердя котушки має повітряну щілину, ширина якої  $l'=0,5$  мм. Визначити індукцію магнітного поля  $B$  в осерді при силі струму  $I=2$  А.

**Р о з в' я з а н н я.** Повітряна щілина настільки мала, що розсіянням магнітного потоку можна нехтувати. Це означає, що лінії індукції і лінії напруженості – концентричні кола тора, тобто поле має достатню симетрію для застосування закону повного струму:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I \quad (a)$$

Напруженості магнітного поля у повітрі (щілині) та осерді різні, тому контур інтегрування  $l$ , проведений вздовж середньої лінії котушки (рис. 6.7.), треба розбити на дві ділянки. Якщо вибрати напрям обходу контуру вздовж напрямку лінії напруженості, то кут між вектором  $\vec{H}$  та вектором переміщення  $d\vec{l}$  дорівнює нулю в усіх точках контуру; модуль вектора  $H$  в межах кожної ділянки постійний. Тому рівняння (а) матиме вигляд

$$H(l-l') + H_0 l' = NI, \quad (б)$$

де  $H$  – напруженість поля в осерді  $H_0$  – напруженість поля в повітряній щілині шириною  $l'$ ;  $NI$  – сума сил струмів, зчеплених контуром інтегрування.

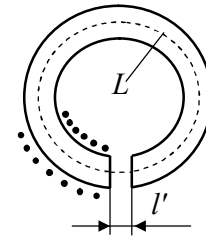


Рис. 6.7.

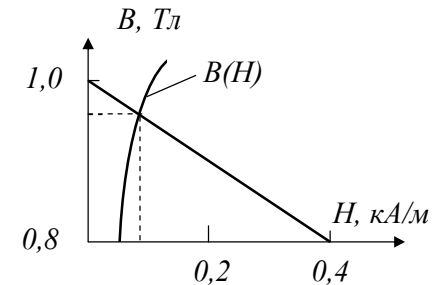


Рис. 6.8.

Оскільки межі щілини перпендикулярні лініям індукції, вектор індукції не терпить розриву, індукція  $B$  однакова у щілині та осерді і напруженість поля у щілині:

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0}. \quad (в)$$

Підставивши вираз (в) у (б), одержимо рівняння, що містить дві невідомі величини  $H$  і  $B$ . Аналітичний зв'язок між цими величинами невідомий. Проте відома крива залежності  $B(H)$  для даного сорту заліза (див. рис. 6.6), що дозволяє вирішити задачу графічно.

Підставивши рівняння (в) у (б), одержимо:

$$H(l-l') + \frac{Bl'}{\mu_0} = NI,$$

або, нехтуючи  $l'$  у порівнянні з  $L$  в першому доданку:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l'} - \frac{\mu_0 l H}{l'}. \quad (г)$$

Як видно з виразу (г), при заданій формі осердя між  $B$  і  $H$  існує лінійна залежність. Графічно, в координатах  $B$ ,  $H$ , ця залежність зображається прямою, що перетинає координатні осі графіка рис. 6.8, що є частиною графіка, наведеного на рис. 6.6 у точках:

$$H_1 = 0, \quad B_1 = \frac{\mu_0 NI}{l'} = 1 \text{ Тл};$$

$$B_2 = 0,8 \text{ Тл}, \quad H_2 = \left( \frac{\mu_0 NI}{l'} - B_2 \right) \frac{l'}{\mu_0 l} = 0,4 \text{ кА/м}.$$

Пряма, побудована за цими точками, показана на рис. 6.8. Точка перетину цієї прямої з кривою намагнічення даного сорту заліза має координати  $H = 80 \text{ А/м}$ ;  $B = 0,95 \text{ Тл}$ , що є якраз шуканими значеннями напруженості та індукції магнітного поля в осерді.

У міру збільшення ширини щілини  $l'$  пряма, задана рівнянням (г), розташовуватиметься нижче: при тій же силі струму  $I$  індукція магнітного поля в осерді зменшуватиметься.

### 6.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

6.22. Уздовж двох довгих паралельних провідників, які розташовані на відстані 15 см один від одного, у протилежних напрямках проходять однакові струми силою 5 А кожний. Знайти напруженість магнітного поля в точках: а) на відстані 5 см від одного та 10 см від другого провідника; б) на відстані 20 см від одного і 25 см від другого провідника; в) яка сила взаємодії між провідниками і яку роботу виконає сила Ампера на 1 метр довжини, якщо збільшити відстань між провідниками у два рази?

6.23. Уздовж довгого провідника, зігнутого під прямим кутом, проходить струм силою 40 А. Визначити напруженість поля: а) у точці, яка лежить на продовженні однієї із сторін кута на відстані 8 см від його вершини; б) у точках, які лежать на бісектрисі кута і віддалені від його вершини на 10 см.

6.24. Знайти індукцію магнітного поля: а) у центрі контуру, який має вигляд прямокутника, якщо його діагональ 16 см, а кут між діагоналями  $30^\circ$  та сила струму в контурі 5 А; б) у центрі правильного шестикутника із стороною 20 см та струмом 20А; в) у центрі рівностороннього трикутника із стороною 10 см та струмом 10 А.

6.25. Струм проходить вздовж тонкого провідника, який має вигляд правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло радіуса  $R$ .

Знайти магнітну індукцію та напруженість поля у центрі даного контуру. Дослідити знайдений вираз при  $n \rightarrow \infty$ .

6.26. Знайти індукцію магнітного поля на осі колового витка радіуса 5 см із струмом силою 1А у точці, яка розташована від центра витка на відстані 20 см.

6.27. Із куска ізольованої дротини зроблено коловий виток радіуса  $R$  і підключено до джерела струму з постійною е.р.с. Як зміниться напруженість магнітного поля в центрі кола, якщо із того ж куска дроту зроблено два прилеглих один до одного витка?

6.28. Знайти напруженість магнітного поля у центрі плоскої спіралі з провідника, уздовж якого тече струм силою  $I$ . Спіраль розташована між колами радіусів  $R_1$  та  $R_2$ . Загальне число витків  $N$ . Поле підвідних провідників не враховувати.

6.29. Два колових струми однакового радіуса  $R$  перебувають один від одного на відстані їх діаметра. Струми однакового напрямку і однакової сили  $I$ . Яка напруженість магнітного поля у довільній точці на спільній осі витків? Початок координат взяти на середині між витками. Побудувати наближений графік розподілу напруженості поля  $H$  вздовж осі.

6.30. У достатньо довгій шині, закріпленій горизонтально, тече струм  $I_1$ . На якій відстані  $d$  від шини паралельно їй в тій же вертикальній площині повинен бути розміщений без ізоляції достатньо довгий мідний провідник, щоб сила магнітної взаємодії зрівноважила силу тяжіння провідника, якщо у ньому в тому ж напрямку тече струм  $I_2$ ? Маса провідника  $m$ , його довжина  $l$ .

6.31. Уздовж довгого прямого соленоїда, який має 45 витків на один сантиметр довжини соленоїда, проходить струм силою 3 А. Визначити напруженість поля: а) усередині соленоїда; б) у центрі однієї із його основ.

6.32. В однорідному магнітному полі з індукцією 0,05 Тл розміщено плоский контур, площа якого  $20 \text{ см}^2$ , а нормаль до площини контуру утворює кут  $30^\circ$  з лініями індукції. Визначити: а) магнітний потік, що пронизує контур, б) механічний момент, що діє на контур при струмі в ньому 5 А; в) роботу, яку необхідно виконати, щоб повернути контур на  $90^\circ$ , на  $180^\circ$ ; г) роботу зовнішніх сил при переміщенні контуру із струмом 2 А в область простору, де магнітного поля немає.

6.33. Струм силою 10 А проходить у прямому напрямі вздовж тонкої труби радіуса 6 см, а у зворотному – уздовж суцільного провідника радіуса 1 мм, який розташований вздовж осі труби. Довжина труби 30 м. Чому дорівнює магнітний потік у такій системі? Магнітним полем усередині металу знехтувати.

6.34. Стрижень довжиною  $L$  має рівномірно розподілений по його довжині заряд  $q$  і обертається навколо осі, що проходить через середину стрижня, з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити магнітний момент такого зарядженого стрижня, який обертається.

6.35. Непровідний тонкий диск радіуса  $R$ , який рівномірно заряджений з поверхневою густиною  $\sigma$ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити: а) індукцію магнітного поля в центрі диска; б) магнітний момент диска.

6.36. Визначити циркуляцію вектора індукції вздовж довжини контуру, який охоплює струми силою 15 та 17 А, що проходять в одному напрямку, та 25 А – у протилежному напрямку.

6.37. У провіднику з круговим перерізом рівномірно розподілений струм густиною 5 мА/мм<sup>2</sup>. Знайти циркуляцію вектора напруженості вздовж кола радіуса 2 мм, яке проходить всередині провідника, орієнтованого так, що її площа утворює з вектором густини струму кут 60°.

6.38. Рамка гальванометра має 5000 витків тонкого дроту, підвішена на пружній нитці і перебуває у радіальному магнітному полі з індукцією, модуль якої 6 мТл. Площа рамки 1 см<sup>2</sup>. Коли через гальванометр пройшов струм силою 16 мкА, то рамка повернулася на кут 45°. Знайти сталу кручення.

6.39. Дзеркальний гальванометр має прямокутну рамку 40×30 мм<sup>2</sup> із 100 витків тонкої дротини, яка підвішена на нитці, коефіцієнт кручення якої  $1 \cdot 10^{-7}$  Н·м/кут.градус. Рамка розміщена в щілині між полюсами магніту, який створює поле напруженості  $8 \cdot 10^4$  А/м, яке можна вважати напрямленим радіально до осі обертання при всіх можливих положеннях рамки. Визначити: а) на який кут відхилиться рамка, якщо в обмотці проходить струм силою 0,1 мА?; б) якому струмові буде відповідати відхилення зайчика на 1 мм, якщо міліметрову шкалу розмістити від дзеркала гальванометра на відстань 1 м?

6.40. Тонкий провідник у вигляді кільця масою 4 г вільно підвішений на пружній нитці в однорідному магнітному полі. У кільці проходить струм силою 3 А. Період малих крутильних коливань відносно вертикальної осі дорівнює 2,2 с. Знайти індукцію магнітного поля.

6.41. Для здійснення забору теплоти з ядерних реакторів як теплоносії застосовують розплавлені метали. Перекачка металів у трубах здійснюється за допомогою електромагнітних насосів: частина труби з розплавленим металом розміщується в поперечне магнітне поле, перпендикулярне до осі труби; через ту ж ділянку труби, перпендикулярно до її осі і до магнітного поля, пропускається електричний струм. При цьому виникає сила, яка приводить рідкий метал у рух. Нарисуйте схему такого насоса та оцініть струм, який необхідний для перекачування ртуті у трубі діаметром 20 мм і довжиною 10 м із швидкістю 1 л/с. В'язкість ртуті  $1,59 \cdot 10^{-3}$  Па·с, а індукція магнітного поля 1 Тл.

6.42. Струм від батареї акумуляторів з незначним внутрішнім опором проходить послідовно через реостат з опором 10 Ом та через тангенс-бусоль. При цьому магнітна стрілка відхиляється на кут 60°. У коло вводять додатковий резистор опором 10 Ом, після чого відхилення стрілки зменшилось до 45°. Горизонтальна складова земного магнітного поля 15,9 А/м. Визначити опір тангенс-бусолі.

6.43. Конденсатор ємністю 1 мкФ механічним перемикачем приєднується 100 разів за секунду до полюсів джерела з е.р.с. 120 В, і стільки ж разів за секунду розряджається через тангенс-бусоль, яка складається із 100 витків дроту радіуса 15,7 см. Горизонтальна складова магнітного поля Землі 15,9 А/м. Знайти кут відхилення магнітної стрілки.

6.44. Питома магнітна сприйнятливості вісмуту від'ємна і дорівнює  $-1,75 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>/кг. Визначити магнітну проникність вісмуту та його намагніченість при внесенні в магнітне поле напруженості  $3 \cdot 10^3$  А/м. До якої групи магнетиків належить вісмут?

6.45. Середній діаметр залізного кільця 0,2 м. Площа перерізу кільця 5 см<sup>2</sup>. На кільце намотано 500 витків провідника. Вважаючи, що магнітне поле всередині кільця, яке має місце при наявності струму в обмотці, є однорідним, визначити: а) маг-

нітний потік в осерді при силі струму 0,3 А; б) при якому струмові магнітний потік у кільці дорівнює 0,5 мВб? При розв'язку задачі використати рис. 6.6 задачі 6.20.

6.46 Середня довжина кола залізного кільця 0,5 м. У нього зроблено проріз довжиною 5 мм. На кільце намотано 5000 витків дроту, в якому проходить струм силою 9 А. Індукція в прорізі 20 Тл. Визначити магнітну проникність заліза за цих умов, якщо площа перерізу потоку в прорізі в 1,5 разабільша за площу перерізу кільця.

6.47. В осерді тороїдальної котушки, середня довжина якої 10 см, є поперечний повітряний розріз товщиною 1 мм. При виключеному струмові в обмотці індукція магнітного поля в розрізі дорівнює 0,04 Тл. Визначити напрям і модуль векторів напруженості, індукції та намагніченості в осерді.

6.48. Оцінити середню відстань електронів від ядра в атомі міді, якщо відомо, що питома діамагнітна сприйнятливості міді дорівнює  $-11,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{кг}$ .

6.49 Магнітний момент молекули кисню  $2,6 \cdot 10^{-23} \text{ Ам}^2$ . Визначити парамагнітну сприйнятливості кисню за нормальних умов.

6.50. Магнітний момент молекули має порядок одного магнетону Бора ( $P_{mб} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \hbar = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ). Приймаючи, що молекули ідеального газу мають постійний магнітний момент  $P_{mб}$ , знайти максимально можливу намагніченість при температурі 100 °С і тиску 101,3 кПа.

6.51. Довгий циліндричний стрижень із парамагнетика з магнітною сприйнятливостю  $\chi$  і площею поперечного перерізу  $S$  розміщений вздовж осі котушки із струмом. Один кінець стрижня розташований у центрі котушки, де індукція магнітного поля дорівнює  $B$ , а другий кінець – в області, де магнітне поле практично відсутнє. З якою силою котушка діє на стрижень?

6.52. Приймаючи, що електрон у незбудженому атомі водню рухається вздовж колової орбіти радіусом 52,8 пм, визначити: а) магнітний момент еквівалентного колового струму; б) орбітальний механічний момент електрона; в) з отриманих

результатів обчисліть гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

6.53. Напруженість однорідного магнітного поля у платині 5 А/м. Визначити магнітну індукцію поля, створювану молекулярними струмами, якщо магнітна сприйнятливості платини  $3,6 \cdot 10^{-4}$ .

6.54. Уздовж колового контуру радіусом 40 см, поміщеного в рідкий кисень, тече струм 1 А. Визначити намагніченість у центрі цього контуру. Магнітна сприйнятливості рідкого кисню  $3,4 \cdot 10^{-3}$ .

6.55. Визначити коерцитивну силу в матеріалі постійного магніту довжиною 15 см, якщо поле поза магнітом зникає при наявності струму 2 А в обмотці, що містить 300 витків, яка навіта на магніт.

6.56. Парамагнітна кулька об'ємом  $V = 41 \text{ мм}^3$  перебуває в неоднорідному магнітному полі, яке змінюється за законом  $B = B_0 \exp(-ax^2)$ , де  $B_0 = 1,5 \text{ Тл}$ ,  $a = 100 \text{ м}^{-2}$ . Знайти: а) на якій відстані  $x_M$  на кульку діятиме максимальна сила; б) магнітну сприйнятливості матеріалу кульки, якщо максимальна сила, яка діє на кульку,  $F_M = 160 \text{ мкН}$ .

6.57. На залізне кільце із середнім діаметром 50 см намотано обмотку із 800 витків. У кільці є поперечна щілина шириною 2 мм. Нехтуючи розсіюванням магнітного потоку на краях щілини, знайти за допомогою графіка, наведеного на рис. 6.6, напруженість та індукцію магнітного поля в кільці, оцінити ефективну магнітну проникність заліза при струмі в обмотці 3,0 А.

6.58. На рис. 6.6 наведена основна крива намагнічування технічно чистого заліза. Побудувати за допомогою цього графіка залежність магнітної проникності заліза від напруженості магнітного поля. При якому значенні  $H$  статична магнітна проникність  $\mu$  максимальна? Оцініть значення  $\mu_{\text{МАКС}}$ .



## ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

## 7.1. Короткі теоретичні відомості

Явище електромагнітної індукції Фарадея–Максвелла полягає у виникненні електричного поля із замкненими силовими лініями (вихрового поля) у змінному магнітному полі. Характеристикою наведеного (індукованого) поля є електро-рушійна сила (е.р.с.) індукції  $\mathcal{E}$  – це робота сил вихрового електричного поля з переміщення одиничного (в системі СІ 1 Кл) позитивного заряду вздовж замкненого контуру. Збуджене таким чином електричне поле обумовлює виникнення в колі електричного струму, який називається індукційним. Напрямок цього струму визначається правилом Ленца, згідно з яким індукційний струм у контурі створює магнітне поле, яке перешкоджає зміні магнітного потоку через контур.

Е.р.с. індукції  $\mathcal{E}$  може бути розрахована за формулою:

$$\mathcal{E} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.1)$$

де  $\Delta \Phi$  – зміна за час  $\Delta t$  магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром. Таким чином, е.р.с. індукції дорівнює швидкості зміни магнітного потоку через площу, обмежену контуром, а знак “–” вказує на те, що е.р.с. індукції вважається додатною тоді, коли магнітний потік зменшується, тобто, згідно з правилом Ленца, індукований струм протидіє зміні магнітного потоку через контур або зміна магнітного потоку через площу контуру протидіє зміні струму в ньому. Нагадаємо, що під магнітним потоком розуміється потік вектора індукції магнітного поля  $\vec{B}$  через площадку  $S$ , який є скалярною величиною, що обчислюється за формулою  $\Phi = BS \cos \alpha$ , де  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{B}$  та нормаллю до площадки  $S$ .

Якщо е.р.с. індукції створюється у замкненому провідному контурі, повний опір якого  $R$ , то миттєве значення індукованого в ньому струму  $I = \mathcal{E}/R$ , а повний заряд  $\Delta q$ , який протікатиме у контурі за весь час зміни магнітного потоку, становить:

$$\Delta q = \int_0^t Idt = \frac{I}{R} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\Phi = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{\Phi - \Phi_0}{R}. \quad (7.2)$$

Е.р.с. у провіднику довжиною  $l$ , який переміщується в однорідному магнітному полі, індукція якого  $\vec{B}$ , із сталою швидкістю  $v$ , дорівнює:

$$\mathcal{E} = Blv \sin(\vec{B}, \vec{v}) \quad (7.3)$$

(тут вважається, що  $v$  і  $l$  взаємно перпендикулярні).

Е.р.с. індукції, яка виникає в рамці, що має  $N$  витків, площею  $S$ , при обертанні рамки з кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ , визначається рівнянням:

$$\mathcal{E}_I = BNS\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_M \sin \omega t, \quad (7.4)$$

де  $\mathcal{E}_M = BNS\omega$  – амплітудне значення е.р.с.,  $\omega t$  – миттєве значення кута, що утворює вектор  $\vec{B}$  з вектором нормалі до площини рамки. Формула (7.4) використовується для визначення е.р.с. генераторів змінного струму.

Магнітний потік через контур і сила струму у ньому зв'язані співвідношенням:

$$\Phi = LI, \quad (7.5)$$

де  $L$  – індуктивність контуру.

Якщо струм у замкненому провіднику змінюється, то в провіднику внаслідок зміни його магнітного поля виникає е.р.с. самоіндукції, яка пропорційна швидкості зміни струму в провіднику:

$$\mathcal{E}_C = -L \frac{dI}{dt}. \quad (7.6)$$

Індуктивність контуру залежить від форми та розмірів провідника. Індуктивність соленоїда (тороїда) довжиною  $l$ :

$$L = \kappa \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l} = \kappa \mu \mu_0 n^2 V, \quad (7.7)$$

де  $N$  – число витків соленоїда (тороїда),  $n = N/l$  – число витків на одиницю довжини,  $S$  – площа поперечного перерізу,  $l$  – довжина,  $V$  – об'єм соленоїда (тороїда),  $\mu$  – відносна магнітна проникність сердечника. Коефіцієнт  $\kappa$  залежить від співвідношення довжини  $l$  та діаметра  $D$  соленоїда.

Значення  $\kappa$  можна знайти із таблиці:

$D/l$	0,00	0,02	0,10	0,33	0,50	1,00	2,00	5,00	100	1000
$\kappa$	1,00	0,992	0,954	0,87	0,82	0,69	0,53	0,32	0,20	0,035

Відносна магнітна проникність  $\mu$  сердечника соленоїда (тороїда) залежить від напруженості  $H$  магнітного поля. В усіх випадках обчислення індуктивності соленоїда (тороїда) з феромагнітним сердечником для визначення  $L$  слід користуватися графіком залежності  $B$  від  $H$ , а потім формулою:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \quad (7.8)$$

Якщо система складається з двох окремих замкнених провідників, то із зміною струму в одному із них виникає е.р.с. взаємної індукції в другому, яка дорівнює

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M \frac{dI_1}{dt}, \quad \text{або} \quad \mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.9)$$

де  $\mathcal{E}_{21}$  – е.р.с. у другому контурі,  $I_1$  – струм у першому контурі і, відповідно,  $\mathcal{E}_{12}$  – е.р.с. у першому контурі,  $I_2$  – струм у другому контурі,  $M$  – коефіцієнт взаємної індукції,  $\Phi_{21}$  – магнітний потік у другому контурі, створений струмом  $I_1$ ,  $\Phi_{12}$  – магнітний потік у першому контурі, створений струмом  $I_2$ .

При наявності у колі двох котушок із індуктивностями  $L_1$  та  $L_2$  і взаємною індуктивністю  $M$  загальна індуктивність системи дорівнює:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (7.10)$$

де  $M = K\sqrt{L_1 L_2}$ ,  $K$  – коефіцієнт зв'язку між котушками. Знак “+” вживається у випадку, коли магнітні поля котушок направлені однаково.

Зміна сили струму з часом після замикання кола, яке містить джерело струму, опір  $R$  та індуктивність  $L$ , визначається формулою:

$$I = I_M \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right). \quad (7.11 \text{ a})$$

Тут  $I_M = \mathcal{E}/R$ , де  $\mathcal{E}$  – е.р.с. джерела струму,  $t$  – час, який пройшов з моменту замикання кола. Величина  $L/R = \tau$  носить назву часу релаксації.

Зміна сили струму з часом після замикання кола з індуктивністю  $L$  на опір  $R$  (без джерела струму):

$$I = I_M \exp\left(-\frac{R}{L}t\right), \quad (7.11 \text{ б})$$

де  $I_M$  – сила струму в колі при  $t = 0$ ,  $t$  – час, який минув з моменту замикання кола.

Енергія магнітного поля  $W_M$ , утвореного контуром (соленоїдом), визначається рівнянням:

$$W_M = \frac{LI^2}{2}, \quad (7.12)$$

де  $I$  – струм у контурі,  $L$  – його індуктивність.

Об'ємна густина енергії магнітного поля:

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}, \quad (7.13)$$

де  $B$  і  $H$  – індукція і напруженість магнітного поля,  $\mu$  – відносна магнітна проникність середовища.

Магнітна взаємодія між витками із струмом, наприклад, у соленоїді приводить до виникнення осьової  $f_l$  та радіальної  $f_R$  механічних напруг, які дорівнюють об'ємній густині енергії магнітного поля:

$$f_l = f_R = w_M. \quad (7.14)$$

Напруги  $f_l$  та  $f_R$  приводять до деформації соленоїда.

## 7.2. Методичні вказівки і поради

В явищах електромагнітної індукції магнітний потік крізь контур може змінюватися як при русі контуру або окремих його ділянок, так і при зміні з часом магнітного поля. В обох випадках для визначення е.р.с. індукції користуються законом Фарадея-Максвелла (7.1).

Щоб визначити е.р.с. індукції, треба обчислити тільки зміну потоку індукції через площу, обмежену контуром. При цьому не має значення, чому змінюється цей потік: чи тому, що змінилась

форма або орієнтація самого контуру, чи тому, що він перемістився в неоднорідному полі, чи тому, нарешті, що змінилася з часом магнітна індукція самого поля. При розв'язуванні задач на визначення е.р.с. індукції насамперед треба знайти залежність потоку індукції від часу, потім, взявши похідну від потоку індукції через контур за часом, дістанемо співвідношення для е.р.с. індукції.

Якщо в задачі потрібно знайти різницю потенціалів на кінцях провідника, що рухається у магнітному полі, то шукана різниця потенціалів чисельно дорівнює е.р.с., яка індукована у провіднику. Знайти е.р.с. індукції в рухомому провіднику завжди можна, якщо доповнити цей провідник до замкнутого контуру. При цьому всі частини контуру, окрім даного провідника, повинні залишатися нерухомими.

Однак слід мати на увазі, що при русі провідників у магнітному полі фізичною причиною виникнення е.р.с. є дія сили Лоренца на вільні заряди в рухомому провіднику. Нагадаємо, що е.р.с.  $\mathcal{E}$  визначається роботою  $A$  сторонніх сил  $F_{CT}$  (тобто сил неелектростатичного походження) при переміщенні вздовж замкнутого кола позитивного заряду  $q$ , тобто

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint F_{CT} dl. \quad (7.15)$$

Якщо замкнений контур перебуває у магнітному полі, що змінюється в часі, то, оскільки при цьому виникає вихрове електричне поле напруженістю  $E_{CT}$  із замкненими силовими лініями, поняття скалярного потенціалу  $\varphi$  тут взагалі незастосовне. Підставивши у формулу (7.15) для е.р.с. замість  $F_{CT}$   $q E_{CT}$  одержимо:

$$\mathcal{E} = \oint_l E_{CT} dl = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.16)$$

У цьому випадку можна говорити не про різницю потенціалів для двох точок контуру, а про напругу на ділянці контуру, що з'єднує ці точки.

Аналогічно можна визначити величину е.р.с. самоіндукції. При цьому, звичайно, треба мати на увазі, що зміна потоку магнітної індукції через розглядуваний контур створюється струмом, що проходить у цьому ж самому контурі.

Якщо відомий закон зміни струму з часом і індуктивність контура, то е.р.с. самоіндукції можна визначити іншим способом, скориставшись формулою (7.6).

Щоб визначити коефіцієнт самоіндукції (індуктивність) довільного замкнутого контуру, треба визначити потік індукції  $\Phi$ , який пронизує площу, обмежену контуром. У цьому разі потік індукції створюється тільки струмом, що проходить у даному контурі. Відношення потоку індукції до сили струму в контурі визначає, згідно з формулою (7.5), його індуктивність.

Обчислення коефіцієнта взаємоіндукції двох контурів також зводиться до визначення потоку магнітної індукції. Для цього треба знайти відношення потоку  $\Phi_{21}$ , що пронизує другий контур, який є частиною загального магнітного потоку, створюваного струмом  $I_1$  першого контуру, до сили цього струму. Можна зробити й навпаки: взяти відношення потоку, що пронизує перший контур  $\Phi_{12}$ , до сили струму в другому контурі  $I_2$ .

У трансформаторах котушки взаємоіндуктивності розташовані на замкнутому магнітопроводі і тому розсіювання ліній магнітної індукції незначне. Тобто можна вважати, що магнітний потік в осерді однаковий для обох обмоток. З цього випливає, що коефіцієнт трансформації  $\kappa$ , під яким зазвичай розуміють відношення напруг у первинній  $U_1$  і вторинній  $U_2$  обмотках дорівнює:

$$\kappa = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (7.17)$$

де  $N_1$  та  $N_2$  – кількість витків первинної і вторинної обмоток відповідно. Слід мати на увазі, що ця формула справедлива лише для режиму холостого ходу (робота без навантаження), або коли опір обмотки набагато менший від опору навантаження. В іншому випадку напруга на навантаженні  $U_2$  менша від е.р.с.  $\mathcal{E}_2$  у вторинній обмотці трансформатора на величину спаду напруги у цій обмотці.

## 7.3. Якісні задачі та питання

7.1. Чому коливання металічного маятника між полюсами магніту сильно гальмуються?

7.2. Чому осердя трансформаторів збираються із тонких ізольованих одна від одної пластинок сталі?

7.3. Постійний магніт, який має форму довгого стрижня, падає вниз у довгій мідній трубі. Показати, що навіть за відсутності опору повітря магніт набуває постійну швидкість падіння.

7.4. Короткозамкнений контур у формі квадрата зі стороною  $a$ , виготовлений із м'якої дротини, поміщають в однорідне магнітне поле з індукцією  $B$ , перпендикулярною до площини контура. Як зміниться форма контуру в магнітному полі? Який заряд потече через поперечний переріз дротини, якщо її повний опір  $R$ ? Уважати, що при деформації контуру дротина не розтягується.

7.5. У первинній обмотці трансформатора тече струм пилкоподібної форми. Побудуйте якісний графік залежності е.р.с. у вторинній обмотці трансформатора.

7.6. Число витків котушки зменшили у два рази, однак зберегли її геометричні розміри і струм через неї. Як при цьому зміняться а) індуктивність котушки; б) енергія магнітного поля котушки; в) середня густина енергії магнітного поля всередині котушки?

7.7. Всі геометричні розміри котушки зменшили у два рази, однак зберегли число витків та струм у котушці. Як при цьому зміняться а) індуктивність котушки; б) енергія магнітного поля котушки; в) середня густина енергії магнітного поля всередині котушки?

7.8. Через котушку індуктивності тече струм, який змінюється з часом так, як показано на рис. 7.1. Порівняйте е.р.с. індукції у відмічені моменти часу. Індуктивність котушки залишається сталою.

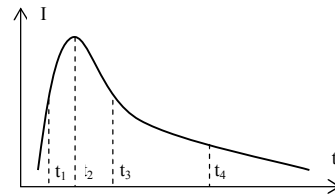


Рис. 7.1.

7.9. Спіраль, яка виготовлена із пружної дротини, під'єднана до джерела струму. Як буде змінюватися струм у спіралі під час її розтягування?

7.10. Чому індуктивність котушки сильно залежить від магнітних властивостей осердя, яке розміщене усередині котушки, і слабо залежить від магнітних властивостей тіл, що її оточують?

7.11. У довгий циліндричний соленоїд помістили феритове осердя із магнітною проникністю  $\mu$ . У скільки разів зміниться індуктивність соленоїда, якщо осердя: а) заповнює половину об'єму соленоїда по довжині; б) заповнює половину об'єму соленоїда за рахунок меншого поперечного перерізу; в) повністю заповнює соленоїд?

7.12. При замиканні кола, яке містить джерело постійного струму з е.р.с.  $\mathcal{E}$ , резистор опором  $R$  та котушку з індуктивністю  $L$ , струм у колі збільшується з плином часу за законом, що зображений кривою 1 (рис. 7.2.).

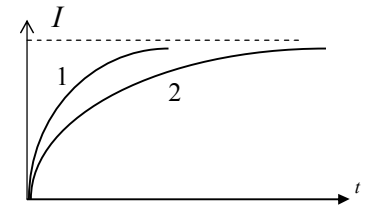


Рис. 7.2.

Після зміни одного з параметрів  $\mathcal{E}$ ,  $R$ ,  $L$  наростання струму при повторному включенні проходить за кривою 2. Який із параметрів був змінений?

7.13. Які явища відбуватимуться при внесенні у кільце одного із полюсів постійного магніту у випадку, якщо матеріалом кільця є: а) діелектрик; б) надпровідник?

7.14. У міжгалактичному просторі концентрація атомів водню становить  $\sim 1 \text{ см}^{-3}$ , а їх швидкість  $\sim 1 \text{ км/с}$ . Оцініть відношення густини енергії магнітного поля до густини кінетичної енергії, якщо індукція магнітного поля у цьому просторі  $\sim 10^{-10} \text{ Тл}$ .

## 7.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 7.15.** У неоднорідному магнітному полі, індукція якого залежить тільки від координати  $x$  за законом  $B=kx \text{ Тл}$  (де  $x$  в метрах,  $k = 10^{-2} \text{ Тл/м}$ ), розташована прямокутна рамка (рис. 7.3), рухома сторона якої завдовжки  $l = 0,100 \text{ м}$  переміщується із швидкістю  $v = 25 \text{ м/с}$  перпендикулярно

лініям індукції поля. Знайти закон зміни е.р.с. індукції, яка виникає в контурі.

**Р о з в' я з а н н я.** Задачу можна розв'язати двома способами: застосовуючи закон Фарадея для електромагнітної індукції або розглядаючи сили, що діють на вільні електрони в рухомому провіднику (сили Лоренца).

**1-й спосіб.** При русі провідника  $ab$  площа рамки збільшується, магнітний потік  $\Phi$  крізь рамку зростає, а значить, за законом Фарадея (7.1), в рамці повинна при цьому діяти е.р.с. індукції. Щоб знайти її, спочатку виразимо магнітний потік  $\Phi$  через індукцію поля  $B$  і сторони рамки  $l$ ,  $x$ : Згідно з формулою (6.11):

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S BdS = \int_0^x \kappa l dx = \frac{1}{2} \kappa l x^2. \quad (a)$$

Підставивши це значення  $\Phi$  в (7.1) і враховуючи, що  $\kappa$ ,  $l$  – величини постійні, запишемо:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = -\kappa l x \frac{dx}{dt}, \quad (б)$$

де  $\frac{dx}{dt} = v$  – швидкість переміщення провідника  $ab$ . Враховуючи, що  $x = vt$ :

$$\mathcal{E} = -\kappa l v^2 t. \quad (в)$$

Зробивши підстановку числових значень величин, одержимо відповідь:  $\mathcal{E} = 0,625 \cdot t$  (В).

Знак “–” у формулі (в) показує, що е.р.с. індукції  $\mathcal{E}$  діє у контурі  $abcd$  в такому напрямі, при якому пов'язана з ним правилом правого свердлика нормаль до контуру протилежна вектору  $\vec{B}$  (тобто направлена до спостерігача на рис. 7.3). Зауважимо, що е.р.с. індукції, а значить, і індукційний струм направлені у контурі  $abcd$  проти годинникової стрілки.

Відмітимо, що якби провідник  $ab$  рухався вліво, то позитивному приросту часу відповідав би від'ємний приріст

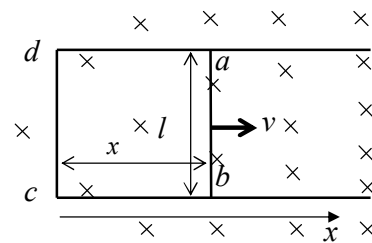


Рис. 7.3.

(спад) величини  $x$ . У цьому випадку індукційний струм направлений за годинниковою стрілкою.

**2-й спосіб.** Згідно з визначенням (формула 7.15), е.р.с. дорівнює:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint F_{CT} dl. \quad (г)$$

При русі в магнітному полі провідника  $ab$  разом з ним рухаються із швидкістю  $v$  вільні заряди (електрони). Тому на них діє магнітна складова сили Лоренца, яка виконує роль сторонньої сили, що входить у формулу (г). Оскільки  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , то згідно з (8.2) сила Лоренца

$$F_{CT} = qvB = qv\kappa x = q\kappa v^2 t. \quad (д)$$

Оскільки як вона діє тільки вздовж ділянки  $ab$  довжиною  $l$  всього контуру  $abcd$ , то інтеграл у виразі (г) дорівнює

$$\oint_{abcd} F_{CT} dl = \int_{ab} F_{CT} dl = \int_0^l q\kappa v^2 t dl = q\kappa v^2 t l. \quad (е)$$

Підставляючи це значення інтеграла у формулу (г), одержимо

$$\mathcal{E} = \kappa l v^2 t,$$

що збігається (за абсолютним значенням) формулою (в). Щоб знайти напрям струму, врахуємо, що він завжди визначається напрямом руху позитивних зарядів у колі. Згідно з (8.2), сила Лоренца, що діє на позитивний заряд у провіднику  $ab$ , спрямована від точки  $b$  до точки  $a$ . Таким чином, знову одержуємо, що струм у колі  $abcd$  направлений проти годинникової стрілки (насправді електрони в контурі рухаються за годинниковою стрілкою).

**Зауваження.** При розв'язку цієї задачі в обох випадках допущена неточність: не враховувалося магнітне поле, створене індукційним струмом. Це поле утворює деякий потік  $\Phi'$  крізь рамку, протилежний, згідно з правилом Ленца, потоку  $\Phi$ . При русі провідника  $ab$  потік  $\Phi'$  змінюється, що приводить до появи додаткової е.р.с. Очевидно, цей ефект тим слабший, чим менша сила струму. Оскільки вона обернено пропорційна опорі кола, можна сказати, що обидва розглянуті методи розв'язку задачі дають правильну відповідь за умови достатньо великого опору контура.

**Задача 7.16.** Резистор  $R$  приєднаний до верхніх кінців двох вертикальних мідних стрижнів, які розташовані на відстані  $l$  один від одного (рис. 7.4). Стрижні замкнені мідною перемичкою масою  $m$ , яка може ковзати вздовж стрижнів без тертя. В навколишньому просторі створено магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , що перпендикулярна до площини, в якій лежать стрижні. Перемичку відпустили, після чого вона почала падати без порушення електричного контакту із стрижнями. Приймаючи опір стрижнів і перемички нехтовно малими, знайти встановлену постійну швидкість падіння останньої. Вважати, що індуктивність одиниці довжини системи стрижнів  $L_1$ .

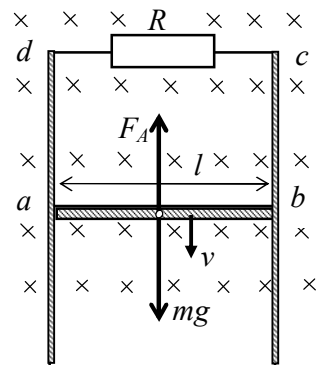


Рис.7.4.

**Р о з в' я з а н н я.** При падінні перемички  $ab$  площа контуру  $abcd$  зростає і магнітний потік через нього збільшується. За рахунок електромагнітної індукції при цьому у контурі виникає е.р.с., яка зумовлює появу індукційного струму  $I$ . Отже, на перемичку  $ab$ , крім сили тяжіння  $F_T = mg$ , почне діяти з боку магнітного поля сила Ампера  $F_A = IBl$ , яка напрямлена проти сили тяжіння  $F_T$ . Із зростанням швидкості падіння збільшується е.р.с. індукції і, отже, сила струму  $I$ . Швидкість падіння не

змінюватиметься, коли наступить рівновага сил  $F_T$  та  $F_A$ , тобто

$$mg = IBl. \quad (a)$$

За законом Ома  $I = \varepsilon/R$ , де  $\varepsilon$  – загальна електрорушійна сила, яка має дві складові:  $\varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_C$ . Перша з них  $\varepsilon_I$  – е.р.с. індукції, зумовлена зміною потоку  $\Phi_I$  індукції магнітного поля  $B$  крізь контур  $abcd$ , яка дорівнює:

$$\varepsilon_I = -\frac{d\Phi_I}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -\frac{Bldx}{dt} = -Blv, \quad (б)$$

де  $\frac{dx}{dt} = v$  – швидкість переміщення перемички  $ab$ .

Величина  $\varepsilon_C$  – е.р.с. самоіндукції контуру  $abcd$  дорівнює:

$$\varepsilon_C = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(\frac{LdI}{dt} + \frac{IdL}{dt}\right), \quad (в)$$

де  $L$  – індуктивність контуру  $abcd$ , яка за умовою задачі пропорційна довжині системи стрижнів:  $L = L_1 \cdot x$ . Оскільки при постійній швидкості падіння перемички струм у контурі незмінний (бо виконується умова (а)), то перший доданок у виразі (в) дорівнює нулю, тоді

$$|\varepsilon_C| = \frac{d(LI)}{dt} = \frac{IdL}{dt} = I \frac{d(L_1 \cdot x)}{dt} = IL_1 \frac{dx}{dt} = IL_1 v. \quad (г)$$

Величини  $\varepsilon_I$  та  $\varepsilon_C$  мають у даному випадку протилежні знаки, оскільки відповідні їм магнітні потоки  $\Phi_I$  та  $\Phi_C$  напрямлені, згідно з правилом Ленца, протилежно; при цьому вони збільшуються за абсолютною величиною. Враховуючи вищевикладене та вирази (б) і (г), одержимо:

$$I = \frac{Blv - IL_1 v}{R} = v \frac{Bl - IL_1}{R}. \quad (д)$$

Виключаючи із виразів (а) і (д) величину струму  $I$ , одержимо вираз для встановленої постійної швидкості падіння перемички:

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2 - mgL_1}. \quad (е)$$

Проаналізуємо одержаний вираз (е). Очевидно, що він має фізичний зміст лише за умови

$$B^2 l^2 > mgL_1. \quad (е)$$

Невиконання цієї умови означало б, що перемичка може “падати вверх”, що не має фізичного змісту.

У найбільш простому випадку можна допустити, що  $L_1 = 0$ , тобто нехтуємо індуктивністю контуру  $abcd$ , тоді

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2}. \quad (ж)$$

У цьому випадку струм у контурі може бути визначений із виразу (а):

$$I = \frac{mg}{Bl}. \quad (3)$$

Значно складніша ситуація при  $L_I \neq 0$ , оскільки е.р.с. самоіндукції буде обмежувати наростання струму у контурі і, отже, виконання умови (а). Розв'язуючи вираз (д) відносно струму  $I$ , одержимо:

$$I = \frac{Bl}{\frac{R}{v} + L_I}. \quad (и)$$

Очевидно, що навіть при дуже великих швидкостях падіння перемички ( $v \rightarrow \infty$ ), струм у колі не може перевищити деякого граничного значення  $I_{ГР}$ , яке визначається, зокрема, індуктивністю одиниці довжини системи стрижнів  $L_I$ :

$$I_{ГР} = \frac{Bl}{L_I}. \quad (і)$$

При порівнянні (є) та (і) видно, що умова (є) рівносильна виконанню умови  $I > I_{ГР}$ . Отже, якщо умова (є) не виконується, то це значить, що сила струму у контурі, яка обмежена у процесі самоіндукції значенням  $I_{ГР}$ , не досягає значення, достатнього для компенсації сил тяжіння  $F_T$  та Ампера  $F_A$ , прикладених до перемички при довільних значеннях її швидкості. Іншими словами, швидкість перемички буде необмежено зростати, що фізично є цілком зрозумілим.

Цікавими є два принципово інших граничних випадки, пов'язані із значенням опору  $R$ . Якщо  $R \rightarrow \infty$  (стрижні розімкнені), то струм у колі не протікає і, отже, перемичка падає тільки під дією сили тяжіння і її швидкість  $v$  неперервно зростає.

Якщо  $R = 0$ , то згідно з (є)  $v = 0$ , тобто перемичка буде "висіти" у магнітному полі, хоч на неї діє сила тяжіння. Однак вона буде скомпенсована силою Ампера, яка зумовлена збудженням у надпровідному контурі ( $R = 0$ ) індукційним струмом  $I$ , значення якого буде постійним (незгасаючим), незважаючи на те, що перемичка нерухома.

**Задача 7.17.** Двопровідна лінія являє собою два паралельних мідних провідники, струм в яких протікає у протилежних напрямках. Визначити індуктивність одиниці довжини такої двопровідної лінії, якщо радіуси провідників  $r = 1$  мм, а відстань між їх осями  $d = 5$  см.

**Розв'язання.**

Виконаємо креслення (рис. 7.5), сумістивши початок координат із віссю лівого провідника. Обчислимо магнітний потік через площу, обмежену відрізком двопровідної лінії довжиною  $l$  та осями провідників. Як видно із рисунка, складові напруженості магнітного поля, створювані струмами у лівому і правому провідниках направлені однаково, а розподіл поля повинен бути симетричним відносно площини, що лежить посередині між провідниками і перпендикулярна до осі  $x$ . Тому обчислимо спочатку потік  $\Phi$  через указану площу, який створюється магнітним полем лівого провідника із струмом.

В області  $0 < x < r$  (усередині провідника) на відстані  $x$  від початку координат індукція  $B_I$  або напруженість  $H_I$  магнітного поля може бути розрахована згідно з теоремою про циркуляцію вектора  $H$  вздовж замкненого контуру (формула 6.14 а):

$$\oint_L H dl = \int_S j dS. \quad (а)$$

де  $j$  – густина струму.

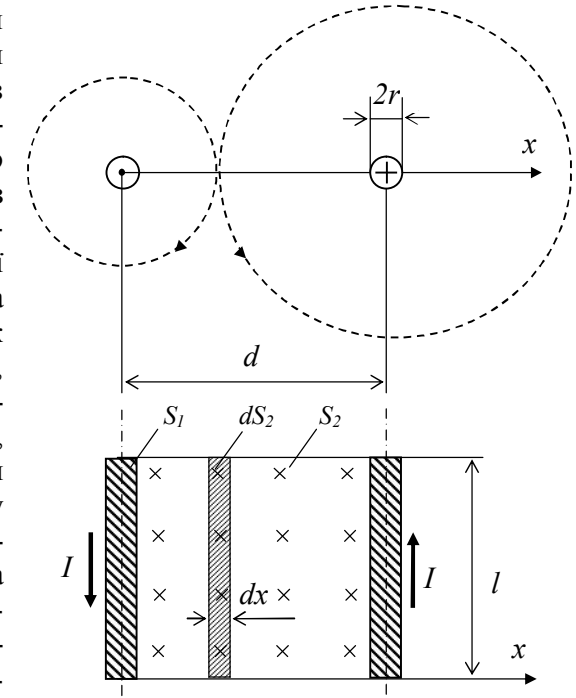


Рис. 7.5.

Уважаючи, що струм у провіднику розподілений рівномірно, тобто

$$j = \frac{I}{\pi r^2} = \text{const},$$

для відстані  $x$  від осі провідника формула (а) може бути конкретизована таким чином:

$$H_1 \cdot 2\pi x = \frac{I}{\pi r^2} \cdot \pi x^2.$$

Тоді

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} x. \quad (\text{б})$$

Для магнітного потоку  $d\Phi_1$  через елементарну площадку  $dS_1 = ldx$  (на рис. не показано), коли  $x < r$ :

$$d\Phi_1 = B_1 dS = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r^2} x dx. \quad (\text{в})$$

Отже потік  $\Phi_1$  через площадку  $l \cdot r$  можна знайти інтегруванням:

$$\Phi_1 = \int_0^r \frac{\mu_0 I l}{2\pi r^2} x dx = \int_0^r \frac{\mu_0 I l}{2\pi r^2} x dx = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}. \quad (\text{г})$$

В області  $r < x < d$  напруженість магнітного поля  $H_2$  (див. формулу 6.15):

$$H_2 = \frac{I}{2\pi x}, \quad (\text{д})$$

а магнітний потік  $d\Phi_2$  через елементарну площадку  $dS$ :

$$d\Phi_2 = \mu_0 H_2 dS_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx. \quad (\text{е})$$

Отже, потік  $\Phi_2$ , створений лівим провідником із струмом  $I$ , через частину площі, що залишилася:

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \int_r^d \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d}{r}. \quad (\text{є})$$

Потік через всю площу  $S = S_1 + S_2 = ld$ , створений лівим провідником із струмом  $I$ , знайдемо сумуванням:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{l}{2} + \ln \frac{d}{r} \right) l. \quad (\text{ж})$$

В силу симетрії магнітних полів, які створюються лівим і правим провідниками з однаковими за модулем і протилежними за напрямком струмами, повний потік створюваний обома струмами, буде у два рази більшим, ніж потік, створений струмом, який тече в одному провіднику. Отже:

$$\Phi_{3AG} = 2\Phi = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{l}{2} + \ln \frac{d}{r} \right) l. \quad (\text{з})$$

Індуктивність системи  $L = \frac{\Phi_{3AG}}{I}$ , тому індуктивність одиниці довжини двопровідної лінії:

$$L_1 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{d}{r} \right). \quad (\text{и})$$

Підставляючи числові значення, одержимо  $L_1 = 1,76 \cdot 10^{-6}$  Гн/м.

**Задача 7.18.** Визначити індуктивність тороїда із залізним осердям, який має  $N = 1000$  витків, при струмах  $I_1 = 0,1$  А та  $I_2 = 0,3$  А. Радіус середньої лінії осердя становить  $R = 3,2$  см, площа поперечного перерізу  $S = 0,5$  см<sup>2</sup>. Неоднорідністю магнітного поля у межах поперечного перерізу осердя можна знехтувати. Залежність індукції магнітного поля від його напруженості у залізі показана на рис. 7.6.

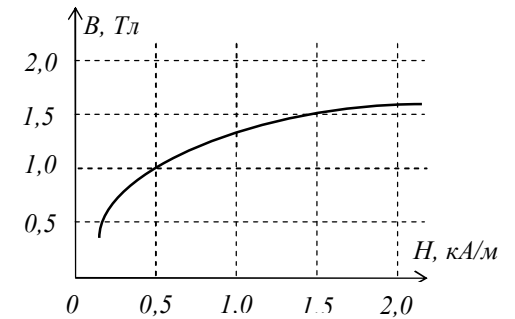


Рис. 7.6

**Р о з в' я з а н н я.** Визначимо спочатку напруженість магнітного поля  $H$  у тороїді, скориставшись теоремою про циркуляцію вектора  $H$ . Враховуючи, що число витків  $N$ , знаходимо:

$$H = \frac{IN}{2\pi R}. \quad (\text{а})$$

Підставляючи числові значення, одержимо, що при струмах  $I_1$  та  $I_2$  відповідні значення напруженості магнітного поля становлять  $H_1 = 500$  А/м,  $H_2 = 1500$  А/м. За графіком, наведеним



на рис. 7.6, знаходимо, що за цих значень  $H$  індукція магнітного поля у залізному осерді становитиме  $B_1=1,0$  Тл та  $B_2=1,5$  Тл.

Магнітний потік у сердечнику

$$\Phi' = BS. \quad (б)$$

Індуктивність тороїда дорівнює відношенню магнітного потоку, зчепленого з усіма його  $N$  витками, до сили струму у витках:

$$L = \frac{N\Phi'}{I} = \frac{BSN}{I}. \quad (в)$$

Підставляючи у формулу (в) визначені за графіком значення  $B$ , одержимо:

- для струму  $I_1 = 0,1$  А індуктивність тороїда  $L_1 = 0,1$  Гн;
- для струму  $I_1 = 0,3$  А індуктивність тороїда  $L_2 = 0,05$  Гн.

**Задача 7.19.** Електричну лампочку потужністю  $P = 2,5$  Вт, розраховану на напругу  $U_0 = 24$  В, увімкнули в коло постійного струму, схема якого наведена на рис. 7.7. Знайти напругу на лампочці у моменти замикання і розмикання ключа  $K$ , якщо е.р.с. джерела струму  $\mathcal{E} = 24$  В, опір шунтуючого резистора  $R_2 = 2,5$  Ом, індуктивність дроселя  $L = 10$  Гн. Внутрішнім опором джерела струму та активним опором дроселя можна знехтувати. Які явища будуть спостерігатися у моменти замикання і розмикання ключа  $K$ ?

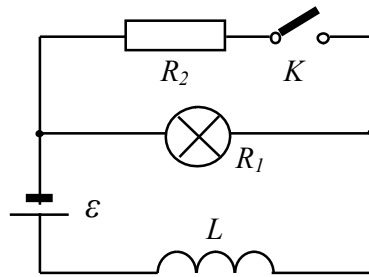


Рис. 7.7.

**Розв'язання.** Визначимо спочатку активний опір лампочки, нехтуючи його температурною зміною при розжаренні її нитки та враховуючи, що  $P = U_0^2/R_1$ :

$$R_1 = \frac{U_0^2}{P} \approx 230 \text{ (Ом)}.$$

Якщо замкнути ключ  $K$ , то загальний активний опір кола зменшиться від  $R_1$  до значення  $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$ , а значить, струм

у колі зростатиме. При цьому у дроселі виникне е.р.с. самоіндукції

$$\mathcal{E}_C = -L \frac{dI}{dt},$$

яка протидіє наростанню струму  $i$ , отже, направлена проти е.р.с. джерела струму  $\mathcal{E}$ . Тому силу струму у колі можна визначити за законом Ома з такого рівняння:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I. \quad (а)$$

Розділимо у цьому диференціальному рівнянні змінні  $I$  та  $t$ :

$$\frac{dt}{L(R_1 + R_2)} = \frac{dI}{(R_1 + R_2)\mathcal{E} - R_1 R_2 I}. \quad (б)$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (б), одержимо:

$$\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t = -\ln[(R_1 + R_2)\mathcal{E} - R_1 R_2 I] + \ln C. \quad (в)$$

Сталу інтегрування  $\ln C$  знайдемо із початкових умов: у момент замикання ключа при  $t = 0$  струм у колі

$$I = I_{03} = \frac{\mathcal{E}}{R_1},$$

тоді

$$\ln C = \ln[(R_1 + R_2)\mathcal{E} - R_1 R_2 I_{03}] = \ln(R_1 \mathcal{E}). \quad (г)$$

Підставляючи вираз (г) у рівняння (в), одержимо:

$$\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t = -\ln \frac{(R_1 + R_2)\mathcal{E} - R_1 R_2 I}{R_1 \mathcal{E}}.$$

З цього виразу знайдемо закон зміни сили струму із часом:

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t\right) \right).$$

Напруга на лампочці буде дорівнювати напрузі на паралельно з'єднаних опорах  $R_1$  та  $R_2$ :

$$U_3(t) = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \varepsilon \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t\right) \right). \quad (д)$$

У момент замикання ключа  $K$ , тобто при  $t = 0$ :

$$U_3(0) = \varepsilon \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \approx 0,01\varepsilon \approx 0,24 \text{ (В)}.$$

Отже у момент замикання ключа  $K$  напруга на лампочці набагато менша від її номінального значення  $U_0$  і розжарення нитки різко зменшиться (лампочка гасне), а з плином часу напруга на ній і її світність поступово відновляться до нормального значення. Стала часу цього процесу  $\tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \approx 4 \text{ с}$ .

Після розмикання ключа  $K$  активний опір кола різко зростає, а струм у колі зменшуватиметься. При цьому у дроселі виникне е.р.с. індукції, яка буде перешкоджати зменшенню струму, тобто вона буде мати такий же знак, як е.р.с. джерела. Отже, закон Ома для кола у цьому випадку:

$$\varepsilon + L \frac{dI}{dt} = R_1 I. \quad (е)$$

Розв'язок цього рівняння із урахуванням того, що у початковий момент розмикання ключа  $K$  ( $t = 0$ ) струм у колі  $I = I_{0P} = \frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$ , матиме вигляд:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \exp\left(-\frac{R_1}{L} t\right) \right).$$

Напруга на лампочці

$$U_P(t) = IR_1 = \varepsilon \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \exp\left(-\frac{R_1}{L} t\right) \right). \quad (е)$$

У момент розмикання ключа ( $t = 0$ )

$$U_P(0) = \varepsilon \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 93\varepsilon = 2232 \text{ (В)}.$$

Таким чином, як видно із цього результату, при розмиканні ключа  $K$  напруга на лампочці на короткий час (стала часу цього процесу  $\tau = \frac{L}{R_1} \approx 0,04 \text{ с}$ ) значно перевищує е.р.с. джерела та номінальне значення напруги лампочки. Це дозволяє спостерігати короточасний спалах свічення нитки розжарення лампочки і встановлення її нормального свічення за час набагато менший, ніж при замиканні ключа  $K$ .

**Задача 7.20.** На картонний тороїд із прямокутним поперечним перерізом (див. рис. 7.8.) намотані дві обмотки із числом витків  $N_1 = 400$  та  $N_2 = 300$ . Внутрішній і зовнішній радіуси тороїда відповідно  $r_1 = 5 \text{ см}$ ,  $r_2 = 8 \text{ см}$ , висота  $h = 5 \text{ см}$ . Через обмотки тече струм  $I = 3 \text{ А}$  одного напрямку. Знайти енергію магнітного поля у тороїді. Яка кількість електрики пройде через мідне кільце опором  $R = 0,8 \text{ Ом}$ , яке надіте поверх обмоток на тороїд, при вимиканні струму?

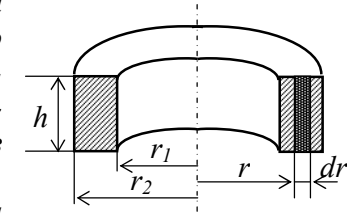


Рис. 7.8.

**Розв'язання.** У випадку, який розглядається у цій задачі, при достатньо щільному розташуванні витків обмоток магнітне поле практично зосереджене всередині тороїда. Обчислити енергію магнітного поля можна двома способами: визначивши густину енергії у довільній точці та підсумовуючи (інтегруючи) її у всьому об'ємі тороїда або, знаючи індуктивність тороїда, скористатись формулою (7.12).

**1-й спосіб.** Напруженість  $H$  магнітного поля, створюваного однією з обмоток можна визначити за теоремою про циркуляцію вектора  $H$  вздовж замкнутого контуру (див формулу 6.14 а). При цьому за контур інтегрування доцільно вибрати коло радіуса  $r$  з центром на осі тороїда, оскільки модуль вектора  $H$  вздовж цього контуру в силу симетрії задачі всюди буде однаковим. Тоді напруженість  $H_1$  магнітного поля, створюваного першою обмоткою:

$$H_1 = \frac{N_1 I}{2\pi r}, \quad (\text{a.1})$$

а другою

$$H_2 = \frac{N_2 I}{2\pi r}. \quad (\text{a.2})$$

Згідно з принципом суперпозиції, загальна напруженість магнітного поля всередині тороїда із врахуванням того, що струми в обмотках, а отже, і створювані ними магнітні поля напрямлені однаково:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi r} (N_1 + N_2). \quad (\text{a})$$

Густина енергії магнітного поля згідно з формулою (7.13):

$$w = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (N_1 + N_2)^2. \quad (\text{б})$$

У тонкому кільці радіусом  $r$ , висотою  $h$  та товщиною  $dr$  напруженість магнітного поля можна вважати постійною, тому енергія  $dW$  магнітного поля у ньому:

$$dW = wdV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (N_1 + N_2)^2 \cdot 2\pi r h dr, \quad (\text{в})$$

де  $dV = 2\pi r h dr$  – об'єм кільця.

Загальну енергію магнітного поля у тороїді можна знайти інтегруючи вираз (в) у всьому об'ємі тороїда, тобто в межах від  $r_1$  до  $r_2$ :

$$\begin{aligned} W = \int_V dW &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (N_1 + N_2)^2 \cdot 2\pi r h dr = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} (N_1 + N_2)^2 h \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned} \quad (\text{г})$$

2-й спосіб. Як уже зазначалось вище, за умовою задачі струми в обмотках, а отже, і створювані ними магнітні поля напрямлені однаково. Тоді індуктивність системи з урахуванням того, що магнітний потік у тороїді не розсіюється, тобто потік, створений однією обмоткою, повністю пронизує іншу (коефіцієнт  $K$  у поясненні до формули (7.10) дорівнює 1):

$$L = L_1 + L_2 + 2M, \quad (\text{д})$$

де  $L_1$  та  $L_2$  – індуктивності кожної з обмоток,  $M$  – взаємна

індуктивність котушок. Радіуси  $r_1$  та  $r_2$  тороїда порівнянні з розмірами поперечного перерізу ( $r_2 - r_1$ ) та  $h$ , тому формулу (7.7) з коефіцієнтом  $\kappa=1$  застосовувати не можна, оскільки вона одержана за умови однорідності магнітного поля всередині тороїда (довгого соленоїда). Коефіцієнти  $L_1$ ,  $L_2$  та  $M$  можуть бути знайдені із вирізів:

$$L_1 I = N_1 \Phi_{11}, \quad L_2 I = N_2 \Phi_{22}, \quad M I = N_1 \Phi_{12} = N_2 \Phi_{21}, \quad (\text{е})$$

де  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{22}$  – власні магнітні потоки,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{21}$  – “чужі” магнітні потоки (наприклад,  $\Phi_{11}$  – потік, що пронизує один виток першої обмотки, створений струмом у цій же обмотці,  $\Phi_{12}$  – потік, що пронизує один виток першої обмотки, створений струмом у другій обмотці).

Для розрахунку потоку  $\Phi_{11}$  спочатку знайдемо потік  $d\Phi_{11}$  через елементарну площадку  $dS = h dr$ , на якій індукцію  $B = \mu_0 H$  магнітного поля можна вважати постійною:  $d\Phi_{11} = B dS = \mu_0 H h dr$ . Тоді, з урахуванням формули (а.1), повний потік  $\Phi_{11}$ :

$$\Phi_{11} = \int_S d\Phi_{11} = \int_S B dS = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I N_1}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I N_1 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (\text{є.1})$$

Аналогічно

$$\Phi_{22} = \frac{\mu_0 I N_2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I N_2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I N_1 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (\text{є.2-4})$$

Підставляючи вирази (є.1–4) у формули (е) та (д), одержимо:

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} (N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2) \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} (N_1 + N_2)^2 \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (\text{ж})$$

Для обчислення енергії магнітного поля соленоїда скористаємось одержаним виразом для індуктивності тороїда із двома обмотками та формулою (7.12):

$$W = \frac{L I^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} (N_1 + N_2)^2 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

що повністю збігається із виразом (г), одержаним першим способом.

Підстановка числових значень в одержані вирази для енергії магнітного поля тороїда дає  $W \approx 1,0 \cdot 10^{-2}$  Дж.

При виключенні струму в обмотках магнітний потік, який пронизує мідне кільце, що надіте на тороїд, зменшується до нуля

і в кільці появляється індукційний струм  $I_{\text{ИД}}$ . Кількість електрики, яка протікає внаслідок цього вздовж кільця (через його довільний поперечний переріз), дорівнює:

$$q = \int_0^{\infty} I_{\text{ИД}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{ИД}}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi}{R}, \quad (3)$$

де  $\Phi$  – сумарний магнітний потік, який пронизує площу, обмежену мідним кільцем, до виключення струму. Оскільки магнітне поле зосереджене тільки всередині тороїда, то цей потік дорівнює магнітному потоку, який пронизує поперечний переріз тороїда. Враховуючи наведене та формулу (а), одержимо:

$$\Phi = \int_S B dS = \int_S \mu_0 H dS = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (N_1 + N_2) h dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} (N_1 + N_2) \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (и)$$

Підставляючи вираз (и) у формулу (3), одержимо:

$$q = \frac{\mu_0 I h}{2\pi R} (N_1 + N_2) \ln \frac{r_2}{r_1} \approx 12 \text{ (мкКл)}.$$

### 7.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

7.21. Горизонтальний металічний стрижень довжиною 60 см обертається навколо вертикальної осі, яка проходить на відстані, що дорівнює 1/3 його довжини, з кутовою частотою 2 рад/с. Визначити різницю потенціалів між кінцями стрижня, якщо вертикальна складова напруженості магнітного поля Землі 40 А/м.

7.22. Металічний диск радіусом 25 см обертається з постійною кутовою швидкістю 130 рад/с навколо його осі. Знайти різницю потенціалів між центром і ободом диска, якщо: а) зовнішнє магнітне поле відсутнє, б) зовнішнє магнітне поле з індукцією 5,0 мТл перпендикулярне до площини диска

7.23. У котушці без осердя, яка має 1000 витків, діаметр перерізу якої 10 см і довжина 50 см, сила струму рівномірно збільшується на 0,1 А за 1 с за допомогою реостата. На котушку щільно надіте кільце із мідної дротини, площа перерізу якої 2 мм<sup>2</sup>. Уважаючи, що магнітні потоки, які пронизують котушку і кільце, у довільний момент часу однакові між собою, знайти силу струму в кільці.

7.24. Довгий провідник із струмом  $I$  і П-подібний провідник із перемичкою розташовані в одній площині (рис. 7.9). Перемичка, довжина якої  $l$ , переміщається вправо із постійною швидкістю  $v$ . Знайти е.р.с. індукції у контурі з перемичкою як функцію відстані  $x$ .

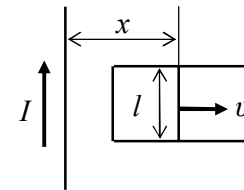


Рис. 7.9.

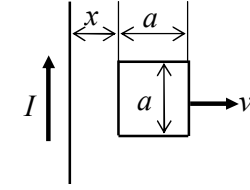


Рис. 7.10.

7.25. Довгий прямий провідник із струмом  $I$  та квадратна рамка із стороною  $a$  лежать в одній площині (рис. 7.10). Рамка рухається вправо із сталою швидкістю  $v$ . Знайти е.р.с. індукції у рамці як функцію відстані  $x$ .

7.26. Дротяний каркас у вигляді квадрата  $ABCD$  з перемичкою  $\Pi$  (рис. 7.11), виготовленою із тієї ж дротини, розташований в однорідному змінному магнітному полі, внаслідок чого у дротинах протікають індукційні струми. Магнітні поля індуктованих струмів малі у порівнянні із змінами зовнішнього магнітного поля. Визначити, в якому випадку індукційні струми виділяють у каркасі та перемичці більшу кількість теплоти: а) перемичка розміщена посередині квадрата; б) перемичка збігається із однією стороною квадрата.

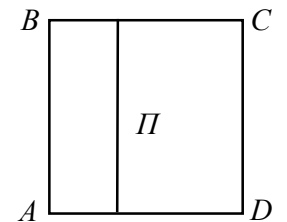


Рис. 7.11.

7.27. Магнітний потік через нерухомий контур з електричним опором  $R$  змінюється протягом часу  $\tau$  за законом  $\Phi = at(t-\tau)$ . Знайти кількість тепла, яка виділяється у контурі за цей час. Індуктивністю контуру можна знехтувати.

7.28. Усередині довгого соленоїда розташована котушка, що містить  $N$  витків з площею поперечного перерізу  $S$ . Котушку обертають із постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі, яка напрямлена вздовж діаметра і перпендикулярна до осі соленоїда. Знайти е.р.с. індукції у котушці, якщо індукція магнітного поля у

соленоїді змінюється з часом за законом  $B=B_0\sin\omega t$  і у момент часу  $t=0$  вісь котушки збігається із віссю соленоїда.

7.29. Квадратна рамка з стороною 1 м обертається в однорідному магнітному полі з циклічною частотою 5 об./с. Вісь обертання рамки перпендикулярна лініям індукції магнітного поля. Магнітне поле змінюється за законом  $B=10^{-3}\cdot\cos(10\pi t)$  (Тл). Яка амплітуда та частота е.р.с. індукції, що виникає у рамці.

7.30. Плоска спіраль з дуже великим але скінченним числом витків  $N$ , які щільно прилягають один до одного, розташовані в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до площини спіралі. Зовнішній радіус спіралі дорівнює  $R$ . Індукція магнітного поля у спіралі змінюється за законом  $B=B_0\sin\omega t$ . Знайти амплітудне значення е.р.с. індукції у спіралі.

7.31. Мідне кільце масою 5 кг розташоване у площині магнітного меридіана Землі. Який заряд пройде у кільці, якщо його повернути навколо вертикальної осі на  $90^\circ$ ? Горизонтальна складова індукції магнітного поля Землі  $2\cdot 10^{-5}$  Тл.

7.32. Визначити магнітний потік, який створюється котушкою, що має 1000 витків, якщо індуктивність котушки 5 Гн і струм у ній 0,6 А?

7.33. Скільки витків повинна мати котушка довжиною 60 см і діаметром 5 см, щоб її індуктивність становила  $6\cdot 10^{-3}$  Гн? Множник  $k$  у формулі (7.7) прийняти таким, що дорівнює 1.

7.34. Скільки метрів тонкого провідника потрібно використати для виготовлення соленоїда довжиною 1,0 м з індуктивністю 1,0 мГн, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший його довжини?

7.35. Із провідника радіусом 1 мм виготовлена прямокутна рамка, довжина якої 10,0 м набагато більша її ширини 0,1 м. Знайти індуктивність рамки. Поле всередині провідників можна знехтувати. Магнітну проникність середовища прийняти такою, що дорівнює одиниці.

7.36. Знайти індуктивність одиниці довжини коаксіального кабеля, радіус внутрішнього провідника якого  $a = 1,0$  мм, а радіус зовнішнього, який має форму тонкостінної трубки,  $b = 5,4$  мм. Врахувати, що при високих частотах (для яких призначені коаксіальні кабелі) змінний струм тече у поверхневому шарі провідників.

7.37. Поблизу один від одного розташовані два витки провідника. У першому провіднику тече струм 1 А, а в коло другого включений балістичний гальванометр з активним опором 5,0 Ом. Чому дорівнює взаємна індуктивність витків, якщо при виключенні струму у першому із них через гальванометр проходить заряд 1,0 мКл?

7.38. Визначити взаємну індуктивність тороїда з прямокутним поперечним перерізом і довгого прямого провідника, який розташований вздовж осі тороїда. Внутрішній і зовнішній радіуси тороїда відповідно  $a$  і  $b$ , висота  $h$ . Число витків тороїда  $N$ . Тороїд і провідник поміщені у середовище із магнітною проникністю  $\mu$ .

7.39. На одне осердя намотано дві обмотки з індуктивностями 0,5 Гн та 0,7 Гн. Якщо котушки з'єднати так, що струми в них протікатимуть у протилежних напрямках, то індуктивність системи стане дорівнювати нулю. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції системи.

7.40. На круглий дерев'яний циліндр навита мідна обмотка, маса якої 50 г. Відстань між крайніми витками обмотки становить 60 см і є набагато більшою від діаметра циліндра. Опір обмотки 30 Ом. Яка її індуктивність?

7.41. Дві котушки з індуктивностями 5 мГн і 3 мГн з'єднані послідовно і розташовані так, що їх магнітні поля підсилюють одне одного. Індуктивність цієї системи 11 мГн. а) Чому дорівнює взаємна індуктивність котушок? б) Яка буде індуктивність системи, якщо, не змінюючи розташування котушок, змінити напрям струму в одній із них на протилежний?

7.42. Кільце радіусом 50 мм індуктивністю 26 мкГн, виготовлене із тонкої дротини, розташоване в однорідному магнітному полі з індукцією 50,0 мТл так, що його площина перпендикулярна до напрямку поля. Кільце охолодили до надпровідного стану і вимкнули магнітне поле. Знайти струм у кільці.

7.43. Струм 1,9 А тече у довгому замкненому надпровідному соленоїді. Знайти струм у соленоїді після того, як його розтягнули на 5%.

7.44. На котушку, опір та індуктивність якої відповідно 10 Ом та 58 мГн, подається постійна напруга. Через який час сила

струму у котушці досягне значення, яке дорівнює половині максимального значення сили струму у колі?

7.45. На котушку опором  $0,7 \text{ Ом}$  та індуктивністю  $0,2 \text{ Гн}$  подається постійна напруга  $100 \text{ В}$  протягом  $0,3 \text{ с}$ . Оцінити, як при цьому зміниться температура мідної дротини котушки, якщо її маса  $2,5 \text{ кг}$ , а ізоляція не встигає нагріватися?

7.46. Обмотка електромагніта має опір  $10 \text{ Ом}$  та індуктивність  $0,2 \text{ Гн}$  і підключена до джерела постійного струму. Оцінити, протягом якого проміжку часу в обмотці виділиться кількість теплоти, яка дорівнює енергії магнітного поля в осерді.

7.47. До котушки індуктивністю  $50 \text{ мГн}$  і омичним опором  $180 \text{ Ом}$  миттєво прикладена різниця потенціалів  $50 \text{ В}$ . Яка буде швидкість наростання струму в колі через  $0,001 \text{ с}$ ?

7.48. Дросель індуктивністю  $2 \text{ Гн}$  і омичним опором  $10 \text{ Ом}$  під'єднаний до джерела з нехтовно малим внутрішнім опором і е.р.с.  $100 \text{ В}$ . З якою швидкістю буде запасатись енергія у магнітному полі та якою буде швидкість розсіювання Джоулевого тепла у дроселі через  $0,1 \text{ с}$  після включення джерела?

7.49. Покажіть, що стала часу  $\tau = L/R$  може бути визначена як час, необхідний для того, щоб струм у контур, що містить опір  $R$  і індуктивність  $L$  досяг свого рівноважного значення, якщо б він продовжував наростати (спадати) зі своєю початковою швидкістю.

7.50. Через ділянку електричного кола, яка складається із послідовно з'єднаних резистора опором  $2 \text{ Ом}$  та котушки з індуктивністю  $0,1 \text{ Гн}$ , тече струм  $I = 5t \text{ (А)}$ . Як змінюється з часом напруга на цій ділянці кола?

7.51. Визначити густину енергії магнітного поля у залізному осерді соленоїда, якщо соленоїд має довжину  $60 \text{ см}$ , діаметр  $50 \text{ см}$ , містить  $1000$  витків і у ньому тече струм  $1 \text{ А}$ . При розв'язуванні задачі скористайтесь таблицею підрозділу 7.1 та рис. 7.6.

7.52. Струм  $I$  тече у довгому прямому провіднику круглого поперечного перерізу з магнітною проникністю  $\mu$ . Знайти енергію магнітного поля всередині провідника на одиницю його довжини.

7.53. На тороїд із магнетика намотано  $500$  витків. Знайти енергію магнітного поля, якщо при струмі  $2,0 \text{ А}$  магнітний потік через поперечний переріз тороїда  $1,0 \text{ мВб}$ .

7.54. Тонке рівномірно заряджене кільце радіусом  $10 \text{ см}$  обертається навколо своєї осі із кутовою швидкістю  $100 \text{ рад/с}$ . Знайти відношення об'ємних густин енергій магнітного та електричного поля на осі кільця у точці, яка лежить на відстані  $10 \text{ см}$  від його центра.

7.55. Для визначення числа витків у первинній і вторинній обмотках трансформатора поверх вторинної обмотки намотали  $80$  витків і після включення первинної обмотки з ефективним значенням напруги  $220 \text{ В}$  за допомогою вольтметра визначили напругу на кінцях допоміжної ( $U_3 = 20 \text{ В}$ ) і вторинної ( $U_2 = 36 \text{ В}$ ) обмоток. Визначити число витків у первинній і вторинній обмотках.

7.56. Первинна обмотка трансформатора, яка включена у коло змінного струму із напругою  $220 \text{ В}$ , має  $1500$  витків. Визначити число витків у вторинній обмотці, якщо вона повинна живити коло з напругою  $6,3 \text{ В}$  при струмі  $0,5 \text{ А}$ . Навантаження чисто активне. Опір вторинної обмотки  $0,20 \text{ Ом}$ . Опором первинної обмотки знехтувати.

7.57. У трансформаторі, коефіцієнт трансформації якого дорівнює  $0,5$ , напруга в навантаженні, включеному у коло вторинної обмотки, становить  $216 \text{ В}$ . Навантаження чисто активне і його опір  $10,8 \text{ Ом}$ . Визначити напругу у первинній обмотці, силу струму у ній і к.к.д. трансформатора. Опір вторинної обмотки  $0,20 \text{ Ом}$ . Опором первинної обмотки і підвідних провідників знехтувати.

7.58. Первинна обмотка трансформатора, яка включена у коло з напругою  $380 \text{ В}$ , має  $1320$  витків. У вторинну обмотку включене активне навантаження, яке споживає  $360 \text{ Вт}$ . Враховуючи, що опір навантаження  $3,6 \text{ Ом}$  і опір вторинної обмотки  $0,2 \text{ Ом}$ , визначити е.р.с. індукції у вторинній обмотці та число витків у ній, силу струму у первинній обмотці та к.к.д. трансформатора. Вважати, що коефіцієнт потужності дорівнює одиниці.

## РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНОМУ І МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

### 8.1. Короткі теоретичні відомості

В електричному полі на заряджену частинку діє сила, яка визначається напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{F}_E = q\vec{E}. \quad (8.1)$$

Сила, що діє на рухому заряджену частинку у магнітному полі:

$$\vec{F}_M = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (8.2)$$

Повна сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (8.3)$$

В цих формулах  $q$  – заряд частинки,  $\vec{v}$  – її швидкість,  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля,  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля.

Експериментально встановлено, що провідник із струмом створює магнітне поле. Оскільки електричний струм – це напрямлений рух заряджених частинок, то можна зробити висновок про те, що джерелом магнітного поля є рухомі заряди.

Якщо частинка, що має заряд  $q$ , рухається із швидкістю  $\vec{v}$ , то у вакуумі на відстані  $\vec{r}$  від заряду індукція магнітного поля становитиме

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^3} [\vec{v} \times \vec{r}], \quad (8.4 \text{ а})$$

а за модулем

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^2} v \sin \alpha, \quad (8.4 \text{ б})$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{v}$  та  $\vec{r}$ .

Оскільки заряд  $q$  у тій самій точці простору створює електричне поле, напруженість якого (див. формулу 1.3 а):

$$\vec{E}_q = k \frac{q}{er^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

то рухомий заряд створює поле, яке має електричну і магнітну складові. Зв'язок між величинами  $\vec{B}_q$  та  $\vec{E}_q$  та їх напрямками визначається співвідношенням:

$$\vec{B}_q = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \times \vec{E}_q] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{E}_q], \quad (8.5)$$

де  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла у вакуумі.

Сила магнітної взаємодії двох зарядів  $q_1$  та  $q_2$ , відстань між якими  $\vec{r}_{12}$  і які рухаються із швидкостями  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$ :

$$F_{M12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} [\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}]]. \quad (8.6)$$

Якщо швидкості  $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  паралельні і перпендикулярні до вектора  $\vec{r}_{12}$ , то у разі однойменних зарядів між ними діятиме сила притягання, а якщо різнойменні – сила відштовхування. За модулем ця сила дорівнює

$$F_{M12} = F_{M21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} v_1 v_2. \quad (8.7)$$

При  $q_1 = q_2$  і  $v_1 = v_2$  відношення сил магнітної  $F_M$  та електричної  $F_E$  взаємодії дорівнює:

$$\frac{F_M}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (8.8)$$

Із формул (8.5) та (8.6) випливає, що експериментальне виявлення електричного або магнітного полів заряду залежить від вибору системи відліку (координат), в якій ведеться спостереження. Тому прояв електричного та магнітного полів має відносний характер – проявляється принцип релятивізму. Причина полягає у нерозривній єдності електричного і магнітного полів, тобто у природі існує електромагнітне поле, а окремі його прояви у вигляді електричного або магнітного полів залежать від вибору системи відліку, в яких ведеться їхнє спостереження.

В електричному і магнітному полях мікроскопічні частинки можуть набувати швидкостей, які стають порівнянні із швидкістю світла  $c$ . Тому необхідно розрізняти класичні і релятивістські частинки. Частинка називається класичною, якщо її швидкість нехтовно мала у порівнянні з швидкістю світла  $c$  ( $v \ll c$ ). Якщо ж  $v \leq c$ , то частинка називається релятивістською. Рух класичної частинки описується рівнянням класичної

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

механіки. Для релятивістських частинок необхідно враховувати співвідношення теорії відносності:

– залежність маси від швидкості:

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (8.9)$$

– зв'язок між масою і повною енергією частинки:

$$W = mc^2, \quad (8.10)$$

де  $m_0$  – маса спокою частинки,  $\beta = v/c$ . У цих формулах не врахована потенціальна енергія частинки у зовнішньому силовому полі.

### 8.2. Методичні вказівки і поради

При розв'язуванні задач доводиться самостійно з'ясувати питання про те, класичною або релятивістською слід вважати дану частинку. Якщо при цьому відомою величиною є не швидкість частинки  $v$ , а її імпульс (кількість руху)  $p$  або кінетична енергія  $K$ , треба мати на увазі таке. Частинку вважають класичною тільки у тому випадку, якщо  $p \ll m_0c$  або  $K \ll m_0c^2$ . Корисно запам'ятати, що для електрона  $m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .

Задачі на рух класичних заряджених частинок в електричному і магнітному полях по суті розв'язуються методами класичної механіки. Відмінність лише в природі сил, що діють на частинку. Якщо в механіці рух частинок проходить під дією гравітаційних, пружних сил і сил тертя, то заряджені частинки рухаються лише під дією сили, що визначається формулою (8.3), яка складається з двох частин: електричної сили  $\vec{F}_E = q\vec{E}$  і магнітної (лоренцівської) сили  $\vec{F}_M = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ .

Для розв'язку задач, як правило, необхідно записати рівняння руху частинки – другий закон Ньютона. Щоб перейти від векторної форми запису другого закону Ньютона до скалярної, треба визначити напрями векторів  $\vec{F}_E$  та  $\vec{F}_M$ . Врахуємо, що у формулах (8.1) – (8.3)  $q$  – алгебраїчна (скалярна) величина. Зокрема, для електрона  $q < 0$ , тому вектори  $\vec{F}_E$  та  $\vec{E}$  напрямлені протилежно. Магнітна сила  $\vec{F}_M$ , як це витікає з (8.3), завжди перпендикулярна векторам  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$ , тому вона надає

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

рухомій зарядженій частинці тільки нормальне прискорення, не змінюючи модуль її швидкості і, отже, не виконуючи роботу. Навпаки, сила  $\vec{F}_E$  при переміщенні частинки завжди (за винятком випадків, коли  $\vec{v} \perp \vec{E}$ ) виконує роботу, що дорівнює зміні кінетичної енергії частинки.

Складаючи рівняння руху для релятивістської частинки, треба враховувати залежність її маси від швидкості, а значить, і від часу. Внаслідок цього другий закон Ньютона для такої частинки записують у такому вигляді:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (8.11)$$

де  $\vec{p} = m\vec{v}$  імпульс частинки. Згідно з формулою (8.9), релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v} = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\vec{v}}{v}. \quad (8.12)$$

Кінетична енергія  $K$  релятивістської частинки обчислюється як різниця між повною енергією частинки  $W = mc^2$  і енергією її спокою  $W_0 = m_0c^2$ :

$$K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (8.13)$$

де враховано формулу (8.9).

### 8.3. Якісні задачі та запитання

8.1. Пучок протонів, потрапляючи в деяку область простору, має криволінійну траєкторію. Як визначити, магнітним чи електричним полем зумовлено викривлення траєкторії?

8.2. Як, розглядаючи сліди заряджених частинок у камері Вільсона, можна визначити знак заряду частинки і напрям її імпульсу?

8.3. Якою є траєкторія зарядженої частинки, яка потрапляє в неоднорідне магнітне поле і рухається в область більш сильного поля?



## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

8.4. Чи можна стверджувати, що магнітне поле відсутнє у певній області простору, якщо пролітаючи через неї заряджена частинка не відхиляється від початкового напрямку руху?

8.5. Чи можна визначити яким полем – електричним чи магнітним зумовлене відхилення пучка електронів у певній частині простору, якщо відома траєкторія їх руху?

8.6. Запишіть рівняння руху зарядженої частинки масою  $m$  і зарядом  $q$  у векторній формі і в проекціях на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у довільних електричному і магнітному полях.

8.7. Частинка із зарядом  $q$  та масою  $m$  рухається в однорідному електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$ . Як слід направити магнітне поле і чому має дорівнювати модуль його індукції  $B$ , щоб частинка рухалась із постійною швидкістю  $\vec{v}$ , перпендикулярною до напрямку електричного поля?

8.8. Частинка масою  $m$  та зарядом  $q$  влітає із швидкістю  $\vec{v}$  (рис. 8.1.) в область простору, де створене однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ . Зобразіть якісно проекції траєкторії частинки на площини  $x$ - $y$ ,  $x$ - $z$ ,  $y$ - $z$ .

8.9. Поясніть принцип дії циклотрона і бетатрона.

8.10. Поясніть принцип дії мас-спектрометра із магнітним відхиленням іонів.

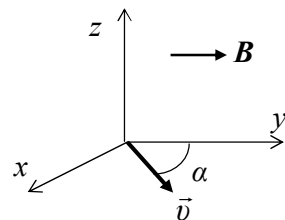


Рис. 8.1.

### 8.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 8.11.** Знайти чутливість електронно-променевої трубки з електростатичним відхиленням електронів, у якій прискорююча різниця потенціалів  $1000\text{ В}$ , відхиляючі пластини мають довжину  $4\text{ см}$ , відстань між ними  $1\text{ см}$ , а відстань між краєм пластин і екраном  $20\text{ см}$ .

**Розв'язання.** Виконаємо спрощений рисунок електронно-променевої трубки та зробимо такі позначення:  $U_0$  – прискорююча різниця потенціалів,  $l$  – довжина відхиляючих пластин,  $d$  – відстань між ними,  $L$  – відстань від краю пластин до екрана  $MN$  (рис. 8.2).

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

Під дією прискорюючої різниці потенціалів за рахунок роботи, яку виконує електричне поле, електрони набувають кінетичної енергії:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0, \quad (a)$$

де  $m$  – маса,  $e$  – заряд електрона.

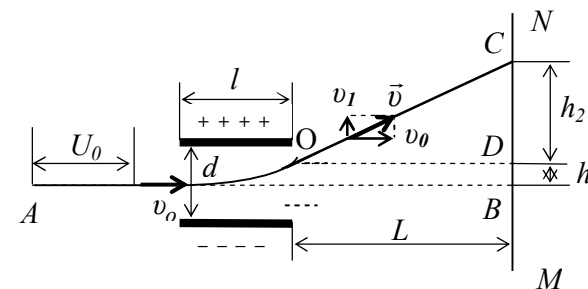


Рис. 8.2.

Звідси очевидно, що початкова швидкість  $v_0$ , із якою електрони влітають між відхиляючі пластини:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}. \quad (б)$$

Криволінійний рух електронів усередині конденсатора можна розкласти на два прості рухи: 1) електрони рухатимуться за інерцією вздовж лінії  $AB$  із сталою швидкістю  $v_0$ , оскільки вздовж цього напрямку на них не діють ніякі сили; 2) електрони рухатимуться прискорено у вертикальному напрямі до позитивно зарядженої пластини під дією сталої сили, що діє на них в електростатичному полі конденсатора.

За межами конденсатора електрони рухатимуться рівномірно із швидкістю  $\vec{v}$ , яку вони мають в точці  $O$  у момент вильоту з конденсатора. Із рисунка видно, що відхилення електронного променя від точки  $B$  у точку  $C$  на екрані  $MN$  за наявності різниці потенціалів  $U$  на пластинах конденсатора складається із двох частин  $BC = h_1 + h_2$ , де  $h_1$  – відстань, на яку змістяться електрони у вертикальному напрямі за час їх руху в конденсаторі,  $h_2$  – відстань між точкою  $D$  на екрані, в яку потрапили б електрони, рухаючись після виходу із конденсатора

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

в напрямі початкової швидкості  $\vec{v}$ , і точкою  $C$ , в яку насправді потрапляють електрони.

Визначимо окремо  $h_1$  і  $h_2$ . Користуючись формулою шляху рівноприскореного руху, знайдемо:

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \quad (в)$$

де  $a$  – прискорення, якого набуває електрон під дією електростатичної сили,  $t$  – час руху електрона в конденсаторі. За другим законом динаміки:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} = \frac{eU}{md}, \quad (г)$$

де  $F = eE$  – сила, з якою поле діє на електрон,  $E = U/d$  – напруженість електричного поля між пластинами плоского конденсатора.

Час прольоту електрона всередині конденсатора знайдемо за формулою шляху для рівномірного руху:

$$l = v_0 t, \quad \text{звідки} \quad t = \frac{l}{v_0}. \quad (д)$$

Підставляючи у формулу (в) вирази для  $a$ ,  $t$ ,  $v_0$  із (б), (г), (д) одержимо:

$$h_1 = \frac{Ul^2}{4dU_0}. \quad (е)$$

Довжину відрізка  $h_2$  знайдемо із подібності трикутників  $CDO$  та утвореного векторами  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}$ . Очевидно, що

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{h_2}{L}, \quad \text{звідки} \quad h_2 = \frac{v_1}{v_0} L. \quad (ж)$$

Швидкість  $v_1$  визначимо як швидкість рівноприскореного руху за формулою:

$$v_1 = at = \frac{eUl}{mdv_0}. \quad (з)$$

Підставляючи (е) у формулу (ж) для  $h_2$ , одержимо:

$$h_2 = \frac{Ull}{2dU_0}. \quad (і)$$

Отже, сумарне зміщення електронів:

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

$$BC = h_1 + h_2 = \frac{Ul^2}{4dU_0} + \frac{Ull}{2dU_0} = \frac{Ul}{2dU_0} \left( \frac{l}{2} + L \right).$$

Тоді чутливість  $S$  електронно-променевої трубки:

$$S = \frac{h_1 + h_2}{U} = \frac{l}{2dU_0} \left( \frac{l}{2} + L \right).$$

Підстановка числових значень дає  $S = 0,44$  мм/В.

**Задача 8.12.** Протон, який має швидкість 80 км/с, влітає в однорідне магнітне поле з індукцією  $3,14 \cdot 10^{-2}$  Тл під кутом  $150^\circ$  до напрямку силових ліній. Визначити радіус і крок гвинтової лінії, вздовж якої буде рухатись протон.

**Р о з в' я з а н н я.** Виконаємо рисунок та зробимо такі позначення:  $\vec{v}$  – вектор швидкості протона,  $v_t$  – проекція вектора швидкості на напрям силової лінії магнітного поля,  $v_n$  – проекція вектора швидкості на напрям, перпендикулярний до силової лінії,  $h$  – крок та  $r$  – радіус гвинтової лінії (рис. 8.3).

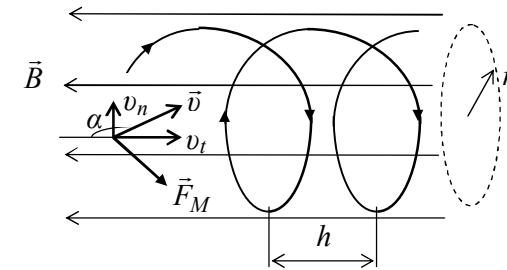


Рис. 8.3.

На протон, який влітає у магнітне поле, діє сила Лоренца, перпендикулярна до індукції магнітного поля і швидкості протона. Величина сили Лоренца прямо пропорційна нормальній (перпендикулярній до вектора  $\vec{B}$ ) складовій швидкості, тобто

$$F = ev_n B = evB \sin \alpha,$$

де  $e$  – заряд протона,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$ . Через те що сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості, абсолютна

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

величина останньої не змінюватиметься під дією цієї сили, а отже, і модуль сили Лоренца не змінюватиметься. Як відомо із механіки, стала сила, перпендикулярна до швидкості, зумовлює рух вздовж кола. Так, протон, влетівши у магнітне поле, рухатиметься уздовж кола у площині, перпендикулярній до вектора індукції (силової лінії) магнітного поля. Одночасно протон рухатиметься вздовж силової лінії з незмінною тангенціальною (дотичною до силової лінії) швидкістю  $v_t$ , яка дорівнює складовій швидкості у напрямі поля.

У результаті одночасного руху вздовж кола з швидкістю  $v_n$  і вздовж прямої зі швидкістю  $v_t$  протон рухатиметься вздовж гвинтової лінії. Визначимо радіус і крок цієї гвинтової лінії. Сила Лоренца, спричинюючи рух уздовж кола, є доцентровою силою. Отже,

$$ev_n B = \frac{mv_n^2}{r}, \quad \text{звідки} \quad r = \frac{mv_n \sin \alpha}{eB}.$$

Після підстановки числових значень одержимо  $r \approx 1,33$  см.

Крок гвинтової лінії  $h$  дорівнює шляху, пройденому протоном уздовж силової лінії зі швидкістю  $v_t$  за час одного повного оберту, і визначається формулою:

$$h = v_t T = v T \cos \alpha,$$

де  $T$  – період обертання протона, який знайдемо за формулою:

$$T = \frac{2\pi r}{v_n} = \frac{2\pi r}{v \cos \alpha}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу для  $h$ , знайдемо:

$$h = \frac{2\pi r v_t}{v_n} = \frac{2\pi r \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2\pi r \operatorname{ctg} \alpha,$$

або  $h \approx -14,2$  см. Знак «-» означає, що при вибраних нами векторах  $\vec{v}$  та  $\vec{B}$  протон рухатиметься проти напрямку вектора індукції магнітного поля.

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

**Задача 8.13.** У конденсаторі, електроди якого представляють собою частини коаксіальних циліндричних поверхонь радіусами  $r_1=6$  см і  $r_2=5$  см, вздовж осі циліндрів діє однорідне магнітне поле з індукцією  $0,2$  Тл (рис. 8.4). Через вузьку щілину в діафрагмі  $AA$  в конденсатор влітає  $\alpha$ -частинка з енергією  $1$  кеВ. Яку різницю потенціалів слід прикласти до конденсатора, щоб  $\alpha$ -частинка рухалась вздовж кола на однаковій відстані від електродів? Зовнішній електрод має від'ємний потенціал.

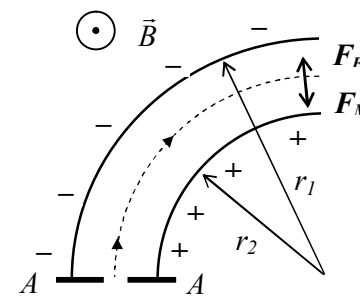


Рис. 8.4.

**Р о з в' я з а н н я.** На заряджену частинку в конденсаторі діє з боку електричного поля сила  $\vec{F}_E$ , а з боку магнітного поля – сила Лоренца  $\vec{F}_M$ . За умовою задачі  $\alpha$ -частинка повинна рухатись з постійною за модулем швидкістю вздовж дуги кола радіусом

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Як електрична  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , так і магнітна  $\vec{F}_M = q[\vec{v} \times \vec{B}]$  сили спрямовані вздовж радіуса кола, але в протилежні боки; їх рівнодійна забезпечує доцентрове прискорення  $a_d = \frac{v^2}{r}$ , тобто:

$$-qE + qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (a)$$

де  $q$  – заряд,  $v$  – швидкість частинки,  $E$  – напруженість електричного поля,  $B$  – індукція магнітного поля.

Швидкість  $\alpha$ -частинки може бути визначена за її кінетичною енергією  $K$ :

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}. \quad (б)$$

8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

Напруженість електричного поля може бути визначена із таких міркувань. Напруженість електричного поля на відстані  $r$  від осі зарядженого циліндра (див. розділ 1 формула 1.9 а):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r},$$

де  $\tau$  – лінійна густина заряду на циліндрі. Цю величину можна визначити із виразу для різниці потенціалів на циліндричному конденсаторі (формула 1.12 а):

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{звідки} \quad \tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Отже,

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_1}{r_2}}. \quad (\text{в})$$

Підставляючи вирази (б) та (в) у вираз (а), одержимо:

$$q\sqrt{\frac{2K}{m}}B - q\frac{U}{r \ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2K}{r}.$$

Тоді для різниці потенціалів  $U$  на пластинах конденсатора одержимо:

$$U = \frac{r}{q} \ln \frac{r_1}{r_2} \left( q\sqrt{\frac{2K}{m}}B - \frac{2K}{r} \right).$$

Після підстановки числових значень із врахуванням того, що для  $\alpha$ -частинки  $q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$  кг, а також, що  $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж, одержимо:

$$U = 38,5 \text{ В}.$$

8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

**Задача 8.14.** Іони водню рухаються в прискорюючій трубці, в якій створено однорідне електричне поле  $E = 10^3$  В/см, і проходять шлях  $d = 3$  м. Трубка розміщена горизонтально. На яку відстань від осі зміститься пучок іонів, якщо на нього діє вертикальна компонента напруженості магнітного поля Землі, яка становить  $H = 39,8$  А/м.

**Розв'язання.** В однорідному електричному полі іони водню рухатимуться із прискоренням, тому сила Лоренца, яка діятиме на іони, в різних точках їх траєкторії буде різною.

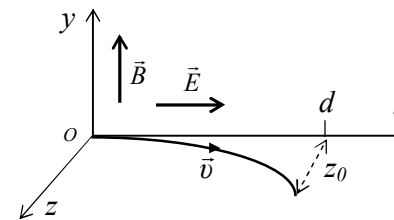


Рис. 8.5.

Внаслідок цього траєкторія руху іонів у магнітному полі буде значно складнішою, ніж колова, тому для розв'язку задачі скористаємось диференціальними рівняннями руху іонів. Виберемо осі координат так, як зображено на рис. 8.5 і запишемо рівняння руху,

враховуючи, що заряд іона водню  $+e$  і у вакуумі  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ :

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= eE - eB \frac{dz}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= eB \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{а})$$

$$\text{Тут} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a_y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = a_z, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y,$$

$\frac{dz}{dt} = v_z$  – прискорення та швидкості іонів вздовж осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$

відповідно. Уведемо позначення:

$$a = \frac{eE}{m} \quad \text{та} \quad \omega = \frac{eB}{m}. \quad (\text{б})$$

Тоді систему рівнянь (а) можна переписати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a - \omega \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \omega \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

Початкові умови для системи рівнянь (в) запишемо у вигляді:  
– при  $t = 0$ :

$$x = y = z = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Друге рівняння системи (в) інтегрується легко:  $y = C_1t + C_2$ , враховуючи початкові умови, одержимо:  $y = 0$ . Тобто іон у вертикальному напрямку не зміщуватиметься і його траєкторія лежатиме в площині  $xOz$ .

Однократне інтегрування третього рівняння за часом дає:

$$\frac{dz}{dt} = \omega x + C_3.$$

Враховуючи початкові умови, одержимо, що  $C_3 = 0$ , тобто:

$$\frac{dz}{dt} = \omega x. \quad (\text{г})$$

Підставляючи вираз (г) у перше рівняння системи (в) одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a. \quad (\text{д})$$

Одержане неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку має такий частинний розв'язок:

$$x_1 = \frac{a}{\omega^2}.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (д) можна записати у вигляді:

$$x_2 = C_4 \cos \omega t + C_5 \sin \omega t.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (д) має вигляд  $x = x_1 + x_2$ :

$$x = x_2 + x_1 = C_4 \cos \omega t + C_5 \sin \omega t + \frac{a}{\omega^2}.$$

Сталі інтегрування  $C_4$  та  $C_5$  знайдемо із початкових умов:

$$x(0) = C_4 + \frac{a}{\omega^2} = 0, \quad \text{звідки} \quad C_4 = -\frac{a}{\omega^2};$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = \omega C_5 = 0, \quad \text{звідки} \quad C_5 = 0.$$

Отже, залежність координати  $x$  від часу  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Залежність координати  $z$  від часу знаходимо, інтегруючи рівняння (г) із врахуванням однієї із початкових умов, а саме  $z(0) = 0$ :

$$z(t) = \omega \int_0^t x dt = \omega \int_0^t \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{a}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

Таким чином, розв'язком системи рівнянь (в) є:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= \frac{a}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{е})$$

Аналіз системи рівнянь (е), а саме першого рівняння, показує, що координата  $x$  є періодичною функцією часу з мінімальним і максимальним значеннями  $x_{\min} = 0$ , і  $x_{\max} = \frac{2a}{\omega^2}$  відповідно.

Оцінка величини  $x_{\max}$  з урахуванням позначень (б) і даних задачі показує, що воно має значення порядку  $10^6$  м, тобто  $x_{\max} \gg d = 3$  м. Це означає, що час  $t_0$ , за який іони зміщуються на відстань  $d$  вздовж осі  $x$ , набагато менший від періоду їх коливного руху, тобто  $\omega t_0 \ll 2\pi$  і, отже, для часів  $t < t_0$   $\cos \omega t$  та  $\sin \omega t$  можна розкласти в ряди і врахувати тільки перші кілька членів:

$$\cos \omega t = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \dots, \quad \text{і} \quad \sin \omega t = \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \dots$$

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

Враховуючи ці вирази, одержимо:

$$x(t_0) = d \approx \frac{a}{\omega^2} \left( \frac{1}{2} (\omega t_0)^2 \right), \quad z(t_0) = z_0 \approx \frac{a}{\omega^2} \left( \frac{1}{6} (\omega t_0)^3 \right).$$

Виключаючи з цих рівнянь  $t_0$  та врахувавши позначення (б), одержимо:

$$z_0 \approx \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{a}} d^{3/2} = \frac{1}{3} \mu_0 H \sqrt{\frac{2e}{mE}} \cdot d^{3/2}.$$

Підставляючи числові значення, знаходимо, що  $z_0 \approx 0,38$  см.

Розрахунки за наведеними вище спрощеними формулами справедливі за умови виконання нерівності  $\omega t_0 \ll 2\pi$ . Для її перевірки знайдемо відношення  $z_0$  до  $d$ . Як впливає із наведених вище формул,

$$\frac{z_0}{d} = \frac{1}{3} \cdot \omega t_0, \quad \text{тобто} \quad \omega t_0 = 3 \frac{z_0}{d} \approx 3,8 \cdot 10^{-3}.$$

Отже, припущення  $\omega t_0 \ll 2\pi$  є справедливим.

**Задача 8.15.** Радіус орбіти електронів, які прискорюються бетатроном, 300 мм. Середня на площі орбіти індукція магнітного поля, яке створюється електромагнітом бетатрона, змінюється з часом за лінійним законом від нуля до 0,200 Тл. Визначити швидкість, яку набувають електрони у бетатроні.

**Розв'язання.** В магнітному полі бетатрона під дією сили Лоренца електрони рухаються вздовж кола. При зміні магнітного поля змінюється магнітний потік  $\Phi$  через контур, який збігається із орбітою електронів, що породжує вихрове електричне поле. Оскільки електрони рухаються вздовж однієї із силових ліній електричного поля, то під дією останнього їх швидкість буде зростати.

Напруженість  $\vec{E}$  вихрового електричного поля у точках орбіти електронів знайдемо за законом електромагнітної індукції:

$$\oint E_l dl = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{а})$$

де контур інтегрування являє собою одну із силових ліній для вектора  $\vec{E}$ , яка має форму кола радіусом  $r$ . Тому  $E_l = E = \text{const}$  для всіх точок контуру і, отже  $\oint E_l dl = E \cdot 2\pi r$ . (б)

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

Оскільки магнітний потік змінюється рівномірно від нуля до  $\Phi_{\text{max}}$ , то швидкість його зміни можна виразити таким чином:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_{\text{max}}}{t} = \frac{B_{\text{max}} \cdot \pi r^2}{t}. \quad (\text{в})$$

Із виразів (а) – (в) для модуля вектора  $\vec{E}$  одержимо:

$$E = \frac{B_{\text{max}} r}{2t}. \quad (\text{г})$$

Таким чином, на кожний електрон, який рухається вздовж кола у магнітному полі бетатрона, буде діяти сила з боку вихрового електричного поля  $\vec{E}$ , яка постійна за модулем і дорівнює

$$F = eE = \frac{B_{\text{max}} r e}{2t} \quad (\text{д})$$

і спрямована вздовж вектора швидкості, а, отже, надає електрону тангенціального прискорення.

Для знаходження швидкості, якої набувають електрони в результаті дії на них сили  $F$  протягом часу  $t$ , застосуємо другий закон Ньютона для напрямку, який збігається з дотичною до траєкторії в кожній її точці. Оскільки у бетатроні електрони набувають швидкостей, близьких до швидкості світла, рівняння руху запишемо для релятивістського випадку, тобто із врахуванням залежності маси електрона від швидкості, а отже, і від часу:

$$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \quad (\text{е})$$

де  $\beta^2 = v^2/c^2$ ,  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

Інтегруючи рівняння (е) та враховуючи початкові умови (при  $t = 0, v = 0$ ), одержимо:

$$Ft = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{звідки} \quad v = \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}. \quad (\text{ж})$$

Підставляючи у рівняння (е) вираз (д) для сили  $F$ , одержимо:

$$v = \frac{B_{\text{max}} r e}{\sqrt{4m_0^2 c^2 + B_{\text{max}}^2 r^2 e^2}} c.$$

Виконавши обчислення, одержимо  $v = 0,998c$ .

**Задача 8.16.** Електрон, що має кінетичну енергію 10 МеВ, влітає в однорідне магнітне поле з індукцією  $10^{-2}$  Тл, яке перпендикулярне до його швидкості. Знайти масу цього електрона та радіус кола, вздовж якого він рухатиметься в цьому магнітному полі.

**Р о з в' я з а н н я.** Визначимо спочатку масу і швидкість електрона, враховуючи, що для релятивістської частинки її кінетична енергія дорівнює різниці між повною енергією  $W = mc^2$  та енергією спокою  $W_0 = m_0c^2$ :

$$K = W - W_0 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (a)$$

де  $m_0$  – маса спокою електрона. Із рівняння (а) легко одержати:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\left( \frac{K}{m_0c^2} + 1 \right)^2}, \quad \text{або} \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{(m_0c^2)^2}{(m_0c^2 + K)^2}}.$$

Підстановка числових значень із урахуванням того, що  $m_0c^2 = 0,51$  МеВ, дає  $\beta = 0,999$ , тобто  $v = 0,999c$ .

Маса рухомого електрона:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \left( \frac{K}{m_0c^2} + 1 \right) \approx 20,6m_0.$$

Оскільки сила, з якою магнітне поле діє на рухомі заряджені частинки, завжди перпендикулярна швидкості, а вектор швидкості  $\vec{v}$  перпендикулярний вектору індукції  $\vec{B}$  магнітного поля, рівняння руху електрона в магнітному полі можна записати у вигляді:

$$ma_n = evB,$$

де  $a_n = \frac{v^2}{r}$  – нормальне прискорення. Враховуючи вираз (8.9), одержимо:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v^2}{r} = evB,$$

звідки радіус кривизни траєкторії:

$$r = \frac{m_0v}{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c}{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c} = \frac{m_0c}{eB\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \beta = r_{кл} \frac{m}{m_0}, \quad (б)$$

де  $r_{кл}$  – радіус траєкторії “класичного” електрона, який ми знайшли в б, якби розглядали рух електрона на основі рівнянь нерелятивістської механіки.

Як видно із виразу (б), радіус кривизни траєкторії електрона у магнітному полі зростає у міру його прискорення, причому при малих швидкостях, де відношення  $\beta^2 = v^2/c^2$  мале, зміна радіуса кривизни траєкторії нехтовно мала, у той час, як при наближенні  $v$  до  $c$  радіус  $r$  різко зростає.

Підставляючи у вираз (б) дані умови задачі, знаходимо, що  $r_{кл} = 17,1$  см,  $r = 352$  см.

### 8.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

8.17. У плоскому конденсаторі з горизонтальними пластинами розташована заряджена краплина масою  $6,40 \cdot 10^{-16}$  кг. За відсутності напруги між пластинами краплина падає з постійною швидкістю 0,078 мм/с. Після подачі на конденсатор напруги 95,0 В краплина рухається вгору із швидкістю 0,016 мм/с. Визначити заряд краплини, якщо відстань між пластинами 10 мм.

8.18. Порошинка масою  $10^{-10}$  г падає між вертикальними пластинками плоского конденсатора на однаковій відстані від них. Внаслідок опору повітря швидкість порошинки постійна і дорівнює 1 мм/с. Конденсатор підключають до джерела високої напруги 490 В і через час 10 с порошинка досягає однієї із пластин. Визначити заряд пластинки, якщо відстань між ними 1 см. Силу опору повітря вважати пропорційною швидкості порошинки.

8.19. Визначити швидкість електрона, який пройшов різницю потенціалів: а) 100 В; б) 100 кВ.

8.20. У плоский конденсатор паралельно його пластинам влітає пучок електронів, які прискорені різницею потенціалів 1500 В. Електрони попадають у конденсатор точно посередині

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

між пластинами, відстань між якими 1 см. При якій мінімальній різниці потенціалів на пластинах конденсатора електрони не вилітають із конденсатора, якщо довжина пластин 5 см?

8.21. Протон прискорюється в електростатичному полі. При якій граничній різниці потенціалів швидкість протона можна розраховувати за законами класичної механіки, щоб відносна похибка не перевищувала 1%? При якій прискорюючій різниці потенціалів повна енергія протона перевищує енергію спокою у два рази?

8.22. У початковий момент часу із пластини плоского конденсатора вилітає електрон із нехтовно малою швидкістю. До пластин прикладена прискорююча напруга, яка змінюється за лінійним законом  $U = \kappa t$ , де  $\kappa = 100$  В/с. Відстань між пластинами 5 см. Із якою швидкістю електрон підлетить до протилежної пластини?

8.23. Протон, прискорений різницею потенціалів  $U$ , потрапляє у момент часу  $t=0$  в однорідне електричне поле плоского конденсатора, довжина пластин якого у напрямку руху протона дорівнює  $l$ . Напруженість поля у конденсаторі змінюється з часом за лінійним законом  $E = \kappa t$ , де  $\kappa$  – стала величина. Вважаючи протон нерелятивістською частинкою, знайти кут між напрямками руху протона до і після проходження конденсатора. Крайовими ефектами знехтувати.

8.24. Одна із пластин незарядженого плоского конденсатора освітлюється рентгенівськими променями, які виривають з неї електрони із швидкістю  $10^6$  м/с. Електрони потрапляють на другу пластинку. Через який час припиниться фотострум між пластинками, якщо щосекундно з кожного квадратного сантиметра площі пластинки виривається  $10^{13}$  електронів? Відстань між пластинами 10 мм.

8.25. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією 0,1 Тл вздовж кола. Визначте кутову швидкість обертання електрона.

8.26. Електрон, що має швидкість 10 Мм/с, влетів в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям магнітної індукції. Індукція магнітного поля  $B = 0,1$  мТл. Визначте нормальне і тангенціальне прискорення електрона.

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

8.27. Гвинтова лінія, вздовж якої рухається електрон в однорідному магнітному полі з індукцією 5 мТл, має діаметр 80 мм і крок 200 мм. Визначити швидкість електрона.

8.28. В однорідному магнітному полі перпендикулярно лініям магнітної індукції рухається прямий провідник завдовжки 40 см. Визначте силу Лоренца, що діє на вільний електрон провідника, якщо різниця потенціалів, яка виникає на його кінцях, становить 10 мкВ.

8.29. Електрон, прискорений різницею потенціалів 0,5 кВ, рухається паралельно прямолінійному довгому провіднику на відстані 1 см від нього. Визначте силу, що діє на електрон, якщо через провідник пропускати струм 10 А.

8.30. Протон, прискорений різницею потенціалів 0,5 кВ, влітаючи в однорідне магнітне поле з магнітною індукцією 2 мТл, рухається вздовж кола. Визначте радіус цього кола.

8.31. Із деякої точки  $O$  виходить трохи розбіжний потік моноенергетичних електронів, які мають швидкість  $6,0 \cdot 10^6$  м/с, у напрямку  $x$ . У цьому ж напрямку спрямоване магнітне поле з індукцією 10,0 мТл. Визначити відстань від точки  $O$  до точки, в якій перетинаються траєкторії всіх електронів (точки, в якій фокусується пучок).

8.32. Електрон, влетівши в однорідне магнітне поле з магнітною індукцією 2 мТл, рухається вздовж кругової орбіти радіусом 15 см. Визначити магнітний момент еквівалентного кругового струму.

8.33. В однорідне магнітне поле з індукцією 0,1 Тл перпендикулярно до його силових ліній потрапляє  $\alpha$ -частинка, яка рухається із швидкістю  $0,350 \cdot 10^6$  м/с. Знайти а) радіус траєкторії частинки; б) модуль і напрям магнітного моменту; в) відношення магнітного моменту до механічного моменту  $\alpha$ -частинки.

8.34. Електрон, що має швидкість 1 Мм/с, влітає в однорідне магнітне поле під кутом  $60^\circ$  до напрямку поля і починає рухатися вздовж спіралі. Напруженість магнітного поля  $H = 1,5$  кА/м. Визначити: а) крок спіралі; б) радіус витка спіралі.

8.35. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією 0,2 мТл вздовж гвинтової лінії. Визначити швидкість електрона, якщо радіус гвинтової лінії 3 см, а її крок 9 см.



## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

8.36. Протон, прискорений різницею потенціалів 500 кВ, пролітає область простору із поперечним до напрямку руху магнітним полем з індукцією 0,51 Тл. Товщина області із магнітним полем 10 см. Знайти кут відхилення протона від початкового напрямку руху.

8.37. При якій швидкості заряджені частинки, що рухаються перпендикулярно однорідним електричному із напруженістю 100 кВ/м і магнітному з індукцією 50 мТл полям, напрямленими під прямим кутом, не відхиляються?

8.38. Пучок нерелятивістських протонів проходить не відхиляючись через область простору в якій створено однорідні поперечні взаємно перпендикулярні електричне поле із напруженістю 120 кВ/м та магнітне поле із індукцією 50 мТл. Далі пучок потрапляє на заземлену мішень. Знайти силу, з якою пучок діє на мішень, якщо сила струму в пучку 0,80 мкА.

8.39. В однорідне магнітне поле з магнітною індукцією 0,2 Тл перпендикулярно лініям магнітної індукції із постійною швидкістю влітає заряджена частинка. Протягом 5 мкс включається електричне поле напруженістю 0,5 кВ/м в напрямі паралельному магнітному полю. Визначте крок гвинтової траєкторії зарядженої частинки

8.40. Визначити силу, яка діє на електрон, в момент часу, коли він пересікає під прямим кутом вісь довгого соленоїда безпосередньо біля його кінця. Сила струму в соленоїді 2,00 А, число витків на одиницю довжини  $3000 \text{ м}^{-1}$ . Швидкість електрона  $3,0 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ .

8.41. Іони двох ізотопів масами  $6,5 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$  та  $6,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ , прискорені різницею потенціалів 0,5 кВ, влітають в однорідне магнітне поле з індукцією 0,5 Тл перпендикулярно лініям індукції. Приймаючи заряд кожного іона рівним елементарному електричному заряду, визначити, наскільки відрізняться радіуси траєкторій іонів ізотопів в магнітному полі.

8.42. Однорядні іони ізотопів калію з відносними атомними масами 39 і 41 прискорюються різницею потенціалів 300 В і потрапляють у однорідне магнітне поле, перпендикулярне напрямку їх руху. Індукція магнітного поля 0,08 Тл. Знайти радіуси кривизни траєкторії цих іонів.

## 8. Рух заряджених частинок у електричному та магнітному полях

8.43. Два іони, що мають однаковий заряд і пройшли однаково прискорюючу різницю потенціалів, потрапляють у поперечне однорідне магнітне поле. Перший іон рухається вздовж дуги кола радіусом 5 см, другий – 2,5 см. Знайти відношення мас іонів.

8.44. Циклотрон дозволяє прискорювати протони до енергій 20 МеВ. Визначити радіус дуантів циклотрона, якщо магнітна індукція 2 Тл.

8.45. Частота генератора циклотрона 10 МГц. Знайти ефективну прискорюючу напругу на дуантах цього циклотрона, при якій відстань між сусідніми траєкторіями протонів із радіусом 50 см не менше 1 см.

8.46. Визначити питомий заряд частинок, прискорених у циклотроні в однорідному магнітному полі з індукцією 1,7 Тл при частоті прискорюючої напруги 25,9 МГц.

8.47. Внутрішній діаметр дуантів циклотрона 1,00 м. Індукція магнітного поля 1,20 Тл, прискорююча напруга 100 кВ. Знайти: а) максимальну енергію, до якої можуть бути прискорені у цьому циклотроні протони, і швидкість, яку набувають протони в кінці прискорення; б) час, протягом якого триває прискорення.

8.48. Максимальний радіус кривизни траєкторії заряджених частинок в циклотроні 0,5 м, магнітна індукція 1 Тл. Яку постійну різницю потенціалів мали б пройти протони, щоб одержати таке ж прискорення як у даному циклотроні?

8.49. Протони прискорюються в циклотроні в однорідному магнітному полі з індукцією 1,2 Тл. Максимальний радіус кривизни траєкторії протонів становить 40 см. Визначити: а) кінетичну енергію протонів у кінці прискорення; б) мінімальну частоту прискорюючої напруги, при якій протони прискорюються до енергій 20 МеВ.

8.50. Середнє значення індукції магнітного поля, створюваного електромагнітом бетатрона, зростає за час 1 мс приблизно за лінійним законом від нуля до 200 мТл. Радіус орбіти електронів 300 мм. Знайти: а) шлях, що проходять електрони за час прискорення до енергії 50 МеВ; б) швидкість прискорених до цієї енергії електронів.

8.51. У бетатроні магнітний потік всередині рівноважної орбіти радіуса 25 см зростає за час прискорення практично з

постійною швидкістю 25,0 Вб/с. При цьому електрони набувають енергію 25 МеВ. Знайти число обертів, які здійснюють електрони за час прискорення, і відповідне значення пройденого ними шляху.

8.52. Магнетрон являє собою вакуумний діод із електродами у вигляді коаксіальних циліндрів, внутрішній із яких є катодом, а зовнішній – анодом, поміщених у соленоїд із струмом, який створює однорідне магнітне поле вздовж осі циліндрів. Поступово збільшуючи індукцію магнітного поля соленоїда, добились того, що за анодної напруги 100 В при індукції магнітного поля  $6,7 \cdot 10^{-3}$  Тл струм у магнетроні став дорівнювати нулю. Визначити за цими даними питомий заряд електрона, якщо радіус анода 1 см.

8.53. З поверхні циліндричного провідника радіуса  $r$ , по якому тече струм  $I$ , вилітає електрон із початковою швидкістю  $v_0$  перпендикулярно до поверхні провідника. На яку максимальну відстань віддалиться електрон від осі провідника, перш ніж повернеться знову до поверхні провідника під дією магнітного поля струму  $I$ ?

8.54. У мас-спектрографі пучок однократно іонізованих іонів урану-235 та урану-238 з енергією 5 кеВ, потрапляє від джерела через щілину в однорідне магнітне поле, вектор індукції якого перпендикулярний до вектора швидкості іонів. У магнітному полі іони різних мас, здійснивши півоберта, потрапляють у приймач. Якою повинна бути індукція магнітного поля, щоб відстань між пучками іонів урану-235 та урану-238 на виході була не меншою 5 мм? Знайти час, необхідний для повного розділення 1мг природного урану, якщо загальний іонний струм, створюваний джерелом, становить 5 мА. Маси протона і нейтрона вважати однаковими і такими, що дорівнюють  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

8.55. Прискорювач протонів прискорює їх до енергії  $7,6 \cdot 10^{10}$  еВ. Визначити індукцію магнітного поля, яке утримує рух протонів вздовж кіл радіуса 236 м. Індукція магнітного поля перпендикулярна до площини орбіти.

## ЗМІННИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

### 9.1. Короткі теоретичні відомості

У цьому розділі розглядаються змінні струми, які є гармонічними коливаннями, тобто струми, сила яких змінюється за синусоїдальним законом:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (9.1)$$

де  $I$  – миттєве значення,  $I_0$  – амплітуда струму,  $\omega$  – циклічна частота,  $\omega t + \varphi_0$  – фаза коливань,  $\varphi_0$  – початкова фаза.

Особлива увага до синусоїдальних струмів пояснюється кількома причинами, серед яких, по-перше, та обставина, що всі технічні генератори змінного струму мають електрорушійну силу, близьку до синусоїдальної. По-друге, на прикладі цих струмів можна легко виявити основні особливості електричних коливань, оскільки теорія синусоїдальних струмів є найбільш простою.

#### А. Вимушені електричні коливання

Закон Ома для синусоїдального струму має вигляд:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \dot{\lambda} \dot{U}, \quad (9.2)$$

де  $\dot{I}$ ,  $\dot{U}$  – комплексні амплітуди струму і напруги;  $\dot{Z} = X + iY$ ,  $\dot{\lambda}$  – комплексні опір і провідність ділянки кола ( $\dot{\lambda} = \frac{1}{\dot{Z}}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ).

Для трьох основних елементів електричних кіл – резистора з опором  $R$ , котушки з індуктивністю  $L$  та конденсатора з ємністю  $C$  комплексні опори визначаються за такими виразами:

$$\dot{Z}_R = R, \quad \dot{Z}_L = i\omega L, \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (9.3)$$

При протіканні синусоїдального струму, заданого формулою (9.1), через опір  $R$ , індуктивність  $L$ , ємність  $C$  відповідні спади напруги на цих елементах задаватимуться виразами:

$$\begin{aligned}
 U_R &= IR = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_0) = U_{0R} \sin(\omega t + \varphi_0); \\
 U_L &= I_0 \omega L \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = U_{0L} \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \\
 U_C &= I_0 \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = U_{0C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{9.4}$$

Із наведених виразів витікає, що струм і напруга збігаються за фазою тільки на активному опорі, в той час як на індуктивності напруга випереджає струм на  $\frac{\pi}{2}$ , а на ємності відстає за фазою на  $\frac{\pi}{2}$ .

Гармонічні коливання можна представити як проекцію вектора, що обертається із кутовою швидкістю  $\omega$ , на вибраний напрям, наприклад вісь  $y$ . Векторні діаграми струмів і напруг на опорі (а), індуктивності (б) і ємності (в) для випадку  $\varphi_0 = 0$  представлені на рис. 9.1.

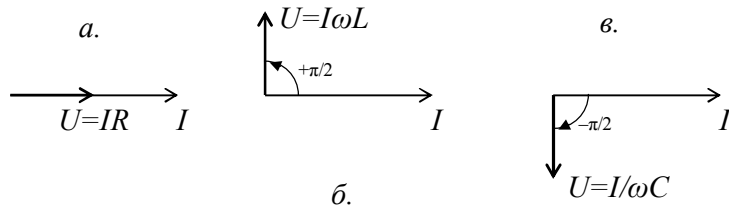


Рис. 9.1.

При послідовному з'єднанні елементів електричного кола додаються їх комплексні опори (імпеданси), а при паралельному – провідності (імпітанси). Опір ділянки кола визначається модулем комплексного опору. Зокрема, при послідовному з'єднанні резистора, котушки та конденсатора

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Діюче (ефективне) значення довільного змінного струму  $I_D$  визначається за його тепловою дією. Оскільки джоулеве тепло, яке виділяється на резисторі, пропорційне квадрату струму

(напруги), то у загальному випадку  $I_D$  та  $U_D$  обчислюються за такими виразами:

$$I_D^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt; \quad U_D^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt. \tag{9.5}$$

Зокрема, для синусоїдального змінного струму:

$$I_D = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_D = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \tag{9.6}$$

Активна потужність електричного кола для синусоїдального струму:

$$P = I_D U_D \cos \varphi, \tag{9.7}$$

де  $\varphi$  – зсув фаз між струмом та напругою.

### Б. Власні електричні коливання

В електричному колі, що містить послідовно з'єднані конденсатор із ємністю  $C$ , котушку з індуктивністю  $L$  та резистор із опором  $R$  (рис. 9.2), яке називається коливальним контуром, виникають згасаючі коливання струму, а отже, також і напруги на елементах кола і заряду на пластинах конденсатора.

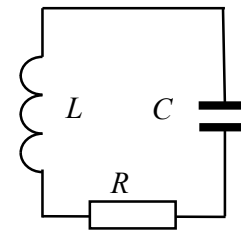


Рис. 9.2.

При цьому струм у коливальному контурі може бути представлений у вигляді:

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \tag{9.8}$$

де коефіцієнт згасання:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \tag{9.9}$$

циклічна частота коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \tag{9.10}$$

яка за умови

$$R \ll 2L \tag{9.11}$$

спрощується до вигляду

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{9.12}$$

і має назву власної частоти коливань. Період коливань  $T$  у контурі задається виразом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (9.13)$$

який називається формулою Томсона.

Окрім коефіцієнта згасання  $\beta$ , для кількісної характеристики зменшення амплітуди коливань у контурі використовують логарифмічний декремент згасання  $\delta$  та добротність  $Q$ :

$$\delta = \beta T, \quad (9.14)$$

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \quad (9.15)$$

При виконанні умови (9.11)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{L}}{R} = \frac{\rho}{R}, \quad (9.16)$$

де  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – хвильовий опір контура.

У коливальному контурі максимальний запас енергії електричного поля, зосередженого між пластинами конденсатора, дорівнює максимальному значенню енергії магнітного поля, створеного котушкою із струмом:

$$\frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2, \quad (9.17)$$

де  $I_m$  та  $U_m$  – максимальні значення струму у котушці  $L$  та напруги на конденсаторі  $C$ . Якщо коливальний контур містить плоский конденсатор і соленоїд, в яких електричне і магнітне поля однорідні, то, з урахуванням формул (3.4) та (7.13) для густини енергії електричного та магнітного полів, формула (9.17) набуває вигляду:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V_C = \mu\mu_0 H^2 V_L, \quad (9.18)$$

де  $E$  та  $H$  – напруженості електричного і магнітного полів,  $V_C$  – об'єм простору між пластинами плоского конденсатора і  $V_L$  – відповідно всередині соленоїда.

### В. Електромагнітні хвилі

Теоретично існування електромагнітних хвиль впливає із рівнянь Максвелла, які мають такий вигляд:

– в інтегральній формі:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L E_l dl &= -\frac{d}{dt} \oint_S B_n dS, \\ \oint_L H_l dl &= \oint_S (j_{np})_n dS + \oint_S \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)_n dS, \\ \oint_S D_n dS &= \oint_V \rho dV, \\ \oint_S B_n dS &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

– у диференціальній формі:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{D} &= \rho, \\ \text{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Ці рівняння доповнюють матеріальними рівняннями:

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \tilde{\mu}\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j}_{np} = \tilde{\lambda} \vec{E}. \quad (9.21)$$

У наведених рівняннях  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  – вектори напруженості,  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  – вектори індукції електричного та магнітного полів відповідно,  $\vec{j}_{np}$  – вектор густини струму провідності,  $\rho$  – об'ємна густина заряду,  $\tilde{\varepsilon}$  та  $\tilde{\mu}$  – тензори діелектричної та магнітної проникності,  $\tilde{\lambda}$  – тензор питомої електропровідності. Індекси  $l$  та  $n$  означають тангенціальні та нормальні складові відповідних векторів, а в інтегральних рівняннях інтегрування ведеться вздовж замкнених контурів  $L$  та по площі  $S$  замкнених поверхонь.

Зауважимо, що величина  $\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = j_{3M}$  має назву

густини струму зміщення, а вираз  $\oint_L E_l dl = -\frac{d}{dt} \oint_S B_n dS$  (на відміну від електростатики, де  $\oint_L E_l dl = 0$ , та постійних струмів, де  $\oint_L E_l dl = \sum \mathcal{E}_i$ ) свідчить про наявність вихрового електричного поля, що породжується змінним магнітним полем.

Із рівнянь Максвелла випливають рівняння електромагнітної хвилі, які у випадку непровідного середовища ( $\lambda=0$ ) мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} (9.22)$$

Для частинного випадку плоскої хвилі, яка розповсюджується вздовж осі  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} (9.23)$$

Тут  $v$  – швидкість електромагнітної хвилі,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (9.24)$$

Напруженості складових електричного і магнітного полів у плоскій електромагнітній хвилі, яка розповсюджується вздовж осі  $Ox$ , пов'язані співвідношенням:

$$E_z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H_y, \quad \text{для вакууму} \quad E_z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_y = 377 H_y. \quad (9.25)$$

Потік енергії електромагнітного поля задається вектором Умова-Пойтінга  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (9.26)$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (9.27)$$

Маса  $m_V$  та імпульс  $k_V$  одиниці об'єму електромагнітної хвилі:

$$m_V = \frac{w}{c^2}, \quad \vec{k}_V = \frac{\vec{P}}{c^2}. \quad (9.28)$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі визначається як середнє значення вектора Умова-Пойтінга:

$$G = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2, \quad (9.29)$$

де  $E_m$  та  $H_m$  – максимальні значення напруженостей електричного та магнітного полів у електромагнітній хвилі.

Тиск електромагнітної хвилі:

$$p = \frac{G}{c} (1+r) \cos \alpha = \bar{w} (1+r) \cos \alpha, \quad (9.30)$$

де  $\bar{w}$  – середнє значення об'ємної густини енергії,  $r$  – коефіцієнт відбивання,  $\alpha$  – кут падіння електромагнітної хвилі.

## 9.2. Методичні вказівки і поради

Кола змінного струму із зосередженими параметрами мають ряд особливостей, серед яких невиконання правил Кірхгофа, які широко використовуються при розрахунках у колах постійного струму, якщо їх характеризувати не миттєвими значеннями струмів і напруг, а їх діючими (ефективними) значеннями. Однак саме вони (діючі значення) вимірюються звичайними електровимірювальними приладами. Так, при паралельному з'єднанні елементів кола сума струмів у вітках кола не дорівнює струму у нерозгалуженій частині кола, а при послідовному сполученні

елементів у замкненому колі сума спадів напруг не дорівнює електрорушійній силі. Це зумовлено тим фактом, що величини струму та напруги, які визначають електричні процеси у колі, в цілому і на окремих її ділянках здійснюють гармонічні коливання, маючи різну фазу. Тому струми (і напруги) додаються за правилами додавання векторних величин із урахуванням кута (різниці фаз) між ними.

Розв'язувати задачі, в яких необхідно обчислити струми і напруги у колах змінного струму, можна аналітичним методом, тобто використовуючи поняття про комплексні опори, або застосовуючи графічний метод, тобто метод векторних діаграм струмів і напруг. При побудові останніх слід пам'ятати, що при послідовному сполученні елементів кола однаковим у них є струм, в той час як при паралельному з'єднанні – спад напруги.

Як вказувалось вище, при послідовному з'єднанні елементів електричного кола додаються їх комплексні опори (імпеданси), а при паралельному – провідності (іммітанси).

Так, при послідовному (рис. 9.3 а) з'єднанні активного опору  $R$  та індуктивності  $L$  комплексний опір

$$\tilde{Z}_1 = R + i\omega L,$$

модуль  $Z_1$  повного опору кола дорівнює:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

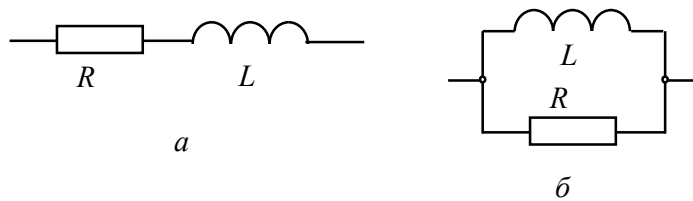


Рис. 9.3.

При паралельному з'єднанні цих же елементів (рис. 9.3 б) комплексна провідність  $\tilde{A}_2 = \frac{1}{\tilde{Z}_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}$ , а модуль  $Z_2$  повного

опору кола дорівнює  $Z_2 = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ .

Відповідні векторні діаграми струмів і напруг наведені на рис. 9.4.

Тангенс кута зсуву фаз між струмом та напругою, як видно із рис. 9.4, для цих випадків:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega L}{R}; \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{R}{\omega L}.$$

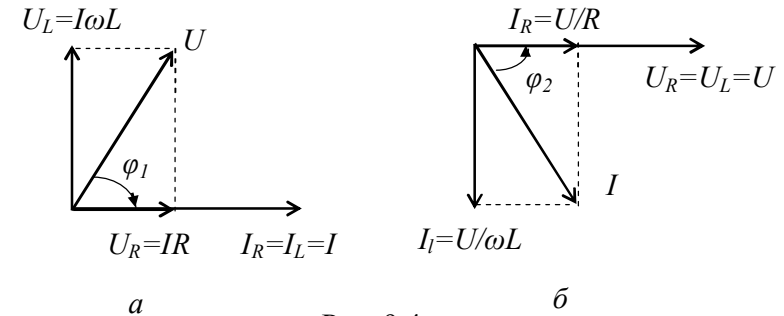


Рис. 9.4.

При послідовному (рис. 9.5 а) і паралельному (рис. 9.5 б) з'єднанні активного опору  $R$  та ємності  $C$  комплексний опір і провідність дорівнюють відповідно:

$$\tilde{Z}_3 = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C}, \quad \tilde{A}_4 = \frac{1}{\tilde{Z}_4} = \frac{1}{R} + i\omega C,$$

а модулі  $Z_3$  і  $Z_4$  повного опору кола становлять:

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad Z_4 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega RC)^2}}.$$

Векторні діаграми струмів і напруг для розглядуваних випадків наведені на рис. 9.6.

Із рис 9.6 очевидно, що тангенс кута зсуву фаз між струмом та напругою:

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{1}{\omega RC}, \quad \operatorname{tg}\varphi_4 = -\omega RC.$$



Рис. 9.5.

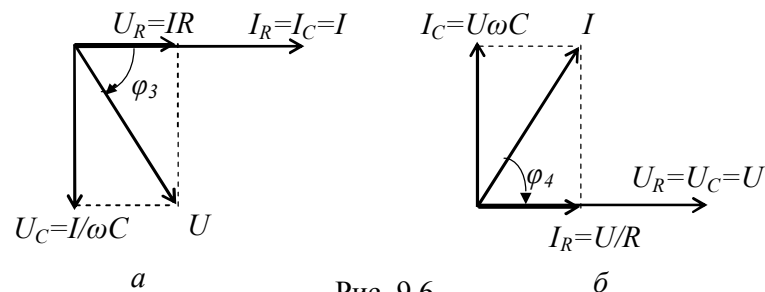


Рис. 9.6.

Методика розв'язування задач на електромагнітні коливання схожа з методами розв'язку задач на механічні коливання. В основі цієї аналогії лежить однакова структура рівнянь, які описують ці обидва види коливань. При цьому заряд відповідає зміщенню, струм – швидкості, омичний опір – коефіцієнту опору середовища, індуктивність – масі, ємність – величині, оберненій коефіцієнту квазіпружної сили.

### 9.3. Якісні задачі та запитання

9.1. У колі тече змінний струм  $I = I_0 \sin \omega t$ , де  $I_0 = 1 \text{ А}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ с}^{-1}$ . Зобразіть графічно залежність від часу струму і напруги у колі: а) з активним опором  $100 \text{ Ом}$ ; б) з ємністю  $30 \text{ мкФ}$ , в) з індуктивністю  $0,5 \text{ Гн}$ .

9.2. Як фізично пояснити той факт, що при збільшенні частоти змінного струму індуктивний опір котушки зростає, а ємнісний опір конденсатора зменшується?

9.3. Чи можна одержати напругу окремо на конденсаторі або котушці при їх послідовному з'єднанні більшу, ніж загальну напругу на обох елементах? Зобразіть якісну векторну діаграму для цього випадку.

9.4. Конденсатор та котушка з'єднані паралельно. Чи може струм у нерозгалуженій частині кола змінного струму бути меншим, ніж струм через конденсатор або котушку? Зобразіть якісну векторну діаграму для цього випадку.

9.5. Чи буде однаковим активний опір соленоїда із феромагнітним сердечником при включенні у коло постійного і змінного струму?

9.6. Порівняйте активний, індуктивний та повний опори двох однакових соленоїдів, один із яких містить залізне осердя, другий – без осердя.

9.7. Запишіть вирази для миттєвої потужності в колі змінного струму, яке містить а) тільки активний опір; б) тільки реактивний опір.

9.8. Як визначити активний опір ділянки кола змінного струму, якщо відомі струм у колі та потужність, що виділяється на ділянці кола?

9.9. Чому в контурі, що містить конденсатор ємністю  $C$  і котушку з індуктивністю  $L$ , струм не зникає у той момент часу, коли конденсатор розряджений повністю?

9.10. Чому згасають коливання у реальному коливальному контурі?

9.11. Чому важко виготовити коливальний контур із власною частотою коливань меншою ніж  $10^{-2} \text{ Гц}$  або більшою як  $10^8 \text{ Гц}$ ?

9.12. Який фізичний зміст коефіцієнта згасання, логарифмічного декременту згасання, добротності коливального контуру?

9.13. Як зміняться параметри коливального контуру, якщо у котушку індуктивності ввести а) залізне осердя, б) мідне осердя, в) осердя із діелектрика?

9.14. Наведіть експерименти, які доводять поперечність електромагнітних хвиль.

9.15. Поясніть, чому для збільшення дальності радіозв'язку вдвічі потужність передавача потрібно збільшити у чотири рази, а збільшення дальності дії радіолокатора у два рази вимагає збільшення потужності передавача у 16 раз. Вважати, що випромінювач передавача точковий і поглинанням радіохвиль середовищем можна знехтувати.

## 9.4. Приклади розв'язування задач

**Задача 9.16.** Змінний струм  $I = I_0 \sin \omega t$ , випрямлений діодом, який пропускає тільки одну половину періоду (рис. 9.7), проходить через розчин мідного купоросу протягом 10 хвилин. Якою є амплітуда струму, якщо на електроді виділилось 0,1 г міді?

**Розв'язання.** Кількість речовини, яка виділяється при електролізі, згідно з формулами (5.14) та (5.15) дорівнює:

$$m = \frac{I \mu}{F z} q = \frac{I \mu}{F z} \int_0^t I dt, \quad (a)$$

де  $I$  – миттєве значення струму.  
За один період змінного струму через електроліт проходить кількість електрики:

$$q_1 = \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_0 T}{\pi}.$$

За час  $t$  через електроліт пройде заряд, що дорівнює:

$$q = \frac{q_1 t}{T} = \frac{I_0 t}{\pi}. \quad (б)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (а) і (б), одержимо:

$$I_0 = \frac{m z F \pi}{\mu t}.$$

Враховуючи, що для міді  $\mu = 0,063$  кг/моль,  $z = 2$ , одержимо  $I_0 = 1,6$  А.

**Задача 9.17.** У коло змінного струму з частотою 50 Гц і діючим значенням напруги 127 В включені паралельно з'єднані конденсатор з ємністю 24 мкФ та дросель індуктивністю 0,6 Гн і активним опором 100 Ом. Знайти діюче значення струму в окремих вітках та у нерозгалуженій частині кола. Яка активна потужність виділяється в такому колі?

**Розв'язання.** Нарисуємо схему сполучення елементів кола і позначимо струми у вітках кола через  $I_1$ ,  $I_2$  а в нерозгалуженій частині кола – через  $I_3$  (рис. 9.8 а). Задачу можна розв'язати методом векторних діаграм та методом комплексних опорів.

*Метод векторних діаграм.*

При паралельному сполученні елементів кола на кожному із них напруга однакова, тому за основний напрям виберемо вектор амплітуди напруги. Амплітуда струму у конденсаторі випереджає амплітуду напруги на кут  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  і дорівнює:

$$I_{01} = U_0 \omega C = \sqrt{2} \cdot U_D \omega C \approx 1,34 \text{ А},$$

в той час як амплітуда струму у дроселі  $I_{02}$  відстає на кут  $\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L}{R} \approx 62^\circ$  (див. Методичні вказівки до цього розділу),

причому величина  $I_{02}$  дорівнює:

$$I_{02} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_D}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \approx 0,79 \text{ А}.$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 9.8.б). Виберемо масштаби для струмів і напруг, наприклад 100 В – 4 см, 1 А – 5 см. Тоді струму  $I_{01}$  буде відповідати відрізок довжиною 6,7 см, а струму  $I_{02}$  – відрізок довжиною 3,95 см. При акуратному виконанні рисунка можна виміряти довжину вектора  $I_{03}$ , який виявляється таким, що дорівнює 3,6 см, що, очевидно, відповідатиме струму 0,72 А. Враховуючи співвідношення між діючими та амплітудними значеннями струму  $I_0 = \sqrt{2} \cdot I_D$ , знаходимо, що  $I_{D1} \approx 0,96$  А,  $I_{D2} \approx 0,56$  А,  $I_{D3} \approx 0,52$  А.

Із векторної діаграми також видно, що

$$I_{03}^2 = I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right) = I_{01}^2 + I_{02}^2 - 2I_{01}I_{02} \sin \varphi_2.$$

Оскільки  $I_0 = \sqrt{2} \cdot I_D$ , таке ж рівняння можна записати для діючих значень:

$$I_{D3}^2 = I_{D1}^2 + I_{D2}^2 - 2I_{D1}I_{D2} \sin \varphi_2.$$



Обчислення  $I_{Д3}$  за цією формулою із урахуванням того, що  $I_{Д1}=0,96$  А,  $I_{Д2}=0,56$  А,  $\sin 62^\circ=0,88$ , дає результат  $I_{Д3}=0,515$  А.

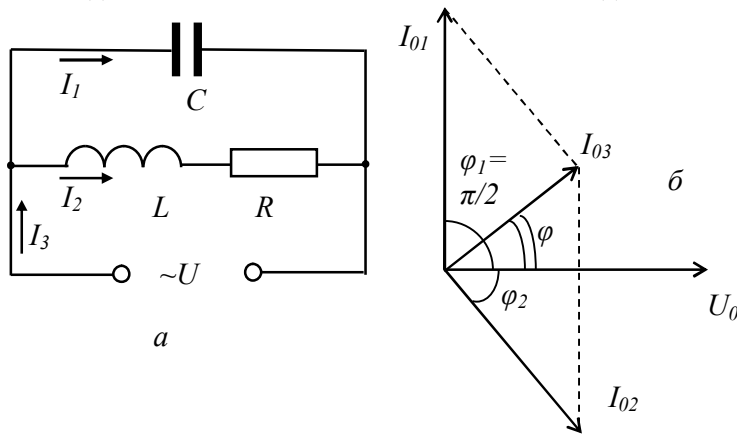


Рис.9.8.

*Метод комплексних опорів.*

Як видно із рисунка, досліджуване коло містить дві паралельно з'єднані вітки із комплексними опорами та відповідно їх модулями:

$$\tilde{Z}_1 = \frac{1}{i\omega C} = (-i132,5) \text{ Ом}, \quad Z_1 = 132,5 \text{ Ом};$$

$$\tilde{Z}_2 = R + i\omega L = (100 + i188,4) \text{ Ом}, \quad Z_2 = 213 \text{ Ом}.$$

Відповідно діючі значення струмів у вітках становитимуть:

$$I_{Д1} = \frac{U_{Д}}{Z_1} = 0,96 \text{ А}; \quad I_{Д2} = \frac{U_{Д}}{Z_2} = 0,562 \text{ А}.$$

Повний комплексний опір кола:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2} = (132 - i207) \text{ Ом},$$

його модуль  $Z = 246$  Ом, а струм у нерозгалуженій частині кола

$$I_{Д3} = \frac{U_{Д}}{Z} = 0,515 \text{ А}.$$

Активна потужність, що виділяється у колі, задається формулою (9.7), яка для нашого випадку матиме вигляд:

$$P = I_{Д3} U_{Д} \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  – кут між векторами  $U_0$  та  $I_{03}$ . Кут  $\varphi$  можна визначити за допомогою тригонометричних перетворень, однак, як видно із векторної діаграми,  $I_{03} \cos \varphi = I_{02} \cos \varphi_2$ . Тому

$$P = I_{Д2} U_{Д} \cos \varphi_2 = 37,7 \text{ Вт}.$$

Фізично це зрозуміло, адже тільки струм  $I_{02}$  має складову, яка збігається за фазою із напругою  $U_0$ .

**Задача 9.18.** Коливальний контур містить котушку із індуктивністю  $0,06$  мГн та активним опором  $2$  Ом і конденсатор ємністю  $0,04$  мкФ. Яку середню потужність повинен споживати контур, щоб у ньому підтримувалися незгасаючі коливання з амплітудним значенням напруги на конденсаторі  $1,5$  В?

**Розв'язання.** Якби активний опір котушки дорівнював нулю, то в контурі виникли б незгасаючі коливання із власною частотою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 0,65 \cdot 10^6 \text{ (с}^{-1}\text{)}. \quad (\text{a})$$

Повна енергія у контурі в цьому випадку залишається незмінною, відбувається лише неперервний перехід електричної енергії, зосередженої у конденсаторі, у магнітну, яка зосереджена у котушці, і навпаки. При наявності омичного опору котушки повна енергія неперервно зменшується за рахунок виділення на цьому опорі джоулевого тепла.

Для того, щоб підтримувати коливання незгасаючими, контур повинен одержувати енергію ззовні, причому середня споживана потужність  $N$  повинна дорівнювати відношенню кількості джоулевого тепла, яке виділяється на активному опорі за певний проміжок часу  $\Delta t$ , до величини цього проміжку:

$$N = Q_{Дж} / \Delta t.$$

Кількість виділеної теплоти

$$Q_{Дж} = \int_t^{t+\Delta t} I^2 R dt.$$

Характер незгасаючих коливань, а отже, і вибір проміжку  $\Delta t$  залежить від того, як проходить передача контуру енергії ззовні.

Допустимо, що незгасаючі коливання у контурі близькі до гармонічних, тобто напруга змінюється за гармонічним законом

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

тоді проміжок часу слід вибрати таким, що дорівнює періоду коливань:

$$\Delta t = T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Це припущення є обґрунтованим, оскільки коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{R}{2L} \approx 0,017 \cdot 10^6 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

набагато менший  $\omega_0$ .

Силу струму в котушці можна знайти за виразом:

$$I = \pm \frac{dq}{dt} = \pm C \frac{dU}{dt} = \pm CU_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Знак « $\leftrightarrow$ » означає, що додатний напрям струму відповідає зменшенню заряду на обкладках конденсатора.

Таким чином, середня споживана потужність

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q_{\text{Джс}}}{\Delta t} = \frac{C^2 U_0^2 \omega^2 R}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \\ &= \frac{C^2 U_0^2 \omega^2 R}{2T} \cdot \int_t^{t+T} (1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)) dt = \frac{1}{2} C^2 U_0^2 \omega^2 R. \end{aligned} \quad (\text{б})$$

Оскільки проведені вище оцінки показали, що  $\beta \ll \omega_0$ , то циклічна частота  $\omega$  може бути замінена власною частотою коливального контуру  $\omega_0$ , яка задана формулою (а). Тому підстановкою (а) у вираз (б) остаточно одержимо:

$$N = CU_0^2 \frac{R}{2L}. \quad (\text{в})$$

До такого ж результату приводять такі міркування. Потужність, яка виділяється на активному опорі:

$$N = I_D^2 R \quad (\text{г})$$

де  $I_D$  – діюче значення змінного струму.

Якщо максимальне (амплітудне) значення напруги на конденсаторі  $U_0$ , то максимальна енергія електричного поля

$$W_E = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Оскільки коливання у контурі незгасаючі, то енергія зарядженого конденсатора через чверть періоду перетворюється в енергію магнітного поля котушки із струмом:

$$W_M = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Прирівнюючи  $W_E$  та  $W_M$ , одержимо:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Діюче значення струму зв'язане з амплітудним співвідношенням

$$I_D = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

звідки

$$I_D = U_0 \sqrt{\frac{C}{2L}}. \quad (\text{д})$$

Підставляючи (д) у вираз (г) для середньої потужності, одержимо:  $N = I_D^2 R = CU_0^2 \frac{R}{2L}$ , що повністю збігається із одержаним вище виразом (в).

Підстановка числових значень дає  $N = 1,5$  мВт.

**Задача 9.19.** У коливальному контурі, індуктивність якого 10 мГн, значення струму зменшується у 10 разів за час що дорівнює одному повному періоду коливань. Визначити ємність та опір контуру, якщо частота коливань у ньому 100 кГц. Який додатковий опір треба включити у контур, щоб коливання у ньому не виникали?

**Розв'язання.** Струм у контурі у довільний момент часу визначається співвідношенням (9.8):

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (\text{а})$$

За умовою задачі через час  $T$

$$I_1 = I_0 e^{-\beta(t+T)} \cos(\omega(t+T) + \varphi) = \frac{I}{10}. \quad (б)$$

Поділимо ліві і праві частини рівняння (а) на рівняння (б):

$$\frac{I}{I_1} = \frac{I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}{I_0 e^{-\beta(t+T)} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} = 10. \quad (в)$$

Логарифмуючи вираз (в) та враховуючи, що згідно з (9.9)

$$\beta = \frac{R}{2L}, \text{ а } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ одержимо:}$$

$$\ln \frac{I}{I_1} = \frac{R}{2Lf},$$

звідки

$$R = 2Lf \ln \frac{I}{I_1}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо  $R \approx 4600$  Ом.

Для визначення ємності контуру використаємо вираз (9.10) для частоти коливань у ньому:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (г)$$

звідки із врахуванням (9.12)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = (2\pi f)^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2,$$

а

$$C = \frac{1}{L \left[ (2\pi f)^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \right]} = 225 \text{ (пФ)}. \quad (д)$$

Коливання у контурі не виникатимуть, коли  $\omega \rightarrow 0$ , а  $T \rightarrow \infty$ . Отже, загальний критичний опір контуру  $R_{KP} = R + R_D$

визначається із умови  $\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_{KP}}{2L}\right)^2} = 0$ , звідки

$$R_D = R_{KP} - R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R \approx 8400 \text{ (Ом)}.$$

**Задача 9.20.** Визначити енергію, яку переносить за 1,0 хвилин плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що розповсюджується у вакуумі, через площадку  $10,0 \text{ см}^2$ , розташовану перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі. Частота хвилі  $100 \text{ МГц}$ , амплітуда напруженості електричного поля хвилі  $1,0 \text{ мВ/м}$ .

**Р о з в' я з а н н я.** Енергія, яка переноситься електромагнітною хвилею за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну напрямку розповсюдження хвилі, визначається вектором Умова-Пойтінга (9.26):

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Враховуючи, що в електромагнітній хвилі  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , а також той факт, що хвиля синусоїдальна і в кожній її точці величини  $E$  і  $H$  змінюються в однакових фазах, для модуля вектора  $\vec{\Pi}$  одержимо:

$$\Pi = EH = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t. \quad (а)$$

Таким чином, величина  $\Pi$  є функцією часу і формула (а) виражає миттєве значення  $\Pi$ . Оскільки за означенням густина потоку енергії

$$\Pi = \frac{1}{S} \cdot \frac{dW}{dt},$$

тому енергія, яка переноситься через площадку  $S$  за час  $dt$ , із урахуванням виразу (а) дорівнює:

$$dW = \Pi S dt = E_0 H_0 S \sin^2(\omega t) dt = E_0 H_0 S \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) dt. \quad (б)$$

Повна енергія, яка переноситься за проміжок часу  $\tau$ :

$$W = \int_0^\tau \Pi S dt = E_0 H_0 S \int_0^\tau \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 S \left( \tau - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right). \quad (в)$$

Оскільки за умовою задачі  $\tau = 1,0 \text{ хв.} = 60 \text{ с}$ , а  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ , другим доданком у дужках виразу (в) можна знехтувати, отже одержимо:

$$W = \frac{1}{2} E_0 H_0 S \tau. \quad (г)$$

Ефективні значення величин  $E$  і  $H$  у електромагнітній хвилі пов'язані співвідношенням (9.25). Так само пов'язані між собою

амплітудні значення:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0,$$

отже

$$W = \frac{I}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \tau = 8,0 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)}.$$

**Задача 9.21.** Для передачі електромагнітної енергії використовується коаксіальний кабель. Довести, що енергія електромагнітної хвилі, яка проходить через поперечний переріз кабелю за одиницю часу, дорівнює енергії, яку за цей же час віддає генератор, що живить кабель.

**Р о з в' я з а н н я.** Коаксіальний кабель являє собою суцільний циліндричний провідник радіусом  $r_1$  та розташовану співвісно із провідником циліндричну провідну трубку радіусом  $r_2$ , проміжок між якими заповнений діелектричним, зазвичай немагнітним, матеріалом (рис. 9.9 а).

Енергія, яку передає генератор кабелю за одиницю часу, тобто потужність, за умови узгодження дорівнює:

$$N = IU, \quad (\text{а})$$

де  $I$  та  $U$  діючі (ефективні) значення струму та напруги відповідно.

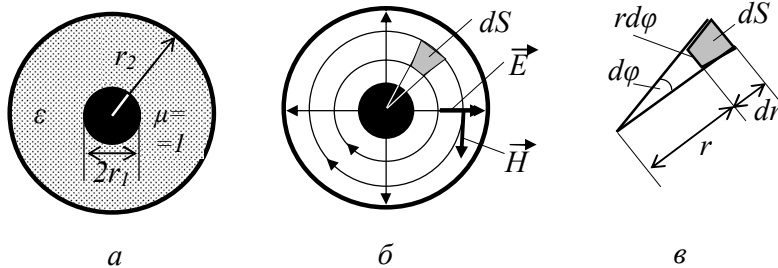


Рис. 9.9.

Енергію, яка розповсюджується вздовж кабелю, визначимо, використовуючи поняття потоку енергії електромагнітної хвилі, який задається вектором Умова-Пойтінга  $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ , де  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  – вектори напруженостей електричного та магнітного полів у електромагнітній хвилі.

Розподіл ліній напруженості  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  показано на рис. 9.9.б. Поза кабелем, як це впливає із теореми Остроградського-Гауса (1.9 б) і закону повного струму (6.14 а), ні електричного, ні магнітного поля немає.

У точці, яка розташована на відстані  $r$  від осі кабелю, ( $r_1 < r < r_2$ ) напруженості електричного і магнітного полів згідно з формулами (1.9 а) та (6.7 в) відповідно дорівнюють:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \quad \text{і} \quad H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (\text{б})$$

де  $\tau$  – лінійна густина заряду на внутрішньому провіднику кабелю,  $I$  – величина струму, який тече у внутрішньому провіднику.

Оскільки вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , як видно з рис. 9.9.б, взаємно перпендикулярні, то вектор  $\vec{\Pi}$  направлений паралельно осі кабелю, а його модуль, із урахуванням формул (б), дорівнює:

$$\Pi = \frac{\tau I}{4\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^2}. \quad (\text{в})$$

Якщо лінійна густина заряду  $\tau$  – це заряд одиниці довжини кабелю, то його величину можна отримати з виразу  $\tau l = UC$ , де  $C$  – ємність циліндричного конденсатора із радіусами циліндрів  $r_1$ ,  $r_2$  та довжиною  $l$ ,  $U$  – різниця потенціалів між його обкладками. Згідно з формулою (3.15 в) ємність циліндричного конденсатора  $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ , тому  $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ . Підставляючи цей вираз для  $\tau$  у

формулу (в) для модуля вектора  $\vec{\Pi}$ , одержимо:

$$\Pi = \frac{IU}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Енергія, яка проходить за одиницю часу через елемент площі поперечного перерізу кабелю, дорівнює добутку модуля вектора  $\vec{\Pi}$  на площу елемента  $dS = r dr d\phi$  (рис. 9.9.в):

$$dN = \frac{dW}{dt} = PdS = \frac{IU}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}} r dr d\varphi = \frac{IU}{2\pi r \ln \frac{r_2}{r_1}} dr d\varphi. \quad (г)$$

Для того щоб знайти потужність, яка передається по всьому поперечному перерізу кабелю, потрібно проінтегрувати вираз (г) по радіусу  $r$  у межах від  $r_1$  до  $r_2$  і куту  $\varphi$  від  $0$  до  $2\pi$ :

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} dN dr d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{IU}{2\pi r \ln \frac{r_2}{r_1}} dr d\varphi = IU.$$

Одержаний результат збігається із виразом (а), а, отже, потужність, яку віддає генератор, що живить кабель, дорівнює енергії електромагнітної хвилі, яка проходить через поперечний переріз кабелю за одиницю часу.

### 9.5. Задачі для аудиторної та самостійної роботи

9.22. Змінним струмом  $I = I_0 \sin \omega t$ , випрямленим за допомогою діода, який пропускає тільки одну половину періоду (рис. 9.7), заряджають акумулятор, ємність якого 20 А·год. Скільки часу триватиме процес зарядки, якщо амперметр, включений у коло, показує струм 1,5 А?

9.23. На рис. 9.10 показано графік пилоподібних коливань в електричному колі з періодом 1 с. Струм рівномірно зростає від нуля до максимального значення 0,1 А за час 0,8 с, а потім стрибком падає до нуля. Знайти середнє  $I_C$  і діюче значення  $I_D$  струму.

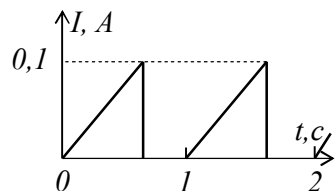


Рис.9.10.

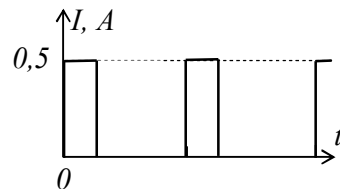


Рис.9.11.

9.24. На рис. 9.11 показано графік прямокутних імпульсів струму в електричному колі, період яких у 4 рази більший від їх

тривалості. Струм стрибкоподібно змінюється в межах від нуля до 0,5 А. Знайти середнє  $I_C$  і діюче значення  $I_D$  струму.

9.25. У коло змінного струму частотою 50 Гц включена котушка з індуктивністю 0,01 Гн і активним опором 2 Ом. Користуючись методом векторних діаграм, знайти: а) напругу, при якій амплітудне значення струму через котушку 0,5 А; б) зсув фаз між струмом та напругою.

9.26. У коло змінного струму з амплітудою напруги 440 В і частотою 50 Гц включені послідовно з'єднані конденсатор та лампочка розжарювання, на цоколі якої зазначено «55 Вт, 110 В». Яка ємність конденсатора, якщо лампочка світиться нормально? Який зсув фаз між струмом і напругою у колі? Побудуйте для цього випадку векторну діаграму.

9.27. Коло містить послідовно з'єднані резистор опором 20 Ом, котушку з індуктивністю 1,0 мГн і конденсатор ємністю 0,10 мкФ. У колі діє синусоїдальна е.р.с. Визначити частоту, при якій в колі настає резонанс. Знайти також діюче значення сили струму у колі та діючі значення спадів напруг на опорі, котушці та конденсаторі, якщо загальне діюче значення е.р.с. у колі 30 В.

9.28. У коло змінного струму з ефективною напругою 120 В включені послідовно котушка індуктивності з активним опором 10 Ом і конденсатор. На частоті 50 Гц індуктивний опір котушки 2 Ом, ємнісний опір конденсатора 500 Ом. Визначити струм у колі і напругу на його ділянках при резонансі, який досягається змінною частотою.

9.29. Який опір змінному струму з частотою 1000 Гц чинить реостат, якщо його активний опір 100 Ом, число витків 2000, довжина 50 см і площа витка  $15 \text{ см}^2$ ?

9.30. Для визначення індуктивності котушки використали метод амперметра-вольтметра. При цьому виявилось, що при вимірюванні на постійному струмі показання вольтметра 48 В, амперметра 8 А, а при вимірюванні на змінному струмі частотою 50 Гц відповідні покази приладів були 120 В та 12 А. Яка індуктивність котушки?

9.31. Плоский конденсатор заповнений нітробензолом, питомий опір якого  $10^7 \text{ Ом}\cdot\text{м}$  і діелектрична проникність 32. Знайти різницю фаз між струмом і напругою на конденсаторі при частоті: а) 50 Гц, б) 1000 Гц.

9.32. Визначити діелектричну проникність рідини, яка заповнює плоский конденсатор, якщо відомо, що її питомий опір  $10^9$  Ом·м і при переході від постійної до змінної напруги частотою 50 Гц з таким же ефективним значенням струм через конденсатор змінюється у 7 раз.

9.33. У коло змінного струму частотою 50 Гц включені послідовно з'єднані реостат із опором 1000 Ом та котушка, яка намотана мідним проводом з поперечним перерізом  $0,5 \text{ мм}^2$  на циліндричне залізне осердя. Котушка має 400 витків, її довжина 40 см і діаметр 4 см. При цьому зсув фаз між струмом і напругою на котушці  $30^\circ$ . Визначити ефективну магнітну проникність заліза.

9.34. Визначити втрати потужності у проводах від магістральної лінії електропередач до споживача при таких даних: споживана активна потужність 100 кВт; напруга у магістралі 220 В; опір підвідних проводів 0,01 Ом; зсув фаз між струмом і напругою  $37^\circ$ .

9.35. Плоский конденсатор заповнений слабопровідним діелектриком із діелектричною проникністю 2,8. При підключенні конденсатора у коло змінної напруги частотою 50 Гц на конденсаторі розсіюється деяка потужність, причому коефіцієнт потужності  $\cos\varphi = 0,1$ . Визначити питомий опір діелектрика.

9.36. Соленоїд з індуктивністю 7 мГн і активним опором 44 Ом підключили спочатку до джерела постійної напруги, а потім до генератора синусоїдальної напруги із таким же діючим значенням. При якій частоті генератора потужність, яка виділяється на соленоїді, буде у 5 раз меншою ніж, на постійному струмі.

9.37. Коло, що складається із послідовно з'єднаних конденсатора і котушки, підключене до джерела змінного струму. Змінюючи ємність конденсатора, досягли збільшення теплової потужності, що виділяється на котушці, у 1,7 раза. На скільки відсотків зміниться при цьому значення  $\cos\varphi$ ?

9.38. Для визначення потужності, яка виділяється змінним струмом у котушці, застосовують метод трьох вольтметрів, який полягає у тому, що послідовно з котушкою включають відомий опір  $R$  і приєднують у коло три вольтметри, за допомогою яких

вимірюють ефективні напруги на котушці –  $U_1$ , резисторі –  $U_2$  і між кінцями кола –  $U$ . Знайти теплову потужність, яка виділяється на котушці в описаному колі, що підключене до джерела змінного струму із діючою напругою 220 В, якщо опір відомого резистора 160 Ом, а діючі значення напруг на активному опорі і котушці відповідно 80 В і 180 В.

9.39. Для визначення потужності, яка виділяється змінним струмом у котушці, застосовують метод трьох амперметрів, який полягає у тому, що паралельно з котушкою включають відомий опір  $R$  і три амперметри, за допомогою яких вимірюють ефективні струми через котушку –  $I_1$ , через резистор –  $I_2$  та загальний струм у колі –  $I$ . Знайти теплову потужність, яка виділяється на котушці в описаному колі, якщо опір відомого резистора 25 Ом, а діючі значення струмів які течуть через котушку, резистор і загальний споживаний струм від джерела відповідно дорівнюють 0,50 та 0,60 А, та 0,90 А.

9.40. Резистор з активним опором  $R$  та котушка з індуктивністю  $L$  під'єднані паралельно до джерела змінного струму із діючим значенням напруги 127 В і частотою 50 Гц. Знайти значення  $R$  та  $L$ , якщо споживана потужність 404 Вт, а зсув фаз між струмом і напругою  $60^\circ$ .

9.41. Котушка з індуктивністю 1,0 мГн з'єднана з конденсатором змінної ємності. Якою повинна бути залежність ємності конденсатора від кута повороту  $\alpha$  головки конденсатора у межах від 0 до  $180^\circ$ , щоб частота електромагнітних коливань у контурі була лінійною функцією  $\alpha$ , якщо частота коливань у контурі повинна змінюватись від  $2 \cdot 10^5$  Гц до  $4 \cdot 10^6$  Гц?

9.42. У коливальному контурі (рис. 9.12) індуктивність котушки  $L = 2,5$  мГн, а ємності конденсаторів  $C_1 = 2,0$  мкФ,  $C_2 = 3,0$  мкФ. Конденсатори зарядили до напруги 180 В і замкнули ключ К. Знайти період власних коливань у контурі і амплітудне значення струму через індуктивність.

9.43. Електричне коло, схема якого зображена на рис. 9.13, має нехтовно малий активний опір. Лівий конденсатор зарядили до напруги  $U_0$ , а потім у момент часу  $t=0$  замкнули ключ К. Знайти залежність від часу напруги на обох конденсаторах.

9.44. Конденсатор із електроємністю  $C$ , простір між пластинами якого заповнений діелектриком із опором  $R$ ,

під'єднаний до котушки, індуктивність якої  $L$  (рис. 9.14). Знайти частоту згасаючих коливань у колі, якщо активним опором котушки можна знехтувати. Яка умова існування коливань у такому колі?

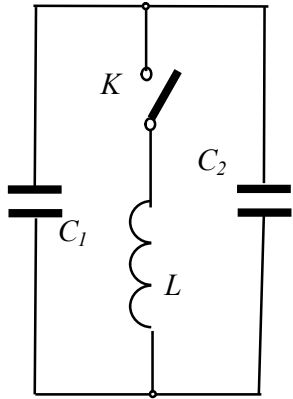


Рис. 9.12.

9.45. Котушка коливного контуру, індуктивність якої  $L$ , перебуває у постійному магнітному полі, так що сумарний магнітний потік через неї дорівнює  $\Phi$ . У момент часу  $t = 0$  магнітне поле виключили. Вважаючи, що час виключення магнітного поля набагато менший, ніж період коливань у контурі, знайти струм у контурі як функцію часу. Ємність конденсатора у контурі  $C$ , активним опором котушки і провідників можна знехтувати.

9.46. Ємність конденсатора коливного контура  $1,0$  мкФ, а індуктивність котушки  $10$  мГн. Із яким омичним опором необхідно включити у контур резистор, щоб зменшити резонансну частоту коливань на  $0,01\%$ ?

9.47. Батарея, яка містить два конденсатори електроємністю  $2$  мкФ кожний, розряджається на котушку, індуктивність якої  $1$  мГн та активний опір  $50$  Ом. Чи виникнуть при цьому коливання, якщо конденсатори з'єднані а) паралельно, б) послідовно?

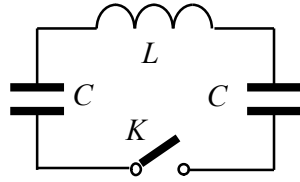


Рис. 9.13.

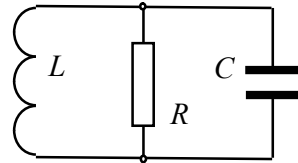


Рис. 9.14.

9.48. Як зміниться логарифмічний декремент згасання контуру, якщо, не змінюючи довжину котушки у контурі, збільшити число витків у  $k$  раз? При цьому діаметр витків залишається незмінним.

9.49. Знайти час, за який амплітуда коливань струму в контурі з добротністю  $5000$  зменшиться у  $2$  рази, якщо частота коливань у ньому  $2,2$  МГц.

9.50. У контурі, добротність якого  $50$  і власна частота коливань  $5,5$  кГц, збуджені згасаючі коливання. Через який час енергія, яка запасена у контурі, зменшиться у  $2$  рази?

9.51. Визначити логарифмічний декремент згасання контуру, електроємність конденсатора якого  $2,2$  нФ та індуктивність котушки  $100$  мкГн, якщо для підтримки незгасаючих коливань із максимальною амплітудою напруги  $0,9$  В у контур необхідно вводити потужність  $10$  мкВт.

9.52. Активний опір коливального контуру  $0,4$  Ом. Визначити середню потужність, яку споживає контур, якщо в ньому підтримуються незгасаючі гармонічні коливання з амплітудним значенням сили струму  $30$  мА.

9.53. Коливальний контур містить котушку з індуктивністю  $6$  мкГн і конденсатор з електроємністю  $1,2$  нФ. Для підтримки у контурі незгасаючих гармонічних коливань з амплітудним значенням напруги на конденсаторі  $2$  В у контур необхідно підводити середню потужність  $0,2$  мВт. Уважаючи згасання у контурі досить малим, визначити добротність контуру.

9.54. У коливальному контурі, який містить плоский конденсатор та індуктивність із нехтовно малим активним опором, проходять електромагнітні незгасаючі гармонічні коливання з енергією  $W$ . Пластини конденсатора повільно розсувають так, що частота коливань збільшується в  $n$  разів. Яку роботу треба при цьому виконати проти електричних сил?

9.55. Коливальний контур приймача містить котушку з індуктивністю  $1,00$  мГн та конденсатор, ємність якого може змінюватись у діапазоні від  $9,7$  до  $92$  пФ. На які довжини хвиль може бути налаштований контур? Активний опір контуру нехтовно малий.

9.56. Коливальний контур містить конденсатор ємністю  $0,2$  мкФ та котушку індуктивністю  $5,07$  мГн. При якому

логарифмічному декременті згасання різниці потенціалів на обкладках конденсатора через  $10^{-3}$  с зменшиться у 3 рази? Чому при цьому дорівнює опір контуру?

9.57. У скільки разів зменшиться різниці потенціалів на обкладках конденсатора за один період у контурі, який містить котушку індуктивністю 10 мГн і активним опором 2 Ом та конденсатор ємністю 0,405 мкФ?

9.58. У коливальному контурі з конденсатором, який має ємність  $C$ , та котушкою, індуктивність якої  $L$ , відбуваються вільні згасаючі коливання, при яких струм змінюється за законом  $I = I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Знайти напругу на конденсаторі як функцію часу.

9.59. У коливальному контурі відбуваються вільні згасаючі коливання, при яких струм змінюється за законом  $I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Знайти моменти часу, коли модуль струму в колі має максимальні значення.

9.60. Визначити силу струму зміщення між квадратними пластинками плоского повітряного конденсатора зі стороною 5 см, якщо напруженість електричного поля змінюється зі швидкістю 4,52 МВ/(м·с).

9.61. Струм в обмотці довгого прямого соленоїда із радіусом  $r$  змінюється так, що магнітне поле всередині соленоїда зростає з часом за законом  $B = A t^2$ , де  $A$  – деяка стала. Визначити густину струму зміщення як функцію відстані  $x$  від осі соленоїда.

9.62. Плоска електромагнітна хвиля, частота якої 10 МГц, розповсюджується у слабопровідному середовищі з питомою провідністю 10 мСм/м та з відносною діелектричною проникністю 9. Знайти відношення амплітуд густини струму провідності і струму зміщення.

9.63. Повітряний проміжок між зовнішнім та внутрішнім циліндрами коаксіального кабелю заповнили деяким немагнітним діелектриком, унаслідок чого швидкість поширення електромагнітної хвилі у кабелі зменшилась на 25%. Якою є діелектрична проникність матеріалу діелектрика?

9.64. Електромагнітна хвиля з частотою 3,0 МГц переходить із вакууму у немагнітне середовище із відносною діелектричною проникністю 4. Знайти зміну її довжини хвилі.

9.65. Радіолокатор виявив у морі підводний човен, за відбитим від нього електромагнітним сигналом, час запізнення

якого 36 мкс. Ураховуючи, що відносна діелектрична проникність води на частоті роботи локатора має значення 81, знайти відстань від локатора до підводного човна.

9.66. Дві тонкі довгі ізольовані металічні трубки, які розташовані паралельно, поміщені у трансформаторне масло і індуктивно зв'язані з високочастотним генератором. За частоти коливань 505 МГц у системі виникає стояча хвиля, відстань між пучностями якої 20 см. Приймаючи магнітну проникність масла такою, що дорівнює одиниці, визначити його відносну діелектричну проникність.

9.67. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару товщиною  $d$  із немагнітного матеріалу, відносна діелектрична проникність якого експоненціально падає від значення  $\epsilon_1$  на передній поверхні до  $\epsilon_2$  на задній. Знайти час розповсюдження даної фази хвилі через такий шар.

9.68. У мідному провіднику діаметром 2,5 мм і опором 1 Ом на кожні 305 м тече струм 25 А. Обчислити модулі векторів напруженостей електричного  $E$ , магнітного  $H$  полів та вектора Умова-Пойтінга  $P$  для точки на поверхні провідника.

9.69. Амплітуда напруженості електричного поля в електромагнітній хвилі, яка розповсюджується у вакуумі, становить 50 мВ/м. Визначити інтенсивність хвилі, тобто середню енергію, що переноситься хвилею через одиницю поверхні за одиницю часу.

9.70. Амплітуда напруженості магнітного поля в електромагнітній хвилі, яка розповсюджується у вакуумі, становить 5 мА/м. Визначити інтенсивність хвилі, тобто середню енергію, що переноситься хвилею через одиницю поверхні за 1 сек.

9.71. Плоска гармонічна електромагнітна хвиля з довжиною 100 м має амплітудне значення напруженості електричного поля  $5 \cdot 10^{-3}$  В/м. Яка енергія переноситься цією хвилею за 10 хвилин через площадку  $1 \text{ м}^2$ , яка розташована перпендикулярно до швидкості розповсюдження хвилі?

9.72. Який тиск чинить плоска електромагнітна хвиля на перешкоду, коефіцієнт відбивання якої дорівнює 0,9, що розташована під кутом  $30^\circ$  до напрямку розповсюдження хвилі, якщо амплітуда напруженості магнітного поля у хвилі  $3 \cdot 10^{-4}$  А/м?



9.73. У вакуумі розповсюджується плоска електромагнітна хвиля частотою 100 МГц та амплітудою вектора напруженості електричного поля 50 мВ/м. Знайти середнє значення модуля густини струму зміщення та середнє значення густини потоку енергії.

9.74. Куля радіусом 0,5 м розміщена у немагнітному середовищі з відносною діелектричною проникністю 4,0. У середовищі розповсюджується плоска електромагнітна хвиля, довжина якої набагато менша від радіуса кулі. Амплітуда вектора напруженості електричного поля 200 В/м. Яка енергія падає на кулю за 1 хвилину.

9.75. Плоский повітряний конденсатор, обкладки якого мають форму дисків із радіусом  $R = 6$  см, підключений до джерела змінної синусоїдальної напруги із кутовою частотою 1000 рад/с. Знайти відношення амплітудних значень магнітної та електричної енергії всередині конденсатора.

9.76. Змінний синусоїдальний струм з кутовою частотою 1000 рад/с тече в обмотці прямого довгого соленоїда, радіус поперечного перерізу якого  $R = 6$  см. Знайти відношення амплітудних значень магнітної та електричної енергії всередині соленоїда.

9.77. Хвильовий опір коаксіального кабелю (без втрат) становить 60 Ом, простір між його зовнішнім і внутрішнім циліндрами заповнений немагнітним матеріалом із відносною діелектричною проникністю 4,0. Знайти індуктивність та ємність одиниці довжини кабелю.

9.78. Враховуючи, що частинка у космічному просторі має форму кулі і повністю поглинає все світло, що падає на неї, знайти радіус частинки, при якому гравітаційне притягання Сонця буде зрівноважене силою тиску світла. Потужність світлового випромінювання Сонця становить  $4 \cdot 10^{26}$  Вт, густина частинки  $1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Маса Сонця  $1,99 \cdot 10^{30}$  кг, гравітаційна стала  $6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>·кг<sup>-2</sup>.

## ПРИКЛАДИ ЗАЛІКОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

## 10.1. Контрольна робота № 1

## Варіант № 1

1. Чотири позитивних заряди 7 нКл кожний розміщені у вершинах квадрата із стороною 2 мм. Визначити:

- напруженість та потенціал у центрі квадрата;
- негативний заряд, який потрібно розмістити в центрі квадрата, щоб система перебувала в рівновазі;
- роботу, яку потрібно виконати, щоб один заряд із вершини перемістити в центр;
- силу, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий.

2. Тонкий диск радіуса 10 см заряджений рівномірно зарядом 10 мкКл. Знайти:

- напруженість поля в довільній точці на осі диска як функцію відстані  $x$  від центра диска;
- точку на осі диска, напруженість поля в якій буде максимальною, мінімальною;
- потенціал поля на осі диска як функцію  $x$ ;
- роботу, яку потрібно виконати, щоб перемістити точковий заряд 0,25 нКл від поверхні диска на відстань 5 см вздовж осі диска. Побудувати графіки залежності  $E(x)$  та  $\varphi(x)$ .

3. Безпосередньо біля поверхні фарфору напруженість поля у повітрі дорівнює 200 В/см. Напрямок напруженості поля утворює з нормаллю до поверхні кут  $45^\circ$ . Діелектрична проникність фарфору 6. Визначити:

- кут між напрямом напруженості поля і нормаллю у фарфорі;
- розподіл напруженості  $E$  та індукції  $D$  поля у фарфорі;
- розподіл потенціалу  $\varphi$  у фарфорі;
- густину зв'язаних зарядів на межі фарфор-повітря.

4. Заряд  $q=5$  мкКл розподілений рівномірно в об'ємі кулі радіуса  $R=2$  см. Діелектрична проникність кулі дорівнює 4. Визначити:

- власну енергію кулі;
- відношення енергії  $W_1$  зосередженої всередині кулі до енергії  $W_2$  в прилеглому до кулі просторі. Якою буде енергія кулі, що заряджена поверхнево таким же зарядом?

## Варіант № 2

1. Два довгих прямих тонких провідники, що мають різномісній заряди з лінійною густиною  $5 \text{ мкКл/м}$ , розміщені паралельно на відстані  $5 \text{ см}$  один від одного. Визначити:

а) напруженість та потенціал поля в точках, що лежать у площині симетрії на відстані  $x$  від площини, в якій перебувають провідники;

б) напруженість та потенціал поля в точках, де відстань  $x=1 \text{ мм}, 5 \text{ см}, 2 \text{ м}$ ;

в) роботу, яку потрібно виконати, щоб заряд  $10 \text{ нКл}$  перемістити із центра симетрії між провідниками в точку  $x=5 \text{ см}$ .

2. Простір заповнено зарядом, об'ємна густина якого змінюється за законом  $\rho = \rho_0/r$ , де  $\rho_0$  – стала величина,  $r$  – відстань від початку координат. Знайти:

а) напруженість поля  $E$  як функцію  $r$ ; дослідити характер ліній напруженості (область поблизу початку координат виключити із розгляду);

б) потенціал поля  $\varphi$ , як функцію  $r$ ;

в) яка форма екіпотенціальних поверхонь?

3. Скляна товстостінна порожниста куля ( $\varepsilon=7$ ) заряджена з об'ємною густиною  $2 \text{ мкКл/м}^3$ . Внутрішній радіус кулі  $2 \text{ см}$ , зовнішній –  $6 \text{ см}$ . Знайти:

а) розподіл напруженості  $E$ , індукції  $D$  та потенціалу  $\varphi$  електричного поля у склі;

б) напруженість, індукцію та потенціал біля зовнішньої і внутрішньої поверхні та у центрі кулі.

4. Капілярний вольтметр складається із капілярної скляної трубки з металізованою напівпрозорою внутрішньою поверхнею, яка служить однією з обкладок циліндричного конденсатора. Другою обкладкою є тонка металічна дротина, коаксіальна з внутрішньою циліндричною поверхнею трубки. Визначити:

а) висоту підняття меніска води  $h$  вольтметра при прикладанні до обкладок напруги  $100 \text{ В}$ , якщо внутрішній діаметр капіляра  $0,5 \text{ мм}$ , діаметр дротини  $0,05 \text{ мм}$ ;

б) яку рідину потрібно використовувати, щоб прилад мав максимальну чутливість? Воду вважати непровідною рідиною із діелектричною проникністю  $81$ .

## 10.2. Контрольна робота № 2

## Варіант № 1

1. З нікелевої стрічки товщиною  $0,2 \text{ мм}$  і шириною  $3 \text{ мм}$  потрібно виготовити реостат на  $2,5 \text{ Ом}$ . Визначити:

а) якої довжини потрібно вяти стрічку;

б) яку максимальну напругу можна подати на цей реостат, якщо допустима густина струму для нікелю  $j = 0,2 \text{ А/мм}^2$ ;

в) яка при цьому потужність виділятиметься у реостаті?

2. Провідник питомим опором  $\rho$  має форму прямого зрізаного конуса, висота якого  $h$ , а радіуси верхньої і нижньої основ  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Визначити опір цього провідника між його основами.

3. Беручи до уваги, що кожному атому міді і вольфраму відповідає один вільний електрон, визначити для цих металів відношення:

а) концентрацій вільних електронів;

б) часів вільного пробігу електронів при кімнатній температурі;

в) середніх швидкостей упорядкованого руху електронів при однаковій густині струму.

4. Яку кількість електричної енергії треба витратити, щоб при електролізі розчину  $\text{AgNO}_3$  виділилось  $500 \text{ мг}$  срібла, якщо напруга на електродах електролітичної ванни становить  $4 \text{ В}$ ?

## Варіант № 2

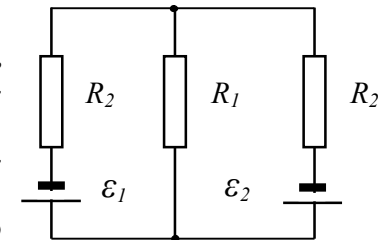
1. У схемі, показаній на рис.  $\varepsilon_1 = 20 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 25 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ , внутрішні опори джерел нехтовно малі. Визначити:

а) роботу, здійснену джерелами за час  $0,5 \text{ секунд}$ ;

б) повну кількість теплоти, що виділилася в колі за інтервал часу  $\Delta t = 0,5 \text{ секунд}$ ;

в) значення опору  $R_1$ , при якому теплова потужність, що виділяється цьому в резисторі, максимальна.

2. Постійна часу розряду плоского масляного конденсатора через деякий опір дорівнює  $\tau_1$ . Після того як масло конденсатора



відсиріло, постійна часу розряду через той же опір виявилася такою, що дорівнює  $\tau_2$ . Визначити питомий опір  $\rho$  масла, яке відсиріло, якщо його діелектрична проникність  $\epsilon$  не змінилася.

3. У скільки разів зміниться опір напівпровідника при зменшенні температури вдвічі, якщо початкова температура 400 К, а ширина забороненої зони 0,7 еВ?

4. При опроміненні посудини з повітрям рентгенівськими променями в кожному кубічному сантиметрі його об'єму щосекунди іонізується  $10^{10}$  молекул. В результаті рекомбінації в посудині встановлюється рівновага, причому в  $1\text{см}^3$  міститься  $10^8$  іонів кожного знака. Рухливість позитивних іонів повітря  $1,37\text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , негативних –  $1,91\text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Знайти:

- електропровідність повітря;
- коефіцієнт рекомбінації;
- у скільки разів зміниться електропровідність через 1 с після припинення дії іонізатора.

### 10.3. Контрольна робота № 3

#### Варіант № 1

1. В однорідному магнітному полі з індукцією 0,05 Тл розміщений плоский контур, площа якого 20 см. Визначити магнітний потік, що пронизує контур, якщо його площина утворює кут  $30^\circ$  з лініями індукції. Який магнітний момент діє на плоский контур і яка його енергія?

2. Замкнений тороїд із залізним осердям має 400 витків дроту, намотаного в один шар. Діаметр тороїда 0,25 м. Сила струму в обмотці тороїда 0,5 та 1,5 А. Визначити при цих струмах:

- напруженість та індукцію магнітного поля всередині тороїда;
- магнітну проникність і намагніченість залізного осердя.

3. Металічний диск радіусом 25 см обертається з постійною кутовою швидкістю 130 рад/с навколо його осі. Знайти різницю потенціалів між центром і ободом диска, якщо:

- зовнішнє магнітне поле відсутнє;
- зовнішнє магнітне поле з індукцією 5,0 мТл перпендикулярне до площини диска.

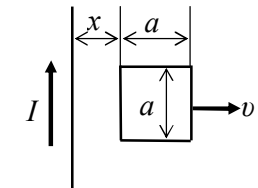
4. До котушки з індуктивністю 50 мГн і омичним опором 180 Ом миттєво прикладена різниця потенціалів 50 В. Яка буде швидкість наростання струму в колі через 0,001 с?

#### Варіант № 2

1. Виток, по якому проходить струм силою 10 А, вільно встановлений в однорідному магнітному полі з індукцією 0,05 Тл. Діаметр витка 20 см. Визначити роботу, яку потрібно виконати, щоб повернути виток на кут  $90^\circ$  відносно осі, яка збігається з діаметром витка. Як зміниться відповідь, якщо кут повороту дорівнює  $180^\circ$ . Який магнітний момент витка із струмом?

2. На постійний магніт, що має форму циліндра довжиною 15 см, намотали рівномірно 300 витків тонкого дроту. При пропусканні по ньому струму 3,0 А поле поза магнітом зникло. Знайти коерцитивну силу матеріалу магніту.

3. Довгий прямий провідник із струмом  $I$  та квадратна рамка із стороною  $a$  лежать в одній площині (див. рис.). Рамка рухається вправо із сталою швидкістю  $v$ . Знайти:



- потік індукції магнітного поля через площину рамки;

- е.р.с. індукції у рамці як функцію відстані  $x$ .

4. Струм  $I$  тече у довгому прямому провіднику круглого поперечного перерізу з магнітною проникністю  $\mu$ . Знайти енергію магнітного поля всередині провідника на одиницю його довжини.

### 10.4. Самостійна робота № 4

#### Варіант № 1

1. У плоский конденсатор паралельно його пластинам влітає пучок електронів, які прискорені різницею потенціалів 1500 В. Електрони потрапляють у конденсатор точно посередині між пластинами, відстань між якими 1 см. Визначити:

- швидкість електронів, що влітають у конденсатор;
- мінімальну різницю потенціалів на пластинах конденсатора, при якій електрони не вилітають із конденсатора, якщо довжина пластин 5 см.;

- який при цьому модуль швидкості електронів.

2. Коливальний контур містить конденсатор ємністю 0,2 мкФ та котушку індуктивністю 5,07 мГн. Визначити:

а) логарифмічний декремент загасання, при якому різниця потенціалів на обкладках конденсатора через  $10^{-3}$  с зменшиться у 3 рази;

б) чому при цьому дорівнює опір контуру.

3. Плоска гармонічна електромагнітна хвиля з довжиною 100 м має амплітудне значення напруженості електричного поля  $5 \cdot 10^{-5}$  В/м. Яка енергія переноситься цією хвилею за 10 хвилин через площадку  $1 \text{ м}^2$ , що розташована перпендикулярно до швидкості розповсюдження хвилі?

Варіант № 2

1. Електрон, що має швидкість  $10^7$  м/с, влітає в однорідне магнітне поле під кутом  $60^\circ$  до напрямку поля і починає рухатися вздовж спіралі. Напруженість магнітного поля  $1,5$  кА/м.

а) Записати вираз для сили Лоренца у векторній формі та за компонентами.

б) Визначити радіус і крок спіралі.

в) Розв'язати задачу із урахуванням того, що електрон є релятивістською частинкою.

2. У коло змінного струму з ефективною напругою 120 В включені послідовно з'єднані котушка індуктивності із активним опором 10 Ом і конденсатор. На частоті 50 Гц індуктивний опір котушки 2 Ом, ємнісний опір конденсатора 500 Ом.

а) Обчислити модуль комплексного опору кола.

б) Побудувати у масштабі векторну діаграму та визначити струм у колі.

в) Визначити струм у колі і напругу на його ділянках при резонансі, який досягається зміною частоти.

3. Який тиск чинить плоска електромагнітна хвиля на перешкоду з коефіцієнтом відбивання 0,9, розташовану під кутом  $30^\circ$  до напрямку розповсюдження хвилі, якщо амплітуда напруженості магнітного поля у хвилі  $3 \cdot 10^{-4}$  А/м?

ВІДПОВІДІ

- 1.18. а) 0; потенц. 23,4 кВ,  
б) 3,9 мН;  
в) -2,9 нКл;  
г) 33 мкДж;  
д) 68 мкДж.

- 1.19. а) 0 В/м, 17,8 кВ;  
б) 2,1 мН;  
в) -6,7 нКл;  
г) 0,125 мДж;  
д) 34 мДж.

- 1.20. а) 540 кВ/м, 189 кВ;  
б) 22 мДж.

- 1.21. а)  $2,3 \cdot 10^{39}$ ;  
б)  $5,1 \cdot 10^{12}$  В/м, 27,2 В;  
в)  $43,5 \cdot 10^{-19}$  Дж  $\approx$  27,2 еВ.

- 1.22. а) 0,9 Н;  
б) 0,5 Н.

- 1.23. а)  $E(x) = 2\tau r_0 / \pi \epsilon_0 (r_0^2 + 4x^2)$ ,  
 $\varphi(x) = 0$ ;  
б) 7,2 МН/Кл,  
1,44 МН/Кл,  
1,1 кН/Кл.

- 1.24. 19 Н.

- 1.25. 1,06 мкКл/м<sup>2</sup>,  
0,6 мДж.

- 1.26. а) 115,5 мкН;  
б) 5 мкДж, 7,7 мкДж;  
в) 0,28 мН;  
г) 0,3 мН.

$$1.27. \quad E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)\right)^{3/2}} + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)^{3/2}} \right],$$

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times$$

$$\left[ \frac{l}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)\right)^{1/2}} + \frac{l}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)^{1/2}} \right].$$

$$1.28. \quad E(x) = \frac{q}{2\epsilon_0} \times \left[ \frac{\left(\frac{l}{2} + x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)\right)^{1/2}} + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)^{1/2}} \right],$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \times$$

$$\left[ \sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} \right].$$

$$1.29. q = \frac{16\pi^3 v_0^2 \varepsilon_0 m R^3}{e},$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r,$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2.$$

1.30. а) 2 кН/Кл, 0 кН/Кл;  
б) 60 В,  $\varphi_0 = \text{const}$ .

1.31. а) 21 нКл/м;  
б) 110 нКл/м<sup>2</sup>,  
33 нКл/м<sup>2</sup>;  
в) 12,6 кН/Кл,  
5,8 кН/Кл,  
3,8 кН/Кл.

1.32. 0,6 мН,  $2,78 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

1.33.  $q = l\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg} = 33$  нКл.

1.34. 192 В·м, 70 кВ/м,  
2,1 кВ.

1.35. 4 кВ·м, 0,82 кВ·м,  
825 В·м,  $1,8 \cdot 10^5$  В/м,  
9 кВ.

1.36. 1,7 кВ·м, 360 кВ/м,  
18 кВ.

$$1.37. N = \frac{qa}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right),$$

$$N_1 = \frac{q}{\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$N_2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \right).$$

1.38. а)  $\vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j})$ ;

б)  $\vec{E} = -a(y\vec{i} + x\vec{j})$ ;

в)  $\vec{E} = -2(ax\vec{i} + ay\vec{j} + bz\vec{k})$ .

1.39. а)  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$ ;

б)  $\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r$ .

1.40.  $\rho = -6\varepsilon_0 a$ ,  $E = -2ar$ .

1.41.  $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a r^2} [1 - \exp(-ar^3)]$ ,

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r, \quad \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a r^2}.$$

1.42.  $\varphi = -y(ax + bz) + \text{const}$ .

1.43. 1600 кг/м<sup>3</sup>.

1.44.

$$E_r = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[ \frac{l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} \right],$$

$$E_{\perp} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[ \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_1^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right],$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

1.45.  $E(z) = \frac{R\tau z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$ ,

$$\varphi(z) = \frac{R\tau}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}},$$

$E_M$  при  $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ,  $\varphi_M$  при  $z = 0$ ,

$E_M = 0,86$  В/м,  $\varphi_M = 0,11$  В.

1.46.  $E = \sigma/4\varepsilon_0$ ,  $\varphi = \sigma R/2\varepsilon_0$ .

1.47.  $\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{q \cdot q_0}{8\pi^2 \varepsilon_0 r^3}$ .

2.16.  $q = 4l\sqrt{\pi\varepsilon_0 kx}$ .

2.17.  $F_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \left( \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$ ,

$$\frac{F_1}{F_2} = 1,47.$$

2.18.

а)  $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}$ ,

б)  $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{5h} (5 - \sqrt{5})$ ,

в)  $A_1 = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{h}$ ,

$$A_{\infty} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{h}.$$

2.19.  $F = \frac{3P^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4}$ ,

$$A = \frac{P^2}{16\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right).$$

2.20.  $F_1 = \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \frac{q_1^2}{r^2}$ ,

$$F_2 = \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \frac{q_2^2}{r^2}$$

2.21. а)  $\pm \sqrt[3]{2} \cdot r$ ;

б)  $\sqrt[3]{3/2} \cdot r$ .

2.22. а)  $\frac{F}{l} = \frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$ ;

б)  $\sigma(x) = \frac{a\tau}{\pi(a^2 + x^2)}$ .

2.23. а)  $\sigma_0 = \frac{\tau}{2\pi d}$ ;

б)  $\sigma(r) = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{d^2 + r^2}}$ .

2.24.  $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2}}$ .

2.25.  $\sigma_0 = 40$  нКл/м<sup>2</sup>,  
 $\sigma_1 = 14$  нКл/м<sup>2</sup>,  
 $-q = 293$  нКл.

2.26.  $E = \frac{1}{5\sqrt{5}} \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$ ,  
 $\varphi = \frac{(5 - \sqrt{5})}{10} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{d}$ .

2.27.  $\sigma_0 = 0,95 \cdot \text{мкКл/м}^2$ .

2.28. а)  $\vec{P} = 2\sqrt{2}aq$ ;

б)  $E_A = \frac{2\sqrt{5} \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 10^{-3}$ ,

$$E_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi_A = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot 10^{-2},$$

$$\varphi_B = \frac{\sqrt{2} \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot 10^{-2}.$$

2.29. а) Квадруполь;

б) 0;

$$в) \varphi_A = \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$\varphi_B = -\frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_C = 0.$$

2.30. а)  $P = \frac{7}{3}qa,$

$$б) E_A = \frac{7qa}{6\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_A = \frac{7qa}{12\pi\epsilon_0 r^2},$$

$$E_B = \frac{7qa}{12\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_B = 0;$$

$$E_C = \frac{7\sqrt{5} \cdot qa}{48\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_C = \frac{7\sqrt{2} \cdot qa}{48\pi\epsilon_0 r^2}.$$

2.31. а)  $\vec{P} = 0;$ 

$$б) \varphi_3 = \frac{qR^2}{8\pi\epsilon_0 |x|^3};$$

$$\vec{E} = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4} \cdot \frac{x}{|x|}.$$

2.32.  $F = \frac{3\beta P_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 l^7}.$

2.33.  $x_0 = \pm R / \sqrt{2}.$

2.34. а)  $E_1 = 81 \text{ В/м},$   
 $E_2 = 94 \text{ В/м},$   
 $D_1 = D_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2;$

$$б) \sigma'_1 = 4,3 \cdot \text{нКл/м}^2,$$

$$\sigma'_2 = 4,2 \cdot \text{нКл/м}^2;$$

$$в) U_1 = 0,04 \text{ В},$$

$$U_2 = 0,14 \text{ В}.$$

2.35. а)  $E_1 = 1 \text{ кВ/м},$   
 $E_2 = 3,67 \text{ кВ/м},$

$$D_1 = 52 \text{ нКл/м}^2,$$

$$D_2 = 32 \text{ нКл/м}^2;$$

$$б) \varphi_1 = 54,5 \text{ В},$$

$$\varphi_2 = 257 \text{ В};$$

$$в) \sigma'_B = 53 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\sigma'_3 = 37 \text{ нКл/м}^2.$$

2.36. Заповнення щілини  
паралельно до пластин

$$а) E_1 = 2\epsilon E_0 / (\epsilon + 1),$$

$$E_2 = 2E_0 / (\epsilon + 1),$$

$$D_1 = D_2 = 2\epsilon D_0 / (\epsilon + 1);$$

$$б) E_1 = E_0, \quad E_2 = E_0 / \epsilon,$$

$$D_1 = D_2 = D_0.$$

Заповнення щілини  
перпендикулярно до пластин

$$а) E_1 = E_2 = E,$$

$$D_1 = D_0, \quad D_2 = \epsilon D_0;$$

$$б) E_1 = E_2 = 2E_0 / (\epsilon + 1),$$

$$D_1 = 2D_0 / (\epsilon + 1),$$

$$D_2 = 2\epsilon D_0 / (\epsilon + 1).$$

2.37.  $\sigma' = 3,5 \text{ нКл/м}^2,$   
 $q' = 27,8 \text{ пКл}.$

2.38.  $\sigma' = 115 \text{ мкКл/м}^2.$

2.39.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{3I_0}{(\epsilon + 2)P_e E_0}}.$

2.40.

$$N = n_0 P / (\epsilon - 1) \epsilon_0 E =$$

$$2,93 \cdot 10^3,$$

де  $n_0$  – концентрація  
молекул.2.41. а)  $E_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad \varphi = \text{const};$ 

$$б) E_2 = 470 \text{ В/м},$$

$$D_2 = 8,3 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\varphi_2 = \text{const} + 5,15 \text{ В};$$

$$в) E_3 = 150 \text{ В/м},$$

$$D_3 = 1,3 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\varphi_3 = \text{const} + 28,74 \text{ В}.$$

2.42. а)  $E_1 = 0, \quad D_1 = 0,$   
 $\varphi_1 = \text{const} = \varphi(R_1);$ 

$$б) E_2 = -1,7 \text{ кВ/м},$$

$$D_2 = 45 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\varphi_2 = \text{const} + 50 \text{ В};$$

$$в) E_3 = 0,225 \text{ кВ/м},$$

$$D_2 = 2 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\varphi_3 = \text{const} + 45 \text{ В};$$

$$г) \sigma_B = 66 \text{ нКл/м}^2;$$

$$\sigma_3 = -10,6 \text{ нКл/м}^2.$$

2.43.  $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right),$

$$D(r) = \frac{\rho}{3} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right),$$

$$\varphi(r) = C - \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3R_1^2}{2} \right)$$

$$\varphi(0) = \varphi(R_1) = C.$$

$$\varphi(R_2) - \varphi(R_1) = 10,7 \text{ В}$$

$$E(R_1) = 0, \quad D(R_1) = 0;$$

$$E(R_2) = 0,466 \text{ кВ/м},$$

$$D(R_2) = 28,9 \text{ нКл/м}^2,$$

2.44.  $E_B = \frac{2E_0}{\epsilon + 1},$

$$E_3 = \frac{2\epsilon E_0}{\epsilon + 1};$$

$$D_B = D_3 = \frac{2\epsilon\epsilon_0 E_0}{\epsilon + 1}.$$

2.45.  $\rho' = -\alpha.$ 2.46. а) При  $|x| < d$ 

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon\epsilon_0},$$

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon\epsilon_0} \quad D(x) = \rho x;$$

При  $|x| > d$ 

$$\varphi(x) = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} |x| + \frac{\rho d^2}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{2\epsilon} \right),$$

$$E(x) = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \frac{x}{|x|}, \quad D(x) = \rho d \frac{x}{|x|}$$

$$б) \sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} d\rho, \quad \rho' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho.$$

2.47.  $I = S\gamma \Delta T / \Delta t = 1 \text{ мкА}.$

2.48.  $U = \frac{dfh}{\epsilon\epsilon_0} = 5,65 \text{ (В)}.$

2.49.  $0,025 \text{ нм}.$

2.50. а)  $1700 \text{ (} 50^\circ\text{C)},$   
 $500 \text{ (} 56^\circ\text{C)};$

$$б) 47,5^\circ\text{C};$$

$$в) 4,3 \cdot 10^3.$$

3.15. 0,18 Дж.

3.16.  $W = -\frac{2q^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

3.17. а)  $W = \frac{(\sqrt{2} + 4)q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ ;

б)  $W = -\frac{(4 - \sqrt{2})q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ ;

в)  $W = -\frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

3.18. а)  $W = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$ ;

б)  $W = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}$ .

3.19.  $W = W_1 + W_2 + W_{12} =$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right).$$

3.20. а)  $W = \frac{q^2}{40\pi\epsilon_0 R}$ ;

б)  $\frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{5}$ .

3.21.  $W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) =$   
= 27 мДж.

3.22. 3 Дж/м<sup>3</sup>.

3.23. 1,5 мДж, 3 мДж, 5,5 мДж.

3.24. 2 Дж/м<sup>3</sup>; 10 мкДж.

3.25. а) 2,9 Па;

б) 29 мН.

3.26. а) 56,5 нДж, 28,3 мкН;

б) 8,67 мкДж, 4,34 мН.

3.27.  $h = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0 U^2}{2\rho g d^2} \approx 4,1 \text{ см.}$

3.28.  $h = \frac{4(\epsilon - 1)\epsilon_0 U^2}{\rho g (D_1^2 - D_2^2) \ln \frac{D_1}{D_2}} \approx$   
 $\approx 5 \text{ мм.}$

3.29.  $M = \frac{N\epsilon_0 R^2 U^2}{4d} = 51 \text{ мкН.}$

3.30.  $\frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ .

3.31. 33,4 · 10<sup>6</sup> м/с

3.32. 0,23 мкЛ.

3.33. а) 36 мДж;

б) 29 мДж,

в) 72 мДж.

3.34. 94 · 10<sup>12</sup> Дж/м<sup>3</sup>,  
4,6 · 10<sup>-18</sup> Дж.3.35. C<sub>1</sub>=8,85 пФ, U=560 кВ,  
C<sub>2</sub>=4,425 пФ, (зменш.  
у 2 рази),  
W<sub>1</sub>=1,41 Дж, W<sub>2</sub>=2,82 Дж.3.36. C = 5,55 пФ,  
 $\varphi = 1,8 \cdot 10^6 \text{ В,}$   
C<sub>1</sub> = 8,3 пФ,  
C<sub>2</sub> = 227 пФ,  
C<sub>3</sub> = 94 пФ.3.37. C<sub>n</sub>/l = 9,6 пФ/м,  
C<sub>m</sub>/l = 21,1 пФ/м,  
W/l = 48 · н Дж/м,  
A/l = 10 нДж/м.3.38. C<sub>1</sub> = 18,75 пФ,  
W = 23,45 · нДж,  
A = 1,25 нДж.

3.39. 0,6 мкКл, 1,5 мДж.

3.40. 2,9 В,

0,24 пФ, 1,03 пДж.

3.41. 0,64 нФ.

3.42. C<sub>1</sub>/C<sub>2</sub>=3.

3.43. 0,6 мкКл.

3.44. 1082 В,

0,92 мкФ.

3.45. а)  $C = \frac{\epsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)}$ ;

б)  $\sigma' = \frac{\epsilon_0 U (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$ .

3.46.  $C = \frac{\epsilon_0 S (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ .

3.47. а)  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_0}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$ ,

б)  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 \kappa}{\ln \frac{b}{a}}$ .

3.48. а)  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_0 l}{b \ln \frac{a}{b}}$ ,

б)  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 \kappa l}{(b - a)}$ .

3.49.  $\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2b - a}{a}}$ ,

при  $b \gg a$ ,  $\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2b}{a}}$ .

3.50.  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 a (2l - a)}{2(l - a)}$ ,

при  $l \gg a$ ,  $C \approx 4\pi\epsilon_0 a$ .

3.52. 150 В.

3.53.  $R_1 = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,707 R$ .

3.54. 0,12 Дж.

3.55. а) A<sub>E</sub> = -ΔW = 5,3 мкДж;

б) ΔW = 31,5 мкДж;

A<sub>E</sub> = -31,5 мкДж.

3.56.

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{a} \right).$$

3.57.  $10^{15}$  м/с<sup>2</sup>,  $5 \cdot 10^6$  м/с.

3.58. 225 м/с.

3.59.  $0,19 \cdot 10^6$  м/с.

4.16. 48 Кл, 12А.

4.17. 0,26Кл.

4.18.  $70 \cdot 10^6$  А/м<sup>2</sup> = 70 А/мм<sup>2</sup>.

4.19. 1,1 нА.

4.20. 14,3 м, 3 В.

4.21. 0,17%.

4.22. 57 Ом.

$$4.23. R = \frac{\rho h}{\pi r_1 r_2}.$$

$$4.24. R \approx \frac{l}{\pi \lambda a} \ln \frac{b}{r_0}.$$

$$4.25. R = \frac{2l}{\lambda \pi (D-d)} \ln \frac{D}{d}.$$

$$4.26. R = \frac{l}{\pi \lambda \delta} \left( \frac{l}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

$$4.27. \lambda(r) = \frac{A}{r^4}.$$

$$4.28. \lambda(r) = \frac{A}{r}.$$

$$4.29. R = \frac{l}{2\pi r \lambda},$$

$$R = \frac{l}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1 \lambda_1} + \frac{1}{r_2 \lambda_2} \right).$$

4.30. а) – нелінійна залежність від 0 до 33 Ом;

б) – лінійна залежність від 50 до 150 Ом.

4.31.  $R_{AB} = 0,8r$ ;  $R_{CD} = r$ .

4.32. 2,5 Ом.

4.33. 30 Ом, 120 В.

4.34. 34,4В, 1,43 Ом.

4.35. 2 А, 5,8 см.

4.36. а)  $R_{III} = 0,1$  Ом;б)  $R_D = 90$  Ом.

4.37. 23 лампи.

4.38. Через 49 хв.

4.39. 2480 Дж.

4.40. 1,5 Ом; 2,5 А; 18,75 Вт.

4.41. 18 Вт.

4.42. 3,75Вт, неможливо.

4.43. 25%.

4.44. 0,75 Ом.

4.45. 20 Ом, 1,25 Вт.

4.46.  $t_{носл} = 30$  хв., $t_{на} = 7$  хв.

4.47. 0,35 Ом.

4.48. 0,33 А, 0,67 А, 1 А.

4.49. 0,5 Ом,  
0,33 Ом,  
0,5 Ом.4.50. 1,58А,  
3,65 А.4.51. а)  $A_1 = -0,5$  Дж,  
 $A_2 = 3,75$  Дж,  
 $Q = 3,25$  Дж;б)  $R_X = 6$  Ом.4.52.  $I_1 = 1,02$  А,  
 $I_2 = -0,9$  А,  
 $I_3 = 0,12$  А.

4.53. 45 с; 63 В, 63%.

4.54. 44,3 В.

$$4.55. \rho = \frac{\tau_1 \tau_2}{\epsilon \epsilon_0 (\tau_1 - \tau_2)}.$$

$$4.56. \epsilon = \frac{C(r_2 - r_1)}{4\pi \epsilon_0 r_1 r_2},$$

$$\rho = \frac{4\pi r_1 r_2}{C(r_1 - r_2)} \cdot \frac{t}{\ln 2}.$$

5.27.  $\sim 10^7$  м.

5.28. а) 1,35;

б) 2,42;

в) 0,74.

5.29.  $1,26 \cdot 10^{19}$  с<sup>-1</sup>,  
 $8,6 \cdot 10^{-2}$  В/м.5.30.  $0,75 \cdot 10^{-6}$  м/с,  
 $5,67 \cdot 10^{-8}$  Н·с.

5.31. У сурмі в 3,6 раза більше.

5.32. 70 мкА.

5.33. 1015°С.

5.34.  $\approx 1300$  км/с.5.35. В – охолоджується,  
С – нагрівається.5.36.  $8,1 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>.5.37.  $2,7 \cdot 10^{-6}$  В.5.38. 0,65 м<sup>2</sup>/(В·с).

5.39. 2/7.

5.40. 0,78 Кл.

5.41. 0,0062 К<sup>-1</sup>.5.42.  $\approx 23,4$  мА.

5.43. 2000 °С.

5.44. До 68 °С.

5.45. Збільшиться у  $2,5 \cdot 10^4$  раз.

5.46. 2,9 раза.

5.47. 115 В.

5.48.  $0,98 \cdot 10^6$  м/с,  
 $3,94 \cdot 10^{16}$  с<sup>-1</sup>.

5.49. 0,24 В.

5.50. Збільшити до 8,054 В.

5.51. 0,17 А.

5.52. 3,1 еВ.

5.53. Збільшиться на 30%.

5.54.  $3,98 \cdot 10^{-19}$  Дж.

5.55. Ні.



- 5.56. 16,6 В/м, 0,04 В.  
 5.57. 3.  
 5.58. Амперметр показує менше на 0,035 А.  
 5.59. 149 год,  $53,6 \cdot 10^9$  Дж.  
 5.60. 1,65 мг.  
 5.61. 15·мкм.  
 5.62. 4000 год.  
 5.63.  $8,15 \cdot 10^{-4}$  кг,  $3,06 \cdot 10^6$  Кл/кг.  
 5.64. 40 Ом.  
 5.65.  $1,78 \cdot 10^3$  Дж.  
 5.66.  $20 \cdot 10^6$  Дж.  
 5.67. 0,092,  $5,5 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>.  
 5.68. 0,62.  
 5.69. 0,74 В.  
 5.70.  $2,5 \cdot 10^7$  см<sup>-3</sup>с<sup>-1</sup>.  
 5.71.  $2,3 \cdot 10^8$  см<sup>-3</sup>.  
 5.72. 0,05 с.  
 5.73.  $\approx 4 \cdot 10^5$  с  $\approx 110$  год.  
 5.74.  $\approx 4,8$  мкА/км<sup>2</sup>.  
 5.75.  $\approx 0,8 \cdot 10^6$ .  
 5.76.  $790$  см<sup>-3</sup>;  $690$  см<sup>-3</sup>.  
 над океаном  
 14 м та 20 м;  
 над сушею  
 1,78 м та 2,48 м.
- 5.77. 62 с та 0,23 с.  
 5.78.  $10^{-6}$  см<sup>3</sup>/с,  
 зменшиться у 99 раз.  
 5.79.  $1,46 \cdot 10^{-6}$  В.  
 5.80.  $\approx 2$  см.  
 5.81.  $n = \sqrt{\frac{\Delta n_0}{\gamma}} \cdot th \frac{t}{\tau}$ ,  
 де  $\tau = \frac{l}{\sqrt{\Delta n_0 \gamma}}$ .  
 5.82.  $\approx 2200$  км/с.  
 5.83. Так.  
 5.84.  $1,9 \cdot 10^5$  К,  
 $3,8 \cdot 10^5$  К.  
 5.85. 12,2 км/с,  
 2100 км/с.  
 6.22. а) 24 А/м;  
 б) 2,4 А/м;  
 в) 33,3 мкН/м,  
 3,5 мкДж/м.  
 6.23. а) 39,8 А/м;  
 б) 154 А/м.  
 6.24. а) 0,12 мТл;  
 б) 6 мкТл;  
 в) 0,18 мТл.  
 6.25.  $B_0 = \frac{\mu_0 n^2}{2\pi R} tg \frac{\pi}{n}$ ,  
 $B_0(n \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0^2}{2R}$ ;

- 6.26. 0,18 мкТл.  
 6.27. Збільшиться у 4 рази.  
 6.28.  $H = \frac{NIln \frac{R_1}{R_2}}{2(R_1 - R_2)}$   
 6.29.  

$$H = \frac{P_M}{2\pi} \left[ \left( 2R^2 + x^2 - 2xR \right)^{-\frac{3}{2}} \right] +$$

$$+ \frac{P_M}{2\pi} \left[ \left( 2R^2 + x^2 - 2xR \right)^{-\frac{3}{2}} \right],$$
 де  $P_M = I\pi R^2$ .  
 6.30.  $d = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi mg}$ .  
 6.31. а) 13,5кА/м;  
 б) 6,75кА/м.  
 6.32. а) 0,87·мкВб;  
 б) 0,25 мНм;  
 в) 0,685·мДж;  
 г) -0,174 мДж.  
 6.33. 0,25 мВб.  
 6.34.  $\frac{1}{8} \mu_0 q \omega L^2$   
 6.35. а)  $\frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$ ;  
 б)  $\frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}$ .
- 6.36. 7 А.  
 6.37. 54,6 мА.  
 6.38. 1,1 нН·м/кут.град.  
 6.39. а) 12,25°,  
 б) 0,47мкА.  
 6.40. 1,73 мТл.  
 6.41. 60 А.  
 6.42. 3,7 Ом.  
 6.43. 13,5°.  
 6.44. 0,99983, -0,51 А/м.  
 6.45. а) 0,7 мВб;  
 б) 0,126 А.  
 6.46. 140.  
 6.47. 318 А/м, 0,04 Тл;  
 $-3,15 \cdot 10^3$  А/м;  
 $\vec{H}$  та  $\vec{B}$  антипаралельні.  
 6.48.  $0,22 \cdot 10^{-10}$  м.  
 6.49.  $2,03 \cdot 10^{-6}$ .  
 6.50. 182 А/м.  
 6.51.  $F \approx \frac{\chi SB^2}{2\mu_0}$ .  
 6.52. а)  $9,25 \cdot 10^{-24}$  А·м<sup>2</sup>;  
 б)  $1,05 \cdot 10^{-34}$  кг·м<sup>2</sup>/с;  
 в) 87,8 Гкл/кг.  
 6.53. 2,26 нТл.  
 6.54. 4,25 мА/м.  
 6.55. 4000 А/м.

$$6.56. \text{ а) } x_M = \frac{l}{\sqrt{4a}} = 5 \text{ см,}$$

$$\text{ б) } 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

$$6.57. \approx 0,25 \text{ кА/м,}$$

$$\approx 1,4 \text{ Тл,}$$

$$\approx 4,4 \cdot 10^3.$$

$$6.58. \approx 0,03 \text{ кА/м, } \approx 1,5 \cdot 10^3.$$

$$7.21. 6 \text{ мкВ.}$$

$$7.22. \text{ а) } 3 \text{ нВ;}$$

$$\text{ б) } 20 \text{ мВ.}$$

$$7.23. 0,73 \cdot \text{ А.}$$

$$7.24. \varepsilon = \frac{\mu_0 l \nu I}{2\pi x}.$$

$$7.25. \varepsilon = \frac{\mu_0 a^2 \nu I}{2\pi x(x+a)}.$$

$$7.26. \text{ Якщо у випадку а) } Q, \text{ то у}$$

$$\text{ б) } 1,14 Q.$$

$$7.27. Q = \frac{\alpha^2 \tau^3}{3R}.$$

$$7.28. \varepsilon = B_0 N S \omega \cos 2\omega t.$$

$$7.29. 31,4 \text{ мВ, } 20\pi.$$

$$7.30. \varepsilon = \frac{1}{3} \pi R^2 N \omega B_0.$$

$$7.31. 0,053 \text{ Кл.}$$

$$7.32. 3 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

$$7.33. 1200 \text{ витків.}$$

$$7.34. \approx 100 \text{ м.}$$

$$7.35. 18 \text{ мкГн.}$$

$$7.36. M = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} =$$

$$= 0,34 \text{ мкГн/м.}$$

$$7.37. 5,0 \text{ мГн.}$$

$$7.38. M = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} N h l n \frac{b}{a}.$$

$$7.39. 0,6 \text{ Гн.}$$

$$7.40. 1,6 \text{ мГн.}$$

$$7.41. \text{ а) } 1,5 \text{ мГн;}$$

$$\text{ б) } 5 \text{ мГн.}$$

$$7.42. 15 \text{ А.}$$

$$7.43. 2 \text{ А.}$$

$$7.44. 4 \text{ мс.}$$

$$7.45. \text{ Підвищиться на } \sim 0,73 \text{ К.}$$

$$7.46. \sim 0,01 \dots 0,03 \text{ с.}$$

$$7.47. 27 \text{ А/с.}$$

$$7.48. 237 \text{ Вт, } 390 \text{ Вт.}$$

$$7.50. U(t) = (10t - 0,5) \text{ В.}$$

$$7.51. \approx 840 \text{ Дж/м}^3.$$

$$7.52. W_l = \frac{\mu\mu_0 I^2}{16\pi}.$$

$$7.53. 0,5 \text{ Дж.}$$

$$7.54. 1,1 \cdot 10^{-15}.$$

$$7.55. N_1 = 880; N_2 = 144.$$

$$7.56. N_2 = 44.$$

$$7.57. 110 \text{ В; } 40 \text{ А;}$$

$$98\%.$$

$$7.58. 38 \text{ В; } 132 \text{ витка,}$$

$$1,0 \text{ А; } 95\%.$$

$$8.17. 8,0 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

$$8.18. 10^{-17} \text{ Кл.}$$

$$8.19. \text{ а) } 5,9 \cdot 10^6 \text{ м/с;}$$

$$\text{ б) } 1,64 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$8.20. 120 \text{ В.}$$

$$8.21. 12 \cdot 10^6 \text{ В, } 9,38 \cdot 10^8 \text{ В.}$$

$$8.22. 16 \text{ км/с.}$$

$$8.23. \operatorname{tg} \alpha = k l^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{32eU^3}}.$$

$$8.24. 1,56 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

$$8.25. 1,76 \cdot 10^{10} \text{ рад/с.}$$

$$8.26. a_n = \operatorname{const} = 1,76 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2,$$

$$a_t = 0.$$

$$8.27. 4,5 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$8.28. 4 \cdot 10^{-24} \text{ Н.}$$

$$8.29. 4,24 \cdot 10^{-16} \text{ Н.}$$

$$8.30. 1,61 \text{ м.}$$

$$8.31. 21 \text{ мм.}$$

$$8.32. 0,632 \text{ пА} \cdot \text{м}^2.$$

$$8.33. \text{ а) } 7,3 \text{ см;}$$

$$\text{ б) } 0,41 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/Тл;}$$

$$\text{ в) } 2,41 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг.}$$

$$8.34. \text{ а) } 9,47 \text{ мм;}$$

$$\text{ б) } 2,62 \text{ мм.}$$

$$8.35. 1,17 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$8.36. 30^\circ.$$

$$8.37. 2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$8.38. 2 \cdot 10^{-8} \text{ Н.}$$

$$8.39. 7,85 \text{ см.}$$

$$8.40. 3,62 \cdot 10^{-14} \text{ Н.}$$

$$8.41. \text{ На } 0,917 \text{ мм.}$$

$$8.42. 0,195 \text{ м, } 0,200 \text{ м.}$$

$$8.43. 1:4.$$

$$8.44. R > 32,3 \text{ см.}$$

$$8.45. 100 \text{ кВ.}$$

$$8.46. 9,57 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг.}$$

$$8.47. \text{ а) } 17,2 \text{ МеВ,}$$

$$5,8 \cdot 10^7 \text{ м/с;}$$

$$\text{ б) } 4,7 \text{ мкс.}$$

$$8.48. 12 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

$$8.49. \text{ а) } 11 \text{ МеВ;}$$

$$\text{ б) } 24,6 \text{ МГц.}$$

$$8.50. \text{ а) } 1700 \text{ км;}$$

$$\text{ б) } 0,9983 \text{ с.}$$

$$8.51. 5,1 \cdot 10^6 \text{ об., } 8 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

$$8.52. 1,78 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

$$8.53. R_{\max} = r \exp\left(\frac{2\pi\nu_0 m}{\mu_0 e I}\right)$$

$$8.54. 0,4 \text{ Тл, } \approx 82 \text{ с.}$$

$$8.55. 1,07 \text{ Тл.}$$

$$9.22. 15 \text{ год.}$$

9.23.  $I_C=0,04$  А,  $I_D=0,052$  А.

9.24.  $I_C=0,125$  А,  
 $I_D=0,25$  А.

9.25. а)  $U=1,33$  В;  
б)  $\varphi=57,7^\circ$ .

9.26.  $5,45$  мкФ,  $70^\circ$ .

9.27.  $\omega_{PE3} = 1,0 \cdot 10^5$  рад/с,  
 $I_{PE3}=1,5$  А,  $U_R=30$  В,  
 $U_L=150$  В,  $U_C=150$  В.

9.28.  $I=12$  А,  
 $U_C=380$  В;  
 $U_{RL}=400$  В.

9.29.  $137,5$  Ом.

9.30.  $0,025$  Гн.

9.31. а)  $42^\circ$ ;  
б)  $87^\circ$ .

9.32.  $2,5$ .

9.33.  $2840$ .

9.34.  $3,2$  кВт.

9.35.  $1,27 \cdot 10^9$  Ом·м.

9.36.  $2$  кГц.

9.37. Збільшиться на  $30\%$ .

9.38.  $(U^2 - U_1^2 - U_2^2) / 2R = 30$  Вт.

9.39.  $(I^2 - I_1^2 - I_2^2) R / 2 = 2,5$  Вт.

9.40.  $40$  Ом,  
 $0,074$  Гн.

9.41.  $C = \frac{634}{(1 + 0,106\alpha)^2}$  пФ.

9.42.  $0,7$  мс,  $8$  А.

9.43.  $U = \frac{U_0}{2}(1 \pm \cos \omega t)$ ;  
 $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ , (знак плюс –  
для лівого конденсатора,  
мінус – для правого).

9.44.  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$ ,  
 $R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

9.45.  $I = \frac{\hat{O}}{L} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ .

9.46.  $2,82$  Ом.

9.47. а) Ні ( $\beta > \omega_0$ );  
б) так ( $\beta < \omega_0$ ),

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_{3AG}}}$ .

9.48. Не зміниться.

9.49.  $0,5$  мс.

9.50.  $1,0$  мс.

9.51.  $0,016$ .

9.52.  $180$  мВт.

9.53.  $141$ .

9.54.  $A = W(n^2 - 1)$ .

9.55. Від  $186$  до  $570$  м.

9.56.  $0,22$ ,  
 $11,1$  Ом.

9.57.  $1,04$ .

9.58.  $U = U_0 \times \sin(\omega t + \varphi)$ ,  
де  $U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} \times e^{-\beta t}$ ,  
причому  
 $\varphi = \arctg \frac{\omega}{\beta}$ .

При  $\beta \ll \omega$

$U = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\beta t}$ .

9.59.  $t_n = \frac{\left[ \arctg\left(\frac{\beta}{\omega}\right) + \pi n \right]}{\omega}$ ,  
де  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

9.60.  $0,1$  мкА.

9.61.  $j_{3M} = A \varepsilon_0 x$ .

9.62.  $2$ .

9.63.  $1,78$ .

9.64.  $-50$  м.

9.65.  $600$  м.

9.66.  $2,2$ .

9.67.  $t = \frac{2d(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{c \cdot \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$ .

9.68.  $E = 0,082$  В/м,  
 $H = 3,2 \cdot 10^3$  А/м,  
 $\Pi = 262$  Вт/м<sup>2</sup>.

9.69.  $3,32$  мкВт/м<sup>2</sup>.

9.70.  $4,71$  мВт/м<sup>2</sup>.

9.71.  $20$  мкДж.

9.72.  $5,37 \cdot 10^{-14}$  Н/м<sup>2</sup>.

9.73.  $0,18$  мА/м<sup>2</sup>,  
 $3,3$  мкВт/м<sup>2</sup>.

9.74.  $5$  кДж.

9.75.  $W_M/W_E = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 / 8 =$   
 $= 5,0 \cdot 10^{-15}$ .

9.76.  $W_E/W_M = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 / 8 =$   
 $= 5,0 \cdot 10^{-15}$ .

9.77.  $0,40$  мкГн/м;  
 $0,11$  нФ/м.

9.78.  $\sim 0,6$  мкм.

ДОВІДКОВІ ТАБЛИЦІ

Таблиця 1. Універсальні фізичні величини

УНІВЕРСАЛЬНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ	ПОЗНАЧЕННЯ	ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ
Швидкість світла у вакуумі	$c$	$2,998 \cdot 10^8$ м/с
Електрична стала	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0$	$1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Стала Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стала Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Стала Фарадея	$F$	$0,965 \cdot 10^9$ Кл/моль
Елементарний заряд	$e$	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	$m_e$	$9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Питомий заряд електрона	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Маса спокою протона	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Питомий заряд протона	$e/m_p$	$0,959 \cdot 10^8$ Кл/кг
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Магнітний момент електрона	$\mu_e$	$9,3 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерний магнетон	$\mu_n$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Класичний радіус електрона	$r_e$	$2,82 \cdot 10^{-15}$ м
Борівський радіус	$a_0$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ м

Таблиця 2. Діелектрична проникність речовин  $\epsilon$

РЕЧОВИНА	$\epsilon$	РЕЧОВИНА	$\epsilon$
1. Азот (рідина)	1,445	12. Кварц	3,75
2. Азот (газ)	1,0006	13. Кисень (газ)	1,0005
3. Ацетон	20,74	14. Мармур	6,6–8,5
4. Вода (рідина)	81	15. Масло трансформ.	2,2
5. Вода (пара)	1,0126	16. Парафін	2
6. Віск	7,8	17. Плексиглас	3,5
7. Гас	2	18. Скло	5,6 – 10
8. Гетинакс	7 – 8	19. Слюда	7,5
9. Ебоніт	2,6–4	20. Спирт метиловий	33,1
10. Каучук	2,3	21. Текстоліт	8
11. Кераміка: ZrNiO <sub>4</sub>	28 – 30	22. Фарфор	6
TiO <sub>2</sub>	78 – 88	23. Бурштин (янтар)	2,8
CaTiO <sub>3</sub>	150 – 160		

Довідкові таблиці

Таблиця 3. Питомий опір ( $\rho$ ) та температурний коефіцієнт опору ( $\alpha$ )

РЕЧОВИНА	$\rho$ , нОм·м	$\alpha$ , мК <sup>-1</sup>	РЕЧОВИНА	$\rho$ , Ом·м
1. Алюміній	28	3,8	18. Бакеліт	$2 \cdot 10^{14}$
2. Вольфрам	55	5,1	19. Ебоніт	$2 \cdot 10^{13}$
3. Вугілля	40	-0,8	20. Кварц плавл.	$6 \cdot 10^5$
4. Графіт	8000		21. Кварц (   осі)	$1 \cdot 10^{12}$
5. Залізо	98	6,2	22. Кварц (⊥ осі)	$3 \cdot 10^{14}$
6. Золото	23	3,6	23. Папір	$1 \cdot 10^{10}$
7. Мідь	17,2	4,3	24. Парафін	$1 \cdot 10^{16}$
8. Ртуть	958	0,9	25. Сірка	$1 \cdot 10^{15}$
9. Свинець	211	4,2	26. Скло листове	$2 \cdot 10^{11}$
10. Срібло	15	4,1	27. Слюда	$1 \cdot 10^{14}$
11. Сталь	120	6,0	28. Фарфор	$1 \cdot 10^{13}$
12. Цинк	59	5,3	29. Целюлоїд	$2 \cdot 10^8$
13. Константан	440 – 520	$1 \cdot 10^{-2}$	30. Шелак	$1 \cdot 10^{14}$
14. Манганін	420 – 480	$3 \cdot 10^{-2}$	31. Шифер	$1 \cdot 10^6$
15. Нейзильбер	280 – 350	$4 \cdot 10^{-2}$	32. Бурштин (янтар)	$1 \cdot 10^{14}$
16. Нікелін	390 – 450	$2 \cdot 10^{-2}$		
17. Ніхром	1050	20		

Таблиця 4. Електрохімічні еквіваленти,  $k_x \cdot 10^{-6}$  кг/Кл

ПОЗИТИВНІ ІОНИ	$k_x$	ПОЗИТИВНІ ІОНИ	$k_x$
1. Алюміній (+ + +)	0,093	10. Свинець (+ +)	1,073
2. Вісмут (+ + +)	0,719	11. Срібло (+)	1,118
3. Водень (+)	0,0104	12. Цинк (+ +)	0,338
4. Залізо (+ +)	0,289		
Залізо (+ + +)	0,193	НЕГАТИВНІ ІОНИ	
5. Золото (+)	2,043	13. Кисень (- -)	0,0829
Золото (+ +)	0,681	14. Хлор (-)	0,3672
6. Кальцій (+ +)	0,2077	15. Хром (- - -)	0,180
7. Мідь (+)	0,659	16. ОН (-)	0,1762
Мідь (+ +)	0,329	17. CO <sub>3</sub> (- -)	0,3108
8. Натрій (+)	0,238	18. NO <sub>3</sub> (-)	0,642
9. Нікель (+ +)	0,304	19. SO <sub>4</sub> (- -)	0,497
Нікель (+ + +)	0,203		

Таблиця 5. Густина речовин  $d$ 

ТВЕРДІ ТІЛА	$d \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$	РІДИНИ	$d \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$
1. Алмаз	3,5	1. Бензол	0,88
2. Алюміній	2,7	2. Вода ( $t=+4 \text{ C}^0$ )	1,00
3. Берилій	1,84	3. Вода ( $t=+100^0\text{C}$ )	0,958
4. Вольфрам	19,1	4. Важка вода	1,260
5. Графіт	1,6	5. Гас	0,80
6. Залізо(сталь)	7,8	6. Гліцерин	1,26
7. Золото	19,1	7. Касторове масло	0,80
8. Кадмій	8,65	8. Рицинова олія	0,95
9. Калій	0,87	9. Ртуть	13,6
10. Кобальт	8,9	10. Скипидар	0,858
11. Лід	0,916	11. Спирт етил.	0,789
12. Мідь	8,9	12. Спирт метил.	0,792
13. Молібден	10,2	13. Толуол	0,858
14. Натрій	0,97	14. Ефір	0,72
15. Нікель	8,9	ГАЗИ	
16. Олово	7,4	(за норм. умов)	$d, \text{ кг/м}^3$
17. Платина	21,5	1. Азот	1,25
18. Сvineць	11,3	2. Водень	0,09
19. Срібло	10,5	3. Вуглекислий газ	1,98
20. Титан	4,5	4. Гелій	0,18
21. Уран	19,0	5. Кисень	1,43
22. Цинк	7,0	6. Повітря	1,29

Таблиця 6а. Рухливість іонів (водні розчини)  $b, \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ 

ПОЗИТИВНІ ІОНИ	$b^+$	НЕГАТИВНІ ІОНИ	$b^-$
1. Н	0,326	1. ОН	0,18
2. Na	0,045	2. F	0,049
3. К	0,067	3. Cl	0,068
4. Ag	0,056	4. Br	0,07
5. NH	0,067	5. NO <sub>3</sub>	0,064
6. N	0,127	6. N	0,184
7. Zn	0,048	7. SO <sub>4</sub>	0,068
8. Fe	0,046	8. CO <sub>3</sub>	0,062
9. Li	0,0346		

Таблиця 6 б. Рухливість іонів (гази за норм. умов)  $b, \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ 

РЕЧОВИНА	ПОЗИТИВНІ ІОНИ	НЕГАТИВНІ ІОНИ
1. Азот	1,27	1,84
2. Аргон	1,37	1,70
3. Водень	5,91	8,26
4. Водяна пара(100°C)	0,62	0,51
5. Кисень	1,29	1,79
6. Повітря	1,37	1,91
7. Хлор	0,6	0,5
8. Оксид вуглецю	1,10	1,14

Таблиця 6 в. Рухливість електронів у металах  $b, \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ 

МЕТАЛ	Ag	Na	Be	Ca	Au	Li	Al	Cd	Zn
$b$	56	48	44	35	30	19	10	7,9	5,8

Таблиця 7. Робота виходу електронів з металів  $A, \text{ eВ}$ 

РЕЧОВИНА	$A$	РЕЧОВИНА	$A$	РЕЧОВИНА	$A$
1. Алюміній	3,74	9. Літій	2,40	17. Рубідій	2,13
2. Барій	2,49	10. Магній	3,46	18. Срібло	4,74
3. Вісмут	4,62	11. Мідь	4,47	19. Тантал	4,07
4. Вольфрам	4,54	12. Молібден	4,20	20. Титан	3,92
5. Залізо	4,74	13. Натрій	2,30	21. Торій	3,41
6. Золото	4,68	14. Нікель	5,00	22. Цезій	1,97
7. Калій	2,00	15. Платина	5,20	23. Цинк	4,00
8. Кальцій	2,67	16. Ртуть	4,52	24. Уран	3,74

Таблиця 8. Енергія іонізації  $A_I, \text{ eВ}$ 

АТОМ	$A_I$	АТОМ	$A_I$	МОЛЕКУЛА	$A_I$
1. Ar	15,7	7. N	14,5	1. CO <sub>2</sub>	14,4
2. H	13,5	8. Na	15,8	2. H <sub>2</sub>	15,4
3. He	24,58	9. Ne	21,5	3. H <sub>2</sub> O	13,2
4. Hg	10,4	10. O	13,5	4. N <sub>2</sub>	15,8
5. K	4,32	11. Xe	12,8	5. O <sub>2</sub>	12,5
6. Kr	13,9				

Таблиця 9. Магнітна сприйнятливість  $\chi = \mu - 1$  деяких речовин

ПАРАМАГНЕТИКИ	$(\mu - 1),$ $10^{-6}$	ДІАМАГНЕТИКИ	$(1 - \mu),$ $10^{-6}$
1. Алюміній	23	1. Бензол	7,5
2. Вольфрам	176	2. Водень	0,063
3. Платина	360	3. Вода	9,0
4. Ебоніт	14	4. Вісмут	яя176
5. Азот	0,013	5. Кварц	15,1
6. Повітря	0,38	6. Кам'яна сіль	12,6
7. Кисень	1,9	7. Мідь	10,3
8. Кисень (рідкий)	3400	8. Скло	12,6

Таблиця 10. Формули для наближених обчислень.

Нерівності вказують значення  $x \ll 1$ , при яких розрахунок приводить до помилок, які не перевищують 0,1%

- $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$  при  $x < 0,031/n$ ;
- $\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$  при  $x < 0,031$ ;
- $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$  при  $x < 0,085$ ;
- $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$  при  $x < 0,045$ ;
- $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$  при  $x < 0,045$ ;
- $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$  при  $x < 4,4^\circ (0,077 \text{ рад})$ ;
- $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$  при  $x < 22,2^\circ (0,387 \text{ рад})$ ;
- $\sqrt{x \cdot y} \approx 0,5(x + y)$  при  $x \approx y$ ;
- $\frac{1 \pm x}{1 \pm y} \approx 1 \pm (x - y)$  при  $x$  та  $y \ll 1$ ;
- $\pi = 3,1416$ ;
- $\pi^2 = 9,8696$ ;
- $\sqrt{\pi} = 1,7725$ ;
- $e = 2,7183$ ;
- $\lg e = 0,4343$ ;
- $\ln 10 = 2,3026$ .

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

- Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики: У 3 кн. Кн. 2. Електрика і магнетизм: Навч. посіб. – К.: Вища школа, 2003. – 278 с.
- Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. – К.: Вища школа, 1995. – 431 с.
- Загальна фізика. Збірник задач. /За заг. ред. І.Т. Горбачука. – К.: Вища школа, 1993. – 360 с.
- Чепуренко В.Г., Богданович А.С. Практичні заняття з фізики. – Вид-во Київського ун-ту, 1967. – 150 с.
- Остроухов А.А., Стрижевський В.Л., Цвелих М.Г., Цяченко Ю.П. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум. – К.: Радянська школа, 1966. – 503 с.
- Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1985. – 592 с.
- Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.
- Парсел Э. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
- Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
- Сахаров Д.И. Сборник задач по физике для вузов. – 13-е изд. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО Изд. "Мир и Образование", 2003. – 400 с.
- Новодворская Е.М. Сборник задач по физике с решениями для втузов / Новодворская Е.М., Дмитриев З.М. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО Изд. "Мир и Образование", 2003. – 368 с.
- Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики для втузов – 3-е изд. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО Изд. "Мир и Образование", 2003. – 384 с.
- Бабаджан Е.Й., Гервидс В.Й., Дубовик В.М. и др. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
- Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

15. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.
16. Козел С.М., Рашба З.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. Задачи МФТИ: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
17. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высшая школа, 1986. – 256 с.
18. Антонов Л.И., Деденко Л.Г., Матвеев А.Н. Методика решения задач по электричеству. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 168с.
19. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978. – 364 с.
20. Стрелков С.П. и др. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
21. Горбунова А.И., Зайцева А.М., Красников С.Н. Задачник-практикум по общей физике. Электричество. Электромагнетизм. Под ред. Александрова Н.В. М.:– Просвещение, 1975. – 160 с.
22. Lea Susan, Burke John. Physics: the nature of things. –West Publishing Company. USA, 1997. – 1199 p.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Активна потужність 228, 241
- Вектор індукції 43, 146
  - намагніченості 153
  - поляризації 42
  - Умова-Пойтінга
- Векторна діаграма 228
- Вільний заряд 40
- Власна енергія 66
- Гіромагнітне співвідношення 152
- Гістерезисна крива 47
- Гradient потенціалу 11
- Густина енергії електричного поля 65
  - магнітного поля 179
  - електромагнітного поля 233
  - поляризованого діелектрика 66
- Густина заряду лінійна 11
  - об'ємна 11, 66
  - поверхнева 11
- Густина струму 89, 112
- Декремент згасання 230
- Диполь 40
- Діамагнетика 155
- Діамагнітна проникність 155
  - сприйнятливості 155
- Діелектрична проникність 8, 14
  - сприйнятливості 43
- Добротність 229
- Довжина вільного пробігу 112
- Еквівалентна електропровідність 117
  - концентрація 117
- Еквіпотенціальна поверхня 40
- Електрична стала 8
- Електричне поле 8
  - вихрове 232
- Електричний заряд 8
- Електричний струм 89
  - квазістаціонарний 92
  - постійний 89
- Електроємність 67
  - відокремленого провідника 67
  - відокремленої сфери 67
  - двопровідної лінії 67
  - конденсатора 67
    - плоского 67
    - сферичного 67
    - циліндричного 67
- Електромагнітна індукція 176
- Електромагнітна хвиля 232
- Електромагнітне поле 205
- Електрорушійна сила 90
  - індукції 177
- Електростатична індукція 40
- Електрохімічний еквівалент 116
- Елемент струму 145
- Енергія взаємодії зарядів 66
  - відокремленого заряду 69
  - диполя 42
  - електростатичного поля 65
  - зарядженого конденсатора 69
  - системи зарядів 65
  - точкового заряду 65
- Ефект Холла 113
- Ефективна маса 112
- Закон Ампера 145
  - Біо-Савара-Лапласа 147
  - Богуславського-Ленгмюра 119
  - Відемана-Франца 113
  - Джоуля-Ленца 91
    - у диференціальній формі 92
  - електромагнітної індукції 176
  - збереження заряду 8
  - Кулона 8
  - Кюрі 45, 154
  - Кюрі-Вейса 46, 156
  - Ома 90
    - у диференціальній формі 91

- повного струму 151
- Фарадея 116
- Фарадея-Максвелла 179
- Залишкова поляризація 47
- Зв'язаний заряд 42
- Згасаючі коливання 229
- Змінний струм 227
- Імпульс електромагнітної хвилі 233
- Індуктивність соленоїда 177
- тороїда 177
- Індукція магнітного поля 146
- Інтенсивність електромагнітної хвилі 233
- Іонізація 117
- ударна 119
- Коерцитивна сила 156
- поле 47
- Коефіцієнт взаємодукції 178
- відбивання 233
- дисоціації 116
- згасання 229
- іонно-електронної емісії 119
- корисної дії 92, 181
- Пельтьє 115, 121
- потужності 229
- рекомбінації 116
- Томсона 115
- трансформації 181
- ударної іонізації 119
- Коливний контур 229
- Контактна різниця потенціалів 114
- Ларморова частота 155
- Локальне електричне поле 45
- Магнетон Бора 153
- Магнітна індукція 146
- проникність 145, 146, 154
- сприйнятливості 154
- стала 146
- Магнітне коло 159
- поле 145
- Магнітний гістерезис 156
- момент 148
- потік 150
- Магніторушійна сила 159
- Маса електромагнітної хвилі 233
- Метод "дзеркального зображення" 40
- диференціювання-інтегрування 14
- Момент диполя 41
- – полярної молекули 44
- – індукований 44
- Намагнічування 152
- Напруженість електричного поля 9
- – – зарядженого диска 12
- – – зарядженої площини 12
- – – кулі 12
- – – системи зарядів 9
- – – точкового заряду 9
- – – циліндра 12
- магнітного поля 146
- – – довгого соленоїда 148
- – – тороїдальної котушки 151
- поля диполя 41
- Оператор градієнта 11
- Лапласа 11
- Опір активний 227
- ємнісний 227
- індуктивний 227
- комплексний 227
- провідника 89
- хвильовий 230
- Парамагнетики 152
- Парамагнітна проникність 154
- сприйнятливості 154
- Період коливань 229
- П'єзоелектрична стала 46
- П'єзоелектрики 46
- Питома провідність 89
- Питомий опір 112
- Піроелектрик 46
- Піроелектричний коефіцієнт 46

- Плече диполя 41
- Поляризація діелектрика 42
- – електронна 45
- – іонна 45
- – неоднорідна 44
- – однорідна 43
- – орієнтаційна 45
- Поляризованість 42
- Поляризуємість 44
- Потенціал диполя 42
- електричного поля 9
- – – зарядженого циліндра 14
- – – зарядженої кулі 13
- – – зарядженої площини 13
- – – системи зарядів 10
- – – точкового заряду 10
- Потенціальна енергія заряду 10
- Потік вектора напруженості 11
- енергії 232
- Потужність змінного струму 229
- іонізації 117
- Правила Кірхгофа 91
- Правило Ленца 176
- Принцип релятивізму 205
- суперпозиції 8, 147
- Провідність 89, 112
- Рекомбінація 118
- Рівняння Лапласа 12
- балансу іонів 118
- Максвелла 231
- Пуассона 11
- Різниця потенціалів 10
- Робота джерела струму 91
- електричного струму 91
- переміщення заряду 10
- Розряд несамостійний 117
- самостійний 117, 119
- Рухливість 112, 116
- Сегнетоелектрик 46
- Сила Ампера 150
- Лоренца 204
- струму 89
- Стала Кюри-Вейса 46
- Планка 153,
- термопари 114
- Струм зміщення 231
- квазістаціонарний 92
- насичення 119
- постійний 89
- Температура Кюри-Вейса 46
- Теорема Остроградського-Гауса 11
- Теплота Томсона 115
- Термо-е.р.с. 114
- Термоелектронна емісія 120
- Тиск електромагнітної хвилі 233
- Точковий диполь 41
- заряд 8
- Трансформатор 181
- Умови на межі діелектриків 44
- – магнетиків 156
- Феромагнетики 156
- Формула Клаузіуса-Мосотті 46
- Річардсона-Дашмена 121
- Томсона 230
- Хімічний еквівалент 116
- Циклічна частота 229
- Час вільного пробігу 112
- релаксації 92, 178
- Явище електростатичної індукції 47
- взаємної індукції 178
- Зеебека 114
- Пельтьє 114
- самоіндукції 177
- Томсона 115, 121



*Навчальне видання*

БЕНЦА Василь Михайлович  
ГОРВАТ Андрій Андрійович  
ВИСОЧАНСЬКИЙ Юліан Миронович

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ  
Електрика і магнетизм  
Навчальний посібник

Редактор В.Петраш  
Коректор Л.Філь

Комп'ютерна верстка XXXXXXXXXX

Підписано до друку ХХ.ХХ.2010 Формат 60x84/16  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний.  
Умовн. друк. арк. 16,74. Тираж 350. Замовлення 146.

Інформаційно-видавниче агентство «ІВА»,  
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 380 від 26.03.2001.  
88018 м.Ужгород, вул.. Капушанська, 82а.

**Бенца В.М.**

**Б-67** Методика розв'язування задач. Електрика і магнетизм:  
навчальний посібник / В.М.Бенца, А.А.Горват,  
Ю.М.Височанський.–Ужгород : ІВА, 2010 – 288с.  
ISBN 978-617-501-032-7

У посібнику подано короткі теоретичні відомості, якісні питання, наведено приклади розв'язування задач з детальним аналізом їх фізичного змісту, а також задачі для аудиторної і самостійної роботи та приклади типових залікових контрольних робіт з відповідних розділів курсу „Електрика і магнетизм”, які відповідають дисципліні "Загальна фізика" для фізичних факультетів університетів.

Посібник призначений для використання при проведенні практичних занять та для самостійної роботи студентів, які навчаються за напрямками підготовки фахівців "Фізика", "Прикладна фізика" та деякими інженерними спеціальностями, а також може бути корисним молодим викладачам вузів та вчителям загальноосвітніх закладів з поглибленим вивченням фізики.

.УДК 53 (075.8)  
ББК XXXXX