МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ І МЕРЕЖ

**Совга Т.С.**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

з дисципліни

***ВИЩА МАТЕМАТИКА***

**для студентів 1-го та 2-го курсів заочного відділення інженерно-технічного факультету, напрям підготовки “ Будівництво” та “Приладобудування”**

**УЖГОРОД – 2014**

**Методичні вказівки та завдання для контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студентів 1-го та 2-го курсів заочного відділення інженерно-технічного факультету, напрям підготовки “ Будівництво” та “Приладобудування”. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», – 2014. – 72 с.**

**Укладач:** Совга Т.С., ст. викладач

**Рецензент:** Шапочка І.В., завідувач кафедри алгебри
ДВНЗ «Ужгородський національний
університет», канд. фіз.-мат. наук, доцент

**Відповідальний за випуск:** Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
завідувач кафедри комп’ютерних систем та мереж

***Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол № 9 від 30 січня 2014 р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 4 від 4 березня 2014 р.***

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

## Тема: ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ, АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ОСНОВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

### Теоретичні відомості

### 1. Лінійна алгебра

**$1^0$. Матриці.**

***Матрицею*** називають прямокутну таблицю упорядкованих чисел або виразів, розташованих в $m$ рядках та $n$ стовпцях і записану у вигляді

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Якщо матриця містить лише один рядок, то її називають ***матрицею-рядком*** або ***вектором-рядком***. Якщо матриця містить лише один стовпець, то її називають ***матрицею-стовпцем*** або ***вектором-стовпцем***. Матриця, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m=n$), називається ***квадратною***.

Взагалі кажучи, $a_{ij} \neq a_{ji}$, але існують матриці, для яких виконується умова $a_{ij} = a_{ji}$ $\left(\forall\, i \in \overline{1,m};\ j \in \overline{1,n}\right)$. Такі матриці називаються ***симетричними.***

У випадку квадратної матриці, відрізок, який починається у лівому верхньому куті матриці й закінчується в правому нижньому, – ***називається головною діагоналлю;*** іншу діагональ матриці називають ***побічною***.

Процес перетворення рядків матриці в стовпці і навпаки називають ***транспонуванням матриці***. Матрицю, транспоновану до матриці $A$, позначають $A^T$.

Квадратну матрицю називають ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Елементи головної діагоналі можуть бути як нульовими, так і відмінними від нуля. Квадратну матрицю називають ***одиничною***, якщо вона є діагональною і всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

**$2^0$. Обернена матриця**

Матриця $A^{-1}$ називається ***оберненою*** до квадратної матриці *A,* якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де $E$ - одинична матриця.Обернену матрицю знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}$ визначника матриці $A$,

$M_{ij}$ – мінор елемента $a_{ij}$ визначника, тобто це визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення $i$-го рядка та $j$-го стовпця.

Знаходження оберненої матриці можливе, якщо вона невироджена, тобто її визначник відмінний від нуля ($\det A \neq 0$).

**$3^0$. Визначники та їх обчислення.**

*Визначником* (*детермінантом*) квадратної матриці $A$ порядку $n$ називається число, яке знаходиться з елементів матриці $A$ за певним правилом. Визначник матриці $A$ позначають |A|.

***Правило знаходження визначника матриці 2-го порядку:*** визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \qquad (2)$$

***Правило знаходження визначника матриці 3-го порядку:*** Визначник матриці третього порядку знаходять за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (3)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

**$4^0$. Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими**

Системою $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (4)$$

де $a_{ij}$, - коефіцієнти системи, $x_j$ – невідомі, $b_i$ – вільні члени, $i, j = 1..n$ – дискретні змінні.

**Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь**

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

де $A$ – основна матриця системи; $X$ – матриця-стовпчик невідомих; $B$ – матриця-стовпчик вільних членів. Тоді систему (4) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B \qquad (5)$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи (5) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

**Метод Крамера розв’язання системи лінійних рівнянь**

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

де $\Delta$ – основний визначник; $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ – визначники, які отримують з $\Delta$ заміною відповідно $1,2,\ldots,n$- го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

**Теорема (Крамера).** Якщо основний визначник системи рівнянь $\Delta \neq 0$ то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

При розв’язуванні системи (4) можуть бути такі випадки:

1) якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь (4) має єдиний розв’язок, що знаходять за формулами (7);
2) якщо $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n} \neq 0$, то система рівнянь (4) не має розв’язків;
3) якщо $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0, \Delta_{x_2} = 0, \ldots, \Delta_{x_n} = 0$, то система рівнянь (4) має безліч розв’язків.

**Приклад 1.** Розв’язати системи рівнянь методом Крамера:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

*Розв'язування.* а) Знаходимо визначники: $\Delta$, $\Delta_{x_1}$, $\Delta_{x_2}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 0 = 14.$$

За формулами (7) знаходимо: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{7}{7} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{14}{7} = 2$.

б) Знаходимо визначники: $\Delta$, $\Delta_{x_1}$, $\Delta_{x_2}$, $\Delta_{x_3}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 46, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 46,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 92, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 138.$$

За формулами (7) отримаємо розв’язок: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{46}{46} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{92}{46} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \dfrac{138}{46} = 3$.

### 2.4. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Одним із найбільш універсальних і ефективних методів розв’язання систем лінійних рівнянь є *метод послідовного виключення невідомих*, або *метод Гаусса*, який будемо реалізовувати шляхом еквівалентних перетворень системи рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку:

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 = b_1^0, \\ a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 = b_2^0, \\ a_{31}^0 x_1 + a_{32}^0 x_2 + a_{33}^0 x_3 = b_3^0, \end{cases} \tag{8}$$

де для зручності записів введемо позначення: $a_{ij}^0 = a_{ij}$, $b_i^0 = b_i$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$.

Метод виключення Гаусса прийнято реалізовувати за два ходи: *прямого* і *зворотного*. На прямому ході, за допомогою еквівалентних перетворень, систему (8) зводять до верхнього трикутного вигляду, а на зворотному ході, з одержаної системи знаходять, значення невідомих, тобто розв’язок системи.

**Прямий хід методу Гаусса**. Нехай $a_{11}^0 \neq 0$. Розділивши обидві частини першого рівняння із (8) на $a_{11}^0$ , одержимо нове рівняння

$$x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \tag{9}$$

де $a_{1j}^1 = \dfrac{a_{1j}^0}{a_{11}^0}$, $b_1^1 = \dfrac{b_1^0}{a_{11}^0}$, $j = 2,3$.

Рівняння (9) використаємо для виключення невідомого $x_1$ із другого і третього рівнянь системи (8). Для виключення $x_1$ із другого рівняння додамо до нього перше, помножене на $(-a_{21}^0)$. Потім, помноживши рівняння (9) на $(-a_{31}^0)$ і додавши результат до третього рівняння, виключимо з нього $x_1$. В результаті одержимо системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \\ 0 + a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1, \\ 0 + a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 = b_3^1, \end{cases} \tag{10}$$

де $a_{22}^1 = a_{22}^0 - a_{12}^1 \cdot a_{21}^0$, $a_{23}^1 = a_{23}^0 - a_{13}^1 \cdot a_{21}^0$, $b_2^1 = b_2^0 - b_1^1 \cdot a_{21}^0$;

$a_{32}^1 = a_{32}^0 - a_{12}^1 \cdot a_{31}^0$ , $a_{33}^1 = a_{33}^0 - a_{13}^1 \cdot a_{31}^0$, $b_3^1 = b_3^0 - b_1^1 \cdot a_{31}^0$.

На наступному кроці виключаємо невідому $x_2$ із системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1, \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 = b_3^1, \end{cases} \tag{11}$$

яка є частиною системи (10).

Нехай тепер $a_{22}^1 \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння (11) на $a_{22}^1$. В результаті цього дістанемо рівняння вигляду

$$x_2 + a_{23}^2 x_3 = b_2^2, \tag{12}$$

де $a_{23}^2 = \dfrac{a_{23}^1}{a_{22}^1}$, $b_2^2 = \dfrac{b_2^1}{a_{22}^1}$.

Віднімемо від другого рівняння системи (11) рівняння (12), помножене на $a_{32}^1$. Одержимо рівняння

$$a_{33}^2 x_3 = b_3^2, \tag{13}$$

де $a_{33}^2 = a_{33}^1 - a_{23}^1 \cdot a_{32}^1$, $b_3^2 = b_3^1 - b_2^1 \cdot a_{32}^1$.

Нарешті, якщо $a_{33}^2 \neq 0$, то, розділивши на нього рівняння (13), зведемо це рівняння до вигляду

$$x_3 = b_3^3, \tag{14}$$

де $b_3^3 = \dfrac{b_3^2}{a_{33}^2} - b_2^1 \cdot a_{32}^1$.

Таким чином, в результаті реалізації  прямого ходу, приходимо до системи рівнянь трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \\ \qquad x_2 + a_{23}^2 x_3 = b_2^2, \\ \qquad\qquad x_3 = b_{.3}^3. \end{cases} \tag{15}$$

***Зворотній хід методу Гаусса***. На цьому ході невідомі $x_1, x_2, x_3$ знаходяться явно із системи (15) за формулами:

$$x_3 = b_{.3}^3, \quad x_2 = b_2^2 - a_{23}^2 x_3, \quad x_1 = b_1^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3. \tag{16}$$

**Зауваження**. Якщо $a_{11} = 0$, то, при умові, що система має єдиний роз-в'язок $(|A| \neq 0)$, серед коефіцієнтів при $x_1$ (першого стовпчика матриці $A$) існує хоча би один відмінний від нуля. Тоді рівняння, що містить $x_1$ потрібно поміняти місцями із першим. Аналогічно  можна зробити і для інших невідомих.

**Приклад 2.** Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \end{cases}$$

*Розв'язування.* Оскільки коефіцієнт $a_{11} = 3 \neq 0$, то перше рівняння розділимо на $a_{11} = 3$. Одержимо рівняння

$$x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 = \frac{5}{3}. \tag{17}$$

Скориставшись одержаним рівнянням зробимо нульові коефіцієнти при $x_1$ у другому і третьому рівняннях. Для цього від другого рівняння віднімемо рівняння (17), помножене на 2, а від третього рівняння віднімемо рівняння (17), помножене на 3. В результаті одержимо систему $\begin{cases} \frac{5}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=-\frac{7}{3}, \\ -\frac{5}{3}x_2+\frac{5}{3}x_3=\frac{25}{3}, \end{cases}$ яка після спрощення набуде вигляду

$$\begin{cases} 5x_2+x_3=-7, \\ -x_2+x_3=5. \end{cases} \tag{18}$$

Розділивши в одержаній системі перше рівняння на 5, дістаємо рівняння

$$x_2+\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}. \tag{19}$$

Для знищення змінної $x_2$ до другого рівняння системи (18) додамо рівняння (19). Одержимо рівняння $\frac{6}{5}x_3=\frac{18}{5}$, яке після спрощення набуває вигляду $x_3=3$.

Після цього можемо записати остаточну трикутну систему прямого ходу

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}, \\ \qquad x_2+\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}, \\ \qquad\qquad x_3=3. \end{cases}$$

Для одержання розв'язку виконаємо обернений хід:

$x_3=3$, $x_2=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\cdot 3=-2$, $x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{6}{3}=2$.

Таким чином: $x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=3$.

## 2. Векторна алгебра

**1$^0$.** *Вектором* називається напрямлений відрізок. Якщо початок вектора знаходиться в точці *A*, а кінець вектора – в точці *B*, то його позначають $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначають також малою буквою латинського алфавіту, наприклад $\vec{a}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається *довжиною* або *модулем вектора* і позначається $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим* і позначається $|\vec{0}|$. *Одиничним* називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $|\vec{a}|$ називається *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^0}$.

Вектори $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однаково напрямлені. Вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, рівний йому за модулем, але протилежно з ним напрямлений, називається *протилежним вектором* і позначається $-\vec{a}$.

***Дії над векторами***

Нехай дано вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Сума, різниця та множення вектора на число *k* визначаються наступним чином:

$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z)$, $\quad k\cdot\vec{a}=(ka_x;ka_y;ka_z)$.

Графічно ці операції представлені на рис. 1:

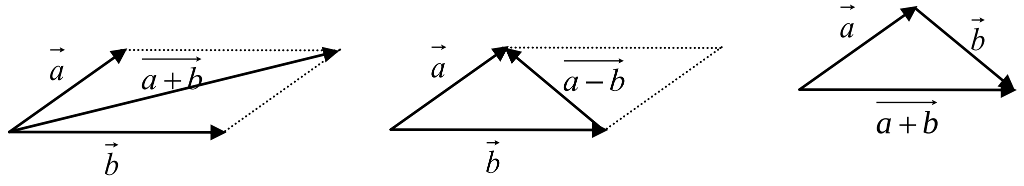



Рис. 1

*Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ на вісь *u* називається додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь *u* мають однаковий напрям, в протилежному випадку проекцією буде від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$.(рис. 2)

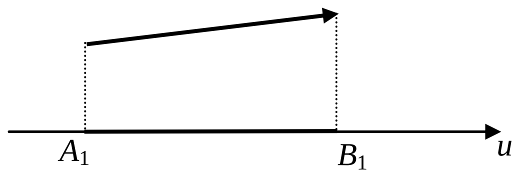
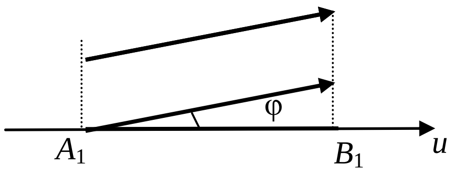



Рис. 2

*Кутом між вектором і віссю u* (або між двома векторами) називається найменший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю ($0\le\varphi\le\pi$).(рис. 3, 4)



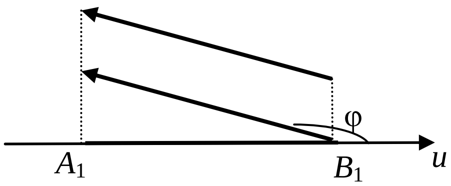




Рис. 3 Рис. 4

Якщо вектор задано його проекціями, то довжина вектора визначається за формулою $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ або, якщо задані координати точок початку і кінця вектора $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Якщо два вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. колінеарні, то виконується умова колінеарності $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ і навпаки.

Якщо два вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ рівні, то виконується умова $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ і навпаки.

**2⁰. *Скалярним добутком*** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, де $\varphi$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

***Властивості скалярного добутку***

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $(\overrightarrow{\lambda a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4. Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, коли кут $\varphi$ гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, коли кут $\varphi$ тупий.

5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

6. $(\vec{a})^2=\left|\vec{a}\right|^2$

Якщо задано два вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то скалярний добуток обчислюється за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.

Косинус кута між векторами знаходиться за формулою

$$\cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

**3⁰.** ***Векторним добутком*** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначається так: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

***Властивості векторного добутку***

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

2. $\overrightarrow{\lambda a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

5. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює модулю векторного добутку $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Якщо задано два вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то векторний добуток обчислюється за формулою $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

**4⁰.** ***Змішаним добутком*** векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Якщо задано три вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то змішаний добуток обчислюється так $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

***Властивості змішаного добутку***

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

4. Модуль змішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, віднесених до спільного початку: $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

5. Якщо змішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатній, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, а якщо від'ємний, то ліву.

6. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній змішаний добуток дорівнює нулю.

## 3. Аналітична геометрія

**1⁰. Пряма лінія на площині.**

Будь-яка пряма в декартовій системі координат визначається рівнянням першої степені.

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

– загальне рівняння прямої, де $\vec{n}=\{A;B\}$ – *нормальний вектор*, який перпендикулярний до заданої прямої.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{2}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має своїм нормальним вектором вектор $\vec{n}=\{A;B\}$.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{3}$$

– рівняння прямої у відрізках, тобто пряма відтинає вздовж координатних осей відрізки, величини яких відповідно дорівнюють $a,b$.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \tag{4}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{s}=\{l;m\}$, який називається *напрямним вектором* даної прямої.

$$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \end{cases} \tag{5}$$

параметричне рівняння прямої, де $t$ – параметр.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{6}$$

– рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$.

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{7}$$

– рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $k=tg\alpha$, де $\alpha$ – кут, який утворює пряма з віссю *Ox*.

$$y=kx+b \tag{8}$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{9}$$

– нормальне рівняння прямої, де $p$ – відстань від початку координат до прямої, $\alpha$ – кут, який утворює нормаль прямої з віссю *Ox*.

Нехай дві прямі задаються у загальному вигляді: $A_1x+B_1y+C_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2=0$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (10)

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (10)$$

Нехай дві прямі задаються у вигляді: $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (11):

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (11)$$

Нехай дві прямі задаються у вигляді: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (12)

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \qquad (12).$$

Умови паралельності двох прямих: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $k_1 = k_2$, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ (13)

Умови перпендикулярності двох прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad l_1l_2 + m_1m_2 = 0 \qquad (14)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, що задана в загальному вигляді

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (15)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, що задана в нормальному вигляді

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \qquad (16)$$

**$2^0$. Площина і пряма в просторі**.

Кожна площина визначається рівнянням першого порядку відносно декартової системи координат у просторі і, навпаки, кожне рівняння першого порядку відносно декартової системи координат у просторі визначає площину.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

– називається *загальним рівнянням площини*, вектор $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ – нормальним вектором цієї площини. Якщо $A = 0$ $(B = 0,\ C = 0)$, то рівняння (1) визначає площину, паралельну до осі абсцис (ординат, аплікат). Якщо $D = 0$, то відповідна площина проходить через початок координат.

Нехай $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – деяка точка, $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ – ненульовий вектор.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

– рівнянням площини, що проходить через задану точку *M*, перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

– рівнянням площини, що відтинає вздовж координатних осей відрізки з відповідними величинами *a*, *b* і *c*.

Кут $\varphi$ між двома площинами $P_1$ і $P_2$, які задані рівняннями

$P_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$P_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ визначається між нормальним вектором $\overrightarrow{n_1} = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ цих площин:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (4)$$

Дві площини $P_1$ і $P_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (5)

Дві площини $P_1$ і $P_2$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (6)$$

Рівняння $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ (7)

– визначає площину, віддаль якої від початку координат дорівнює *p*, а $\alpha, \beta, \gamma$ – кути, що утворює нормаль цієї площини з координатними осями $O_x$, $O_y$, $O_z$. Воно називається *нормальним рівнянням площини*. Для зведення загального рівняння площини (1) до нормального вигляду (7) потрібно рівняння (1) помножити на нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (8)$$

знак якого вибирається протилежним до знака вільного члена *D*. Якщо *D=0,* то знак $\mu$ можна брати довільно.

Віддаль *d* від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини (7) обчислюється за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

Пряму лінію в просторі можна розуміти, як перетин двох площин. Якщо $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ – рівняння однієї з цих площин, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – другої з цих площин, то система двох рівнянь задає

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

– загальне рівняння прямої в просторі.

Якщо $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - точка, $\vec{l} = \{m; n; p\}$ – ненульовий вектор, то рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (11)$$

– пряма, що проходять через точку $M_0$ і паралельна до вектора $\vec{l}$. Вони називаються канонічними рівняннями прямої в просторі, а вектор $\vec{l}$ – напрямним вектором цієї прямої.

За напрямний вектор прямої (10) можна взяти векторний добуток $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ нормальних векторів $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ відповідних площин:

$$\vec{l} = \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2} = \left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\} \quad (12)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (13)$$

– рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Якщо в рівняннях (11) кожне з відношень прийняти за *t*, то

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (14)$$

– параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в напрямку вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$.

Кут між двома прямими – це кут між їх напрямними векторами. Дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли координати їх напрямних векторів пропорційні.

Кут $\varphi$ між прямою (11) і площиною (1) можна знайти за допомогою формули

$$\sin\varphi = \left| \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right| \qquad (15)$$

Пряма і площина паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (16)$$

Пряма і площина перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (17)$$

### $3^0$. Криві лінії другого порядку

*Колом* називають геометричне місце точок площини, відстані яких від заданої точки площини, яка називається центром кола, є величина стала і називається радіусом кола.

Рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)

визначає *коло* радіуса $R$ з центром в точці $(a; b)$. Якщо центр кола сумістити з початком координат, то його рівняння матиме вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$ (2)

*Еліпсом* називається геометричне місце всіх точок площини, сума відстаней яких віх двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами. Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

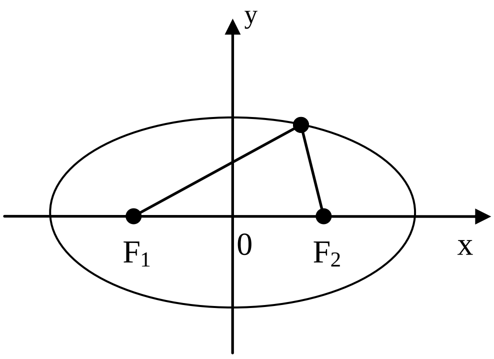



Рис.1

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (3)

називається *канонічним рівнянням еліпса*; величини $a$ і $b$ називаються відповідно великою і малою піввіссю еліпса; при цьому $b^2 = a^2 - c^2$

Відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса ($\varepsilon < 1$).

Дві прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Рівняння еліпса з центром в точці $(x_0; y_0)$: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (4)

*Гіперболою* називається геометричне місце всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є ненульова стала величина і менша за відстань між фокусами. Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c;\,0)$ і $F_2(c;\,0)$.

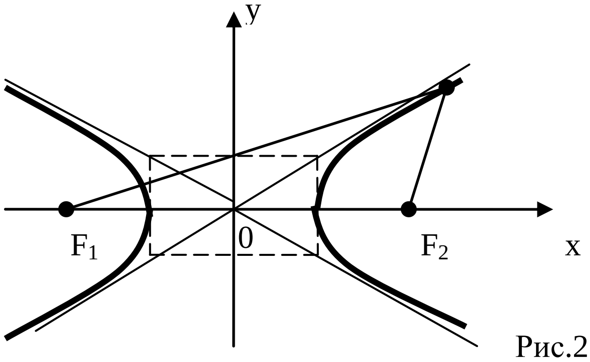
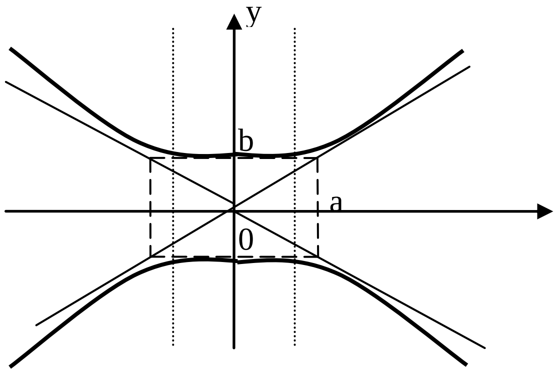



Рис.2




Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (5)

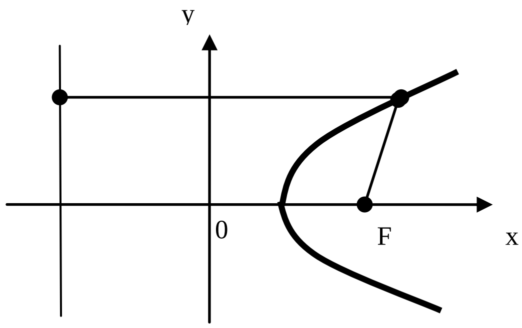
називається *канонічним рівнянням гіперболи*; величини $a$ і $b$ називаються відповідно дійсною і уявною піввіссю гіперболи; при цьому $b^2 = c^2 - a^2$

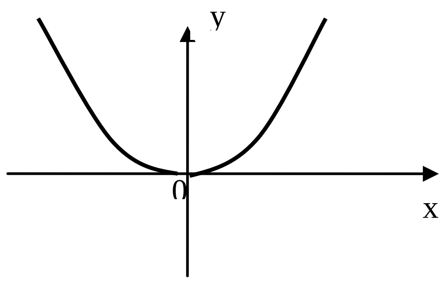
Відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* гіперболи ($\varepsilon > 1$). Дві прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи. Дві прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи.

Рівняння гіперболи з центром в точці $(x_0; y_0)$ : $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (6)

Нехай задано деяку пряму *L:* $x = -\dfrac{p}{2}$ і точку $F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$ поза нею.

*Параболою* називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від точки *F* (фокуса) і прямої *L* (директриси).




Рівняння $y^2 = 2px$ (7)

називається *канонічним рівнянням параболи*, а величина $p$ – параметром параболи.

**$4^0$. Параметричні рівняння кривих:**

Параметричне рівняння кола $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ (8)

Параметричне рівняння еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ (9)

Параметричне рівняння гіперболи $\begin{cases} x = a \cdot cht \\ y = b \cdot sht \end{cases}$ (10)

У рівняннях (8)-(10) параметр $0 \le t \le 2\pi$.

**$5^0$. Полярні рівняння кривих:**

Полярне рівняння кола $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = R^2$ (11)

Загальне полярне рівняння кривої $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$ (12)

Рівняння (12) в залежності від значення ексцентриситету визначає певну криву. Число $p$ – полярний параметр кривої.

## 4. Основи математичного аналізу

**$1^0$. Границя й неперервність функції**

**Границя функції в точці.** Нехай функція $y = f(x)$ задана в деякому околі точки $x_0$, крім, можливо, самої точки $x_0$.

*Число b називається границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до $x_0$ (або в точці $x_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ (як завгодно малого), знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x, таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.* Це записується так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

**Односторонні границі**. При дослідженні функцій корисні поняття односторонніх границь.

*Число b називається **границею функції** $y = f(x)$ **справа (зліва)** при $x \to x_0,\ x > x_0$ $(x \to x_0,\ x < x_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, таких, що $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $(x \in (x_0 - \delta; x_0))$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Позначають це так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ $\left( \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b \right)$.

**Границя функції на нескінченності.** Поняття границі функції $y = f(x)$ на нескінченності тісно пов'язане з поняттям границі числової послідовності $\{x_n\}$. Якщо у випадку числової послідовності змінна *n*, зростаючи, приймає лише цілі значення, то у випадку границі функції змінна *x*, змінюючись, приймає будь-які значення.

*Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x$, яке прямує до нескінченності $(x \to \infty)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне число $M > 0$ $(M = M(\varepsilon))$, що для всіх x таких, що $|x| > M$, справедлива нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.*У цьому випадку границя записується так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

**Нескінченні границі**. У попередніх випадках розглядали, що $b$ – певне число. Іноді потрібно розглядати нескінченні границі.

Кажуть, що функція $y = f(x)$ має своєю границею $\infty$ (або $+\infty$ чи $-\infty$) при $x \to x_0$, якщо *для будь-якого $M > 0$, знайдеться таке додатне число $\delta > 0$, що для всіх $x$ таких, що $|x - x_0| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x)| > M$.* Це позначають так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\left( \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right)$.Аналогічно можна розглядати односторонні нескінченні границі: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$

**Нескінченно мала та нескінченно велика величини**.

При $x \to \infty$ функція $y = f(x)$ є *нескінченно великою*, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх *x*, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

Функція $\alpha(x)$ є *нескінченно малою* величиною при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

*Властивості нескінченно малих величин*:

1) якщо при $x \to x_0$ $(x \to \infty), \alpha(x)$ – нескінченно мала, а $f(x)$ – нескінченно велика величина, то при $x \to x_0$ $(x \to \infty), \dfrac{1}{\alpha(x)}$ *і* $\dfrac{1}{f(x)}$ – відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;

2) сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;

4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

**$2^0$. Практичне обчислення границь** базується на наступній теоремі.

**Теорема.** Якщо кожна із функцій $f(x)$ та $g(x)$ має границю при $x \to x_0$ або при $x \to \infty$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) = b$, то справедливі рівності:

1) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} cf(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x),\ c - const$

2) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)} \quad \left(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) \neq 0\right)$.

Використовуються також границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – перша важлива границя.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ – друга важлива границя.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $a>0,\ a\neq 1$. Зокрема, при $a=e$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a>0$. Зокрема, при $a=e$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in R$.

## 5. Диференціальне числення

**$1^0$. Похідна функції однієї змінної**

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X=(a;\,b)$ (можливо нескінченому). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $(x_0+\Delta x) \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці $x_0$ дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

*Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* $x_0$ *називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу* $\Delta x$, *коли приріст аргументу прямує до нуля.* Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0),\ f'(x_0),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Відношення
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

називають *диференціальним відношенням*. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають $y'$, $f'(x)$ або $\frac{d}{dx}f(x)$. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці $x_0$, називають *диференційованою в точці* $x_0$. Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають *диференційованою на проміжку X.* Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням.*

*Похідною другого порядку* називається похідна від похідної і позначається $y''(x) = (y')',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}$.

## 2⁰. Правила диференціювання

– *Диференціювання суми, різниці, добутку й частки*

**Теорема**. *Якщо функції* $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$ *диференційовані в точці* $x \in X$, *то функції* $u(x) \pm v(x), u(x)\cdot v(x), \frac{u(x)}{v(x)}$ *(в останньому випадку вважається, що* $v(x) \neq 0$*) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:*

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

– *Диференціювання складної функції*

**Теорема**. *Нехай* $y = f(\varphi(x))$ *– складна функція, де* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція* $y = f(u)$ *в точці* $u = \varphi(x)$ *має похідну (по* $u$*)* $y'_u(u) = f'_u(u)$, *а внутрішня функція* $u = \varphi(x)$ *у точці* $x$ *– похідну (по* $x$*)* $u'_x = \varphi'(x)$. *Тоді складна функція* $y = f(\varphi(x))$ *диференційована в точці* $x$, *причому її похідна обчислюється за формулою*

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u)\cdot\varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

– *Похідна функції, заданої параметрично*

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

**Теорема**. *Припустимо, що функція* $x = \varphi(t)$ *на сегменті* $[a; b]$ *задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції, а функція* $\psi(t)$ *має похідну на інтервалі* $(a; b)$. *Тоді існує похідна* $y'_x$, *яка обчислюється за формулою* $y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$.

– *Похідна функції, заданої неявно*

Нехай неявна функція $y = y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

**Теорема**. *Якщо функція* $F(x, y)$ *задовольняє теоремі про існування і є диференційованою за своїми змінними, то похідна* $y'(x)$ *обчислюється за формулою* $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Останню формулу легко одержати, якщо ліву і праву частину рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по $x$, вважаючи $y$ функцією від $x$, а саме $F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

### $3^0$. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x$, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки $x$ має місце рівність $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Звідси $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з $\Delta x$.

*Означення. Диференціалом функції* $y = f(x)$ *у точці* $x$ називають головну, лінійну відносно $\Delta x$ частину приросту функції в цій точці

$$dy = f'(x)\Delta x \text{ або } dy = f'(x)dx. \quad (3)$$

*Означення. Диференціалом другого порядку* $d^2 y$ називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \quad (4)$$

### $4^0$. Таблиця похідних основних елементарних функцій

| № | Похідна основної елементарної функції | Похідна складної елементарної функції $u = u(x)$ | Частинний випадок |
|---|---|---|---|
| 1 | $(C)' = 0$ | | |
| 2 | $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$ | $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$, $\alpha \in R$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 3 | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$ | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$, $a > 0, a \neq 1$ | $(e^x)' = e^x$ |
| 4 | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$ | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$, $a > 0, a \neq 1$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| 5 | $(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$ | |
| 6 | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$ | |
| 7 | $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$ | |
| 8 | $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$ | |
| 9 | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x \rvert < 1)$ | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$ | |
| 10 | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x \rvert < 1)$ | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$ | |
| 11 | $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$ | |
| 12 | $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$ | |

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1**. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, матричним способом та методом Гаусса. Перевірити правильність розв'язків.

| № | Система рівнянь | № | Система рівнянь | № | Система рівнянь |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+3z=1 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 2x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ -x+y+z=-8 \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ |
| 2 | $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$ | 7 | $\begin{cases} 5x+8y+z=2 \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 3x-2y-2z=-13 \\ y+4z=11 \\ 2x+y-5z=-11 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} 3x+2y+2z=5 \\ x+3y+z=2 \\ 5x+3y+4z=9 \end{cases}$ | 13 | $\begin{cases} 3x+2y+z=8 \\ x+4y+5z=18 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ |
| 4 | $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y-z=5 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ | 9 | $\begin{cases} 3x+y+2z=-3 \\ 4x+3y-2z=12 \\ 8x+y-5z=6 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ 4x+5y+2z=12 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 5x+3y+2z=1 \\ 4x+y+9z=23 \\ 2x+6z=16 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 4x+5z=7 \\ 5x+2y+4z=7 \end{cases}$ | 15 | $\begin{cases} -x+2y+z=1 \\ y+5z=-1 \\ 6x+y-3z=-19 \end{cases}$ |

**Завдання 2**. Дано вектори $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$. Знайти:

а) $\vec{a}+\vec{b};\ \vec{a}-\vec{b};\ \vec{a}+3\vec{b}-\vec{c};\ \vec{a}\cdot\vec{b};\ \vec{a}\times\vec{b};\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$;

г) довести, що вектори $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ утворюють базис на множині всіх векторів. Розкласти вектор $\vec{d}=\{2;-7;\ 5\}$ за цим базисом.

| № | Вектори | № | Вектори |
|---|---|---|---|
| 1 | $\vec{a}=\{2;-2;1\};\vec{b}=\{2;3;6\};\vec{c}=\{1;0;-2\}$ | 9 | $\vec{a}=\{4;-2;-3\};\vec{b}=\{0;1;3\};\vec{c}=\{-1;3;5\}$ |
| 2 | $\vec{a}=\{4;-2;-4\};\vec{b}=\{6;-3;2\};\vec{c}=\{0;2;3\}$ | 10 | $\vec{a}=\{-2;1;1\};\vec{b}=\{1;5;0\};\vec{c}=\{1;0;5\}$ |
| 3 | $\vec{a}=\{3;-5;2\};\vec{b}=\{2;-5;-7\};\vec{c}=\{-2;1;2\}$ | 11 | $\vec{a}=\{2;2;1\};\vec{b}=\{6;3;-2\};\vec{c}=\{1;3;4\}$ |
| 4 | $\vec{a}=\{7;-1;5\};\vec{b}=\{1;2;-3\};\vec{c}=\{2;3;1\}$ | 12 | $\vec{a}=\{2;-3;1\};\vec{b}=\{1;-2;3\};\vec{c}=\{-1;-3;5\}$ |
| 5 | $\vec{a}=\{3;-2;5\};\vec{b}=\{2;-3;2\};\vec{c}=\{4;0;-1\}$ | 13 | $\vec{a}=\{-3;-2;5\};\vec{b}=\{-2;3;-2\};\vec{c}=\{4;2;-1\}$ |
| 6 | $\vec{a}=\{5;-1;5\};\vec{b}=\{0;-3;0\};\vec{c}=\{-4;6;1\}$ | 14 | $\vec{a}=\{8;-2;1\};\vec{b}=\{4;-1;2\};\vec{c}=\{2;5;-1\}$ |
| 7 | $\vec{a}=\{2;0;-5\};\vec{b}=\{-2;1;2\};\vec{c}=\{2;-2;3\}$ | 15 | $\vec{a}=\{0;2;5\};\vec{b}=\{2;4;2\};\vec{c}=\{1;-2;-1\}$ |
| 8 | $\vec{a}=\{2;6;-1\};\vec{b}=\{2;0;-1\};\vec{c}=\{1;-2;3\}$ | 16 | $\vec{a}=\{3;2;5\};\vec{b}=\{-2;-3;12\};\vec{c}=\{2;0;1\}$ |

**Завдання 3.**

1. Площа трикутника $S=8$ кв.од.: дві його вершини $A(1;-2)$ *і* $B(2;3)$, а третя вершина лежить на прямій $2x+y-2=0$. Визначити координати цієї вершини.
2. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат: а) паралельно; б) перпендикулярно до прямої $3x-4y+5=0$.
3. Знайти проекцію точки $A(4;6)$ на пряму $5x-4y-3=0$.
4. Дано вершини трикутника $A(1;-1), B(2;1), C(3;2)$. Знайти рівняння висоти проведеної з вершини *B*.
5. Знайти точку, симетричну з точкою $B(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $C(3;-4)$ *і* $D(-1;-2)$.
6. Знайти кут між прямими $3x+2y-4=0$ *і* $5x-2y+17=0$.
7. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін цього квадрата, що проходять через точку *A*, та рівняння іншої його діагоналі.
8. З точки $A(-2;3)$ під кутом $\alpha$ до осі $Ox$ напрямлено промінь світла. Дійшовши до осі $Ox$, промінь відбивається. Знайти рівняння прямих, на яких лежать напрямлений і відбитий промені, якщо $tg\alpha=\sqrt{3}$.
9. Визначити, при яких значеннях $m$ і $n$ пряма $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ паралельна до осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, величина якого дорівнює *–3*. Записати рівняння цієї прямої.
10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$ *і* $2x+3y+7=0$, а також одну з його вершин $A(-2;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.
11. Обчислити віддаль між паралельними прямими $4x-3y+15=0$ і $8x-6y+25=0$.
12. Скласти рівняння бісектрис кутів, що утворюються при перетині двох прямих $x-2y-3=0$ *і* $2x+4y+7=0$.
13. Обчислити відхилення точки $A(-2;1)$ від прямої $L: 3x-4y+15=0$.
14. Знайти кут між прямими, заданими рівняннями:
 а) $3x-2y+7=0$ *і* $2x+3y-3=0$; б) $5x-y+7=0$ *і* $3x+2y=0$.
15. Дана пряма $L: 2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(2;1)$ під кутом $\alpha=45^0$ до даної прямої.

**Завдання 4.**

1. Рівняння однієї із сторін квадрата $x+3y-5=0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1,0)$ – точка перетину його діагоналей. Зробити малюнок.
2. Дані рівняння однієї із сторін ромба $x-3y+10=0$ і однієї з його діагоналей $x+4y-4=0$; діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0;1)$. Знайти рівняння інших сторін ромба. Зробити малюнок.
3. Рівняння двох сторін паралелограма $x+2y+2=0$ і $x+y-4=0$, а рівняння однієї з його діагоналей $x-2=0$. Знайти координати вершин паралелограма. Зробити малюнок.
4. Дані дві вершини $A(-3;3)$ і $B(5;-1)$ і точка $D(4;3)$ перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.
5. Дані вершини $A(-3;-2)$, $B(4;-1)$, $C(1;3)$ трапеції *ABCD* $(AD \parallel BC)$. Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини *D* цієї трапеції. Зробити малюнок.
6. Дані рівняння двох сторін трикутника $5x-4y+15=0$ і $4x+y-9=0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0;2)$. Скласти рівняння третьої сторони трикутника. Зробити малюнок.
7. Дані дві вершини $A(2;-2)$ і $B(3;-1)$ і точка $P(1;0)$ перетину медіан трикутника *ABC*. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину *C*. Зробити малюнок.

8. Дані рівняння двох висот трикутника $x+y=4$ і $y=2x$ і одна з його вершин $A(0;2)$. Скласти рівняння сторін трикутника. Зробити малюнок.

9. Дані рівняння двох медіан трикутника $x-2y+1=0$ і $y-1=0$ і одна з його вершин $A(1;3)$. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.

10. Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x-2y-8=0$ і $5x+2y+8=0$, а середина третьої сторони співпадає з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони. Зробити малюнок.

11. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від початку координат і від точки $A(5;0)$ відноситься як *2:1*.

12. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(-1;0)$ в два рази менша відстані її від прямої $x=-4$.

13. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2;0)$ і від прямої $5x+8=0$ відносяться, як *5:4*.

14. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої знаходиться в два рази далі від точки $A(4;0)$, як від точки $B(1;0)$.

15. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2;0)$ і від прямої $2x+5=0$ відносяться, як *4:5*.

**Завдання 5.**

1. Дано точки $A(2;\ 1;\ 3)$ і $B(3;\ -1;\ 2)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A* і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.
2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2;\ 1;\ -4)$ і паралельна до векторів $\vec{a}=\{1;\ -1;\ 3\}$ і $\vec{b}=\{-2;\ 1;\ 1\}$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;\ -1;\ 3)$ і $B(3;\ 1;\ 2)$ паралельно до вектора $\vec{a}=\{3;\ -1;\ 4\}$.
4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1;\ 2;\ 3)$ та $B(-2;\ -1;\ 3)$ і перпендикулярна до площини $x+2y-2z+5=0$.
5. Знайти двогранний кут, що утворюються площинами $5x-3y+4z-7=0$ і $3x-4y-2z-6=0$.
6. Визначити, при яких значеннях *a* і *c* рівняння $ax+3y-2z+5=0$ і $2x-5y+cz+3=0$ задають паралельні площини.
7. Визначити, при якому значенні *b* рівняння $5x+y-3z-4=0$ і $2x+by+3z+11=0$ задають взаємно-перпендикулярні площини.
8. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $10x+6y-5z-30=0$ і координатними площинами.
9. Записати канонічне рівняння прямої, заданої загальними рівняннями: $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.
10. Знайти гострий кут між прямими $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$ і $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{4}$.
11. При якому значенні *m* прямі $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ і $\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ перетинаються?
12. Знайти тупий кут між прямими $x=3t-2,\ y=0,\ z=-t+3$ і $x=2t-1,\ y=0,\ z=t-3$.
13. Скласти рівняння руху точки $M(x;\ y;\ z)$, яка з початкового положення $M_0(3;\ -1;\ -5)$ рухається прямолінійно і рівномірно в напрямку вектора $\vec{l}=\{-2;\ 6;\ 3\}$ з швидкістю, величина якої $|\vec{v}|=21$.
14. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$ і площини $x-2y+z-15=0$.

15. При якому значенні $c$ пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна до площини $2x-y+cz-2=0$?

**Завдання 6.**

1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(1;\,-1)$, якщо пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до цього кола.

2. Яка лінія визначається рівнянням: а) $y=-\sqrt{25-x^2}$ ; б) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$ ?

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) його мала вісь дорівнює 24, а віддаль між фокусами $2c=10$; б) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$; в) віддаль між його директрисами дорівнює 5 і $2c=4$; г) його мала вісь дорівнює 6, а віддаль між директрисами – 13.

4. Дано рівняння еліпса $9x^2+5y^2=45$. Знайти: а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

5. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ віддаль яких до лівого фокуса дорівнює 2,5.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) віддаль між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$; б) рівняння її асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c=20$; в) віддаль між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

7. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{32}=1$ віддаль яких до правого фокуса дорівнює 4,5.

8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо а) парабола розташована симетрично відносно осі $OX$ і проходить через точку $A(-1;\,3)$; б) парабола розташована симетрично відносно осі $OY$ і проходить через точку $A(4;\,-8)$

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$, а віддаль між директрисами = $22\frac{2}{13}$.

10. Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{64}=1$. Знайти: а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

11. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$, а віддаль між директрисами = $12\frac{4}{5}$.

12. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована симетрично відносно осі $OY$ і проходить через точку $C(1;\,1)$.

13. Яка лінія визначається рівнянням а) $y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$; b) $x=-5\sqrt{-y}$ ?

14. Яка лінія визначається рівнянням а) $y=-\sqrt{x^2-16}$ ; b) $x=-3\sqrt{-y}$ ?

15. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що віддаль між його директрисами дорівнює 32 і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

**Завдання 7**. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності або застосувавши першу та другу важливі границі.

| № | Обчислити границі функцій | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{x}$ |
| 2 | $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ |
| 3 | $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{3-\sqrt{5+x}}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+4}{5x^3-8}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$ |
| 4 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ |
| 5 | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-10x^2-6x+5}{5x^2+8x+3}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$ |
| 6 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$ |
| 7 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{5x^2-8x+3}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{1+5x^2-2x^3}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^{x}$ |
| 8 | $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ |
| 9 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ |
| 10 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{6x}$ |
| 11 | $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{1-3x^2+x^4}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$ |
| 12 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ |
| 13 | $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-2x+1}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ |
| 14 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{5x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$ |
| 15 | $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(x-1)\cdot x}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 4x}{\sin 2x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{2x}$ |

**Завдання 8.**

| № | Знайти $y'$ | | | Знайти $y', dy, y'', d^2y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^3}$ | $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ | $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ | $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ |
| 2 | $y = x^2 tg\, 2x + \frac{x}{e^x}$ | $y^3 - 3y + 2x = 0$ | $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctg\ t \end{cases}$ | $y = \left(5x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ |
| 3 | $y = (x^2 - 1)\sin 3x + \frac{2^x}{x}$ | $y^2 - 2xy + a^2 = 0$ | $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ | $y = tg^4 \frac{x}{4}$ |
| 4 | $y = x^5 (x^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}) + \frac{2x}{3^x}$ | $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ | $\begin{cases} x = t \cdot (1 - \sin t) \\ y = t \cdot \cos t \end{cases}$ | $y = \sin\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$ |
| 5 | $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + (x^3 - 1)\cos 3x$ | $y = x + arctg\ y$ | $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$ | $y = tg^3 \frac{x}{6}$ |
| 6 | $y = \frac{2x}{x^2 + 4} + x \arccos 3x$ | $y = 1 + xe^y$ | $\begin{cases} x = 2 \cdot tg\, t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ | $y = \ln\left(3x + \frac{1}{\ln x}\right)$ |
| 7 | $y = \frac{\sin x}{x^2} + x^3 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 6\sqrt{x})$ | $x^3 + y^3 - x^2 y = 25$ | $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ | $y = \left(3x - \frac{1}{e^x}\right)^{10}$ |
| 8 | $y = \frac{4x}{x^2 - 6} + 2x arctg x$ | $\lg(x + y) - \frac{x}{y} = 10$ | $\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t) \\ y = a \cdot (1 - \cos t) \end{cases}$ | $y = 6\cos \frac{x}{3}$ |
| 9 | $y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x \ln x$ | $y = 2x + \arccos 3y$ | $\begin{cases} x = \frac{1 + t^3}{t^2 - 1} \\ y = \frac{1}{t^2 - 1} \end{cases}$ | $y = ctg^2 \frac{x}{8}$ |
| 10 | $y = \frac{x}{2x - 1} + x arcctg x$ | $x + y = 2^{x-y}$ | $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t^3} \\ y = 2t \sin t \end{cases}$ | $y = \ln(x^2 + \ln x)$ |
| 11 | $y = (x^3 - \frac{10}{\sqrt{x}}) tg x + \frac{2x}{e^x + 4}$ | $x^2 + y^2 - 4xy = -2$ | $\begin{cases} x = \lg(2 + t^3) \\ y = arcctg\, t - 2t \end{cases}$ | $y = 10e^{\sin(5x^2 + x)}$ |
| 12 | $y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^3}$ | $2arctg \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$ | $\begin{cases} x = \arccos t^2 \\ y = t \sin \sqrt{t} \end{cases}$ | $y = \sqrt{tg \frac{x}{2}}$ |
| 13 | $y = \frac{2x}{\cos x} + x \arcsin 4x$ | $y = \ln(x + y)$ | $\begin{cases} x = e^{2t} \sin 3t \\ y = e^{2t} \cos 3t \end{cases}$ | $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ |
| 14 | $y = \frac{tgx}{x^2} + x^3 (\frac{1}{x^8} + \sqrt[4]{x})$ | $\arcsin(x + y) = xy$ | $\begin{cases} x = \frac{1 + t}{t} \\ y = \frac{t - 1}{t} \end{cases}$ | $y = \sin \sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}$ |
| 15 | $y = \frac{3x^2}{\cos x} + x \arccos 2x$ | $x^3 + y^3 + 6xy = 8$ | $\begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$ | $y = \log_3 (x^2 - 1)$ |

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

## Тема: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### Теоретичні відомості

### 1. Застосування диференціального числення до дослідження функцій

**$1^0$. Монотонність функції**

**Означення 1**. *Функцію* $f(x)$ називають ***зростаючою (спадною)*** на деякому проміжку $X=(a;\,b)$, якщо для будь-яких $x_1,\,x_2 \in X$ таких, що $x_1<x_2$, виконується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ (відповідно $f(x_1)>f(x_2)$).

**Теорема 1 (достатні умови строгої монотонності)**. *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на проміжку* $X$ *і* $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ *на* $X$, *то функція* $f(x)$ *є строго зростаюча (спадна) на цьому проміжку.*

*Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на проміжку* $X$ *і* $f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right)$ *на* $X$, *то функція на цьому проміжку не спадає (не зростає).*

**Теорема 2 (необхідна умова зростання)**. *Якщо диференційована на проміжку* $X$ *функція зростає (спадає), то* $f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right)$ *на* $X$.

З наведених теорем випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають ***стаціонарними точками***), або точками, де похідна не існує. Точки в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними точками*** або ***критичними точками першого роду***.

**Правило знаходження інтервалів монотонності функції** $f(x)$:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти похідну даної функції.

3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де похідна від'ємна – спадає.

**$2^0$. Локальний екстремум функції**

**Означення 2**. Точку $x_0$ називають *точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції* $f(x)$, якщо при всіх $x\ne x_0$ із деякого δ-околу точки $x_0$ виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$ (відповідно $f(x)<f(x_0)$).

*Якщо в деякому δ-околі точки* $x_0$ *виконується нерівність* $f(x)\ge f(x_0)$ *(відповідно* $f(x)\le f(x_0)$*), то точку* $x_0$ *називають* ***точкою локального мінімуму (максимуму) функції*** $f(x)$.

Точки локального мінімуму й локального максимуму функції називають *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називають відповідно *локальними мінімумом і локальним максимумом* або *локальним екстремумом*.

**Теорема 3 (необхідні умови екстремуму)**. *Якщо точка* $x_0$ *є точкою екстремуму функції* $f(x)$ *і в цій точці функція диференційована, то* $f'(x_0)=0$.

З теореми 3 випливає, що не всяка точка $x_0$, в якій похідна $f'(x_0)=0$, є екстремальною.

**Теорема 4 (перша достатня умова локального екстремуму).** *Нехай* $x_0$ *– критична точка функції* $f(x)$*, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл* $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ *точки* $x_0$*, в якому функція* $f(x)$ *має похідну* $f'(x)$*, крім, можливо, точки* $x_0$*, тоді:*

1) *якщо в інтервалі* $(x_0-\delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x)>0$*, а в інтервалі* $(x_0;\ \ x_0+\delta)$ *похідна* $f'(x)<0$*, то* $x_0$ *є точкою локального максимуму функції* $f(x)$;

2) *якщо в інтервалі* $(x_0-\delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x)<0$*, а в інтервалі* $(x_0;\ \ x_0+\delta)$ *похідна* $f'(x)>0$*, то* $x_0$ *є точкою локального мінімуму функції* $f(x)$;

3) *якщо в обох інтервалах* $(x_0-\delta;\ x_0)$ *і* $(x_0;\ x_0+\delta)$ *похідна* $f'(x)$ *має той самий знак, то* $x_0$ *не є екстремальною точкою функції* $f(x)$.

**Правило знаходження екстремуму функції** $f(x)$:

1. Знайти стаціонарні точки заданої функції, розв'язавши рівняння $f'(x_0)=0$, причому з розв'язків вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області визначення функції.
2. Знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує (якщо критичних точок функція $f(x)$ не має, то вона не має і екстремумів).
3. Дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення знайденими критичними точками. Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку (зліва на право) змінює знак з + на –, то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з – на +, то ця точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною точкою заданої функції.
4. Знайти значення функції в екстремальних точках.

### $3^0$. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді, згідно з теоремою Вейєрштрасса, функція на цьому відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значень. Якщо ця функція досягає свого найбільшого (найменшого) значення на інтервалі $(a;\ b)$, то воно, очевидно, буде максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Але функція може досягати свого найбільшого (найменшого) значення на одному з кінців відрізка $[a;b]$.

**Правило знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значень:**

1. Знайти критичні точки функції, які належать відрізку $[a;b]$.
2. Обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках $a$ і $b$.
3. Серед цих значень вибрати найбільше (найменше) число.

### $4^0$. Опуклість та вгнутість графіка. Точки перегину

**Означення 3.** Крива $y=f(x)$ називається *опуклою (вгнутою) на інтервалі* $(a;b)$, якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) точок її дотичних на цьому інтервалі.

**Теорема 5.** *Якщо в усіх точках інтервалу* $(a;b)$ *друга похідна* $f''(x)>0$*, то крива* $y=f(x)$ *є вгнутою на цьому інтервалі; якщо* $f''(x)<0$ *на інтервалі* $(a,b)$ *то крива опукла на цьому інтервалі.*

**Означення 4**. *Точкою перегину графіка неперервної функції* називається точка, яка розділяє інтервали, в яких функція опукла і вгнута.

**Правило.** Точка $x=x_0$ буде точкою перегину кривої $y=f(x)$, якщо $f''(x_0)=0$ або не існує, а знаки $f''(x)$ зліва $(x<x_0)$ та справа $(x>x_0)$ різні.

**$5^0$. Асимптоти кривої**

**Означення 5**. Пряму лінію називають *асимптотою кривої* $y = f(x)$, якщо відстань точки $M$ кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддалені точки $M$ в нескінченість.

Асимптоти бувають вертикальні, горизонтальні та похилі.

Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна із границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$.

Якщо лише $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = b$, то функція має лише односторонню асимптоту.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$, де $k$ і $b$ – коефіцієнти, які обчислюються за формулами: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx)$. Якщо хоча б одна з границь $k$ або $b$ не існує, або дорівнює нескінченості, то крива похилої асимптоти не має.

**$6^0$. Схема дослідження функції та побудова її графіка**

Найбільш наглядне уявлення про зміну функції дає її графік. Тому побудова графіка є заключним етапом дослідження функції, на якому використовуються усі результати її дослідження.

**Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба**:

1. Знайти область існування функції.
2. Знайти, якщо це можна, точки перетину графіка функції з координатними осями ($Ox$ та $Oy$). Для цього треба розв’язати дві системи рівнянь:
$$\begin{cases} y = f(x); \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = f(x); \\ x = 0, \end{cases}$$
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти точки розриву і дослідити їх.
5. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів, та значення функції в цих точках.
6. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.
7. Знайти асимптоти кривої.
8. Побудувати графік функції.

## 2. Комплексні числа

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв’язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від’ємних чисел. Щоб ця дія стала можливою, ввели множину нових чисел.

**$1^0$. Означення комплексного числа та уявної одиниці**

*Комплексним числом* називається вираз $z = a + bi$, де $a$ і $b$ – будь-які дійсні числа, $i$ – уявна одиниця, ($a$ – дійсна частина, $b$ – уявна частина комплексного числа). Слово "комплексний" означає складений. Число $i$ називають *уявною одиницею* (перша буква латинського слова *imaginarius* – уявний). Тобто, для символу $i$ виконується рівність $i^2 = -1$.

Запис $a + bi$ називають *алгебраїчною формою комплексного числа*.

Комплексні числа – це розширення числової системи дійсних чисел. Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.

Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ *рівні* між собою тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$, тобто, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

Числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають *спряженими*.

Вираз $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ називається *тригонометричною формою комплексного числа*, де $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ називається модулем, $\varphi = Arg\ z$ – аргументом комплексного числа.

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho}; \ \sin\varphi = \frac{b}{\rho} \ ; \quad \varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Вираз $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ називається *показниковою формою комплексного числа*.

**2⁰. Дії над комплексними числами**.

Нехай дано два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тоді справедливі рівності:

а) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

б) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$.

**3⁰. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.**

Нехай дано два комплексні числа $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ і $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$. Тоді справедливі рівності

а) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

б) формула Муавра $z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$;

в) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

г) добування кореня $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \cdot (\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$.

Надаючи *k* різних значень 0; 1; 2;…; *n* –1 отримаємо *n* різних значень кореня.

## 3. Невизначений інтеграл

### $1^0$. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

**Означення 1.** *Функція* $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і в кожній точці $x \in (a;b)$ $F'(x) = f(x)$.

**Теорема 1**. *Якщо функція* $F(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$*, то всяка інша первісна функції* $f(x)$ *на цьому самому проміжку має вигляд* $F(x)+C$*, де* $C$ *– довільна стала*.

**Означення 2.** Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають $\int f(x)\,dx$, отже

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C. \qquad (1)$$

Тут символ $\int$ – це знак інтеграла, $f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, $x$ – змінна інтегрування, $C$ – стала інтегрування.

### $2^0$. Основні властивості невизначеного інтеграла

**1**. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

**2**. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

**3**. $\int dF(x) = F(x)+C$.

**4**. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u)+C$.

**5.** $\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$, де $C$ – стала.

**6.** $\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)]dx = C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + C_n\int f_n(x)\,dx$.

### $3^0$. Таблиця основних інтегралів

| № п/п | $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ | Перевірка умовою $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ | $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)' = x^n$ |
| 2 | $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ |
| 3 | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$ | $\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)' = \frac{\ln a\cdot a^x}{\ln a} = a^x$ |
| 4 | $\int e^x dx = e^x + C$ | $(e^x+C)' = e^x$ |
| 5 | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ | $(\sin x + C)' = \cos x$ |
| 6 | $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ | $(-\cos x + C)' = \sin x$ |
| 7 | $\int tg\,x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | |
| 8 | $\int ctg\,x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ | |
| 9 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x}dx = tg\,x + C$ | $(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$ | $(-ctg\, x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 11 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ | $\left(\arcsin \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ |
| 12 | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ | $\left(\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2 + a^2}$ |
| 13 | $\int \sqrt{a + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2}\ln\left\|x + \sqrt{a + x^2}\right\| + C$ | |
| 14 | $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C$ | |
| 15 | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x - a}{x + a}\right\| + C$ | |
| 16 | $\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + A}\right\| + C$ | |

## $4^0$. Методи інтегрування

### 4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

### 4.2. Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введені під знак інтеграла нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обґрунтування такого методу дається теоремою.

**Теорема**. *Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і нехай функція $x = \varphi(t)$, ($dx = \varphi'(t)\,dt$) визначена і диференційована на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множина значень цієї функції є проміжок $(a;b)$. Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (2)$$

***Наслідок* 1**. *Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$, то доцільно зробити заміну $\varphi(x) = t$. Тоді $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)dt$.*

***Наслідок* 2**. *Якщо підінтегральна функція має вигляд $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни $\varphi(x) = t$, $\varphi'(x)dx = dt$ інтеграл зводиться до табличного.*

Справді, $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\varphi(x)) + C$.

### 4.3. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v du$. Звідки, з врахуванням властивості $3^0$ невизначеного інтеграла, отримаємо формулу для інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (3)$$

## 4.4. Інтегрування основних класів функцій

### 1. Інтегрування раціональних функцій

Нехай треба знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

Враховуючи те, що раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, дістанемо:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_l(x)dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена береться безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування найпростіших раціональних дробів.

### 2. Інтегрування найпростіших дробів

***Найпростішими* (*елементарними*) *дробами*** називаються дроби вигляду:

$I.\ \frac{A}{x-a};$ $\quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k},\ k \ge 2,\ k \in N;$

$III.\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0;$ $\quad IV.\ \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^k},\ p^2-4q<0,\ k \ge 2,\ k \in N.$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типів зводиться до інтегралів:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу III типу $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Якщо зробити заміну $x = t - \frac{p}{2},\ dx = dt$ і ввести позначення $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt = \int \frac{At+B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + \left(B - A\cdot\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{t^2+a^2}dt.$$

Перший інтеграл знаходиться безпосередньо:

$$\int \frac{t}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C,$$

а другий є табличним (номер 1), оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Тоді

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{a}arctg\frac{t}{a} + C, \text{ де } t = x + \frac{p}{2}.$$

Оскільки $t^2 + a^2 = x^2 + px + q$, то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу IV типу. Тобто треба знайти $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, де $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Виділимо в чисельнику похідну від квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

Перший інтеграл у правій частині рівності знаходиться за допомогою заміни $x^2+px+q=t,\ (2x+p)=dt$, а другий перетворимо так, виділивши в знаменнику повний квадрат:

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{1}{\left[\left((x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}dx.$$

Ввівши заміну $x+\frac{p}{2}=z,\ dx=dz$ і позначення $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, одержимо

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{1}{(z^2+a^2)^n}dz.$$

**Зауваження**. Для інтеграла $I_n = \int \frac{1}{(z^2+a^2)^n}dz,$ де $n$ – ціле додатне число, має місце наступна рекурентна формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Ця формула дає можливість після $(n-1)$-кратного застосування звести даний інтеграл $I_n$ до табличного інтегралу $I_1 = \int \frac{1}{z^2+a^2}dz$.

**Приклад**. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{x^5-x^2}dx$.

► Підінтегральний дріб неправильний, то необхідно з нього спочатку виділити цілу частину, а потім правильний раціональний дріб розкласти на елементарні дроби Розкладемо знаменник на множники:

$$x^5-x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тоді

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Звільнившись від знаменника, дістанемо:

$$1=Ax(x-1)(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

При $x=0$ маємо $1=-B$, тобто $B=-1$; при $x=1$ маємо $1=3C$, тобто $C=\frac{1}{3}$.

Перепишемо попередню рівність у вигляді

$$1=(A+C+D)\cdot x^4+(C+B+E-D)\cdot x^3+(-E+C)\cdot x^2-Ax-B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $x^2,\ x^3,\ x^4$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C-E=0, \\ B+C-D+E=0, \\ A+C+D=0, \end{cases}$$

з якої знаходимо: $E=\frac{1}{3},\ D=-\frac{1}{3},\ A=0$. Таким чином,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Підставивши в інтеграл дістанемо:

$$\int\frac{1}{x^5-x^2}dx=-\int\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\cdot$$

### 3. Інтегрування раціональних виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x, tg\,x, ctg\,x)dx,$ де $R$ є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$, за допомогою підстановки $t=tg\,\frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної $t$, а отже, виражається через елементарні функції.

Дійсно,

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ tg\,x=\frac{2t}{1-t^2},ctg\,x=\frac{1-t^2}{2t},\ x=2arctg\,t,dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

тому

$$\int R(\sin x,\cos x, tg\,x, ctg\,x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2},\frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від $t$.

В окремих випадках, для знаходження інтеграла вигляду $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ можна скористатися підстановками.

**1⁰**. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$ тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\cos x = t$, $-\sin x dx = d\cos x = dt$.

**2⁰**. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

**3⁰**. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, тобто: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $tg\, x = t$ або $ctg\, x = t$. У цьому випадку: $tg\, x = t$, $x = arctg\, t$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$.

**4. Інтегрування деяких типів функцій, що містять ірраціональності**

**1⁰.** Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{l}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ за допомогою підстановки $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ при $ad \neq bc$, де $n$ спільний знаменник дробів $\frac{m}{l}, \ldots, \frac{r}{s}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції від *t*.

Зокрема, при $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ інтеграл і підстановка мають вигляд: $\int R\left(x, x^{\frac{m}{l}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, $t^n = x$.

## 4. Визначений інтеграл та його застосування

**1⁰. Означення визначеного інтеграла**

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ така, що $f(x) \geq 0$ для усіх $x \in [a;\ b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ на $n$ частин: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Довжина цих частин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Виберемо точки $\xi_k$ такі, що $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ і обчислимо $f(\xi_k)$. *Інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ називається сума вигляду

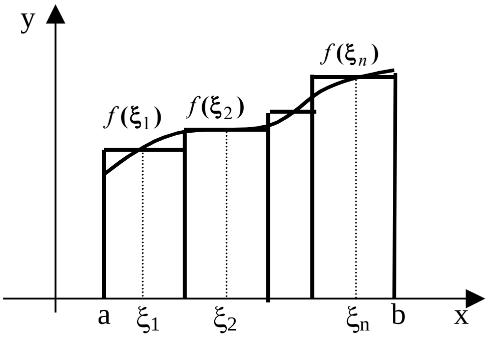


Рис. 1

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

*Визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

## $2^0$. Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$;  2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;  4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b]$;

6. Якщо $m$ та $M$ – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b] \quad (a<b)$, тобто $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

**7.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, де $a<b$ то знайдеться таке значення $\xi \in [a;b]$, що виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *середнім значенням функції* $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$.

## $3^0$. Правила обчислення визначеного інтеграла

***Формула Ньютона-Лейбніца***. Якщо функція $F(x)$є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

***Заміна змінної у визначеному інтегралі***. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \le t \le \beta,\ \ \varphi(a)=\alpha,\ \varphi(b)=\beta.$ Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то має місце рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

***Інтегрування частинами.*** Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int\limits_a^b udv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (5)$$

## $4^0$. Невласні інтеграли

*Невласними інтегралами* називаються: 1) інтеграли з нескінченими межами; 2) інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і інтегрована на довільному відрізку $[a;t]$, Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом першого роду* від функції

$f(x)$ на інтервалі $[a,+\infty]$ і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Якщо границя існує і скінчена, то невласний інтеграл називається *збіжний*, у протилежному випадку – *розбіжний*.

Аналогічно визначаються невласні інтеграл на $(-\infty;b]$ і $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^b f(x)dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_c^t f(x)dx.$$

Точку $x = b$ називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$.

Нехай функція неперервна на відрізку $[a;b-\delta]$ при довільному $\delta>0$такому, що $b-\delta>a$; тоді, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом другого роду* і записують: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx.$$

У даних випадках говорять, що інтеграли збігаються.

Якщо вказані границі нескінченні або не існують, то інтеграл також називається невласним інтегралом, але розбіжним.

## $5^0$. Застосування визначеного інтегралу.

### 5.1. Обчислення площ плоских фігур

**$1^0$.** Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)\ge 0,\quad y=0,\quad x=a,\ x=b$ обчислюється за формулою

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

**$2^0$.** Площа фігури, обмеженої лініями $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ $(f_2(x)\ge f_1(x))$, $x=a,\ x=b$, знаходиться за формулою

$$S=\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{2}$$

**$3^0$.** Якщо лінія задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),$ то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією лінією, віссю $Ox$ та прямими $x=a,\ x=b$, знаходиться за формулою

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \tag{3}$$

### 5.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

**$1^0$.** Якщо крива задана явно $y = f(x)$, $x\in[a;b]$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \tag{4}$$

**$2^0$.** Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{5}$$

### 5.3. Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі *Ох* криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю $Ox$ ($y = 0$), обчислюється за формулою

$$V == \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (6)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі $Ox$, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V == \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx. \qquad (7)$$

**5.4. Обчислення площі поверхні обертання**

Нехай крива задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі $Ox$. Тоді, площа поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі $Ox$, обчислюють за формулою $S = 2\pi\int f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. (8)

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1.** Знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $f(x) = x^3 - 12x + 7;\ [0;3]$ | **8** | $f(x) = x^4 + 4x;\ [-2;2]$ |
| **2** | $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2;\ [0;2]$ | **9** | $f(x) = 81x - x^4;\ [-1;4]$ |
| **3** | $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2;\ [-3;1]$ | **10** | $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x;\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ |
| **4** | $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x;\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ | **11** | $f(x) = 3 - 2x^2;\ [-1;3]$ |
| **5** | $f(x) = x^2 - 3x + 2;\ \left[\frac{1}{2};2\right]$ | **12** | $f(x) = x - \sin x;\ [-\pi;\pi]$ |
| **6** | $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1};\ [-1;\ 2]$ | **13** | $f(x) = 16x(x-1)^3;\ [-2;\ 3]$ |
| **7** | $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x;\ [0;\ 4]$ | **14** | $f(x) = 2x^2 - \ln x;\ [0;\ 3]$ |

**Завдання 2.** Знайти інтервали монотонності функції:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y = (x-2)^5(2x+1)^4$ | **8** | $y = \frac{x}{\ln x}$ |
| **2** | $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ | **9** | $y = x^2(a-x)^2$ |
| **3** | $y = x - e^x$ | **10** | $y = x + \frac{a^2}{x}\ (a > 0)$ |
| **4** | $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ | **11** | $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2$ |
| **5** | $y = 2x^2 - \ln x$ | **12** | $y = x - \ln(3 - x^2)$ |
| **6** | $y = x^2e^{-x}$ | **13** | $y = (x+2)^3 + 2x + 2$ |
| **7** | $y = x\sqrt{2 - x^2}$ | **14** | $f(x) = x^3 - \ln 2x$ |

**Завдання 3.** Знайти екстремум функції:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=2x^3-3x^2$ | **8** | $y=x\left(1-x\sqrt{x}\right)$ |
| **2** | $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$ | **9** | $y=x+\sqrt{3-x}$ |
| **3** | $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$ | **10** | $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$ |
| **4** | $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$ | **11** | $y=(x+1)^4+e^x$ |
| **5** | $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ | **12** | $y=\dfrac{2x}{\ln x}$ |
| **6** | $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$ | **13** | $f(x)=3x^4-8x^3+2$ |
| **7** | $y=x-\ln(1-x)$ | **14** | $f(x)=x^3-\ln 2x$ |

**Завдання 4.** Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=(x+2)^6+2x+2$ | **8** | $y=(x+1)^2(x-2)$ |
| **2** | $y=(x+1)^4+e^x$ | **9** | $y=x^4-4x^3+6x^2-4x$ |
| **3** | $y=3x^5-5x^4+3x-2$ | **10** | $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| **4** | $y=\ln\left(1+x^2\right)$ | **11** | $y=\dfrac{\ln x}{x}-3x$ |
| **5** | $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$ | **12** | $y=(x-1)\sqrt{x}$ |
| **6** | $y=x^4-8x^3+24x^2$ | **13** | $y=\ln\left(x^2-4\right)$ |
| **7** | $y=(x-4)^5+4x+4$ | **14** | $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$ |

**Завдання 5.** Знайти асимптоти кривої:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$ | **8** | $y=x+2arctgx$ |
| **2** | $y=2x+arctg\,\dfrac{x}{2}$ | **9** | $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$ |
| **3** | $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ | **10** | $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ |
| **4** | $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$ | **11** | $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ |
| **5** | $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$ | **12** | $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ |
| **6** | $y=x^2e^{-x}$ | **13** | $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ |
| **7** | $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ | **14** | $y=(x-1)e^{3x+1}$ |

**Завдання 6.** Обчислити:

1) $z_1+z_2$, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1^{10}$ $\sqrt[4]{z_1}$ ,

2) зобразити число $z_2$ у тригонометричній та показниковій формах.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $z_1 = 2 - i,\ \ z_2 = 1 + i$ | **8** | $z_1 = -1 - i,\ \ z_2 = 3 + i$ |
| **2** | $z_1 = 1 + 4i,\ \ z_2 = 4 - i$ | **9** | $z_1 = 2\sqrt{3} - i,\ \ z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ |
| **3** | $z_1 = 3 - i,\ \ z_2 = 3 + i$ | **10** | $z_1 = 2 - 2i,\ \ z_2 = 4 + i$ |
| **4** | $z_1 = -3 + 2i,\ \ z_2 = 1 - i$ | **11** | $z_1 = 6 - i,\ \ z_2 = i$ |
| **5** | $z_1 = 3 - \sqrt{3}i,\ \ z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ | **12** | $z_1 = 2 + 3i,\ \ z_2 = 2 - 2i$ |
| **6** | $z_1 = -2 + 2i,\ \ z_2 = 2 + i$ | **13** | $z_1 = 2 + i,\ \ z_2 = -1 + i$ |
| **7** | $z_1 = \sqrt{3} - i,\ \ z_2 = 1 + i$ | **14** | $z_1 = 1 - i,\ \ z_2 = 6 + i$ |

**Завдання 7**. Обчислити невизначені інтеграли.

1. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$; в) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; г) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; в) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$; г) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; д) $\int ctg^4 xdx$.

3. а) $\int \left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx$; б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int \frac{x^2+x+1}{x^5 - 2x^4 + x^3} dx$; д) $\int \frac{xdx}{x - \sqrt{x^2-1}}$.

4. а) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} dx$; б) $\int \arccos xdx$; в) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$; г) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx$; д) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. а) $\int \frac{x + arctgx}{1+x^2} dx$; б) $\int x^2 e^{-x} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; г) $\int \frac{x^4+1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$; д) $\int \sin 2x \cos 5xdx$.

6. а) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$; д) $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx$.

7. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx$; б) $\int (x^2+1)\ln 2xdx$; в) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$; г) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$; д) $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}$.

8. а) $\int e^x \ln(1+3e^x) dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$; в) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} dx$; г) $\int \frac{7x^3-9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$.

9. а) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; в) $\int x^3 e^x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$; д) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$.

10. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; в) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx$; г) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int \frac{x^4}{1-x} dx$; в) $\int x^2 \cos^2 xdx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$; д) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

12. а) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; б) $\int x^2 \sin 4xdx$; в) $\int \frac{x+5}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx$; г) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; д) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

13. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; б) $\int tgxdx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; г) $\int \frac{dx}{x^2-5x-6}$; д) $\int \ln(x^2+1)dx$.

14. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; б) $\int \frac{x}{x+4} dx$; в) $\int x\cos^2 xdx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; д) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

**Завдання 8**. Дослідити невласний інтеграл на збіжність:

1. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.
2. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.
4. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.
5. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.
6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.
7. $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.
8. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$.
9. $\int\limits_1^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.
10. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.
11. $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.
12. $\int\limits_0^{1} x\ln xdx$.
13. $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$.
14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

**Завдання 9**. Застосування визначеного інтеграла:

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=3x^2+1$ і прямою $y=3x+7$.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=\frac{1}{4}\left(x^2-3x\right)$ і віссю абсцис та прямою $x=5$.
3. Обчислити площу фігури обмеженої кривою $y=\ln x$ і прямими $x=e,\ x=e^2,\ y=0$.
4. Обчислити площу фігури обмеженої кривою $y=\arcsin x$ і прямими $x=0,\ y=\frac{\pi}{2}$.
5. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ між точками її перетину з віссю абсцис.
6. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ від $x=\frac{1}{2}$ до $x=\frac{3}{2}$.
7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертання навколо осі $Ox$ фігури, обмеженої віссю $Ox$ і параболою $y=2x-x^2$.
8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертання навколо осі $Ox$ фігури, обмеженої віссю параболою $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$.
9. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ навколо осі абсцис.
10. Обчислити площу поверхні кулі, утвореної обертанням кола $x^2+y^2=R^2$ навколо діаметра.
11. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{x^2}{2}$ від $x=0$ до $x=1$.
12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертання навколо осі $Ox$ фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x}{2},\ x=4,\ x=6$.
13. Обчислити площу поверхні тіла, яке утворюється обертанням навколо осі $Ox$ фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x},\ x=0,\ x=1$.
14. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=-x^2$ і $x+y+2=0$.

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

## Тема: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### Теоретичні відомості

**1. Розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку.**

**1⁰.** Рівняння вигляду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

називається рівнянням з *відокремлюваними* змінними. Шляхом ділення рівняння на добуток $\varphi_1(y)f_2(x) \neq 0$, воно зводиться до рівняння із *відокремленими* змінними.

Диференціальне рівняння вигляду $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ називається рівнянням з *відокремленими* змінними. Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\int P(x)dx + \int Q(x)dy = C.$$

**2⁰.** Функція $f(x, y)$ називається *однорідною* функцією *n*-го виміру відносно змінних *x* та *y*, якщо для довільного $t \neq 0$ має місце тотожність $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Для розв'язання однорідного диференціального рівняння вводиться заміна:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Тоді $y = ux,\ \frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$, де $u = u(x)$ – невідома функція.

Отже, рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

**3⁰.** *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної.

Лінійне рівняння має вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (3)$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Один з методів інтегрування даного рівняння (**метод Бернуллі**) полягає в тому, що розв'язок рівняння (3) шукають у вигляді добутку $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – невідомі функції, причому одна з них довільна (але тотожно не дорівнює нулю).

Загальний розв'язок лінійного рівняння знаходиться за формулою:

$$y = \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)dx},$$

де C – довільна стала.

**4⁰.** Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4}$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина являє собою повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy\equiv du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Загальний інтеграл рівняння (4) має вигляд $u(x,y)=C$.

Для того, щоб рівняння (4) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\quad (P_y^{'}\equiv Q_x^{'}),\text{ інакше } P_y^{'}-Q_x^{'}\equiv 0. \tag{5}$$

Розв’язок рівняння (4) знаходимо наступним чином.

З рівності $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, шляхом інтегрування, знаходимо

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=f(x,c)+\varphi(y).$$

Далі, з умови $\frac{\partial u}{\partial y}=f_y^{/}(x,y)+\varphi^{/}(y)=Q(x,y)$, знаходимо функцію

$$\varphi(y)=\int(Q(x,y)-f_y^{/}(x,y))dy.$$

Тоді загальний інтеграл знаходять за формулою:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\int(Q(x,y)-f_y^{/}(x,y))dy=c.$$

Якщо умова (5) не виконується, тобто ліва частина рівняння (4) не є повним диференціалом і задовольняє умови теореми Коші, то існує така функція $\mu=\mu(x,y)$, що $\mu\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big)=du=0$. Функція $\mu(x,y)$ називається *інтегрувальним множником* і задовольняє умову $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

Якщо інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$ – залежить тільки від $x$, то його знаходять з умови $\frac{d\ln\mu}{\partial x}=\frac{1}{Q(x;y)}\cdot\left(\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}\right)$.

Якщо інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$ – залежить тільки від $y$, то його знаходять з умови $\frac{d\ln\mu}{\partial y}=\frac{1}{P(x;y)}\cdot\left(\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\right)$.

## 2. Розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків.

**$1^0$. Диференціальні рівняння 2-го порядку, які допускають пониження порядку.**

Розглянемо метод пониження порядку – це один із методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане рівняння зводиться до розв'язку рівняння 1-го порядку.

Розглянемо <u>три випадки</u>:

**1)** Нехай задано диференціальне рівняння виду:

$$y'' = f(x), \qquad \text{яке не містить } y \text{ та } y'.$$

Вводимо нову функцію: $z(x) = y'$, тоді $z'(x) = y''$. Шуканий розв'язок знаходимо за формулою:

$$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2,$$

де $C_1$, $C_2$ – довільні сталі.

**2)** Нехай задано диференціальне рівняння виду:

$$y'' = f(x, y'), \qquad \text{яке не містить } y.$$

Тоді заміною $z(x) = y'$ (а $z'(x) = y''$) рівняння перетвориться відносно функції $z$:

$z' = f(x, z)$. При розв'язанні останнього рівняння, знайдемо $z(x) = \varphi(x, C_1)$. Підставляючи замість $z(x)$ похідну $y'$, та інтегруючи знову, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

де $C_1$, $C_2$ – довільні сталі.

**3)** Нехай задано диференціальне рівняння виду:

$$y'' = f(y, y'), \qquad \text{яке не містить } x.$$

Вводимо нову функцію $z(y) = y'$.

Тоді, $y'' = z'(y) = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dy'}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot z(y) = z'_y \cdot z$

Підставляючи в рівняння вирази для $y'$ та $y''$, отримаємо рівняння 1-го порядку відносно $z$ як функції від $y$: $z \cdot \dfrac{dz}{dy} = f(y, z)$. Розв'язуючи його, знайдемо $z(y) = \varphi(y, C_1)$.

Так як $z = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$. Звідси, $dx = \dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)}$ маємо рівняння з відокремленими змінними, з якого знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

де $C_1$, $C_2$ – довільні сталі.

**$2^0$ Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.**

Рівняння вигляду $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ називається *лінійним однорідним* рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Нехай дано лінійне однорідне рівняння із сталими коефіцієнтами, тобто рівняння вигляду $y'' + py' + qy = 0$, де $p$ і $q$ – деякі сталі. Рівняння вигляду $k^2 + pk + q = 0$ називається *характеристичним рівнянням* даного лінійного однорідного рівняння, а многочлен $k^2 + pk + q$ – його характеристичним многочленом.

Під час розв'язування однорідного диференціального рівняння спочатку розв'язують відповідне йому характеристичне рівняння. Можливі **три випадки**:

**1.** Характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ має <u>різні дійсні корені</u> $k_1$ і $k_2$..Тоді функції $e^{k_1 x}$ і $e^{k_2 x}$ утворюють фундаментальну систему його розв'язків і загальний розв'язок даного рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі.

**2.** Характеристичне рівняння має дійсні, кратні корені. Тоді фундаментальну систему функцій даного рівняння утворюють функції $e^{kx}$ і $xe^{kx}$, а його загальний розв'язок має вигляд: $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$.

**3.** Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені $\alpha + i\beta$ і $\alpha - i\beta$. Тоді фундаментальну систему розв'язків даного рівняння утворюють функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, загальний розв'язок має вигляд: $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називається *лінійним неоднорідним* рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Його *загальним розв'язком* є сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння скористаємось **методом варіації сталих**, згідно з яким частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y = uC_1(x) + vC_2(x),$$

де $u$, $v$ – фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ – невідомі функції, які є розв'язками системи.

$$\begin{cases} C_1' \cdot u + C_2' \cdot v = 0 \\ C_1' \cdot u' + C_2' \cdot v' = f(x) \end{cases}$$

Ввівши до розгляду визначник Вронського $w = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, та скориставшись формулами Крамера, розв'язок системи можемо записати у вигляді:

$$C_1' = -\frac{v \cdot f}{w}, C_2' = \frac{u \cdot f}{w}, \text{ звідки } C_1(x) = -\int \frac{v \cdot f}{w} dx + \tilde{C}_1,\ C_2(x) = \int \frac{u \cdot f}{w} dx + \tilde{C}_2 .$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$y = \tilde{C}_1 u + \tilde{C}_2 v - u\int \frac{v \cdot f}{w} dx + v\int \frac{u \cdot f}{w} dx$, де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – довільні сталі, які для зручності будемо позначати $C, D$.

### $3^0$ Диференціальні рівняння вищих порядків.

$$F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

де $x$ – змінна, $y = y(x)$ – невідома функція, $F$ – відома функція.

Рівняння (6) називають *диференціальним рівнянням* $n$*-го порядку*, якщо $y^{(n)}$ входить в (6).

Якщо рівняння (6) нерозв'язане відносно $y^{(n)}$, то воно називається *неявним диференціальним рівнянням*.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)}) = 0 \tag{7}$$

Рівняння (7) називається нормальним або *явним диференціальним рівнянням* $n$*-го порядку*.

Розв'язком рівняння (7) на деякому проміжку $(a; b)$ називається $n$-разів диференційована на цьому проміжку функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в (7) перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку диференціального рівняння (6) або (7) називається *інтегральною кривою*.

**Задача Коші:**

Серед всіх розв'язків рівняння (7) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a;b)$, який при $x = x_0$, задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (8)$$

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1. Знайти загальні (або частинні) розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку.**

| № | Рівняння з відокремлю-ваними змінними | Однорідне рівняння | Лінійне рівняння | Рівняння в повних диференціалах |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $xy' - y = 0$ | $y' = \frac{x-y}{x-2y}$ | $y' + xy = x^3$, $y(0) = -2$ | $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^3)dy = 0$ |
| 2. | $\left(1 - e^{y^2}\right)dy = \frac{dx}{2y}$, $y(0) = 0$ | $y' = -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + xy}$ | $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ | $(3x^2 y + 2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$ |
| 3. | $y^2 dx + xdy = 0$ | $y'x = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$ | $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$ | $\left(x + y^2\right)dx - 2xydy = 0$ |
| 4. | $\frac{y}{y'} = \ln y$, $y(2) = 1$ | $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ | $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}$ | $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ |
| 5. | $xy' - y\ln y = 0$ | $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$ | $y' - 4y = \cos x$, $y(0) = 1$ | $2xydx + \left(y^2 - 3x\right)dy = 0$ |
| 6. | $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 dy = e^x dx$, $y(0) = 0$ | $x\frac{dy}{dx} = y\ln\frac{y}{x}$ | $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^6 + 1}$ | $\left(y^2 e^x + y\right)dx - xdy = 0$ |
| 7. | $y' = (2y + 1)\cdot tgx$ | $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$ | $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$ | $(\ln y + 2x - 1)y' = 2y$ |
| 8. | $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 0$ | $xy' - y\cos\ln\frac{y}{x} = 0$ | $xy' + y = xy^2 \ln x$ | $\left(x^3 - 3xy^2\right)dx + \left(y^3 - 3x^2 y\right)dy = 0$ |
| 9. | $5^{x^2 + y} dy + xdx = 0$ | $xy' - y = x \cdot tg\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$ | $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$ | $(2x - y)dx - xdy = 0$ |
| 10. | $3x^2(y + 1)dx = -\left(x^3 + 1\right)dy$, $y(0) = 1$ | $yy' + 2\sqrt{xy} - x = 0$ | $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ | $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx = -\left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy$ |
| 11. | $\left(x^2 y - x^2\right)dy = \left(xy^2 + y^2\right)dx$ | $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ | $y' - 2xy = 1 - 2x^2$, $y(0) = 2$ | $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$ |
| 12. | $y' = 5\sqrt{y}$, $y(0) = 25$ | $x^2 y' = 4\left(x^2 + y^2\right) + yx$ | $xy' - 2y = 2x^4$ | $\left(3x^2 y + y^3\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy = 0$ |
| 13. | $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$ | $\left(2x^3 + 3xy^2\right)dx + y^3 dy = 0$ | $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$, $y(0) = 1$ | $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{\left(y^2 - 3x^2\right)dy}{y^4} = 0$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **14.** | $tg\, y\,dx - x\ln x dy = 0$ | $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ | $y' + x\sqrt[3]{y} = 2y$, $y(0) = 6^{-1,5}$ | $\left(2x\cos x^2 - e^y\right)dx = -\left(e^y x + \cos y\right)dy$ |
| **15.** | $xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$ | $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$ | $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$, $y(0) = -1$ | $\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dy = \frac{y}{x^3}dx$ |
| **16.** | $y' = 2x^2 + 5x + 12$, $y(1) = \frac{1}{6}$ | $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ | $y' + y^2 = 2x^{-4}$ | $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$ |
| **17.** | $y' + y^2 = 1$ | $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$ | $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$ | $\left(x^3 + xy^2\right)dx + \left(y^3 + yx^2\right)dy = 0$ |

**Завдання 2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь другого та вищих порядків.**

| № | Диф. р-ня вищих порядків | Диф. р-ня 2-го порядку, що допускають пониження порядку | Лін. однор. р-ня 2-го порядку із сталими коефіцієнтами |
|---|---|---|---|
| **1.** | $y''' = \frac{5}{x^4} + 2\sin x$ | $y'' = x + \sin x$ | $y'' - 7y' + 10y = 0$ |
| **2.** | $y''' = \frac{1}{x}$ | $y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}$ | $y'' + 3y' = 0$ |
| **3.** | $y''' = 2\ln x + x + 2$ | $y'' = \sin^2 x + x\sin 2x$ | $2y'' + 5y' + 2y = 0$ |
| **4.** | $y'''x\ln x = y''$ | $y'' = 1 - \left(y'\right)^2$ | $y'' + 6y' + 13y = 0$ |
| **5.** | $y'y''' = 3(y'')^2$ | $yy'' = \left(y'\right)^2$ | $y'' + 3y' + 2y = 0$ |
| **6.** | $y^{IV} = x^2 + 3\sin x$ | $2yy'' - \left(y'\right)^2 = 1$ | $4y'' + 12y' + 9y = 0$ |
| **7.** | $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$ | $x^2y'' + xy' = 1$ | $y'' + 2y' - 3y = 0$ |
| **8.** | $y''' - \left(y''\right)^2 = 0$ | $yy'' = 1$ | $y'' + 4y' + 13y = 0$ |
| **9.** | $y''' = x + \cos x$ | $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ | $y'' + 3y' - 4y = 0$ |
| **10.** | $y''' - (y'')^3 = 0$ | $y'' = \frac{1}{x}$ | $y'' + 4y' + 5y = 0$ |
| **11.** | $y^{IV} = \sin 2x$ | $y''y^3 = 1$ | $9y'' - 12y' + 4y = 0$ |
| **12.** | $x^2y''' = \left(y''\right)^2$ | $xy'' - y' = x^2e^x$ | $y'' - 2y' + 1y = 0$ |
| **13.** | $y'''\sin^4 x = \sin 2x$ | $y'' = \left(x^2 + 3x + 1\right)e^x$ | $6y'' + y' - y = 0$ |
| **14.** | $y''' = \sin^3 x$ | $\left(y''\right)^3 - 2y'' - x = 0$ | $y'' - 4y' + 3y = 0$ |
| **15.** | $y^V = e^{2x}$ | $\left(y''\right) + \ln y'' - x = 0$ | $y'' + 6y' + 9y = 0$ |
| **16.** | $y^{IV} = \sin x$ | $\left(y''\right)^4 + y'' - x = 0$ | $y'' + 9y' + 20y = 0$ |
| **17.** | $y^{IV} = e^x - 1$ | $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 + 1$ | $y'' - 6y' + 8y = 0$ |

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

## Тема: КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. РЯДИ

### Теоретичні відомості

### 1. Кратні інтеграли та їх застосування

**1⁰ Подвійний інтеграл**

Подвійний інтеграл позначається

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1),$$

функція $f(x,y)$ називається інтегрованою в області *D*. Область *D* – область інтегрування.

При обчисленні подвійного інтегралу переходять до обчислення повторного

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)dx \qquad (2)$$

**Застосування подвійних інтегралів**

1. $S=\iint\limits_D dxdy$ – площа плоскої фігури, обмежена областю *D*

2. $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ – об’єм тіла, яке обмежене зверху поверхнею $z=f(x,y)$, знизу – областю *D* площини *XOY*.

3. $S=\iint\limits_D \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy$ – площа поверхні тіла, яке обмежене зверху поверхнею $z=f(x,y)$, знизу – областю *D* площини *XOY*.

4. $m=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy$ – маса плоскої пластинки, густина якої дорівнює $\gamma(x,y)$.

5. $M_x=\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)dxdy, M_y=\iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)dxdy$ – статичні моменти.

6. $x_C=\dfrac{M_y}{m}, y_c=\dfrac{M_x}{m}$ – центр маси пластинки.

7. $I_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\gamma(x,y)dxdy$ – момент інерції пластинки.

**2⁰ Потрійний інтеграл**

Подвійний інтеграл позначається

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \qquad (3),$$

функція $f(x,y,z)$ називається інтегрованою в області *G*. Область *G* – область інтегрування.

При обчисленні потрійного інтегралу переходять до обчислення повторного

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x;y)}^{\psi_2(x;y)} f(x,y,z)dz \qquad (4)$$

**Застосування потрійних інтегралів**

1. $V=\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ – об’єм тіла, яке обмежене замкнутою поверхнею *G*.

2. $m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz$ – маса тіла, обмеженого замкнутою поверхнею *G*, густина якого $\gamma(x,y,z)$.

3. $M_{xy} = \iiint\limits_G z\cdot\gamma(x,y,z)dxdy,\ M_{xz} = \iiint\limits_G y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz,\ M_{yz} = \iiint\limits_G x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$ – статичні моменти.

4. $x_C = \dfrac{M_{yz}}{m}, y_c = \dfrac{M_{zx}}{m}, z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$ – центр маси пластинки.

5. $I_0 = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$ – момент інерції відносно початку координат.

## 2. Числові, функціональні, степеневі ряди.

**1⁰**. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

називають *рядом*, де $u_n$ – *n*-ий член ряду.

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – називається *n*-ою *частинною сумою* ряду.

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається *сумою* ряду (1), а ряд називається *збіжним*. Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченої границі не має, то ряд (1) називається *розбіжним*.

*Необхідна умова збіжності ряду*. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

*Достатня умова розбіжності ряду*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

**2⁰. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності.**

*Ознака порівняння*. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні і $u_n \le v_n,\ n = 1,2,\ldots,$ тоді якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Для порівняння часто користуються рядами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – гармонійний ряд, який є завжди розбіжним;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ – узагальнений гармонійний ряд (ряд Діріхле), який збіжний при $\alpha > 1$ та розбіжний при $\alpha \le 1$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$ – спадна геометрична прогресія. Даний ряд збіжний при $|q| < 1$ та розбіжний при $|q| \ge 1$.

*Гранична ознака порівняння*. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, тоді ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

*Ознака Д'Аламбера*. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

*Ознака Коші*. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

*Інтегральна ознака Коші*. Нехай задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$, причому $f(x)$ додатна, неперервна і монотонна спадна функція на проміжку $[1;\infty)$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

**3⁰. Знакозмінні ряди.**

Розглянемо ряд, знаки членів якого чергуються, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots, \text{ де } u_n > 0. \tag{2}$$

та складемо ряд, утворений з модулів членів ряду (2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{3}$$

*Ознака Лейбніца*. Нехай для ряду (3) виконуються умови:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$,

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді цей ряд збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена цього ряду.

*Абсолютна і умовна ознаки збіжності*. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ утворений з модулів цього ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причому *абсолютно*. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають *умовно збіжним*.

**4⁰. Функціональні ряди**.

Вираз виду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ називають *функціональним рядом*, якщо $u_n(x)$ – функції.

*Ознака Вейєрштрасса*. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що $|u_n(x)| \le a_n$, $\forall x \in [a;b]$, $n = 1,2,\ldots$

**5⁰. Поняття степеневого ряду.**

Функціональний ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ називають *степеневим рядом*.

***Теорема Абеля***. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень *x*, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневого ряду складемо ряд з модулів членів ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Припустимо, що для коефіцієнтів степеневого ряду існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Число $R$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R; R)$ – його *інтервалом збіжності*. Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ розв'язується для кожного ряду окремо. Якщо $R = \pm\infty$, то ряд є збіжним на всій числовій осі, а при $R = 0$ ряд збігається лише в точці $x = 0$.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ визначається за тими самими формулами, що й ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1. Обчислити повторні інтеграли.**

| № | Подвійний інтеграл | Потрійний інтеграл |
|---|---|---|
| **1.** | $\int_0^4 dx \int_0^1 (x + 3y^2) dy$ | $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2} z dz$ |
| **2.** | $\int_1^4 dx \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+y^2} dy$ | $\int_0^3 x dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} dz$ |
| **3.** | $\int_0^2 dy \int_0^1 x^2 y e^{xy} dx$ | $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz$ |
| **4.** | $\int_2^3 dy \int_0^2 \frac{dx}{(x+y)^2}$ | $\int_1^2 e^x dx \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz$ |
| **5.** | $\int_0^3 dy \int_0^1 \frac{y^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ | $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz$ |
| **6.** | $\int_3^4 dy \int_1^2 (6x^2 y + 8xy^3) dx$ | $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz$ |
| **7.** | $\int_0^2 dx \int_0^4 (x + y^2) dy$ | $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y (xyz) dz$ |

| | | |
|---|---|---|
| **8.** | $\int_0^1 dx\int_1^2 (x-y)dy$ | $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$ |
| **9.** | $\int_0^1 dy\int_{-1}^0 ye^{xy}dx$ | $\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y} zdz$ |
| **10.** | $\int_2^3 dx\int_1^2\sqrt{x-y}\,dy$ | $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^2 (x+yz)dz$ |
| **11.** | $\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx$ | $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2+y^2)dz$ |
| **12.** | $\int_2^4 dy\int_0^1\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ | $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(1-y)dz$ |
| **13.** | $\int_0^1 dy\int_0^1\sqrt{xy}\,dx$ | $\int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (1+y+z)dz$ |
| **14.** | $\int_3^4 dx\int_1^2\frac{dy}{(x+y)^2}$ | $\int_0^2 dy\int_0^y dx\int_0^{4-y^2}(x+yz)dz$ |
| **15.** | $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2dy}{1+y^2}$ | $\int_0^2 dx\int_0^{2-x}ydy\int_0^{4-2x-2y}dz$ |
| **16.** | $\int_4^5 dy\int_0^2 (3x^3y+6xy^2)dx$ | $\int_0^4 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^y (x+y+z)dz$ |
| **17.** | $\int_0^4 dy\int_1^2 (x^3+y^3)dx$ | $\int_0^4 dx\int_0^{4-x}dy\int_0^{4-x-y} zdz$ |

**Завдання 2. Змінити порядок інтегрування у подвійних інтегралах.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$ | **7.** | $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ | **13.** | $\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ |
| **2.** | $\int_0^4 dx\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ | **8.** | $\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$ | **14.** | $\int_{-2}^2 dx\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y)dy$ |
| **3.** | $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ | **9.** | $\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$ | **15.** | $\int_0^1 dx\int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$ |
| **4.** | $\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dy$ | **10.** | $\int_0^2 dy\int_y^{2y} f(x,y)dx$ | **16.** | $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$ |
| **5.** | $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ | **11.** | $\int_0^1 dx\int_{x/3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ | **17.** | $\int_0^1 dx\int_{x^2+2}^{4-x} f(x,y)dy$ |
| **6.** | $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ | **12.** | $\int_0^2 dx\int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$ | | |

**Завдання 3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу фігури, обмеженої лініями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $y=x,\ y=2x,\ x+y=6$ | **10.** | $y^2=8x+16,\ x+y=4$ |
| **2.** | $x=y^2,\ x+y=1$ | **11.** | $y=x,\ x=0,\ y=2\pi$ |
| **3.** | $y^2=10x+25,\ y^2=-6x+9$ | **12.** | $2xy=9,\ xy=18,\ 2y=x,\ y=2x$ |
| **4.** | $y=x,\ x=2,\ xy=1$ | **13.** | $y^2=x+3,\ x=0$ |
| **5.** | $xy=9,\ xy=4,\ y=2,\ y=1$ | **14.** | $y=x^2, y=2x-x^2$ |
| **6.** | $4y=x^2-4x,\ x-y-3=0$ | **15.** | $y^2=4x, y=0,\ y=3-x$ |
| **7.** | $y=2x,\ y=\sqrt{x}$ | **16.** | $x=0,\ y=x,\ y=2-x^2\ \ (x\ge 0)$ |
| **8.** | $xy=4,\ x+y=5$ | **17.** | $y^2=2x,\ y=x$ |
| **9.** | $xy=1,\ xy=8,\ y^2=x,\ y^2=8x$ | | |

**Завдання 4. Дослідити на збіжність ряди:**

- для знакододатних рядів застосувати: від 1 до 7 номера – ознаку порівняння,
  від 8 до 12 номера – ознаку Д'Аламбера,
  від 13 до 17 номера – ознаку Коші;
- для знакозмінних рядів встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються;
- для функціонального ряду знайти область збіжності;
- для степеневого ряду знайти радіус та область збіжності.

| № | Знакододатні | Знакозмінні | Функціональні | Степеневі |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ |
| **2.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}$ |
| **3.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+10n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n+3)}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{nx}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ |
| **4.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{4+n^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot 3^n}$ |
| **5.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2n}\right)$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{(n)!}$ |
| **6.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nx}-1}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 x^n$ |
| **7.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x)^n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}x^n$ |
| **8.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n^2}x^{n^2}$ |
| **9.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3-x^2\right)^n$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{(n+1)^2}$ |
| **10.** | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **11.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4^{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}7^n x^n$ |
| **12.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{5^n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2+x)^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(n+1)}$ |
| **13.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{n^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ |
| **14.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ |
| **15.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-3)^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{(2n+1)!}$ |
| **16.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n},\ x>0$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$ |
| **17.** | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{5^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$ |

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

## Тема: ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

### Теоретичні відомості

#### 1. Теорія ймовірності.

**$1^0$. Елементи теорії сполук**.

***Сполуки*** – це різні підмножини, утворені з елементів універсальної множини, що відрізняються елементами або порядком цих елементів. Розрізняють такі види сполук:

1) ***перестановки*** ($P_n$) – це сполуки із $n$ елементів, що відрізняються тільки порядком цих елементів. Число перестановок із $n$ елементів позначають $P_n$ і обчислюють за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

2) ***розміщенням*** ($A_n^k$) із $n$ різних елементів по $k$ ($0 \le k \le n$) називають такі впорядковані множини, кожна з яких містить $k$ елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Для обчислення числа розміщень із $n$ елементів по $k$ використовується формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3) ***комбінаціями*** ($C_n^k$) із $n$ елементів по $k$ ($0 \le k \le n$) називають такі множини з $k$ елементів взятих з даних $n$ елементів, що відрізняються між собою хоча б одним елементом без врахування їх порядку:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**$2^0$. Класичне означення ймовірності.**

***Подія*** – це будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбудеться чи не відбудеться, не вдаючись до детального розгляду природи самої події.

***Випадкова подія*** – це така подія, яка може відбутися або не відбутися за час здійснення випробування при виконанні певної сукупності умов.

***Випробування*** – це сукупність умов, в результаті яких відбувається подія.

*Означення.* ***Ймовірністю випадкової події А*** називається невід'ємне число *P(A*), що дорівнює відношенню числа $m$ – подій, які сприяють появі даної події до числа $n$ – кількості всіх елементарних подій: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

**$3^0$. Основні теореми теорії ймовірності. Умовна ймовірність.**

**Теорема додавання для несумісних подій:**

Якщо події $A$ і $B$ несумісні і при даному випробуванні може відбутися подія $A$ з ймовірністю $P(A)$ і подія $B$ – з ймовірністю $P(B)$, то ймовірність суми подій обчислюється за формулою: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

**Теорема множення ймовірностей незалежних подій:**

Якщо випадкові події $A$ і $B$ незалежні, то ймовірність їх сумісного настання рівна добутку ймовірностей цих подій: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

*Означення.* ***Умовною ймовірністю*** події $A$ при умові, що відбулася подія $B$ називається величина $P_B(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) > 0$.

**Теорема множення ймовірностей залежних подій:**

Ймовірність сумісного настання двох залежних подій $A$ і $B$ рівна добутку ймовірностей однієї на умовну ймовірність іншої, обчислену при умові що перша відбулася: $P(A\cdot B) = P(B)\cdot P_B(A)$.

**Теорема додавання для сумісних подій:**

Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, мінус ймовірність їх сумісної появи: $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

**Теорема (ймовірність появи хоча б однієї події):**

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ взаємно-незалежні, то ймовірність здійснення принаймні однієї з них може бути виражена формулою:

$$P(A) = 1-\left(1-P(A_1)\right)\cdot\left(1-P(A_2)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-P(A_n)\right)$$

**$4^0$. Формула повної ймовірності:**

Нехай подія $A$ може відбутися тільки при виконанні однієї із подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Тоді ймовірність події $A$ обчислюється за формулою:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

Події $B_1, B_2, \dots, B_n$ називають *гіпотезами*.

**$5^0$. Формула Байєса:**

Якщо до випробування відомі ймовірності гіпотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$, а в результаті випробування сталася подія $A$, і $P(A) > 0$, то з врахуванням настання цієї події умовні ймовірності гіпотез обчислюються за ***формулою Байєса***:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}$$

**$6^0$. Послідовні незалежні випробування. Формула Бернуллі.**

Нехай проводиться $n$ послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися подія $A$. Настання події $A$ будемо називати “успіхом”, ймовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює $p$ ($0 < p < 1$). Ймовірність $P_n(k)$ того, подія $A$ настане $k$ раз в $n$ випробуваннях ($0 \le k \le n$) знаходиться за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p$$

**$7^0$. Формула Пуассона:**

При необмеженому зростанні числа випробувань $n$ і постійному значенні $n\cdot p = \lambda$ ймовірність того, що подія $A$ настане $k$ разів прямує до границі $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = \dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

На основі цієї рівності, при достатньо великому, але обмеженому $n$ і скінченому, але не дуже великому і не дуже малому $n\cdot p = \lambda$ можна записати наближену ***формулу Пуассона***:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Дана формула дає досить точне наближення при $n\to\infty$, $p\to 0$, $0\le\lambda\le 10$, тобто для подій, що рідко трапляються і для достатньо великих $n$ ($npq \le 9$).

**$8^0$. Локальна теорема Муавра-Лапласа:**

Якщо у формулі Бернуллі кількість випробувань $n$ достатньо велика, а ймовірність появи події $A$ у всіх випробуваннях однакова і дорівнює $p$, то ймовірність появи події $k$ разів можна знайти за наближеною формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Дану формулу доцільно використовувати при $n > 100$, $p$ та $q$ не дуже близькі до нуля та $npq > 9$.

**$9^0$. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа:**

Ймовірність того, що в $n$ незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія $A$ може відбутися з ймовірністю $p$ ($0 < p < 1$), подія А відбудеться не менше $k_1$ і не більше $k_2$ раз, наближено дорівнює $P_n\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$,

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, для якої складена таблиця значень (див. додаток на стор. 67).

Дана формула дає добре наближення, якщо $n$ достатньо велике, $p$ та $q$ не дуже близькі до нуля, $npq > 9$. Для всіх значень $x \ge 5$ можна вважати $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

## 2. Випадкові величини.

**$1^0$. Дискретні випадкові величини.**

*Означення 1.* Змінна величина *X*, яка в результаті випробувань приймає дійсні значення називається ***випадковою величиною***, якщо для будь-якого $x \in R$ визначена ймовірність того, що *X* прийме значення х, тобто

$$F(x) = P\{X < x\} \qquad (1)$$

*Означення 2.* Функція $F(x)$ називається ***функцією розподілу*** випадкової величини *X*.

*Означення 3.* ***Випадкова величина X*** називається ***неперервною***, якщо вона може приймати будь-які числові значення на деякому інтервалі, і називається ***дискретною***, якщо вона приймає значення деякої числової послідовності (скінченої або нескінченої).

*Означення 4.* ***Законом розподілу випадкової величини*** називається відповідність, яка встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та їх ймовірностями.

***Закон розподілу дискретної випадкової величини*** можна задати рядом розподілу у вигляді таблиці:

| **X** | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | … |

(2)

де $\sum_k p_k = 1$.

За рядом розподілу (2) можна побудувати функцію розподілу дискретної випадкової величини *X*: $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$.

**$2^0$. Числові характеристики дискретних випадкових величин.**

*Означення 1.* ***Математичним сподіванням*** дискретної випадкової величини *X* називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірності:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$$

*Означення 2.* ***Дисперсією*** випадкової величини називається математичне сподівання квадрата різниці випадкової величини і її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

**Теорема.** Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

*Означення 3.* ***Середнім квадратичним відхиленням*** випадкової величини називається корінь квадратний з дисперсії: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

## 3. Елементи математичної статистики

### $1^0$. Генеральна сукупність і вибірка.

*Означення 1. Генеральна сукупність* – це скінчена множина однотипних елементів, що досліджуються.

*Означення 2. Вибіркою об'єму n* називається $n$ незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, кожна з яких є копією випадкової величини $X$ з функцією розподілу $F(X)$.

*Означення 3.* Значення вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається *варіантами*.

*Означення 4.* Послідовність варіант, розміщених в порядку зростання називається ***варіаційним рядом***. Якщо при цьому $x_i$ повторюється $n_i$ раз ($i = 1,2,\ldots,k$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то число $n_i$ називається *частотою варіанти* $x_i$, а число $\dfrac{n_i}{n}$ – *відносною частотою варіанти* $x_i$.

*Означення 5. Статистичним розподілом вибірки* називається перелік варіант і відповідних частот або відносних частот:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $\ldots$ | $n_k$ |

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{n_i}{n}$ | $\dfrac{n_1}{n}$ | $\dfrac{n_2}{n}$ | $\ldots$ | $\dfrac{n_k}{n}$ |

*Означення 6.* Функція $F_n^*(x) = \dfrac{v_n(x)}{n}$ називається *емпіричною функцією розподілу*, де $v_n(x)$ – число елементів вибірки, значення яких менші $x$.

*Означення 7. Полігоном частот вибірки* називається ламана з вершинами в точках $(x_i, n_i)$, $(i = 1,2,\ldots,k)$.

### $2^0$. Основні числові характеристики вибірки.

*Вибіркове середнє* – це просте арифметичне значення $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

*Вибіркове середнє для дискретного статистичного ряду* знаходять за формулою $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$, де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

*Мода* – це елемент, який найчастіше зустрічається у вибірці $M_0 = x_j$, якщо $n_j = \max_i n_i$.

*Медіана* – це варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні по числу варіант

$$M_e = \begin{cases} x_{m,} & n = 2m - 1 \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & n = 2m \end{cases}.$$

*Вибірковою дисперсією* називається середнє арифметичне значення квадратів відхилення елемента від вибірковою середньої $D_в = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

### $3^0$. Елементи теорії кореляції та регресії.

1) За формою **кореляцію** розрізняють **пряму і обернену**, як ця, так і інша можуть бути **прямолінійною і криволінійною**.

При ***прямій кореляції*** із збільшенням значень однієї ознаки середнє значення іншої ознаки також зростає. При ***оберненому зв'язку*** із збільшенням однієї ознаки середнє значення іншої ознаки, навпаки, спадає.

***Прямолінійний (лінійний) кореляційний зв'язок*** характеризується більш або менш рівномірною зміною середніх значень однієї ознаки при рівних змінах іншої. У випадку ***криволінійної кореляції*** при рівномірній зміні однієї ознаки можуть спостерігатися рівні і нерівні, зростаючі і спадаючі середні значення іншої ознаки.

При прямолінійній кореляції тіснота зв'язку вимірюється ***коефіцієнтом кореляції***, який обчислюється за формулою:

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

де $n$ – число парних спостережень ознак $X$ і $Y$.

Цю формулу можна записати ще й так:

$$R_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Числове значення коефіцієнта кореляції завжди лежить в межах від –1 до +1. При відсутності зв'язку між ознаками коефіцієнт кореляції рівний 0; при повній прямій залежності – рівний +1 і при оберненій залежності він рівний –1; величина і знак коефіцієнта кореляції виражає міру і напрям кореляції. Чим ближче коефіцієнт кореляції до +1 або –1, тим тісніший прямолінійний кореляційний зв'язок.

*Похибка коефіцієнта кореляції* визначається за формулами

$$S_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 100, \qquad\qquad S_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-2}}, \quad n < 100.$$

2) Математичним рівнянням кореляційного зв'язку є ***рівняння регресії***. Якщо задані пари значень $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, …, $(x_n, y_n)$, то задача полягає в знаходженні математичної залежності $y = f(x)$, такої що значення $f(x_i)$ близькі до відомих (експериментальних) значень $y_i$. Щоб таку залежність побудувати, задають певний вираз для функції $f$, причому функція $f$ залежить не тільки від незалежної змінної $x$, але й від деяких невідомих параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ці параметри знаходять методом найменших квадратів, згідно якого вимагається, щоб сума квадратів відхилень значень $f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ від експериментальних значень $y_i$ була мінімальною.

Вводиться гіпотеза, що між ознакою $x$ та ознакою $y$ існує лінійна залежність:

$y = a + bx$ – це ***лінійне рівняння регресії***, графіком якого є пряма лінія.

Оцінки параметрів парної регресії обчислюються за формулами методу найменших квадратів:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

## ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1. Розв'язати задачу, використовуючи елементи комбінаторики.**

1. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?
2. Скількома способами можна вибрати 5 чисел із 90?
3. У ящику 10 виробів, з яких 4 нестандартні. Скількома способами можна вибрати 4 стандартні вироби?
4. У філії банку працюють 15 співробітників, троє з яких не мають потрібної кваліфікації. Скільки можна скласти списків по 6 кваліфікованих співробітників?
5. У змаганнях беруть участь 8 команд. Скільки можна зробити різних гіпотез щодо розміщення перших трьох місць за результатами?
6. Скількома способами можна скласти список з п'яти учнів?
7. Скількома способами з колоди карт (36 карт) можна вибрати 10 карт так, щоб серед них було чотири тузи?
8. У групі 26 студентів. Скількома способами можна сформувати команду з 4 студентів для участі в математичній олімпіаді?
9. У баскетбольній команді, яка складається з 15 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами можна це зробити?
10. Скільки існує трицифрових чисел, всі цифри яких непарні і різні?

**Завдання 2. Розв'язати задачу, використовуючи класичне означення ймовірності.**

1. В урні 15 білих і 10 чорних кульок. З урни навмання виймають три кульки. Знайти ймовірність того, що 1) всі три кульки білі (подія А); 2) дві кульки – білі і одна чорна (подія В).
2. У групі із 15 студентів є 10 відмінників. За списком вибирають трьох студентів. Яка ймовірність того, що всі вибрані за списком студенти відмінники?
3. У малому підприємстві працюють 4 жінки та 5 чоловіків. Випадково дві особи запізнилися. Знайти ймовірність того, що одна з цих осіб жінка, а друга – чоловік.
4. Мале підприємство одержало 20 радіоприймачів, з яких 5 бракованих. Навмання для перевірки взяли 3 приймачі. Яка ймовірність того, що серед взятих приймачів будуть: 1) тільки браковані приймачі; 2) один бракований та два стандартних?
5. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених кульок однакового розміру. Навмання беруть 6 кульок. Яка ймовірність того, що будуть узяті 3 червоні, 2 сині та 1 зелена кульки?
6. Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде парне число очок?
7. На екзамен з математики виносять 50 питань. Студент підготував тільки 40. Білет складається з п'яти питань. Щоб одержати п'ятірку, досить відповісти на чотири питання. Яка ймовірність того, що студент одержить п'ятірку?
8. Задумали двохзначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що це буде випадково назване двозначне число.
9. Підкинули два гральні кубики. Знайти ймовірність того, сума очок на верхніх гранях буде дорівнювати 8, а різниця 4.
10. В коробці є 15 деталей, серед яких 10 червоного кольору. Майстер навмання бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що взяті деталі будуть червоними.

**Завдання 3. Розв'язати задачу, використовуючи основні теореми теорії ймовірності.**

1. У ящику 10 червоних і 6 синіх м'ячиків. Навмання беруть два м'ячики. Яка ймовірність того, що м'ячики будуть одного кольору?
2. Студент прийшов на екзамен, підготувавши тільки 20 питань із 25 питань програми. Екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.
3. Є три ящики, у кожному по 10 деталей. У першому ящику 8 стандартних деталей, у другому – 7 стандартних деталей, у третьому – 9 стандартних деталей. Із кожного ящика

навмання вибирають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі деталі будуть стандартні.

4. У коробці 2 зелені, 7 червоних, 5 жовтих і 10 білих кульок. Навмання вибирають одну кульку. Яка ймовірність появи кольорової кульки?
5. Ймовірності попадання в ціль при стрільбі першої і другої гармат відповідно рівні $p_1 = 0{,}7$ і $p_2 = 0{,}8$. Знайти ймовірності попадання при одному залпі хоча б однієї із гармат.
6. На полиці в бібліотеці в будь-якому порядку розташовані 15 підручників, серед яких 5 з математики. Бібліотекар навмання бере 3 підручника. Знайти ймовірність того, що хоча б один з взятих підручників буде з математики.
7. В коробці 10 деталей, серед яких 4 пофарбовані. Майстер навмання взяв 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з взятих деталей пофарбована.
8. Для повідомлення про аварію встановлено три незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що при аварії запрацював перший пристрій дорівнює 0,9; другий – 0,95; третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один пристрій.
9. При здачі екзамена ймовірність того, що студент одержить “відмінно” рівна 0,5; “добре” – 0,25; “незадовільно” – 0,01; не з’явиться на екзамен – 0,05. Яка ймовірність того, що студент одержить позитивну оцінку?
10. Студент розшукує потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула знаходиться у першому, другому, третьому довіднику відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що формула знаходиться в усіх трьох довідниках.

**<u>Завдання 4</u>. Розв’язати задачу, використовуючи формулу повної ймовірності або формулу Байєса:**

1. В ящику 12 деталей, виготовлених на заводі № 1, 20 деталей – на заводі № 2 і 18 деталей – на заводі № 3. Ймовірність того, що деталь виготовлена на заводі № 1, відмінної якості, рівна 0,9; для деталей, виготовлених на заводах № 2 і № 3, ці ймовірності відповідно рівні 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь виявиться відмінної якості.
2. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій – 3 білі і 1 чорна, у другій – 6 білих і 4 чорних, у третій – 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
3. Три стрілки виконали залп, причому дві кулі попали в мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілок попав у мішень. Ймовірності попадання у мішень для стрілків відповідно рівні $p_1 = 0{,}6;\ p_2 = 0{,}5;\ p_3 = 0{,}4$.
4. На заводі виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх гвинтів. Частка браку відповідно 5%, 4%, 2%. Випадково вибраний гвинт виявися бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою, другою, третьою машинами?
5. У лікарню поступають (в середньому) 50% хворих на грип, 30% хворих на ангіну та 20% хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одужання від грипу дорівнює 0,7, від ангіни – 0,8 та від запалення легенів – 0,9. Виписано хворого, який повністю одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на грип.
6. Електролампи виготовляються на трьох заводах. Перший завод виготовляє 45% загальної кількості електроламп; другий – 40%, третій – 15%. Перший завод випускає 70% стандартних ламп, другий – 80%, третій – 81%. У магазин поступає продукція з усіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що куплена в магазині лампа буде стандартною?
7. У коробці містяться деталі трьох фірм, по 20 деталей кожної. Кількість стандартних деталей першої, другої та третьої фірми відповідно дорівнює 20, 15, 10. З навмання вибраної фірми вибрали навмання деталь, яка виявилась стандартною. Деталь повертають в коробку і другий раз навмання вибирають деталь, яка теж виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що взяті деталі були третьої фірми.
8. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55% з першого, 45% – з другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3%, а з другого – 5% браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку придатна.

9. На складі 70% комп'ютерів, виготовлених заводом № 1, а решта – заводом № 2. Ймовірність того, що комп'ютер, виготовлений заводом № 1, витримає гарантійний термін, дорівнює 0,8, а для заводу № 2 – 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання взятий комп'ютер витримає гарантійний термін.
10. Деталі на конвеєр надходять з двох автоматів. З першого – 60%, з другого – 40%. Перший автомат дає 2%, а другий – 1% браку. Деталь, що надійшла на конвеєр, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено другим автоматом.

**Завдання 5. Розв'язати задачу, використовуючи формулу Бернуллі:**

1. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що з 8 пострілів буде 5 попадань?
2. Що більш ймовірно: виграти у гравця (рівного собі за силою гри) 4 партії з 8 чи 3 партії з 5?
3. Монету підкинули 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде 0, 3 і 5 разів.
4. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Ймовірність того, що на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.
5. У сім'ї 5 дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей два хлопчики, якщо ймовірність хлопчика дорівнює 0,51.
6. Плоди, що заражені хворобою у прихованій формі складають 20%. Випадково відбирають 6 плодів. Знайти ймовірність того, що у вибірці будуть три заражених плоди.
7. Монету підкидають 7 разів. Яка ймовірність того, що герб випаде не менше трьох разів?
8. У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей не більше двох хлопчиків, якщо ймовірність хлопчика дорівнює 0,51.
9. Ймовірність проростання насіння дорівнює 0,9. Для досліду відбирають 6 насінин. Знайти ймовірність того, що проросте 5 насінин.
10. Ймовірність того, що витрата води протягом дня є у нормі, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що витрата води не буде перевищувати норму протягом п'яти із наступних шести днів.

**Завдання 6. Розв'язати задачу, використовуючи формулу Пуассона або локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа:**

1. Середній брак при виробництві продукції становить 0,1%. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованих буде від 2 до 4 деталей?
2. Ймовірність попадання у літак при одному пострілі дорівнює 0,01. Проводиться 100 пострілів ($n = 100$). Знайти ймовірність двох попадань.
3. Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть рівно 75 випробувань?
4. Проростання насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних не проростуть 120 насінин.
5. В магазин привезли 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка розіб'ється дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає рівно дві розбиті пляшки.
6. Знайти ймовірність того, що подія $A$ відбудеться 1400 разів у 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи даної події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.
7. Проростання насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних не проростуть не менше 80 і не більше 120 насінин.
8. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде 50 хлопчиків.
9. Ймовірність появи події в кожному із 100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менше 75 разів і не більше 90 разів.

10. Пристрій складається із 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента на протязі часу $T$ дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час $T$ відмовить рівно 3 елементи.

**<u>Завдання 7</u>. За даним законом розподілу знайти 1) математичне сподівання, 2) дисперсію, 3) середнє квадратичне відхилення, 4) функцію розподілу дискретної випадкової величини та побудувати її графік, 5) початкові та центральні моменти першого, другого і третього порядків:**

1.

| **X** | 21 | 25 | 32 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

2.

| **X** | 8 | 12 | 18 | 24 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

3.

| **X** | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

4.

| **X** | 14 | 7 | 61 | 45 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,1 |

5.

| **X** | 21 | 25 | 32 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,04 | 0,06 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |

6.

| **X** | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

7.

| **X** | 8 | 7 | 18 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,4 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |

8.

| **X** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,5 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |

9.

| **X** | 4 | 7 | 11 | 25 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,1 |

10.

| **X** | 1 | 5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **p** | 0,5 | 0,06 | 0,04 | 0,2 | 0,2 |

**<u>Завдання 8</u>. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання *a* нормального розподілу з надійністю $\gamma = 0{,}95$, якщо відомі вибіркова середня $\bar{x}$, об'єм вибірки $n$ і середнє квадратичне відхилення:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\bar{x} = 75{,}17;\ n = 36,\ \sigma = 6$ | 6. | $\bar{x} = 75{,}13;\ n = 25,\ \sigma = 5$ |
| 2. | $\bar{x} = 75{,}16;\ n = 49,\ \sigma = 7$ | 7. | $\bar{x} = 75{,}04;\ n = 16,\ \sigma = 9$ |
| 3. | $\bar{x} = 75{,}15;\ n = 64,\ \sigma = 8$ | 8. | $\bar{x} = 75{,}02;\ n = 36,\ \sigma = 2$ |
| 4. | $\bar{x} = 75{,}09;\ n = 196,\ \sigma = 14$ | 9. | $\bar{x} = 75{,}18;\ n = 81,\ \sigma = 3$ |
| 5. | $\bar{x} = 75{,}12;\ n = 121,\ \sigma = 11$ | 10. | $\bar{x} = 75{,}14;\ n = 64,\ \sigma = 8$ |

**<u>Завдання 9</u>. За даними дослідженнями знайти коефіцієнт кореляції та скласти рівняння прямої лінії регресії Y на X:**

1. Вік **X** (тижні) і висота рослини **Y** (см):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Y** | 5 | 13 | 16 | 23 | 33 |

2. Зріст **X** (см) і вага **Y** (кг) дорослих чоловіків:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 165 | 175 | 178 | 180 | 185 |
| **Y** | 56 | 70 | 76 | 80 | 86 |

3. Довжина тіла **X** (см) і вага ікри **Y** (гр) щук:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 33,4 | 38,0 | 42,5 | 50,5 | 64,0 |
| **Y** | 456 | 484 | 788 | 1300 | 3650 |

4. Вміст гемоглобіну **X** (%) і осідання **Y** за 24 год (мм) крові:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 22 | 45 | 66 | 80 | 84 |
| **Y** | 8 | 18 | 26 | 29 | 34 |

5. Число еритроцитів **X** (млн) і вміст гемоглобіну **Y** (%) крові:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 0,80 | 2,63 | 3,19 | 3,63 | 4,10 |
| **Y** | 22 | 61 | 66 | 78 | 81 |

6. Вік **X** (тижні) і висота рослини **Y** (см):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Y** | 5 | 13 | 16 | 23 | 33 |

7. Зріст **X** (см) і вага **Y** (кг) дорослих чоловіків:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 165 | 175 | 178 | 180 | 185 |
| **Y** | 56 | 70 | 76 | 80 | 86 |

8. Довжина тіла **X** (см) і вага ікри **Y** (гр) щук:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 33,4 | 38,0 | 42,5 | 50,5 | 64,0 |
| **Y** | 456 | 484 | 788 | 1300 | 3650 |

9. Вміст гемоглобіну **X** (%) і осідання **Y** за 24 год (мм) крові:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 22 | 45 | 66 | 80 | 84 |
| **Y** | 8 | 18 | 26 | 29 | 34 |

10. Число еритроцитів **X** (млн) і вміст гемоглобіну **Y** (%) крові:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | 0,80 | 2,63 | 3,19 | 3,63 | 4,10 |
| **Y** | 22 | 61 | 66 | 78 | 81 |

# ДОДАТОК

Таблиця 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0.1 | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0.2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0.3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3725 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0.4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0.5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,3410 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0.6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0.7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0.8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0.9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1.0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1.1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1.2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1.3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1.4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1.5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1.6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1.7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1.8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1.9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |
| 2.0 | 0,0540 | 0,0529 | 0,0519 | 0,0508 | 0,0498 | 0,0488 | 0,0478 | 0,0468 | 0,0459 | 0,0449 |
| 2.1 | 0,0440 | 0,0431 | 0,0422 | 0,0413 | 0,0404 | 0,0396 | 0,0387 | 0,0379 | 0,0371 | 0,0363 |
| 2.2 | 0,0355 | 0,0347 | 0,0339 | 0,0332 | 0,0325 | 0,0317 | 0,0310 | 0,0303 | 0,0297 | 0,0290 |
| 2.3 | 0,0283 | 0,0277 | 0,0270 | 0,0264 | 0,0258 | 0,0252 | 0,0246 | 0,0241 | 0,0235 | 0,0229 |
| 2.4 | 0,0224 | 0,0219 | 0,0213 | 0,0208 | 0,0203 | 0,0198 | 0,0194 | 0,0189 | 0,0184 | 0,0180 |
| 2.5 | 0,0175 | 0,0171 | 0,0167 | 0,0163 | 0,0158 | 0,0154 | 0,151 | 0,0147 | 0,0143 | 0,0139 |
| 2.6 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0126 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 | 0,0107 |
| 2.7 | 0,0104 | 0,0101 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0093 | 0,0091 | 0,0088 | 0,0086 | 0,0084 | 0,0081 |
| 2.8 | 0,0079 | 0,0077 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0067 | 0,0065 | 0,0063 | 0,0061 |
| 2.9 | 0,0060 | 0,0058 | 0,0056 | 0,0055 | 0,0053 | 0,0051 | 0,0050 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0046 |
| 3.0 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0042 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 3.1 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,026 | 0,0025 | 0,0025 |
| 3.2 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 |
| 3.3 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0013 |
| 3.4 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 |
| 3.5 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 |
| 3.6 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 |
| 3.7 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3.8 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 3.9 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

Таблиця 2

Значення функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0.1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0.2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0.3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0.4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0.5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0.6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0.7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0.8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0.9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1.0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1.1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1.2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1.3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1.4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1.5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1.6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1.7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1.8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1.9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2.0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2.1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2.2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2.3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2.4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2.5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2.6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2.7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2.8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2.9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3.0 | 0,4986 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| 3.1 | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,4993 |
| 3.2 | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 |
| 3.3 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4997 |
| 3.4 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4997 | 0,4998 |
| 3.5 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4998 |
| 3.6 | 0,4998 | 0,4998 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3.7 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3.8 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 | 0,4999 |
| 3.9 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:


1. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975. – 334 с.
3. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
4. **Дубовик В.П., Юрик І.І.** Вища математика: Навч. посібник. – Київ: Вища школа, 1993. – 648 с.
5. **Дубовик В.П., Юрик І.І.** Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник – Київ: Вища школа, 1999. – 480 с.
6. **Зайцев И.А.** Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1991. – 375 с.
7. **Клетеник Д.В.** Сборник задач по аналитической геометри. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
8. **Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.** Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1989. – 527 с.
9. **Маркович Э.С.** Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая школа, 1972. – 480 с.
10. **Минорский В.П.** Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967. – 359 с.
11. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 456 с.

## ЗМІСТ



Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 3,95. Зам. № 19. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18. E-mail: hoverla@i.ua

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру*
*видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –*
*Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року*