УДК 517.925

Є. С. Войтушенко (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ

We consider the problem of existence and construction of solutions boundary value problems of the singular linear systems of differential equations with rectangular matrices. Using the theory of Fredholm boundary-value problem with application a method of pseudo-inverse matrixes the necessary and sufficient conditions of such solutions existence were found.

У роботі досліджено крайову задачу для диференціальних систем з прямокутними матрицями. Використовуючи теорію нетерових крайових задач, знайдено необхідні й достатні умови існування розв'язків лінійних крайових задач та запропоновано структуру розв'язків таких задач.

1. Вступ.

У данній статті розглянуто нетерові крайові задачі загального вигляду, в яких крайова умова задана лінійним векторним функціоналом. Важливу роль у теорії таких систем грає введене в [1, 2] поняття квазідіагональної канонічної форми. У розгляд включені недовизначені та перевизначені критичні крайові задачі для диференціальних систем з прямокутними матрицями.

2. Постановка задачі та допоміжні результати.

Розглянемо крайову задачу для $m-$лінійних диференціальних систем рівнянь з $n-$невідомими функціями

$$B\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), t \in [a, b] \tag{1}$$

$$\ell x = \alpha, \tag{2}$$

де $A, B - m \times n-$вимірні сталі матриці та $f(t) \in C[a, b]$ – $m-$вимірна вектор-функція, $x = x(t) = col(x_1(t), ..., x_n(t))$, $\ell-$ лінійний $p-$векторний функціонал, визначений на просторі $n-$вимірних, неперервних на $[a, b]$ вектор-функцій: $\ell = col(\ell_1, ..., \ell_p)$;$\alpha = col(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p-$ заданий вектор-стовбець констант з $p-$вимірного дійсного евклідового простору [3, 4].

Виникає питання, при яких умовах крайова задача (1), (2) розв'язна, як записується загальний розв'язок задачі та яка кількість розв'язків?

Введемо нову невідому вектор-функцію z, яка пов'язана з вектор-функцією x лінійним невиродженим перетворенням [1] з постійними коефіцієнтами:

$$x = Qz, \det Q \neq 0, \tag{3}$$

де $z = col[z_1, ..., z_g, \tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_l, \hat{z}_1, ..., \hat{z}_k, \check{z}_1, ..., \check{z}_n, z_\varepsilon]$, складові вектори $z_i(t)$ мають розмірність 1, $i = \overline{1, g}$,вектори $\tilde{z}_i(t)$ мають розмірність $(\tilde{s}_i + 1), i = \overline{1, l}$, вектори $\hat{z}_i(t)$ мають розмірність $\hat{s}_i, i = \overline{1, k}$, вектори $\check{z}_i(t)$ мають розмірність $\check{s}_i, i = \overline{1, n}$, вектори $z_\varepsilon(t)$ мають розмірність ε.

Підставляючи Qz замість x у (1) та множачи (1) почленно зліва на P, отримаємо:

$$\tilde{B}\frac{dz}{dt} = \tilde{A}z + \tilde{f}(t), t \in [a,b], \quad (4)$$

де $\tilde{A} = PAQ, \tilde{B} = PBQ, \tilde{f} = Pf = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_m)$, при цьому пучки матриц $A + \lambda B$ та $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ строго еквівалентні один одному: $\tilde{A} + \lambda\tilde{B} = PAQ + \lambda PBQ = P(A + \lambda B)Q$.

Було доведенно, що $P-(m\times m)-$вимірна,$Q-(n\times n)-$вимірна матриці мають вигляд:

$$Q = [Q_g, \tilde{\Phi}, \hat{\Phi}, \breve{\Phi}, \Phi], \quad (5)$$

$$P = [P_g, \tilde{\Psi}, \hat{\Psi}, \breve{\Psi}, \Psi]^*, \quad (6)$$

де

$$Q_g = [q_1, ..., q_g],$$

$$\tilde{\Phi} = [\tilde{\Phi}_{1,\tilde{s}_1+1}, ..., \tilde{\Phi}_{l,\tilde{s}_l+1}], \quad \tilde{\Phi}_{ij} = [\tilde{\varphi}_i^j, ..., \tilde{\varphi}_i^1], \quad j = \tilde{s}_i, \tilde{s}_i + 1, \quad i = \overline{1,l}$$

$$\hat{\Phi} = [\hat{\Phi}_1, ..., \hat{\Phi}_k], \quad \hat{\Phi}_i = [\hat{\varphi}_i^1, ..., \hat{\varphi}_i^{\hat{s}_i}], \quad i = \overline{1,k}$$

$$\breve{\Phi} = [\breve{\Phi}_1, ..., \breve{\Phi}_n], \quad \breve{\Phi}_i = [\breve{\varphi}_i^1, ..., \breve{\varphi}_i^{\breve{s}_i}], \quad i = \overline{1,n}$$

$$\Phi = [\varphi_1, ..., \varphi_\varepsilon],$$

$$P_g = [p_1, ..., p_g],$$

$$\tilde{\Psi} = [\tilde{\Psi}_{1,\tilde{s}_1+1}, ..., \tilde{\Psi}_{l,\tilde{s}_l+1}], \quad \tilde{\Psi}_{ij} = [\tilde{\psi}_i^j, ..., \tilde{\psi}_i^1], \quad j = \tilde{s}_i, \tilde{s}_i + 1, \quad i = \overline{1,l}$$

$$\hat{\Psi} = [\hat{\Psi}_1, ..., \hat{\Psi}_k], \quad \hat{\Phi}_i = [\hat{\psi}_i^1, ..., \hat{\psi}_i^{\hat{s}_i}], \quad i = \overline{1,k}$$

$$\breve{\Psi} = [\breve{\Psi}_1, ..., \breve{\Psi}_n], \quad \breve{\Psi}_i = [\breve{\psi}_i^{\breve{s}_i}, ..., \breve{\psi}_i^1], \quad i = \overline{1,n}$$

$$\Psi = [\psi_1, ..., \psi_\varepsilon].$$

Компоненти [1] постійних матриць $Q_g, \tilde{\Phi}, \hat{\Phi}, \breve{\Phi}, \Phi, P_g, \tilde{\Psi}, \hat{\Psi}, \breve{\Psi}, \Psi$ існують та мають вигляд [2]. Замість системи (1) будемо мати m незалежних лінійних комбінацій, що тотожно множенню матриць A, B, f зліва на квадратну невироджену матрицю $m-$го порядку P.

Вибираючи таким чином матриці P та Q, система диференціальних рівнянь зводиться до канонічної квазідіагональної форми

$$diag[0_{gg}, L, K, N, E_\varepsilon]\frac{dz}{dt} = diag[0_{gg}, \overline{L}, \overline{K}, \overline{N}, J]z + \tilde{f}, \quad (7)$$

де 0_{ij} - нульовий блок розмірністю $i \times j$, $L = diag[L_1, ..., L_l]$, $L_i = [E_{\tilde{s}_i}, 0_{\tilde{s}_i 1}], i = \overline{1, l}$, $K = diag[K_1, ..., K_k]$, $K_i = [E_{\hat{s}_i}, 0_{\hat{s}_i 1}]^T, i = \overline{1, k}$, $N = diag[N_1, ..., N_n]$, $N_i = I_{\check{s}_i}, i = \overline{1, n}$, нільпотентний блок Жордана розмірності s_i, $\overline{L} = diag[\overline{L}_1, ..., \overline{L}_l]$, $\overline{L}_i = [0_{\tilde{s}_i 1}, E_{\tilde{s}_i}], i = \overline{1, l}$, $\overline{K} = diag[\overline{K}_1, ..., \overline{K}_k]$, $\overline{K}_i = [0_{\hat{s}_i 1}, E_{\hat{s}_i}]^T, i = \overline{1, k}$, $\overline{N} = diag[\overline{N}_1, ..., \overline{N}_n]$, $\overline{N}_i = E_{\check{s}_i}, i = \overline{1, n}$, $J-$ квадратна матриця порядку ε, $\tilde{f}(t) \in C[a, b]$ – $m-$вимірна вектор-функція.

Вектори $\tilde{f}, z$ представлені у наступному вигляді

$$\tilde{f} = col[f_1, ..., f_g, \tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_l, \hat{f}_1, ..., \hat{f}_k, \check{f}_1, ..., \check{f}_n, f_\varepsilon],$$

$$z = col[z_1, ..., z_g, \tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_l, \hat{z}_1, ..., \hat{z}_k, \check{z}_1, ..., \check{z}_n, z_\varepsilon], \tag{8}$$

де

$$f_i = P_g^* f(t), i = \overline{1, g}, \tag{9}$$

$$\tilde{f}_i = \tilde{\Psi}_{i, s_i+1}^* f(t), i = \overline{1, l}, \tag{10}$$

$$\hat{f}_i = \hat{\Psi}_i^* f(t), i = \overline{1, k}, \tag{11}$$

$$\check{f}_i = \check{\Psi}_i^* f(t), i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$f_\varepsilon = \Psi^* f(t). \tag{13}$$

У відповідності з діагональними блоками (7) система диференціальних рівнянь розпадається на окреми системи виду [1]

$$0 = f_i, i = \overline{1, g}, \tag{14}$$

$$L_i \frac{d\tilde{z}_i}{dt} = \overline{L}_i \tilde{z}_i + \tilde{f}_i, i = \overline{1, l}, \tag{15}$$

$$K_i \frac{d\hat{z}_i}{dt} = \overline{K}_i \hat{z}_i + \hat{f}_i, i = \overline{1, k}, \tag{16}$$

$$N_i \frac{d\check{z}_i}{dt} = \overline{N}_i \check{z}_i + \check{f}_i, i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

$$E_\varepsilon \frac{dz_\varepsilon}{dt} = J z_\varepsilon + f_\varepsilon. \tag{18}$$

Таким чином, інтегрування системи (1) у загальному випадку зведено до інтегрування систем (14) – (18).

1) Для того, щоб система (14) була розв'язна, необхідно та достатньо, щоб

$$f_i \equiv 0, i = \overline{1, g} \tag{19}$$

У цьому випадку за невідомі функції $z_1, ..., z_g$, можуть бути взяти довільні функції $\beta_i, i = \overline{1,g}$. Таким чином, використовуючи (3),(5) запишемо розв'язок

$$x(t) = \sum_{i=1}^{g} \beta_i(t) q_i, \tag{20}$$

де $\beta_i \in C^1[a;b], i = \overline{1,g}$.

Таким чином, одна з умов розв'язності для вихідної диференціальної системи рівнянь (1), яка випливає з рівнянь (19), (6) та (9), буде наступною [2]:

$$(f(t), p_i(t)) = 0, i = \overline{1,g}. \tag{21}$$

2) Систему (15) можна записати у вигляді

$$\frac{d\tilde{z}_1}{dt} = \tilde{z}_2 + \tilde{f}_1(t), \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = \tilde{z}_3 + \tilde{f}_2(t), ..., \frac{d\tilde{z}_{\tilde{s}_i}}{dt} = \tilde{z}_{\tilde{s}_i+1} + \tilde{f}_{\tilde{s}_i}(t) \tag{22}$$

Така система завжди розв'язна. Якщо покласти $\tilde{z}_1(t) = \tilde{\beta}_i(t)$ довільну функцію від t, тоді послідовно з (22) визначаються решта невідомих функцій $\tilde{z}_2, ..., \tilde{z}_{\tilde{s}_i}, \tilde{z}_{\tilde{s}_i+1}$, та система матиме такий розв'язок

$$\tilde{z}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_i(t) \\ -\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} (I_{\tilde{s}_i}^T)^k \frac{d^k}{dt^k} \tilde{f}_i(t) + col[\frac{d}{dt}\tilde{\beta}_i(t), ..., \frac{d^{\tilde{s}_i}}{dt^{\tilde{s}_i}}\tilde{\beta}_i(t)] \end{bmatrix}, i = \overline{1,l}. \tag{23}$$

У цьому випадку розв'язок $x(t)$ вихідної системи за допомогою формул (3), (5), (6) та (10) записується у наступному вигляді

$$x(t) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} [\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)} - \sum_{i=1}^{l} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} (I_{\tilde{s}_i}^T)^k \frac{d^k}{dt^k}[\tilde{\Psi}_i^* f(t)], \tag{24}$$

де $\tilde{\beta}_i \in C^{\tilde{s}_i}[a;b], i = \overline{1,l}$, – довільні скалярні функції.

3) Систему (16) можна записати у вигляді

$$\frac{d\hat{z}_1}{dt} = \hat{f}_1(t), \frac{d\hat{z}_2}{dt} = \hat{z}_1 + \hat{f}_2(t), ..., \frac{d\hat{z}_{\hat{s}_i}}{dt} = \hat{z}_{\hat{s}_i-1} + \hat{f}_{\hat{s}_i}(t), 0 = \hat{z}_{\hat{s}_i} + \hat{f}_{\hat{s}_i+1}(t). \tag{25}$$

З усіх рівнянь (25), крім першого, однозначно визначаємо $\hat{z}_{\hat{s}_i}, \hat{z}_{\hat{s}_i-1}, ..., \hat{z}_1$:

$$\hat{z}_{\hat{s}_i} = -\hat{f}_{\hat{s}_i+1}, \hat{z}_{\hat{s}_i-1} = -\hat{f}_{\hat{s}_i}(t) - \frac{d\hat{f}_{\hat{s}_i+1}}{dt}, ..., \hat{z}_1 = -\hat{f}_2(t) - \frac{d\hat{f}_3}{dt} - ... - \frac{d^{\hat{s}_i-1}\hat{f}_{\hat{s}_i+1}}{dt^{\hat{s}_i-1}}$$

або

$$\hat{z}_i = -\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I^k_{\hat{s}_i}\frac{d^k}{dt^k}col[\hat{f}_2(t),...,\hat{f}_{\hat{s}_i}(t)], i=\overline{1,k}. \qquad (26)$$

Підставляючи отриманий результат для $\hat{z}_1$ у перше рівняння, отримаємо умову розв'язності:

$$\hat{f}_1(t)+\frac{d\hat{f}_2}{dt}+...+\frac{d^{\hat{s}_i}\hat{f}_{\hat{s}_i+1}}{dt^{\hat{s}_i}}=0 \qquad (27)$$

або

$$-e_1\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I^k_{\hat{s}_i}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}col[\hat{f}_2(t),...,\hat{f}_{\hat{s}_i+1}(t)]=\hat{f}_1(t), i=\overline{1,k}, \qquad (28)$$

де e_1– перший рядок матриці $E_{\hat{s}_i}$.

Тоді розв'язок $x(t)$ вихідної системи за допомогою формул (3), (5), (6) та (11) записується у наступному вигляді:

$$x(t)=-\sum_{i=1}^{k}\hat{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I^k_{\hat{s}_i}\frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}^*_{is_i}f(t)] \qquad (29)$$

Таким чином умова розв'язності для вихідної диференціальної системи рівнянь (1), яка випливає з рівнянь (28), (6) та (11), буде наступною:

$$\sum_{k=0}^{\hat{s}_i}\frac{d^k}{dt^k}(f(t),\hat{\psi}_i^{\hat{s}_i-k+1})=0, i=\overline{1,k} \qquad (30)$$

4) Систему (17) можна записати у вигляді

$$\frac{d\breve{z}_2}{dt}=\breve{z}_1+\breve{f}_1(t), \frac{d\breve{z}_3}{dt}=\breve{z}_2+\breve{f}_2(t),..., \frac{d\breve{z}_{\breve{s}_i}}{dt}=\breve{z}_{\breve{s}_i-1}+\breve{f}_{\breve{s}_i-1}(t), 0=\breve{z}_{\breve{s}_i}+\breve{f}_{\breve{s}_i}(t). \qquad (31)$$

Звідси послідовно та однозначно визначаємо розв'язок

$$\breve{z}_{\breve{s}_i}=-\breve{f}_{\breve{s}_i}, \breve{z}_{\breve{s}_i-1}=-\breve{f}_{\breve{s}_i-1}-\frac{d\breve{f}_{\breve{s}_i}}{dt},..., \breve{z}_1=-\breve{f}_1-\frac{d\breve{f}_2}{dt}-\frac{d^2\breve{f}_3}{dt^2}-...-\frac{d^{\breve{s}_i-1}\breve{f}_{\breve{s}_i}}{dt^{\breve{s}_i-1}}$$

або

$$\breve{z}_i(t)=-\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1} I^k_{\breve{s}_i}\frac{d^k}{dt^k}\breve{f}_i(t), i=\overline{1,n}. \qquad (32)$$

Враховуючи отриманий розв'язок (32) та за домогою замін (3), (5), (6) та (12) маємо розв'язок вихідної системи

$$x(t)=-\sum_{i=1}^{n}\breve{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1} I^k_{\breve{s}_i}\frac{d^k}{dt^k}[\breve{\Psi}^*_i f(t)]. \qquad (33)$$

5) Загальний розв'язок системи (18) має вигляд [1, 7]

$$z_\varepsilon(t) = Z(t)c + \int_a^t Z(t)Z^{-1}(\tau)f_\varepsilon(\tau)d\tau, \forall c \in \mathbb{R}^\varepsilon. \tag{34}$$

У цьому випадку розв'язок $x(t)$ вихідної системи завжди існує і за допомогою формул (3), (5), (6) та (13) записується у вигляді

$$x(t,c) = X_\varepsilon(t)c + \int_a^t X_\varepsilon(t)Z_\varepsilon^*(\tau)f(\tau)d\tau, \tag{35}$$

де c–довільний постійний вектор-стовбець $c \in \mathbb{R}^\varepsilon$, $X_\varepsilon = \Phi Z, Z_\varepsilon(t) = \Psi(t)[X^{-1}(t)]^*$ [2].

Лема 1. *Стовбці матриці*

$$X_\varepsilon(t) = \Phi Z(t),$$

де $Z(t)-$ *фундаментальна матриця системи*

$$\frac{dz_\varepsilon}{dt} = Jz_\varepsilon$$

є лінійно незалежними розв'язками системи

$$B\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Лема 2. *Стовбці матриці*

$$Z_\varepsilon(t) = \Psi(t)[X^{-1}(t)]^*,$$

є лінійно незалежними розв'язками спряженої до $B\frac{dx}{dt} = Ax$ *системи*

$$\frac{d}{dt}[B^*x] = -A^*x$$

Використовуючи, отримані результати (20),(24),(29),(33),(35), (21), (30) одержимо загальний розв'язок диференціальної системи рівнянь (1) та умови розв'язності данної диференціальної системи у вигляді наступного твердження.

Лема 3. *Для розв'язності диференціальної системи* (1) *необхідно й достатньо виконання* γ*-лінійно незалежних умов* ($\gamma = \sum_{i=1}^{k} \hat{s}_i + g$)

$$\sum_{k=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^k}{dt^k}(f(t), \hat{\psi}_i^{\hat{s}_i-k+1}) = 0, i = \overline{1,k} \tag{36}$$

$$(f(t), p_i(t)) = 0, i = \overline{1,g} \tag{37}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$x(t,c) = X_\varepsilon(t)c + \int_a^t X_\varepsilon(t) Z_\varepsilon^*(\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{g} \beta_i(t) q_i -$$

$$-\sum_{i=1}^{l} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} (I_{\tilde{s}_i}^T)^k \frac{d^k}{dt^k}[\tilde{\Psi}_i^* f(t)] + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} [\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)} -$$

$$-\sum_{i=1}^{k} \hat{\Phi}_i \sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^* f(t)] - \sum_{i=1}^{n} \check{\Phi}_i \sum_{k=0}^{\check{s}_i-1} I_{\check{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\check{\Psi}_i^* f(t)], \quad (38)$$

де c–довільний постійний вектор розмірності ε, $\beta_i(t), \tilde{\beta}_i(t)$–довільні скалярні функції, такі що $\beta_i(t) \in C^1[a;b], i = \overline{1,g}$, $\tilde{\beta}_i(t) \in C^{\tilde{s}_i}[a;b], i = \overline{1,l}$.

3. Крайова задача.

Загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (1) запишемо у наступному вигляді

$$x = X_\varepsilon(t)c + \widetilde{x}(t), \forall c \in \mathbb{R}^\varepsilon \quad (39)$$

та $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_1(t) + \widetilde{x}_2(t) + \widetilde{x}_3(t)$– частковий розв'язок неоднорідної диференціальної системи рівнянь (1), який має вигляд

$$\widetilde{x}_1(t) = \int_a^t X_\varepsilon(t) Z_\varepsilon^*(\tau) f(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{l} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i} \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} (I_{\tilde{s}_i}^T)^k \frac{d^k}{dt^k}[\tilde{\Psi}_i^* f(t)] -$$

$$-\sum_{i=1}^{k} \hat{\Phi}_i \sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^* f(t)] - \sum_{i=1}^{n} \check{\Phi}_i \sum_{k=0}^{\check{s}_i-1} I_{\check{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\check{\Psi}_i^* f(t)], \quad (40)$$

$$\widetilde{x}_2(t) = \sum_{i=1}^{g} \beta_i(t) q_i, \quad (41)$$

$$\widetilde{x}_3(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} [\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)}. \quad (42)$$

Для того, щоб розв'язок $x(t)$ був розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно й достатньо щоб (39) задовольняв крайову умову (2). Підставляючи розв'язок (39) у крайову умову, отримаємо алгебраїчну систему відносно векторстовбця $c \in \mathbb{R}^\varepsilon$

$$Qc + l\widetilde{x}_1 + l\widetilde{x}_2 + l\widetilde{x}_3 = \alpha \quad (43)$$

де $l = col(l_1, l_2, ..., l_p)$– вектор-стовбець лінійних функціоналів, $Q := lX_\varepsilon(\cdot)$– відома $(p \times \varepsilon)$–вимірна постійна матриця, $l\widetilde{x}_1, l\widetilde{x}_2, l\widetilde{x}_3 - (p \times 1)$–вимірні постійні вектор-стовбці, $\alpha = col(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$– заданий вектор-стовбець констант.

Так як прямокутна матриця є нетеровим оператором [4], то алгебраїчна система (43) розв'язна тоді і тільки тоді, коли її вільний член $\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot) - l\widetilde{x}_2(\cdot) - l\widetilde{x}_3(\cdot)$ належить ортогональному доповненню $N^\perp(Q) = R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$, тобто коли

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot) - l\widetilde{x}_2(\cdot) - l\widetilde{x}_3(\cdot)\right\} = 0, \tag{44}$$

де $P_{Q^*} - (p \times p)-$вимірна матриця – ортопроектор, яка проектує простір $\mathbb{R}^p$ на нуль простір $N(Q^*)$ матриці Q^* :

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \to N(Q^*).$$

Нехай $rankP_{Q^*} = d\,(d = p - n_1, n_1 = rankQ)$, тоді $(p \times p)-$ вимірну матрицю P_{Q^*} можливо замінити на $(d \times p)-$ вимірну матрицю $P_{Q^*_d}$ складену з повної системи d лінійно незалежних стрічок матриці P_{Q^*}.

Зауважемо, що (44) не є остаточною умовою розв'язності крайової задачі (1), (2), тому що в вирази $x_2(l), x_3(l)$ входять довільні функції $\overline{\beta}_i(t)$ та $\widetilde{\beta}_i(t)$, отже $p-$вимірні вектор-стовпчики $l\widetilde{x}_2(\cdot), l\widetilde{x}_3(\cdot)-$ постійні невідомі векторні константи. Тому запишемо рівняння (44) у наступному вигляді

$$K\widetilde{c} = P_{Q^*_d}\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\}, \tag{45}$$

де $K = P_{Q^*_d} - (d \times p)-$відома матриця та $\widetilde{c} = l\widetilde{x}_2(\cdot) + l\widetilde{x}_3(\cdot) \in \mathbb{R}^p-$ невідомий вектор-стовбець констант, який треба визначити.

Алгебраїчна система (45) відносно $\widetilde{c}$ розв'язна тоді і тільки тоді, коли її вільний член $P_{Q^*_d}\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\}$ належить ортогональному доповненню $N^{\perp}(K) = R(K)$ підпростору $N(K^*)$, тобто коли

$$P_{K^*}K\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\} = 0, \tag{46}$$

де $P_{K^*} - (d \times d)-$вимірна матриця – ортопроектор, яка проектує простір $\mathbb{R}^d$ на нуль-простір $N(K^*)$ матриці K^* :

$$P_{K^*} : \mathbb{R}^d \to N(K^*).$$

Зауважимо, що $(P_{K^*}K)^* = K^*P^*_{K^*} = K^*P_{K^*} = 0$, звідси випливає, що $P_{K^*}K = 0$, а, отже, умова (46) завжди виконується, тобто алгебраїчна система (45) відносно $\widetilde{c}$ завжди розв'язна. При цьому загальний розв'язок системи (45) має вигляд

$$\widetilde{c} = K^+K\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\} + \tilde{c}_1, \forall \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}^p \tag{47}$$

де K^+- псевдообернена за Муром-Пенроузом $(p \times d)-$вимірна матриця [4]; $P_K - (p \times p)-$вимірна матриця – ортопроектор, яка проектує простір $\mathbb{R}^p$ на нуль-простір $N(K)$ матриці K; $\tilde{c}_1-$ довільний вектор констант з нуль-простору $N(K)$.

Довільний вектор-стовбець $\tilde{c}_1 = P_K\overline{c}_1 \in N(K)$ можна записати у вигляді $\tilde{c}_1 = P_{K_r}\overline{c}_r$, де $P_{K_r} - (p \times r)-$вимірна матриця, складена з повної системи $r\,(r = p - n_1)$ лінійно незалежних стовбців матриці P_K, $\overline{c}_r \in \mathbb{R}^r$.

Підставивши (47) у рівняння (44) отримаємо умову розв'язності крайової задачі (1), (2)

$$K(I - K^+K)(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)) = 0,$$

слід відмітити, що данне рівняння завжди виконується, тому що $P_K = I - K^+K$ та використовуючи означення ортопроектора $KP_K = 0$, отримаємо тотожність.

З формул (43), (47) випливає, що шукана константа c буде наступною

$$c = Q^{+}\left\{(I - K^{+}K)(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)) - \tilde{c}_1\right\} + \tilde{c}_2, \forall \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}^p, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}^{\varepsilon}$$

або

$$c = Q^{+}(I - K^{+}K)(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)) + \bar{c}, \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^{\varepsilon}, \tag{48}$$

де $\bar{c} = -Q^{+}\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$–довільний вектор-стовбець, $\bar{c} \in \mathbb{R}^{\varepsilon}$; Q^{+}– псевдообернена до матриці Q за Муром-Пенроузом $(\varepsilon \times p)$–вимірна матриця.

Зауваження 1. *Крайова задача* (1), (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли частинні розв'язки* (41), (42)*диференціальних систем* (14), (16) *відповідно, задовольняють наступним p умовам:*

$$l\widetilde{x}_2(\cdot) + l\widetilde{x}_3(\cdot) = K^{+}K\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\} + \tilde{c}_1, \forall \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}^p. \tag{49}$$

При цьому, якщо покласти

$$\tilde{c}_1 = l\widetilde{x}_2(\cdot) + l\widetilde{x}_3(\cdot) - K^{+}K\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\}, \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}^p, \tag{50}$$

тоді умови (49) *завжди виконуються та шукана константа c буде наступною*

$$c = Q^{+}(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot) - l\widetilde{x}_2(\cdot) - l\widetilde{x}_3(\cdot)) + \tilde{c}_2, \forall \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}^{\varepsilon} \tag{51}$$

Таким чином, використовуючи попередні викладки, приходимо до наступного твердження.

Теорема 1. *Диференціальна система* (1) *з прямокутними матрицями розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконуються γ–лінійно-незалежних умов* (36), (37) $(\gamma = \sum_{i=1}^{k} \hat{s}_i + g)$. *Крайова задача* (1), (2) *має ε–параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків виду*

$$x(t, c) = X_{\varepsilon}(t)Q^{+}(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot) - l\widetilde{x}_2(\cdot) - l\widetilde{x}_3(\cdot)) +$$

$$+ X_{\varepsilon}(t)\tilde{c}_2 + \int_a^t X_{\varepsilon}(t)Z_{\varepsilon}^{*}(\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{g}\beta_i(t)q_i -$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1}(I_{\tilde{s}_i}^{T})^k\frac{d^k}{dt^k}[\tilde{\Psi}_i^{*}f(t)] + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i}[\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)} -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\hat{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1}I_{\hat{s}_i}^{k}\frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^{*}f(t)] - \sum_{i=1}^{n}\breve{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1}I_{\breve{s}_i}^{k}\frac{d^k}{dt^k}[\breve{\Psi}_i^{*}f(t)], \tag{52}$$

де $\beta_i(t), \tilde{\beta}_i(t)$–довільні скалярні функції,такі що $\beta_i(t) \in C^1[a;b], i = \overline{1,g}, \tilde{\beta}_i(t) \in C^{\tilde{s}_i}[a;b], i = \overline{1,n}$; c–довільний вектор-стовбець, $\tilde{c}_2 \in \mathbb{R}^{\varepsilon}$.

Наслідок 1. *Якщо* $\operatorname{rank} Q = n_1 = \varepsilon$, *та інтегрування системи* (1) *у загальному випадку зведено до інтегрування систем* (15),(17) *та* (18) *такого ж типу тоді крайова задача* (2) *диференціальної системи* (1) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні d–лінійно незалежні умови*

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\} = 0, d = p - \varepsilon,$$

та при цьому має єдиний розв'язок

$$x(t,c) = X_\varepsilon(t)Q^+(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)) +$$

$$+\int_a^t X_\varepsilon(t)Z_\varepsilon^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{k}\hat{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^* f(t)] +$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\breve{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1} I_{\breve{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\breve{\Psi}_i^* f(t)],$$

Доведення. Так як інтегрування системи (1) у загальному випадку зведено до інтегрування систем (15),(17) та (18), тоді розв'язком цієї системи буде

$$x = X_\varepsilon(t)c + \widetilde{x}_1(t), \forall c \in \mathbb{R}^\varepsilon,$$

де

$$\widetilde{x}_1(t) = \int_a^t X_\varepsilon(t)Z_\varepsilon^*(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\hat{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^* f(t)] - \sum_{i=1}^{n}\breve{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1} I_{\breve{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\breve{\Psi}_i^* f(t)],$$

та замість системи (43) отримаємо алгебраїчну систему відносно вектор-стовбця $c \in \mathbb{R}^\varepsilon$

$$Qc + l\widetilde{x}_1 = \alpha$$

яка буде розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні d–лінійно незалежні умови

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)\right\} = 0, d = p - \varepsilon.$$

Єдиність розв'язку випливає з того, що $r = 0$, то $P_{Q_r} = 0$ та відповідно $c = P_{Q_r}\bar{c}_r = 0$.

Наслідок 2. *Якщо* $\operatorname{rank} Q = n_1 = p$, *та інтегрування системи* (1) *у загальному випадку зведено до інтегрування систем* (15),(17) *та* (18), *тоді крайова задача* (2) *диференціальної системи* (1) *завжди розв'язна та при цьому має розв'язок*

$$x(t,c) = X_\varepsilon(t)c + X_\varepsilon(t)Q^+(\alpha - l\widetilde{x}_1(\cdot)) +$$

$$+\int_a^t X_\varepsilon(t)Z_\varepsilon^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{k}\hat{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\hat{\Psi}_{is_i}^* f(t)] +$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\breve{\Phi}_i\sum_{k=0}^{\breve{s}_i-1} I_{\breve{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}[\breve{\Psi}_i^* f(t)],$$

де $c = P_{Q_r}\bar{c}_r$*—довільний вектор-стовбець,* $r = p - \varepsilon$.

Дійсно, так як $\operatorname{rank} Q = p$, то $d = p - p = 0$, $P_{Q_d^*} \equiv 0$.

Приклад. Для того, щоб проілюструвати сформульовані вище результати, розглянемо диференціальну систему рівнянь з крайовою умовою

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} x = f(t)$$

$$\ell x = M_1 x(a) + M_2 x(b) = \alpha, \tag{53}$$

де $x = (x_1, x_2, x_3), f = (f_1, f_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $M_i (i = 1, 2)$—прямокутні матриці розмірності (2×3),

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введемо нові невідомі функції z_1, z_2, z_3 які залежать від старих лінійними невиродженим перетворенням $x = Qz$. Виберемо матриці $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

та $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ так щоб пучок $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ мав канонічну квазідіагональну форму. Підставляючи у рівняння і помножуючи зліва на P отримаємо

$$\tilde{A} = PAQ = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$\tilde{B} = PBQ = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому пучки матриць $A + \lambda B$ та $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ строго еквівалентні один одному:

$$\tilde{A} + \lambda \tilde{B} = P(A + \lambda B)Q = \begin{pmatrix} 4 + 4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} - = \begin{pmatrix} -f_1 - f_2 \\ f_1 - f_2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Розв'язком якої буде

$$z = Zc + \tilde{z} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} c + 1/4 \begin{pmatrix} -f_1 - f_2 \\ f_2 - f_1 \\ \tilde{c} \end{pmatrix}, \forall z_3 \in \mathbb{R}, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

де Z–розв'язок однорідної системи (54) та $\tilde{z}$–частковий розв'язок цієї системи. Знайдемо загальний розв'язок вихідної системи рівнянь

$$x = Qz = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} c + 1/4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_1 & f_2 \\ & f_2 - f_1 \\ & \tilde{c} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ x_3 \end{pmatrix} c + 1/4 \begin{pmatrix} -2f_1 \\ 2f_2 \\ \tilde{c} \end{pmatrix}, \forall x_3 \in \mathbb{R}, \forall \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

звідси знайдемо $Q = lX_\varepsilon = \begin{bmatrix} e^{-a} - e^{-b} \\ e^{-b} - e^{-a} \end{bmatrix}$ –2– вимірний вектор-стовпець, тоді можемо записати лінійне алгебраїчне рівняння

$$\begin{bmatrix} e^{-a} - e^{-b} \\ e^{-b} - e^{-a} \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} f_1 - f_2 \\ f_1 - f_2 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Крайова задача (53) розв'язна тоді і тільки тоді коли виконується умова:

$$P_{Q_d^*} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} f_1 - f_2 \\ f_1 - f_2 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

де P_{Q^*}–2×2–вимірна матриця – ортопроектор, яка проектує простір $\mathbb{R}^2$ на нуль-простір $N(Q^*)$ матриці Q^*. Матрицю P_{Q^*} розрахуємо за формулою $P_{Q^*} = E_2 - QQ^+$; спочатку знайдемо матрицю $Q^+ = \lim_{\varepsilon \to 0}(Q^*Q + \varepsilon E_1)^{-1}Q^*$, де Q^* – (1×2)–вимірна транспонована матриця до матриці Q.

Отже, $P_Q = E_1 - Q^+Q = 0$ де

$$Q^+ = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\begin{pmatrix} e^{-a} - e^{-b} & e^{-b} - e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a} - e^{-b} \\ e^{-b} - e^{-a} \end{pmatrix} + \varepsilon \right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-a} - e^{-b} & e^{-b} - e^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(e^{-a} - e^{-b})} & -\frac{1}{2(e^{-a} - e^{-b})} \end{pmatrix},$$

та

$$P_{Q^*} = E_2 - QQ^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} e^{-a} - e^{-b} \\ e^{-b} - e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(e^{-a} - e^{-b})} & -\frac{1}{2(e^{-a} - e^{-b})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

звідки випливає, що $P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Отже крайова задача (53) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується одна $(d = 1)$ умова:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = f_1 - f_2 \tag{56}$$

При цьому загальний розв'язок алгебраїчної системи (55) є:

$$c = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(e^{-a} - e^{-b})} \tag{57}$$

Підставляючи знайдену константу $c \in \mathbb{R}^1$ у загальний розв'язок, знаходимо, що розв'язк вихідної крайової задачі (53) єдиний, який існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова розв'язності (56).

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М.:Наука, 2004. - 576 с.
2. *Елишевич М. А.* Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами. - Нелінійні коливання, 2013, т. 16, №2. - с. 173 - 190.
3. *Boichuk A.A., Shegda L.M.* Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems. Differential Equations. – 2011. – Vol.47, №4. – pp. 459-467.
4. *Boichuk A.A., SamoilenkoA.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
5. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. – 1983. – N4. – p. 517 – 521.
6. *Rheinboldt W.C.* Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds // Math. Comp. – 1984. – Vol. 43, N 168. – P. 473 – 482.
7. *Samoilenko, A. M., Shkil' M.I., Yakovec' V.P.* Linear systems of differential equations with Singularities. - Kyiv: Vyshcha Shkola, 2000. – 294 p.
8. *Бойчук А.А., Покутный А.А., Чистяков В.Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально - алгебраических уравнений.: Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013, т.53, №6 - с. 958 - 969.

Одержано 04.10.2014