УДК 519.622.2

М. І. Глебена (Ужгородський національний університет)

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The calculation stability of numerical method of solving the Cauchy problem for system of ordinary differential equations is considered. The method is based on the approximation of subintegral functions on the non-classical Newtonian majorants, constructed by two points.

Розглядається обчислювальна стійкість чисельного методу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, в основі якого лежить апроксимація підінтегральних функцій некласичними мажорантами Ньютона, побудованими за двома точками.

Вступ. В [1,2], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [3], побудовано новий неявний однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, доведена його збіжність. В [4] проведено обґрунтування цього методу, встановлена його точність та мажорантна властивість. В [5] встановлена обчислювальна стійкість методу. В [6] цей метод узагальнено на випадок розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, доведена його збіжність. В даній роботі встановлюється обчислювальна стійкість методу.

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right),\ y_i\left(x_0\right) = y_{i,0},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Нехай в області $\overline{D}$, яка визначається нерівностями

$$x_0 \le x \le x_0 + a,\ |y_i - y_{i,0}| \le b,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

функції $f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $y_1, y_2, \ldots y_n$, тобто існує така стала L, що для довільних точок $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$, $(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \overline{D}$ виконуються нерівності

$$\left|f_i\left(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\right) - f_i\left(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n\right)\right| \le L \sum_{k=1}^{n} \left|\overline{y}_k - \widetilde{y}_k\right|,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Тоді на проміжку $[x_0, x_0 + c]$ задача Коші (1) матиме єдиний розв'язок, де

$$c = min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

а M– стала, така, що для всіх $(x, y_1, \ldots, y_n) \in \overline{D}$

$$\left|f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)\right| \le M,\ i = 1, 2, \ldots n.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1) треба знайти на проміжку $[x_0, x_0 + c]$. Якщо на цьому проміжку вибрати систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_m$, де $x_k = x_0 + kh$, $h = c/m$, то для знаходження наближених значень $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, точного розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задачі (1) в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в [6] побудовано інтерполяційний метод

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + h\frac{f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k})}{ln\left(f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}) / f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k})\right)}, \quad (4)$$

де $k = 0, 1, \ldots, m-1$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Ознакою збіжності цього методу є наступна теорема [6].

Теорема 1. *Якщо в області $\overline{D}$, яка визначається нерівностями (2), функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неперервні, задовольняють умову Ліпшиця (3) з сталою L за аргументами $y_1, y_2, \cdots, y_n$ і*

$$\left|\frac{df_i}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} f_n\right| \leq N_i < \infty, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

де N_i – деякі сталі, то наближені значення $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, знайдені за формулою (4), при $h \to 0$ рівномірно відносно x збігаються до точного розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задачі (1).

Розглянемо питання обчислювальної стійкості цього методу.

Нехай $\widetilde{y}_{i,0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – наближені значення точних початкових значень $y_{i,0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а $\varepsilon'_{i,0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – абсолютні похибки початкових наближень, тобто

$$\varepsilon'_{i,0} = |\widetilde{y}_{i,0} - y_{i,0}|.$$

Тоді замість формули (4) для обчислення наближених значень розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ одержуємо формулу

$$\widetilde{y}_{i,k+1} = \widetilde{y}_{i,k} + h\frac{f_i(x_{k+1}, \widetilde{y}_{1,k+1}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k+1}) - f_i(x_k, \widetilde{y}_{1,k}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k})}{ln\left(f_i(x_{k+1}, \widetilde{y}_{1,k+1}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k+1}) / f_i(x_k, \widetilde{y}_{1,k}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k})\right)},$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1; \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Якщо позначити $\varepsilon'_{i,k} = |\widetilde{y}_{i,k} - y_{i,k}|$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\varepsilon'_{i,k+1} = |\widetilde{y}_{i,k+1} - y_{i,k+1}| = \left|(\widetilde{y}_{i,k} - y_{i,k}) + \right.$$

$$+h\left(\frac{f_i(x_{k+1}, \widetilde{y}_{1,k+1}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k+1}) - f_i(x_k, \widetilde{y}_{1,k}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k})}{ln\left(f_i(x_{k+1}, \widetilde{y}_{1,k+1}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k+1}) / f_i(x_k, \widetilde{y}_{1,k}, \ldots, \widetilde{y}_{n,k})\right)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k})}{ln\left(f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}) / f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k})\right)}\right)\right|.$$

Оскільки на основі границі

$$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_i\left(x_{k+1},\widetilde{y}_{1,k+1},\ldots,\widetilde{y}_{n,k+1}\right)-f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)}{ln\left(f_i\left(x_{k+1},\widetilde{y}_{1,k+1},\ldots,\widetilde{y}_{n,k+1}\right)/f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)\right)}=f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_i\left(x_{k+1},y_{1,k+1},\ldots,y_{n,k+1}\right)-f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)}{ln\left(f_i\left(x_{k+1},y_{1,k+1},\ldots,y_{n,k+1}\right)/f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)\right)}=f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right),$$

то

$$\frac{f_i\left(x_{k+1},\widetilde{y}_{1,k+1},\ldots,\widetilde{y}_{n,k+1}\right)-f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)}{ln\left(f_i\left(x_{k+1},\widetilde{y}_{1,k+1},\ldots,\widetilde{y}_{n,k+1}\right)/f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)\right)}=f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)+\widetilde{\delta}_{i,k}\left(h\right),$$

$$\frac{f_i\left(x_{k+1},y_{1,k+1},\ldots,y_{n,k+1}\right)-f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)}{ln\left(f_i\left(x_{k+1},y_{1,k+1},\ldots,y_{n,k+1}\right)/f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)\right)}=f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)+\delta_{i,k}\left(h\right),$$

де $\widetilde{\delta}_{i,k}\left(h\right)\to 0$ і $\delta_{i,k}\left(h\right)\to 0$ при $h\to 0$. Тому

$$\varepsilon'_{i,k+1}\le\varepsilon'_{i,k}+h\left|f_i\left(x_k,\widetilde{y}_{1,k},\ldots,\widetilde{y}_{n,k}\right)-f_i\left(x_k,y_{1,k},\ldots,y_{n,k}\right)\right|+\left|\left(\widetilde{\delta}_{i,k}\left(h\right)-\delta_{i,k}\left(h\right)\right)\right|.$$

Функції $f_i\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, $i=1,2,\ldots,n$, задовольняють умову Ліпшиця зі сталою L, тому

$$\varepsilon'_{i,k+1}\le\varepsilon'_{i,k}+hL\sum_{s=1}^{n}\left|\widetilde{y}_{s,k}-y_{s,k}\right|+h\left|\widetilde{\delta}_{i,k}\left(h\right)-\delta_{i,k}\left(h\right)\right|,$$

або

$$\varepsilon'_{i,k+1}\le\varepsilon'_{i,k}+hL\sum_{s=1}^{n}\varepsilon'_{s,k}+h\bar{\delta}_{i,k}\left(h\right),\ i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,m-1,$$

де $\bar{\delta}_{i,k}\left(h\right)=\left|\widetilde{\delta}_{i,k}\left(h\right)-\delta_{i,k}\left(h\right)\right|$. При цьому $\bar{\delta}_{i,k}\left(h\right)\to 0$ при $h\to 0$.

Нехай

$$\max_{1\le s\le n}\varepsilon_{s,k}=\varepsilon_k,\ \max_{1\le i\le n}\bar{\delta}_{i,k}\left(h\right)=\delta_k\left(h\right),k=0,1,\ldots,m.$$

Тоді

$$\varepsilon'_{k+1}\le\left(1+nhL\right)\varepsilon'_k+h\delta_k\left(h\right),\ k=0,1,\ldots,m-1.$$

Звідси

$\varepsilon'_1\le\left(1+nhL\right)\varepsilon_0+h\delta_0\left(h\right);$

$\varepsilon'_2\le\left(1+nhL\right)\varepsilon'_1+h\delta_1\left(h\right)\le\left(1+nhL\right)^2\varepsilon'_0+h\left(\delta_1\left(h\right)+\delta_0\left(h\right)\left(1+nhL\right)\right);$

$\varepsilon'_3\le\left(1+nhL\right)\varepsilon_2+h\delta_2\left(h\right)\le$

$\le\left(1+nhL\right)^3\varepsilon'_0+h\left(\delta_2\left(h\right)+\delta_1\left(h\right)\left(1+nhL\right)+\delta_0\left(h\right)\left(1+nhL\right)^2\right);$

....

$\varepsilon'_m\le\left(1+nhL\right)^m\varepsilon'_0+h\left(\delta_{m-1}\left(h\right)+\delta_{m-2}\left(h\right)\left(1+nhL\right)+\ldots+\delta_0\left(h\right)\left(1+nhL\right)^{m-1}\right).$

Якщо позначити

$$\max_{0\le i\le m-1}\delta_i\left(h\right)=\delta\left(h\right),$$

то

$$\varepsilon'_m\le\left(1+nhL\right)^m\varepsilon'_0+h\delta\left(h\right)\left(1+\left(1+nhL\right)+\ldots+\left(1+nhL\right)^{m-1}\right),$$

або

$$\varepsilon_m' \leq (1 + nhL)^m \varepsilon_0' + \frac{(1 + nhL)^m - 1}{nhL} h\delta(h).$$

Отже,

$$\varepsilon_m' \leq (1 + nhL)^m \varepsilon_0' + \delta(h) \frac{(1 + nhL)^m - 1}{nL}.$$

Якщо врахувати, що при $u > 0$ виконується нерівність $e^u > 1 + u$ і $mh = c$, то остаточно одержуємо

$$\varepsilon_m' \leq e^{cnL} \varepsilon_0' + \delta(h) \frac{e^{cnL} - 1}{nL}.$$

Звідси випливає, що похибка початкових даних не нагромаджується, тобто метод має обчислювальну стійкість.

Висновок. Розглянуто чисельний метод розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, в основі якого лежить апроксимація підінтегральних функцій некласичними мажорантами Ньютона, побудованими за двома точками. Встановлена обчислювальна стійкість цього методу.

1. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.прикл. матем.та інформатика. – 1999. – Вип 1. – С. 250-254.
2. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь //Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2002. – №2. – С. 37-43.
3. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
4. *Грипинська Н.* Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку //Вісн. Львів. ун-ту. Сер.прикл. матем.та інформатика. – 2002. – Вип 4. – С. 23-29.
5. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Про обчислювальну стійкість інтерполяційного методу мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь //Вісн. НУ „ Львівська політехніка" Прикладна математика. – 2000. – №411. – С. 337-340.
6. *Цегелик Г. Г.* Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь //Прикладні проблеми механіки та математики. – 2005. – Вип 3. – С. 21-27.

Одержано 17.10.2014