УДК 517.983

В. Ф. Журавлев
(Житомирский национальный агроэкологический университет)

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

The paper highlights the weak non-linear operators equations with generalized inverse operator in the linear part. The operators function in Banach spaces. The author has obtained necessary and sufficient conditions for finding the solutions of such equations. The author also managed to establish the converging iterative procedures for constructing the only possible solution, or at least one of possible solutions.

В работе рассмотрены слабонелинейные операторные уравнения с обобщенно обратимым оператором в линейной части. Операторы действуют в банаховых пространствах. Получены необходимые и достаточные условия существования решений таких уравнений, построены итерационные процедуры для построения единственного решения и хотя бы одного из возможных решений.

Существует два основных подхода к исследованию разрешимости и построению решений краевых задач вида

$$\begin{aligned} (Lz)(t) &= \varphi(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \\ \ell z(\cdot) &= \mu + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon), \end{aligned} \qquad (1)$$

где L, ℓ, соответственно, линейный ограниченный обобщенно обратимый оператор [1, 2] и линейный ограниченный вектор-функционал; Z, J, соответственно, ограниченные нелинейная вектор-функция и нелинейный вектор-функционал.

Первый подход берет свое начало из работ И. Г. Малкина [3] и Е. А. Гребенникова, Ю. А. Рябова [4] и предполагает использование информации о линейном операторе L исходного операторного уравнения. Он основан на построении обобщенного оператора Грина соответствующей (1) линейной полуоднородной ($\varepsilon = 0$, $\mu = 0$) краевой задачи [5]. Такие краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в периодическом случае в [3], а для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем функционально-дифференциальных уравнений в нетеровом случае в [2], [5]. Отличительной особенностью этих задач является то, что линейная часть исходного уравнения представлена всюду разрешимым оператором L.

Второй подход основан на предложенной в [6] интерпретации краевой задачи (1) как слабонелинейного операторного уравнения

$$(Az)(t) = f(t) + \varepsilon F(z,t,\varepsilon), \qquad (2)$$

где $A = \mathrm{col}[L,\ell]$ – линейный ограниченный обобщенно обратимый оператор; $F = \mathrm{col}[Z,J]$ нелинейная по z ограниченная вектор-функция; $f(t) = \mathrm{col}[\varphi(t),\mu]$. Он основан на использовании конструкций обобщенно-обратного A^- оператора в банаховом и псевдобратного A^+ в гильбертовом пространствах, а также теоремы о разрешимости линейных краевых задач для операторных уравнений с линейными обобщенно обратимыми операторами L [2, 7–10].

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение с малым параметром ε

$$(Az(\cdot,\varepsilon))(t) = f(t) + \varepsilon F(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{3}$$

Наряду с уравнением (3) рассмотрим линейное порождающее операторное уравнение

$$(Az_0)(t) = f(t), \tag{4}$$

которое получается из (3) при $\varepsilon = 0$.

Пусть оператор A действует из вещественного банахового пространства ограниченных вектор-функций $z(t)$, определенных на конечном промежутке $\mathcal{J}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot): \mathcal{J} \to \mathbf{B}$ с равномерной нормой $|||z(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{J}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$ в вещественное банахово пространство ограниченных вектор-функций $f(t)$, определенных на том же промежутке $\mathcal{J}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_2$, $f(\cdot): \mathcal{J} \to \mathbf{B}_2$ с нормой $|||f(t)||| = \sup_{t\in\mathcal{J}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, которые в [11, с. 81] обозначаются $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$.

Пусть $A: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$ – линейный ограниченный обобщенно обратимый оператор. Обобщенная обратимость оператора A означает [1], что он нормально разрешим, его нуль-пространство $N(A)$ и ядро $R(A)$ дополняемы [12], [13] в банаховых пространствах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$, соответственно. При этом существуют [12] ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(A)}: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \to N(A)$ и $\mathcal{P}_{Y_A}: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2) \to Y_A$, которые разбивают пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$ в прямые топологические суммы подпространств

$$\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) = N(A) \oplus X_A, \quad \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2) = Y_A \oplus R(A).$$

Множество линейных ограниченных обобщенно обратимых операторов $A: \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$ в дальнейшем будем обозначать $\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2))$ (**GI** – generalized inverses).

Пусть:

(a1) $A \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2))$;

(a2) F – нелинейная по z ограниченная вектор-функция, которая в окрестности порождающего решения $\|z - z_0\| \le q$ имеет производную Фреше по z и непрерывная по совокупности переменных z, t, ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, q и ε_0 – достаточно малые константы; (5)

(a3) $F(0,t,0) = 0$, $F'_z(0,t,0) = 0$;

(a4) $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$.

Ставится задача о нахождении условий существования и алгоритмов построения решения $z(t,\varepsilon)$ уравнения (3) принадлежащего пространству $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ по t, непрерывного по ε и обращающегося при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение уравнения (4).

Схема исследования уравнения (2) предполагает переход при помощи методов типа Ляпунова-Шмидта от задачи (2) к операторной системе, для решения которой применимы сходящиеся интерационные процедуры, основанные на принципе неподвижной точки [3], [4], [5]. Сходимость итерационных процедур может быть установлена с помощью мажорант Ляпунова [14], которые успешно были применены для периодических краевых задач [4], [15] и для общих нетеровых краевых задач [2], [5].

Однозначная разрешимость. Вначале рассмотрим случай, когда порождающее уравнение (4) является однозначно разрешимым.

Теорема 1. *Пусть операторное уравнение (3) удовлетворяет условиям (5), а порождающее уравнение (4) однозначно разрешимо ($\mathcal{P}_{N(A)} \equiv 0$). Операторное уравнение (3) разрешимо тогда и только тогда, когда нелинейная вектор-функция F удовлетворяет условию*

$$(\mathcal{P}_{Y_A} F(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) = 0$$

и при этом имеет при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ единственное решение $z(t,\varepsilon)$, принадлежащее пространству $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ по t, непрерывное по ε, $z(t,0) = z_0(t)$. Это решение находится с помощью сходящегося на $[0,\varepsilon_*]$ итерационного процесса

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t) + x_k(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A_l^{-1}F(z_0(\cdot) + x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t), \tag{6}$$

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0,\ k = 0,1,2,...,$$

где $z_0(t)$– единственное решение порождающего уравнения (4), A_l^{-1}– ограниченный левый обратный оператор к оператору A.

Доказательство. Операторное уравнение (4) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда $N(A) = \{0\}$ ($\mathcal{P}_{N(A)} = 0$) [10, с. 318]. Это значит, что обобщенно обратимый оператор A или $n-$ нормальный ($n = 0$), или нетеров ($\mathrm{ind}A = -\dim N(A^*)$). Возможен еще тривиальный случай, когда $N(A) = N(A^*) = \{0\}$, при котором оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}. Этот случай мы рассматривать не будем.

Вследствие нормальной разрешимости оператора A уравнение (4) разрешимо для тех и только тех $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$, которые удовлетворяют условию [16]

$$(\mathcal{P}_{Y_A} f)(t) = 0 \tag{7}$$

При этом единственное порождающее решение уравнения (4) запишется в виде

$$z_0(t) = (A^- f)(t), \tag{8}$$

где $A^- : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$– ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору A. Поскольку нуль-пространство $N(A)$ нулевое, то обобщенно-обратный оператор A^- будет левым обратным оператором A_l^{-1} [9, с. 174].

Таким образом, формула для порождающего решения (8) примет вид

$$z_0(t) = (A_l^{-1} f)(t),$$

Выполняя в (3) замену переменной

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t) + x(t,\varepsilon),$$

для отклонения $x(t,\varepsilon)$ от порождающего решения получаем следующее операторное уравнение:

$$(Ax(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon F(z_0(t) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon). \tag{9}$$

Получим условия существования и алгоритм построения решения $x(t,\varepsilon)$, принадлежащего пространству $\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$ по t, непрерывного по ε и обращающегося при $\varepsilon = 0$ в нулевое. Применяя к уравнению (9) теорему 3 [9, с. 175] и рассматривая $F(z,t,\varepsilon)$ как неоднородность, находим, что оно разрешимо тогда и только тогда, когда нелинейная вектор-функция F удовлетворяет условию

$$(\mathcal{P}_{Y_A} F(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) = 0. \tag{10}$$

При выполнении условия (10) единственное решение $x(t,\varepsilon)$ операторного уравнения (9) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon (A_l^{-1} F(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t). \tag{11}$$

Таким образом, операторное уравнение (9) эквивалентно на множестве вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in \mathrm{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$ операторной системе

$$\begin{gathered}(\mathcal{P}_{Y_A} F(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) = 0,\\ x(t,\varepsilon) = \varepsilon (A_l^{-1} F(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t).\end{gathered} \tag{12}$$

Действительно, пусть $x(t,\varepsilon)$ удовлетворяет операторной системе (12). Тогда, применив оператор A к уравнению (11) слева с учетом (10) и соотношения $AA_l^{-1} = I_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_A}$ [1, с. 60] имеем

$$\begin{gathered}(Ax(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon (AA_l^{-1} F(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) =\\ = \varepsilon (I_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_A})(F(z_0(\cdot) + x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon F(z_0(t) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon),\end{gathered}$$

из которого следует, что $x(t,\varepsilon)$ удовлетворяет, при выполнении условия (10), операторному уравнению (9) и обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Наоборот, если вектор-функция $x(t,\varepsilon)$ является решением операторного уравнения (9), то при условии (10) это решение представимо в виде (11), а значит удовлетворяет операторной системе (12).

Далее покажем, что для построения решения операторной системы (12) применим метод простых итераций [4], [5], [15].

Обозначим $F_0 x = F(z_0 + x)$ Тогда второе уравнение системы (12) запишется в виде:

$$x = A_l^{-1} F_0 x = A_l^{-1} \tilde{F}_0(\varepsilon) x,$$

где вектор-функция $\tilde{F}_0(\varepsilon)$ в общем случае — нелинейная. Учитывая ограниченность оператора A_l^{-1} и промежутка $\mathcal{J}$, а также зависимость $\tilde{F}_0$ от ε, всегда можно подобрать $\varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ такое, что для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ суперпозиция $A_l^{-1}\tilde{F}_0(\varepsilon)$ будет сжимающим оператором. Тогда, из принципа сжимающих отображений следует, что операторная система (12) имеет единственную неподвижную точку.

На основе операторной системы (12) построим итерационный алгоритм для нахождения решения $x(t, \varepsilon)$. Первое приближение $x_1(t, \varepsilon)$ к $x(t, \varepsilon)$ найдем по формуле

$$x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon(A_l^{-1} F(z_0(\cdot), \cdot, \varepsilon))(t)$$

как решение уравнения

$$(Ax(\cdot, \varepsilon))(t) = \varepsilon F(z_0(t), t, \varepsilon),$$

которое существует в силу условия (10) на нелинейный оператор F. Тогда первое приближение $z_1(t, \varepsilon)$ к $z(t, \varepsilon)$ запишется в виде:

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t) + x_1(t, \varepsilon).$$

Второе приближение $x_2(t, \varepsilon)$ к $x(t, \varepsilon)$ найдем по формуле

$$x_2(t, \varepsilon) = \varepsilon(A_l^{-1} F([z_0(\cdot) + x_1(t, \varepsilon)], \cdot, \varepsilon))(t)$$

как решение уравнения

$$(Ax_2(\cdot, \varepsilon))(t) = \varepsilon F([z_0(\cdot) + x_1(t, \varepsilon)], t, \varepsilon),$$

которое также существует в силу условия (10) на нелинейную вектор-функцию F. Второе приближение $z_2(t, \varepsilon)$ к $z(t, \varepsilon)$ запишется в виде:

$$z_2(t, \varepsilon) = z_0(t) + x_2(t, \varepsilon).$$

Продолжая этот процес дальше получим, что на каждом шаге, условия разрешимости (10) соответствующих операторных уравнений будут выполнены, поэтому для определения решения $z(t, \varepsilon)$ операторного уравнения (3) получим итерационную процедуру (6).

Критический случай первого порядка.

Необходимое условие существования решений. В отличие от рассмотренного выше случая однозначной разрешимости исследуем уравнение (3), когда порождающее уравнение (4) неоднозначно разрешимо, т.е. $\mathcal{P}_{N(A)} \neq 0$. Будем искать условие существования и алгоритм построения решения $z(t, \varepsilon)$ операторного уравнения (3), принадлежащего по t пространству $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, непрерывного по ε, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в одно из порождающих решений уравнения (4). Вследствие нормальной разрешимости оператора A порождающее уравнение (4) имеет решение тогда и только тогда, когда $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2)$ удовлетворяет условию (7) и при этом имеет семейство решений [16]

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(A)} \hat{z})(t) + (A^- f)(t), \tag{13}$$

где $\hat{z}(t)$– произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, $A^- : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$ – обобщенно-обратный оператор к оператору A.

Предположим, что $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2)$ таково, что условие (7) выполнено.

Теорема 2. *Пусть операторное уравнение (3) удовлетворяет условиям (5) и имеет решение $z(t, \varepsilon)$, непрерывное по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в некоторое порождающее решение $z_0(t, \hat{z}_0)$ (13), полученное при $\hat{z}(t) = \hat{z}_0(t)$. Тогда элемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$ удовлетворяет уравнению*

$$(\mathcal{P}_{Y_A} F(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, 0))(t) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ имеет место тождество

$$(Az(\cdot, \varepsilon))(t) \equiv f(t) + \varepsilon F(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Учитывая нормальную разрешимость оператора A и справедливость условия (7), имеем [10, с. 318], что при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ нелинейная вектор-функция $F(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ в уравнении (3) должна удовлетворять условию $(\mathcal{P}_{Y_A} F(z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) = 0$.

Поскольку нелинейная вектор-функция $F(z, t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям (a2) и (a3) из (5) в окрестности порождающего ($\varepsilon = 0$) решения $z_0(t, \hat{z}_0)$, то переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим $z(t, \varepsilon) \to z_0(t, \hat{z}_0)$ и

$$\mathcal{P}_{Y_A} F(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, 0))(t) = 0.$$

Обозначим левую часть (14) через $(G\hat{z}_0(\cdot))(t)$, и запишем это уравнение в виде

$$(G\hat{z}_0(\cdot))(t) = (\mathcal{P}_{Y_A} F(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, 0))(t) = 0. \tag{15}$$

Если уравнение (15) имеет некоторое решение $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, то элемент $\hat{z}_0(t)$ определяет то порождающее решение $z_0(t, \hat{z}_0)$, которому может отвечать решение $z(t, \varepsilon)$ исходной системы (3), обращающееся в $z_0(t, \hat{z}_0)$ при $\varepsilon = 0$.

Замечание 1. *В случае периодической краевой задачи в конечномерном пространстве* $\hat{z}_0 = c \in R^n$ *— векторная константа, которая имеет физический смысл — это амплитуда колебаний периодического решения. Поэтому в классической периодической краевой задаче для дифференциальных систем [3–5] уравнение, аналогичное уравнению (15), называется уравнением для порождающих амплитуд.*

По аналогии с этим уравнение (15) будем называть уравнением для порождающих элементов операторного уравнения (3).

Если уравнение (15) не имеет решений, то операторное уравнение (3) не обладает искомым решением.

Отметим, что необходимое условие (10) существования однозначно разрешимого операторного уравнения и необходимое условие существования решения неоднозначно разрешимого уравнения, заключающееся в том, чтобы уравнение (15) имело хотя бы одно решение, похожи по форме, но имеют принципиальное отличие. В первом случае (10) представляет собой жесткое условие на нелинейность F. Во втором случае условие (15) удовлетворяется выбором элемента $\hat{z}_0(t)$ в семействе порождающих решений (13).

Достаточное условие существования решений.

Найдем условия существования решения операторного уравнения (3) в случае, когда порождающее уравнение (15) неоднозначно разрешимо. По аналогии с [5], где рассмотрены краевые задачи для обыкновенных дифференциальных систем в евклидовых пространствах $\mathbf{R}^n$, этот случай назван критическим случаем первого порядка, поскольку ответить на вопрос о существовании решений уравнения (3) можно после анализа уравнения, служащего для нахождения первого приближения к искомому решению. Он требует проверки условий, которые составляются при помощи порождающих решений и нелинейной вектор-функции $F(z, t, \varepsilon)$.

Выполняя в (3) замену переменных

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon),$$

в которой элемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ удовлетворяет уравнению для порождающих элементов (15), приходим к следующей задаче: найти условия существования и алгоритм построения решения $x(t,\varepsilon)$, $x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, непрерывного по ε, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в нуль, операторного уравнения

$$(Ax(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon F(z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{16}$$

Используя свойства (5) нелинейной вектор-функции $F(z,t,\varepsilon)$, выделим у неё линейную часть по x и члены нулевого порядка по ε. В результате получим разложение

$$F(z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = F_0(t,\hat{z}_0) + (Tx(\cdot,\varepsilon))(t) + R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{17}$$

где $F_0(t,\hat{z}_0) = F(z_0(t,\hat{z}_0),t,0) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$; $T(t)$ — линейная ограниченная оператор-функция, представляющая собой производную Фреше по z от нелинейности $F(z,t,\varepsilon)$ при $z(t) = z_0(t,\hat{z}_0)$; R — нелинейная вектор-функция, удовлетворяющий условиям (a2) и (a3) из (5).

Используя разложение (17), запишем условие разрешимости операторного уравнения (16)

$$(\mathcal{P}_{Y_A}\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T([\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)])(t) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0, \tag{18}$$

где $\hat{x}(\cdot,\varepsilon)$– произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, $\bar{x}(t,\varepsilon)$– частное решение операторного уравнения (16).

Обозначим через $B_0 = \mathcal{P}_{Y_A}T\mathcal{P}_{N(A)}$– линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ в подпространство Y_A. Тогда с учетом (15) уравнение (18) для определения $\hat{x}(t)$ примет вид

$$(B_0\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + (\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t) = 0.$$

Пусть $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1),Y_A)$. Учитывая нормальную разрешимость оператора B_0 и рассматривая в уравнении (16) нелинейность F как неоднородность, для решения $x(t,\varepsilon)$ получаем следующее выражение [10, с. 318]

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x})(t) + \bar{x}(t,\varepsilon).$$

Неизвестный элемент $\hat{x} = \hat{x}(t,\varepsilon)$ определяется из условия (18) разрешимости уравнения (16), а неизвестная вектор-функция $\bar{x}(t,\varepsilon)$ — как частное решение уравнения (16):

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Поскольку элемент $\hat{z}_0(t)$ удовлетворяет уравнению для порождающих элементов (15), то для определения решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (16) приходим к эквивалентной операторной системе

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$(B_0\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \tag{19}$$
$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Обозначим через $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \to N(B_0)$ и $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_A \to Y_{B_0}$ ограниченные проекторы, а через B_0^- — обобщенно-обратный оператор к оператору B_0. Ограниченность проекторов $\mathcal{P}_{N(B_0)}$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ следует из обобщенной обратимости оператора B_0 [1], [12].

Построение единственного решения. Предположим, что $\dim\ker B_0 = 0$, т.е. $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$. Тогда обобщенно-обратный оператор B_0^- будет равен левому обратному оператору $(B_0)_l^{-1}$ [9].

Второе уравнение операторной системы (19) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие [10]

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0, \tag{20}$$

при выполнении которого второе уравнение системы (19) будет однозначно разрешимо

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = (B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t).$$

При $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0$, условие (20) всегда выполняется. Поэтому при $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$ операторная система (19) примет вид:

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$
$$\hat{x}(t,\varepsilon) = -(B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t), \tag{21}$$
$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon)) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Покажем, что операторная система (21) принадлежит к классу систем, для решения которых применим метод простых итераций.

Введем следующие обозначения:

$y(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(\cdot,\varepsilon), \hat{x}(\cdot,\varepsilon), \bar{x}(\cdot,\varepsilon))$ — вектор-столбец из банахова пространства $\mathbf{B} = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{N(A)} & I \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

— клеточно-матричный оператор верхнетреугольного вида, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, а оператор K имеет вид:

$$(Kg)(\cdot,\varepsilon) = -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}Tg(\cdot,\varepsilon))(t);$$

$$U(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t) \\ \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) \end{bmatrix}$$

— вектор-функция, которая удовлетворяет условиям (a2), (a3) из (5).

Операторы, которые входят в матричный оператор (22), линейные ограниченные по определению и как суперпозиции линейных ограниченных операторов.

Используя введенные обозначения, систему (21) можно представить в виде

$$y(t,\varepsilon) = Wy(\cdot,\varepsilon)(t) + U(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t). \qquad (23)$$

Операторная система (23) эквивалентна системе

$$Vy(t,\varepsilon) = U(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t),$$

где

$$V = I_{\mathbf{B}} - W = \begin{bmatrix} I & -\mathcal{P}_{N(A)} & -I \\ 0 & I & -K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad (24)$$

Далее необходимо показать, что оператор V имеет ограниченный обратный.

В силу структуры матричного оператора V верхнетреугольного вида с тождественными операторами на главной диагонали оператор V имеет обратный оператор V^{-1} вида:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} I & \mathcal{P}_{N(A)} & \mathcal{P}_{N(A)}K + I \\ 0 & I & K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Оператор V^{-1} действует на вектор-столбец $y = \operatorname{col}(x, \hat{x}, \bar{x})$ по правилу:

$$V^{-1}y = \begin{bmatrix} x + \mathcal{P}_{N(A)}\hat{x} + [\mathcal{P}_{N(A)}K + I]\bar{x} \\ \hat{x} + K\bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Для доказательства ограниченности оператора V^{-1} покажем, что существует константа $c > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \le c\{|||x|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}\}.$$

Для этого докажем ограниченность каждой компоненты вектора $V^{-1}y$ в банаховом пространстве $\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$:

Операторы $\mathcal{P}_{N(A)}$ и K — ограничены. Обозначим их нормы:

$$|||\mathcal{P}_{N(A)}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} = p, \quad |||K|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} = k,$$

Учитывая введенные обозначения, получим:

$$|||x + \mathcal{P}_{N(A)}\hat{x} + \mathcal{P}_{N(A)}K\bar{x} + I\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \le$$

$$\le |||x|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\mathcal{P}_{N(A)}K\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||I\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \le$$
$$\le |||x|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + p|||\hat{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + (pk+1)|||\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)};$$

$$|||\hat{x} + K\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \le |||\hat{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||K\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \le |||\hat{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + k|||\bar{x}|||_{\mathrm{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}.$$

Таким образом,

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \le |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + (p+1)|||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + (pk+k+2)|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \le$$
$$\le c\{|||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}\},$$

где $c = \max\{1, (\mathrm{p}+1), (\mathrm{pk}+\mathrm{k}+2)\}$. Тем самым ограниченность оператора V^{-1} доказана.

С учетом введенных выше обозначений запишем операторную систему (21) в виде:

$$y = V^{-1}Uy = V^{-1}\widetilde{U}(\varepsilon)y,$$

где $\widetilde{U}(\varepsilon)$, вообще говоря, нелинейный ограниченный оператор. Учитывая ограниченность оператора V^{-1} и ограниченность промежутка $\mathcal{J}$, можно подобрать $\varepsilon_* \le \varepsilon_0$ такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_*$ оператор $V^{-1}\widetilde{U}(\varepsilon)$ будет сжимающим. Отсюда следует, что операторная система (21) имеет единственную неподвижную точку, которая будет решением уравнения (3).

Используя метод простых итераций для нахождения решений операторного уравнения (16) в классе вектор-функций непрерывных по ε, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, построим итерационный процесс.

Первое приближение $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$ к $\bar{x}(t,\varepsilon)$ найдем как частное решение операторного уравнения

$$(Ax_1(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon F_0(t,\hat{z}_0),$$

существующее в силу выбора $\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ из уравнения для порождающих функций (15). Это решение представимо в виде

$$\bar{x}_1(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^- F_0(\cdot,\hat{z}_0))(t).$$

Первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к решению $x(t,\varepsilon)$ операторного уравнения (16) положим равным $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$:

$$x_1(t,\varepsilon) = \bar{x}_1(t,\varepsilon).$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к искомому решению $x(t,\varepsilon)$ находим как решение операторного уравнения

$$(Ax_2(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon(F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_1(\cdot,\varepsilon)) + \bar{x}_1(\cdot,\varepsilon)] + R(\bar{x}_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t). \quad (25)$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (25)

$$(B_0\hat{x}_1(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_1(\cdot,\varepsilon) + R(x_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) \quad (26)$$

при условии $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$ находим единственное первое приближение $\hat{x}_1(t,\varepsilon)$ к $\hat{x}(t,\varepsilon)$ в виде:

$$\hat{x}_1(t,\varepsilon) = -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_1(\cdot,\varepsilon) + R(x_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости относительно $\hat{x}_1(t,\varepsilon)$ уравнения (26) имеет вид

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{Tx_1(\cdot,\varepsilon) + R(x_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0. \quad (27)$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к $x(t,\varepsilon)$ запишется так:

$$x_2(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_1(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}_2(t,\varepsilon),$$

где

$$\bar{x}_2(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_1(\cdot,\varepsilon))+$$
$$+\bar{x}_1(\cdot,\varepsilon)] + R(x_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Третье приближение $\bar{x}_3(t,\varepsilon)$ к частному решению $\bar{x}(t,\varepsilon)$ определим по формуле

$$\bar{x}_3(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_2(\cdot,\varepsilon))+$$
$$+\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon)] + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)$$

как решение операторного уравнения

$$(A\bar{x}_3(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon(F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_2(\cdot,\varepsilon))+$$
$$+\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon)] + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t).$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости этого операторного уравнения приходим к уравнению

$$(B_0\hat{x}_2(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon) + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) \tag{28}$$

для нахождения второго приближения $\hat{x}_2(t,\varepsilon)$ к $\hat{x}(t,\varepsilon)$. При выполнении критерия разрешимости уравнения (28)

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon) + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0 \tag{29}$$

при условии $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$ его единственное решение имеет вид:

$$\hat{x}_2(t,\varepsilon) = -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon) + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Таким образом, если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0$, то критерии разрешимости типа (27) и (29) соответствующих уравнений на каждом шаге итерационного процесса будут выполнены. Продолжая итерационный процесс далее, из операторной системы (21) получаем следующую схему для нахождения решения $x(t,\varepsilon)$ непрерывного по ε и обращающегося в нуль при $\varepsilon = 0$

$$\hat{x}_k(t,\varepsilon) = -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon))+$$
$$+\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)] + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_0(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0,1,2,....$$

Таким образом, для уравнения (3) доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть операторное уравнение (3) удовлетворяет условиям (5), а соответствующее порождающее уравнение (4) при выполнении условия (7) имеет семейство порождающих решений (13).*

Тогда, если $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1), Y_A)$, то для каждого $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, удовлетворяющего уравнению для порождающих элементов (15), при

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0 \tag{30}$$

уравнение (3) имеет единственное решение $z(t,\varepsilon)$ непрерывное по ε, обращающееся в порождающее решение $z(t,\hat{z}_0)$ при $\varepsilon = 0$. Это решение можно найти с помощью сходящегося на $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ итерационного процесса

$$\hat{x}_k(t,\varepsilon) = -((B_0)_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$\begin{gathered} \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon)) + \\ +\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)] + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \end{gathered}$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon), \tag{31}$$

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv \bar{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,\hat{z}_0) + x_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Замечание 2. *Подобные задачи для всюду разрешимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в [5], для систем функционально-дифференциальных уравнений в [2], для систем интегро-дифференциальных уравнений в [8].*

Построение по крайней мере одного решения. Далее рассмотрим решение поставленной задачи в случае неоднозначной разрешимости второго уравнения операторной системы (19), т.е. когда $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0$. В этом случае условие разрешимости второго уравнения системы (19) будет всегда выполнено и его решение представимо в виде

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\breve{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t),$$

где $\breve{x}(\cdot,\varepsilon)$– произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$.

Фиксируя элемент $\breve{x}(t,\varepsilon) = \breve{x}_0(t,\varepsilon)$, получим одно из множества решений второго уравнения операторной системы (19), $\breve{x}^\sharp(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\breve{x}_0(\cdot,\varepsilon))(t) \in N(B_0)$.

В этом случае операторная система (19) примет вид:

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t) + \breve{x}^\sharp(t,\varepsilon), \tag{32}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon)) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

Операторная система (32) похожа на операторную систему (21), однако они имеют принципиальное отличие. В отличие от второго уравнения системы (21), где $\hat{x}(t,\varepsilon)$ определяется однозначно, во втором уравнении операторной системы (32) $\hat{x}(t,\varepsilon)$– одно из частных решений взятое при некотором фиксированном $\breve{x}^{\sharp}(t,\varepsilon)$.

Используя введенные выше обозначения для $y(\cdot,\varepsilon)\in\mathbf{B}$, и W (22), систему (32) можно представить в виде операторного уравнения

$$y(t,\varepsilon)=Wy(\cdot,\varepsilon)(t)+U_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t), \tag{33}$$

где

$$U_1(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0\\ -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t)+\breve{x}^{\sharp}(t,\varepsilon)\\ \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0)+T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))+\bar{x}(\cdot,\varepsilon)]+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)\end{bmatrix}.$$

Операторное уравнение (33) эквивалентно уравнению

$$y=V^{-1}U_1y=V^{-1}\widetilde{U}_1(\varepsilon)y, \tag{34}$$

где оператор V имеет вид (24). Вследствие ограниченности оператора V^{-1}, можно подобрать $\varepsilon_*\leq\varepsilon_0$ такое, что для всех $\varepsilon\leq\varepsilon_*$ оператор $V^{-1}\widetilde{U}_1(\varepsilon)$ будет сжимающим. Таким образом, уравнение (34) имеет единственную неподвижную точку, которая будет решением операторной системы (32).

Итерационный процесс в этом случае строится аналогично предыдущему.

Теорема 4. *Пусть операторное уравнение (3) удовлетворяет условиям (5), а соответствующее порождающее уравнение (4) при условии (7) имеет порождающее решение (13).*

Тогда, если $B_0\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\widehat{\mathbf{B}}_1),Y_A)$, то для каждого элемента $\hat{z}_0(t)\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, удовлетворяющего уравнению для порождающих элементов (15), при

$$\mathcal{P}_{N(B_0)}\neq 0,\quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}=0$$

уравнение (3) имеет по крайней мере одно решение $z(t,\varepsilon)=z_0(t,\hat{z}_0)+x(t,\varepsilon)$, непрерывное по ε, обращающееся в порождающее решение $z(t,\hat{z}_0)$ при $\varepsilon=0$. Это решение можно найти с помощью сходящегося на $[0,\varepsilon_*]\subset[0,\varepsilon_0]$ итерационного процесса

$$\begin{gathered}\hat{x}_k(t,\varepsilon)=-(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+\breve{x}^{\sharp}(t,\varepsilon),\\ \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon)=\varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0)+T[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon)+\\ +\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)]+R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),\\ x_{k+1}(t,\varepsilon)=(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}_k(\cdot,\varepsilon))(t)+\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),\quad k=0,1,2,...,\\ x_0(t,\varepsilon)\equiv\bar{x}_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\\ z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,\hat{z}_0)+x_k(t,\varepsilon),\quad k=0,1,2,....\end{gathered} \tag{35}$$

Замечание 3. *Если* $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$ *то условие разрешимости второго уравнения системы (19) будет всегда выполняться и в итерационной процедуре (35) обобщенно-обратный оператор* B_0^- *будет правым обратным оператором* $(B_0)_r^{-1}$.

Замечание 4. *Если* $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, *то* $x^\sharp(t,\varepsilon) \equiv 0$ *и итерационная процедура (35) переходит в итерационную процедуру (31).*

Замечание 5. *Не нарушая общности в итерационной процедуре (35) можно положить* $x^\sharp(t,\varepsilon) = 0$.

Замечание 6. *Подобные задачи для не всюду разрешимых систем интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены в [8] где* $x^\sharp(t,\varepsilon) = 0$.

1. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
4. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
5. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
6. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems // Ann. di Mat. pura et Appl. – 1968. – V. 80. – P. 123–136.
7. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317 p.
8. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь / І.А. Головацька // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 314 – 321.
9. *Журавлев В.Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, №2. – С. 167 – 182.
10. *Самойленко А.М., Бойчук А.А., Журавлев В.Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравн. – 2014. – Т. 50, №3. – С. 317 – 326.
11. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу / Хелемский А.Я. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
12. *Кадец М.И., Митягин Б.С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. – 1973. – *28*, вып. 6. – С. 77 – 94.
13. *Попов М.М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні '07: Зб. наук. праць. – Київ, 1973. – С. 78 – 116.
14. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
15. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. – Кишинев: Штиинца, 1974. – 291 с.
16. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 65, №2. - С. 163 – 174.

Получено 28.10.2014