УДК 512.64+512.56

В. А. Лісикевич (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ПРО РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ ДОДАТНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТІТСА ДЛЯ ПРИМІТИВНИХ НЕСЕРІЙНИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

It is study of edge-local deformations of quadratic forms over the field of real numbers, introduced by V. M. Bondarenko. The main invariants of such deformations are P-limiting numbers and P-defining polynomials which define them. It is described the P-defining polynomials of quadratic Tits forms of primitive non-serial posets (for all pairs of comparable elements) in the case when these quadratic forms are positive.

Вивчаються реберно-локальні деформації квадратичних форм над полем дійсних чисел, введені В. М. Бондаренком. Основними інваріантами таких деформації є P-граничні числа та P-визначальні поліноми, які їх визначають. Описано P-визначальні поліноми квадратичних форм Тітса примітивних несерійних частково впорядкованих множин (для всіх пар порівняльних елементів) у випадку, коли ці квадратичні форми додатні.

Ця стаття пов'язана з дослідженням реберно-локальних деформацій квадратичних форм, введених В. М. Бондаренком у роботі [1]. Нагадаємо деякі означення та твердження цієї роботи.

Нехай

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \tag{1}$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j)\neq(p,q)} f_{ij} z_i z_j, \tag{2}$$

де p і q ($p < q$) такі, що $f_{pq} \neq 0$, а t — параметр, що пробігає поле $\mathbb{R}$.

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми* (1) *відносно* $z_p z_q$.

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *(p,q)-им P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$*, якщо $f(z,a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа a існує число c таке, що $f(z,a)$ є додатною квадратичною формою.

У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує рівно два (p,q)-их P-граничних числа і якщо їх позначити b_1 і b_2, то поліном

$$\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t - b_1)(t - b_2)$$

називається *P-визначальним поліномом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *P-визначальним (p,q)-поліномом квадратичної форми $f(z)$*. Цей поліном з точністю до ненульової константи (як множника) дорівнює визначнику симетричної матриці квадратичної форми $f^{(p,q)}(z,t)$

У цій статті описуються P-визначальні поліноми квадратичної форми Тітса для деякого класу частково впорядкованих множин S відносно p і q, що відповідають елементам S.

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Бондаренку за постановку задачі, увагу до роботи та корисні поради.

1. Формулювання теореми. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (що не містить елемента 0). Квадратичною формою Тітса множини S називається квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Нагадаємо, що частково впорядкована множина називається примітивною, якщо вона є таким об'єднанням ланцюгів, що будь-які елементи різних ланцюгів непорівняльні.

Ми розглядаємо задачу про опис P-визначальних поліномів примітивних частково впорядкованих множин з додатною квадратичною формою Тітса у випадку, коли ці множини несерійні (множина S називається серійною, якщо для будь-якого $N > |S|$ існує частково впорядкована множина T_N порядку N з додатною формою Тітса, яка містить в собі множину S). Із результатів роботи [2] випливає, що з точністю до ізоморфізму існує 3 такі множини, а саме

1) $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5\}$;
2) $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6\}$;
3) $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$.

Квадратичну форму Тітса $q_S(z)$ частково впорядкованої множини $S = S_i$ будемо позначати, для простоти, $q_i = q_i(z)$, $i = 1, 2, 3$.

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Теорема 1. *P-визначальні поліноми квадратичної форми Тітса частково впорядкованої множини $S = S_1, S_2, S_3$ (для $z_p z_q$, які відповідають $p, q \in S$, $p < q$) є наступними:*

1) $\Delta_{q_1}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}$, $\quad \Delta_{q_1}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}$;

2) $\Delta_{q_2}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}$, $\quad \Delta_{q_2}^{(p,q)}(t) = t^2 - \frac{5}{2}t + 1$ *при* $p, q \in \{4, 5, 6\}$;

3) $\Delta_{q_3}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{20}{7}t + \frac{12}{7}$, $\quad \Delta_{q_3}^{(p,q)}(t) = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}$ *при* $p, q \in \{4, 5, 6, 7\}$.

2. Доведення теореми. Із сказаного у вступній частині статті маємо, що P-визначальний поліном $\Delta_{q_i}^{(p,q)}(t)$ квадратичної форми $q_i(z)$ для $z_p z_q$ з точністю до ненульової константи дорівнює визначнику симетричної матриці квадратичної форми $q_i^{(p,q)}(z,t)$. Тому ми можемо замінити матрицю квадратичної форми більш простою, помноживши її на 2^n (щоб вона була цілочисловою) і помноживши її 1-ий рядок та 1-ий стовпець на -1 (щоб вона не мала від'ємних елементів). Таку матрицю квадратичної форми $q_i^{(p,q)}(z,t)$ будемо позначати через $A_i^{(p,q)}$, а її визначник через $D_i^{(p,q)}$.

Розглянемо спочатку випадок $S = S_1$. Оскільки (в силу симетрії квадратичної форми $q_1(z)$) $\Delta_{q_1}^{(2,3)}(t) = \Delta_{q_1}^{(4,5)}(t)$, то достатньо обчислити поліном $\Delta_{q_1}^{(4,5)}(t)$.

Обчислимо визначник $D_1^{(4,5)}$ матриці

$$A_1^{(4,5)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t & 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо по останньому рядку спочатку сам визначник, а потім всі нові визначники, які містять параметр t:

$$D_1^{(4,5)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & t \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{ -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\} -$$

$$-t\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки (як легко порахувати)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

то

$$D_1^{(4,5)} = -(12 - 6t) - t(-6 + 5t) + 8 = -5t^2 + 12t - 4.$$

Отже, $\Delta_{q_1}^{(4,5)} = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}$.

Розглянемо тепер випадок $S = S_2$. Оскільки (в силу симетрії квадратичної форми $q_2(z)$) $\Delta_{q_2}^{(4,5)}(t) = \Delta_{q_2}^{(5,6)}(t) = \Delta_{q_2}^{(4,6)}(t)$, то достатньо обчислити поліноми $\Delta_{q_2}^{(2,3)}(t)$ і $\Delta_{q_2}^{(5,6)}(t)$.

а) Обчислимо визначник $D_2^{(2,3)}$ матриці

$$A_2^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо по останньому рядку сам визначник, а потім всі нові визначники, які містять параметр t:

$$D_2^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{ -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} -$$

$$-t\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки (як легко порахувати)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

то

$$D_2^{(2,3)} = -(16 - 8t) - t(-8 + 6t) + 8 = -6t^2 + 16t - 8.$$

Отже, $\Delta_{q_2}^{(2,3)} = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}$.

b) Обчислимо визначник $D_2^{(5,6)}$ матриці

$$A_2^{(5,6)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо по останньому рядку сам визначник, а потім всі нові визначники, які містять параметр t:

$$\Delta_{q_2}^{(5,6)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & t \end{vmatrix} -$$

$$-t \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} -$$

$$-t \left\{ - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки (як легко порахувати)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

то

$$D_2^{(5,6)} = (0 - 12 + 6t) + (0 + 2 - t) - t(-6 + 1 + 4t) + 6 = -4t^2 + 10t - 4.$$

Отже, $\Delta_{q_2}^{(5,6)} = t^2 - \frac{5}{2}t + 1$.

Розглянемо, нарешті, випадок $S = S_3$. Оскільки (в силу симетрії квадратичної форми $q_3(z)$) $\Delta_{q_3}^{(4,5)}(t) = \Delta_{q_3}^{(5,6)}(t) = \Delta_{q_3}^{(6,7)}(t) = \Delta_{q_3}^{(4,6)}(t) = \Delta_{q_3}^{(5,7)}(t) = \Delta_{q_3}^{(4,7)}(t)$, то достатньо обчислити поліноми $\Delta_{q_3}^{(2,3)}(t)$ і $\Delta_{q_3}^{(6,7)}(t)$.

a) Обчислимо визначник $D_3^{(2,3)}$ матриці

$$A_3^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо по останньому рядку сам визначник, а потім всі нові визначники, які містять параметр t:

$$D_3^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\} -$$

$$-t\left\{\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\2&0&0&0&0&0\\0&0&2&1&1&1\\0&0&1&2&1&1\\0&0&1&1&2&1\\0&0&1&1&1&2\end{vmatrix}+t\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0\\1&0&2&1&1&1\\1&0&1&2&1&1\\1&0&1&1&2&1\\1&0&1&1&1&2\end{vmatrix}\right\}+2\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&0&0&0&0\\1&0&0&2&1&1&1\\1&0&0&1&2&1&1\\1&0&0&1&1&2&1\\1&0&0&1&1&1&2\end{vmatrix}.$$

Оскільки (як легко порахувати)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\2&0&0&0&0&0\\0&0&2&1&1&1\\0&0&1&2&1&1\\0&0&1&1&2&1\\0&0&1&1&1&2\end{vmatrix}=-10,\quad\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0\\1&0&2&1&1&1\\1&0&1&2&1&1\\1&0&1&1&2&1\\1&0&1&1&1&2\end{vmatrix}=7,\quad\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&0&0&0&0\\1&0&0&2&1&1&1\\1&0&0&1&2&1&1\\1&0&0&1&1&2&1\\1&0&0&1&1&1&2\end{vmatrix}=4,$$

то

$$D_3^{(2,3)}=-(20-10t)-t(-10+7t)+8=-7t^2+20t-12.$$

Отже, $\Delta_{q_3}^{(2,3)}=t^2-\frac{20}{7}t+\frac{12}{7}$.

b) Обчислимо визначник $D_3^{(6,7)}$ матриці

$$A_3^{(6,7)}=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0&0\\1&0&0&0&2&1&1&1\\1&0&0&0&1&2&1&1\\1&0&0&0&1&1&2&t\\1&0&0&0&1&1&t&2\end{pmatrix}.$$

Розкладемо по останньому рядку сам визначник, а потім всі нові визначники, які містять параметр t:

$$D_3^{(6,7)}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\2&0&0&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&0&0&0\\0&0&0&2&1&1&1\\0&0&0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1&2&t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&2&1&1\\1&0&0&0&1&2&t\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0\\1&0&0&0&2&1&1\\1&0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&2&t\end{vmatrix}-t\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0\\1&0&0&0&2&1&1\\1&0&0&0&1&2&1\\1&0&0&0&1&1&t\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&1&1&1&1&1&1\\1&2&0&0&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0\\1&0&0&0&2&1&1\\1&0&0&0&1&2&1\\1&0&0&0&1&1&2\end{vmatrix}=$$

$$
= -\Bigg\{ -\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&2&1 \end{vmatrix} +
$$

$$
+t\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&2&1 \end{vmatrix} \Bigg\} - \Bigg\{ \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} -
$$

$$
-2\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&2&1 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&2&1 \end{vmatrix} \Bigg\} + \Bigg\{ \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} \Bigg\} -
$$

$$
-t\Bigg\{ \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&2&1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&2&1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} +
$$

$$
+t\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&2 \end{vmatrix} \Bigg\} + 2\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0&0\\ 1&0&1&2&0&0&0\\ 1&0&0&0&2&1&1\\ 1&0&0&0&1&2&1\\ 1&0&0&0&1&1&2 \end{vmatrix}.
$$

Оскільки (як легко порахувати)

$$
\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&1\\ 0&0&0&1&2&1 \end{vmatrix} = -6,
$$

$$\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&2&1 \end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0\\ 1&0&1&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&2 \end{vmatrix}=3,\quad \begin{vmatrix} 2&1&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&0&0\\ 1&0&1&2&0&0&0\\ 1&0&0&0&2&1&1\\ 1&0&0&0&1&2&1\\ 1&0&0&0&1&1&2 \end{vmatrix}=2,$$

то

$$D_3^{(6,7)}=-(0+0+12-6t)-(0+0-2+t)+(0+0+2-t)-t(-6+1+1+3t)+4=-3t^2+8t-4.$$

Отже, $\Delta_{q_3}^{(6,7)}=t^2-\frac{8}{3}t+\frac{4}{3}$.

Теорема 1 доведена.

1. *Bondarenko V. M.* On types of local deformations of quadratic forms // Algebra Discrete Math. — 2014. — 18, №2. — pp. 163–170.
2. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18-58.

Одержано 01.12.2014