УДК 512.44

М. О. Малоїд-Глебова (Львівський нац. ун-т ім. І. Франка)

КЛАСИЧНО-ГІЛЬБЕРТОВІ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНІ МОДУЛІ ТА ЇХ ПЕРВИННИЙ СПЕКТР

Properties of classical-topological, Hilbert and classical-Hilbert modules are described. Analogue of theorem of De Marco-Orsatti for *lcpm*-modules is proven and consequences of this theorem are formulated.

Описано властивості класично-топологічного, Гільбертового та класично-Гільбертового модулів. Доведено аналог теореми Де Марко-Орсатті для *lcpm*-модулів та сформульовано наслідки з цієї теореми.

Вступ. В цій замітці узагальнюються деякі класи первинних модулів та підмодулів, і на цій основі досліджується класично-первинний спектр деяких типів мультиплікаційних модулів. Зазвичай, у публікаціях користуються кількома модульними узагальненнями первинного ідеалу. Найчастіше перевага надається первинним підмодулям, визначених у такий спосіб: власний підмодуль P модуля M називається *первинним підмодулем*, якщо з того що $aRm \subseteq P$ для $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $m \in P$ або $a \in (N : M)$, [1–3]. Історично поняття первинного модуля вперше зустрічається у роботі Р. Е. Джонсона [4], потім первинні модулі розглядали С. Пейж в праці [5], В. А. Андрунакієвич в [6], а подальші дослідження таких модулів проводили П. Ф. Сміт, М. Е. Мур, Р. Л. Мак Касланд (див. [7]) та інші. В останній час ці модулі та їх різноманітні узагальнення привертають увагу математиків багатьох країн світу. Серед математиків, які отримали найкращі результати при вивченні первинних модулів слід відзначити Р. Вісбауера (див. [8]) та Дж. Даунса (див. [2]), котрі, крім всього, провели докладний аналіз існуючих означень первинного модуля та здійснили систематичне дослідження властивостей таких модулів. Останнім часом широко використовуються означення первинних модулів, які ґрунтуються на основі теорії анулярних ідеалів підмодулів. Зокрема, розпочались і інтенсивно продовжуються дослідження класично-первинних підмодулів [9–11] та строго-первинних модулів. В цьому напрямку можна виділити роботи А. Розенберга [12] та А. Каучікаса [13–15].

В другій частині замітки пропонується одне узагальнення поняття класично-топологічного модуля, раніше введеного М. Бехбуді в праці [9] та встановлюються найпростіші властивості цих модулів. Фінальна частина замітки присвячена доведенню одного аналогу відомої теореми Де Марко-Орсатті [16], сформульованого автором для випадку *lcpm*-модулів.

Попередні дані. Нехай R асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M — лівий унітарний R-модуль. Той факт що, N є підмодулем M символічно запишемо у вигляді $N \subseteq M$ і використовуємо позначення $(N : M) = \{r \in R \mid rM \leqslant N\}$. Ненульовий правий (лівий) модуль M називається *первинним модулем*, якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для кожного ненульового підмодуля K модуля M, [17]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *первинним*, якщо M/P буде первинним лівим модулем, тобто $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для кожного ненульового підмодуля K/P модуля M/P, [5], [2]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *класично-первинним підмодулем*, якщо з включення $abRm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$ (див. [1], де в оригіналі для таких модулів використовується термін "слабко-первинний модуль"). Це поняття (для комутативного контексту) всебічно вивчалося М. Бехбуді, починаючи з 2006 року, [1]. В слід за М. Бехбуді, через $Cl.Spec(M)$ позначимо множину всіх класично-первинних підмодулів лівого модуля M, [17], [9]. В класичній алгебраїчній геометрії важливу роль відіграє топологія Зариського на спектрі комутативного кільця $Spec(R)$. Тепер вже зрозуміла її роль і у теорії модулів. Конспективно нагадаємо принцип побудови топології Зариського в обох випадках просторів первинних ідеалів кільця та первинних підмодулів лівого модуля. Для кожного ідеалу I кільця R поставимо у відповідність множину $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$. Тому множини $V(I)$, де I пробігає ідеали кільця R, задовольняють аксіомам замкнених множин деякої топології на $Spec(R)$, яку називають *топологією Зариського*. У випадку лівого модуля M, нехай $Spec(M)$ - множина всіх первинних підмодулів модуля M, котру називаємо *первинним спектром* модуля M. Для кожного підмодуля N лівого модуля M розглянемо множину $V(N) = \{P \in Spec(M) | N \subseteq P\}$. Лівий модуль M називатиметься *топологічним модулем*, якщо його первинний спектр задовольняє такі властивості: множина $\xi(M) := \{V(N) | N \subseteq M\}$ замкнена стосовно скінченних об'єднань (детальнішу інформацію можна почерпнути в [7]). Зауважимо, що $\xi(M)$ утворюватимуть систему замкнених множин в топології Зариського на $Spec(M)$. Відзначимо також, що ця властивість притаманна спектру самого кільця: $Spec(R)$. Багато дослідників, наприклад Р. Л. Мак Касланд, М. Е. Мур, П. Ф. Сміт ([7]) інтенсивно намагалися систематизувати вивчення спектрів первинних підмодулів. Зокрема, вони довели, що для комутативного випадку, якщо ${}_RM$ є скінченно-породженим, то модуль M буде топологічним модулем тоді і лише тоді, коли M є мультиплікаційним модулем. Нехай M ненульовий лівий R-модуль. Для його підмодуля N означимо *класичний многовид*, як множину $\mathbb{V}(N) = \{P \in Cl.Spec(M) | N \subseteq P\}$. Множина всіх таких многовидів володіє властивостями:

(1) $\mathbb{V}(M) = \emptyset$ і $\mathbb{V}(0) = Cl.Spec(M)$;

(2) $\bigcap_{i \in I} \mathbb{V}(N_i) = \mathbb{V}(\sum_{i \in I} N_i)$ для довільної множини індексів I;

(3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$ для підмодулів $N, L, N_i \subseteq M$.

Позначимо через $\mathbb{C}(M)$ сім'ю всіх підмножин вигляду $\mathbb{V}(N)$ з $Cl.Spec(M)$. Тоді $\mathbb{C}(M)$ містить порожню множину і весь простір $Cl.Spec(M)$, і $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно довільних перетинів, проте в загальному $\mathbb{C}(M)$ не замкнена стосовно скінченних об'єднань, дивись наприклад [9]. Цим мотивується таке означення: лівий R-модуль M називається *класично-топологічним модулем*, якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$. В такому разі сім'я $\mathbb{C}(M)$ задовольняє аксіомам замкнених підмножин топологічного простору, а отож визначає топологію на $Cl.Spec(M)$. Нехай M довільний лівий R-модуль. Для кожного його підмодуля N позначимо $\mathbb{U}(N) = Cl.Spec(M) \setminus \mathbb{V}(N)$ і

$\mathbb{B}(M) = \{\mathbb{U}(N) : N \subseteq M\}$. Через $\mathbb{T}(M)$ позначимо набір всіх об'єднань скінченних перетинів елементів з $\mathbb{B}(M)$. Тоді $\mathbb{T}(M)$ утворює топологію на $ClSpec(M)$ з підбазою $\mathbb{B}(M)$. В такому випадку $\mathbb{T}(M)$ називається *топологією типу Зариського.*

Зауваження 1. *Для M довільного лівого R-модуля, сім'я множин*

$$\{\mathbb{U}(N_1) \cap \ldots \cap \mathbb{U}(N_k) : N_i \subseteq M, 1 \leqslant i \leqslant k \text{ для деякого } k \in \mathbb{N}\}$$

утворює базу топології типу Зариського на M.

Підмодуль C модуля M називається *напівпервинним* (*класично-напівпервинним*), якщо C є перетином первинних (класично-первинних) підмодулів. Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається *екстраординарним*, якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови $N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ і $L \subseteq P$ (див. [9]). Лівий R-модуль M називається мультиплікаційним модулем, якщо для кожного підмодуля N модуля M існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$. Більше інформації про мультиплікаційні модулі можна знайти в монографії [19]. Нехай $\mathfrak{X}$ — топологічний простір, $\mathcal{A}$ — його підпростір, $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ — тотожне відображення. Якщо існує таке відображення $r : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}$, що $r|_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то r називається ретракцією $\mathfrak{X}$ на $\mathcal{A}$, а підпростір $\mathcal{A}$ називається ретрактом простору $\mathfrak{X}$.

Властивості класично-топологічних модулів.

Лема 1. *Для лівого R-модуля M такі твердження еквівалентні:*

(1) *M є класично-топологічним модулем;*

(2) *Кожен класично-первинний підмодуль модуля M є екстраординарним;*

(3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(N \cap L)$ *для будь-яких класично-напівпервинних підмодулів N і L модуля M.*

Доведення проводиться аналогічними міркуваннями до тих, які подають Бехбуді і Ноорі в оригінальній статті [9]. З цієї леми прямо випливає висновок:

Наслідок 1. *Кожен класично-топологічний модуль є топологічним модулем.*

Доведення. Нехай M довільний класично-топологічний модуль. За попередньою лемою кожен класично-первинний підмодуль M буде екстраординарним. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль M є первинним, то первинний підмодуль M теж буде екстраординарним. За [9], M буде топологічним модулем.

Проте досі не знайдено прикладу топологічного модуля, котрий би не був класично-топологічним модулем. Автори оригінальної статті через брак таких контрприкладів разом з тим фактом що два поняття топологічного та класично-топологічного модуля є еквівалентними для таких класів кілець як скінченно-породжені та Артінові модулі висувають гіпотезу і встановлюють таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай M довільний R-модуль над комутативним кільцем. M буде топологічним модулем в тому і лише в тому випадку, коли він буде класично-топологічним модулем*

Проте для випадку некомутативного кільця це твердження невірне.

Твердження 1. *Нехай M лівий класично-топологічний R-модуль. Тоді кожен гомоморфний образ M буде класично-топологічним модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-топологічного модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо що $Cl.Spec(M') \neq \emptyset$. Очевидно, що класично-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P є класично-первинним підмодулем модуля M і $N \subsetneq P$. Отже довільний класичний напівпервинний підмодуль модуля M' буде вигляду C/N де C є класично-напівпервинним підмодулем, що містить N. Використовуючи лему 1, отримаємо потрібний результат.

Випадок, коли $Cl.Spec(M') \neq 0$ тривіальний.

Гільбертові та класично-Гільбертові модулі: означення та деякі властивості. Не обов'язково комутативне кільце R називається *кільцем Гільберта*, якщо кожен первинний ідеал кільця буде перетином максимальних ідеалів. Узагальнивши на випадок модулів, отримаємо те, що модуль називається *Гільбертовим*, якщо кожен первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів. Модуль M називається *класично-Гільбертовим*, якщо кожен класично-первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів.

В загальному кожен первинний підмодуль модуля M буде класично-первинним, а у випадку коли $M = R$ є комутативним кільцем, класично-первинні підмодулі, первинні підмодулі і первинні ідеали збігаються (рівні) (див. [10]).

Зауваження 2. *Включення в іншу сторону невірне, тобто існує підмодуль N модуля M, що є класично-первинним підмодулем, але не є первинним підмодулем. Якщо R — область і P — ненульовий первинний ідеал, то $P\oplus(0)$, $(0)\oplus P$ і $P(1,1)$ є класичними первинними підмодулями вільного модуля $M = R \oplus R$, проте всі вони не є первинними підмодулями (інформація міститься в статті* [10]).

Твердження 2. *Кожен класично-Гільбертів модуль є Гільбертовим модулем, але обернене твердження хибне.*

Доведення. Нехай M класично-Гільбертів модуль. За лемою 1, кожен класично-первинний підмодуль модуля M є екстраординарним. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль модуля M є первинним підмодулем. Також кожен первинний підмодуль є екстраординарним. Тоді за ([7], Lemma 2.1), M є Гільбертовим модулем.

Теорема 1. *R-модуль M буде класично-Гільбертовим модулем тоді і лише тоді коли кожен класично-первинний підмодуль M, що не є максимальним, буде перетином власних більших класично-первинних підмодулів.*

Доведення проводиться аналогічними міркуваннями до тих, що подані в оригінальній статті [10] для комутативного випадку.

Зауваження 3. *Якщо M — довільний R-модуль і $K \subseteq M$, то легко показати що власний підмодуль P з M, де $K \subseteq P$ є класично-первинним підмодулем (відповідно максимальним) підмодулем M, якщо P/K є класично-первинним (максимальним) підмодулем M/K. Це зауваження можна використати як означення класично-первинного підмодуля.*

Твердження 3. *Кожен гомоморфний образ класично-Гільбертового модуля буде класично-Гільбертовим модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-Гільбертового модуля M. Позначимо через M' фактор-модуль $M' = M/N$. Припустимо що

$$Cl.Spec(M') \neq 0.$$

Очевидно, класично-первинні підмодулі модуля M' мають вигляд P/N, де P є класично-первинним підмодулем модуля M і $N \subseteq M$. Отже кожен класичний напівпервинний підмодуль модуля M' матиме вигляд C/N, де C є класично-напівпервинним підмодулем, що містить N. Для завершення доведення досить використати лему 1.

З твердження випливає такий висновок:

Наслідок 3. *Нехай R-кільце, M — довільний R-модуль. Такі властивості еквівалентні:*

(1) *M — класично-Гільбертів R-модуль;*

(2) *M/N - класично-Гільбертів R-модуль для кожного підмодуля N модуля M.*

Зауваження 4. *Мінімальні класично-первинні підмодулі визначаються природнім чином. Очевидно, якщо $\{P_i\}_{i\in I}$ — довільний ланцюг класично-первинних підмодулів R-модуля M, то $\bigcap_{i\in I} P_i$ очевидно буде класично-первинним підмодулем. Тому за лемою Цорна кожен класично-первинний підмодуль міститиме мінімальний класично-первинний підмодуль.*

Нехай R не обов'язково комутативне кільце. Лівий модуль M над кільцем R називається *lcpm-модулем* якщо кожен класично-первинний підмодуль P міститься в єдиному максимальному підмодулі модуля M. Аналогічним чином можна подати означення *rcpm-модуля.* Тепер можна довести аналог теореми Де Марко-Орсатті для випадку класично-первинних підмодулів.

Теорема 2. *Нехай M мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ ретракт простору $Cl.Spec(M)$. Тоді M є lcpm-модулем.*

Доведення. Припустимо що $\varphi : Cl.Spec(M) \to Max(M)$ неперервна ретракція і $\varphi(K) = H$ для деякого класично-первинного підмодуля P і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\varphi^{-1}(H)$ буде містити $\{\bar{P}\}$, тобто довільний максимальний підмодуль H' що міститиме P. Оскільки відображення φ буде неперервною ретракцією, тому $H = \varphi(H') = H'$. Отже $H' = H$ буде єдиним максимальним підмодулем що міститиме P.

Наслідок 4. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний класично-первинний підмодуль.*

Наслідок 5. *Простір $Min(M)$ мінімальних класично-первинних підмодулів буде ретрактом простору $Cl.Spec(M)$.*

Наслідок 6. *Нехай R — кільце і $\{M_i\}_{i\in I}$ набір R-модулів. Якщо $\bigoplus_{i\in I} M_i$ є класично-Гільбертовим модулем, то кожен M_i $(i \in I)$ буде класично-Гільбертовим модулем.*

Твердження 4. *Нехай R — область, M — класично-Гільбертів R-модуль. Якщо N є таким довільним підмодулем M, що M/N є модулем без скруту, то N буде класично-Гільбертовим R-модулем.*

Доведення. Припустимо, що R є областю і M є класично-Гільбертовим R-модулем. Припустимо, що $N \subset M$ і M/N є модулем без скруту. Більше інформації про модулі без скруту можна почерпнути з [20–22]. Також припустимо, що $P \subset N$ є класично-первинним підмодулем. Покажемо, що P є перетином максимальних підмодулів з N. Спершу покажемо, що P є класично-первинним підмодулем M. Припустимо, що $rsRm \subseteq P$ для деякого $m \in M$ і $r, s \in R$. Якщо $m \in M$, оскільки P є класично-первинним підмодулем N, ми покажемо, що або $rm \in P$ або $sm \in P$. Тепер припустимо, що $m \in M$. Нагадаємо, що $rsRm \subseteq P \subseteq N$. Оскільки M/N є модулем без скруту і $m \notin N$, випливає, що $r = 0$ чи $s = 0$. Також в цьому випадку або $rm \in P$ або $sm \in P$. Отже P є класично-первинним підмодулем M.

Оскільки P є класично-первинним підмодулем M і $P = \bigcap_{i\in I} M_i$ де кожен M_i є максимальним підмодулем. M. Для кожного i нехай $P_i := M_i \cap N$. Оскільки $P \subseteq N$ легко побачити, що $P = \bigcap_{i\in I} P_i$. Окрім того, можемо припустити без втрати загальності, що кожен P_i повністю міститься в N. Припустимо, що $i \in I$ є довільним. Щоб завершити доведення, досить показати, що P_i є максимальним підмоделем N. Тому припустимо, що $m \in N \backslash P_i$. Покажемо, що $(P_i, m) \in N$. Отже $m_i \notin M_i$. Оскільки M_i є максимальними підмодулями M, маємо $(M_i, m) = M$. Нехай $x \in N$ є довільним елементом. Покажемо, що $x \in (P_i, m)$. Оскільки $M = (M_i, m)$, $x = m_i + rm$ для деяких елементів $m_i \in M$, $r \in R$. Оскільки $x \in N$ і $m \in N$ робимо висновок, що $m_i \in N$. Тому $m_i \in P_i$, з цього випливає, що $x \in (P_i, m)$. Ми показали, що $(P_i, m) \in N$, а це доводить, що P_i є максимальними підмодулями N.

Наслідок 7. *Нехай R — область і M класично-Гільбертів R-модуль. Тоді істинні такі твердження:*

(1) *Якщо $T(M)$ — періодичний модуль, то $T(M)$ також класично-Гільбертів R-модуль;*

(2) *Якщо M — модуль без скруту і N — чистий підмодуль модуля M, то N є класично-Гільбертовим R-модулем.*

Доведення.

(1) Випливає з попереднього твердження.

(2) Для доведення припустимо що N є чистим підмодулем класично-Гільбертового модуля без скруту M. За попереднім твердженням, досить показати що якщо $m \in M \backslash N$ і $r \in R$, де $rRm \in N$, то $r = 0$. Тому припустимо що

$m \in M \backslash N$ і $rRm \in N$. Оскільки N є чистим , то $rM \cap N = rN$. Отже $rRm \in rN$, тому існує деякий елемент $n \in N$ що $rRm = rRn$. Отже $rR(m-n) = 0$. Оскільки $m \notin N$, бачимо, що $m - n \neq 0$. Оскільки M є модулем без скруту, робимо висновок, що $r = 0$.

1. *Behboodi M. R., Koohy H.* Weakly prime modules // Vietnam J. Math. – 2004. – Vol. 32. – №2. – P. 185–195.
2. *Dauns J.* Prime modules // J. Reine Angew. Math. – 1978. – Vol. 298. – P. 156–181.
3. *Azizi A.* Weakly prime submodules and prime submodules // J. Algebra – 2007. – Vol. 307. – P. 454–460.
4. *Johnson R. E.* Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc – 1953. – Vol. 74. – №2. – P. 351–357.
5. *Page S.* Properties of quotient rings // Can. J. Math – 1972. – Vol. 24. – №6. – P. 1122–1128.
6. *Andrunakievich V. A.* Prime modules and Baer radical // Siberian Mathematical Journal – 1961. – Vol. 2. – №6. – P. 801–806.
7. *McCasland R. L., Moore M. E., Smith P. F.* On the spectrum of the module over a commutative ring // Comm. Algebra – 1997. – Vol. 25. – №1. – P. 79–103.
8. *Wisbauer R.* On prime modules and rings // Commun. Algebra – 1983. – Vol. 11. – P. 2249–2265.
9. *Behboodi M. R., Noori M. J.* Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module // Bulletian of the Iranian Mathematical society – 2009. – Vol. 35. – №1. – P. 253–269.
10. *Arabi-Kakavand M., Behboodi M.* Modules Whose Classical Prime Submodules Are Intersections of Maximal Submodules // Glasgow Math. J. – 2006. – Vol. 48. – P. 343–346.
11. *Behboodi M. R.* Classical prime submodules // Ph.D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran – 2004.
12. *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras // Kluwer Academic Publishers – 1995.
13. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and ideals // Liet.Mat. Rink, Special Issue – 2001. – Vol. 41. – P. 84–87.
14. *Kaučikas A., Wisbauer R.* On strongly prime rings and ideals // Comm. Algebra – 2000. – Vol. 28. – №11. – P. 5461–5473.
15. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and their radicals // Lietuvos matematikos rinkinys – 2010. – Vol. 51. – P. 31–34.
16. *De Marco G., Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 459–466.
17. *Behboodi M. R., Haddadi M. R.* Classical Zarisky topology of modules and spectral spaces I // Internatiопal Electronic Journal of Algebra – 2008. – Vol. 4. – P. 104–130.
18. *Behboodi M. R., Shojaee S.* On chains of classical prime submodules and dimension theory of modules // Bulletian of the Iranian Mathematical society – 2010. – Vol. 36. – №1. – P. 149–166.
19. *Tuganbaev A. A.* Multiplication Modules // Journal of Mathematical Sciences – 2004. – Vol. 123. – №2. – P. 3839–3905.
20. *Golan J. S.* Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring // Pacific Journal of Mathematics – 1974. – Vol. 51. – №2. – P. 439–450.
21. *Golan J. S.* Torsion theories // – Longman Scientific & Technical, Harlow – 1986.
22. *Maloid-Glebova M. O.* About torsion-theoretic spectrum of left-invariant ring and weakly-multiplication and pure-multiplication modules // Applied Problems of Mechanics and Mathematics – 2011. – №9. – P. 87–94.

Одержано 28.11.2014