УДК 519.21

І. В. Марина (Ужгородський національний університет)

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИПАДКОВИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

A new method is proposed in this paper to construct solutions of boundary-value problems for parabolic equation with random boundary conditions. We assume that the boundary conditions are stochastic processes belonging to the Orlicz space of random variables (in particular case, processes with zero mean).

В даній роботі запропоновано новий метод для побудови розв'язків крайових задач для рівняння теплопровідності математичної фізики з випадковими крайовими умовами. Вважаємо, що крайові умови є випадковими процесами з просторів Орліча ($E\xi = 0$).

Зображення розв'язків рівняння математичної фізики з випадковими крайовими умовами за допомогою випадкових функціональних рядів та вивчення їх властивостей, зокрема умов та швидкості збіжності в різних просторах є досить цікавою та важливою задачею теорії ймовірностей. Останнім часом з'явилося багато робіт, в яких вивчались задачі математичної фізики з випадковими умовами, які базуються на дослідженні збіжності за ймовірністю в функціональних просторах послідовності випадкових функцій, що апроксимують розв'язки крайових задач.

В деяких роботах, для знаходження умов рівномірної збіжності випадкових рядів застосовується метод, що ґрунтується на ідеї Ж.Канаха. У роботі використовується метод, який був запропонований Бейсембаєвим Е. та Козаченком Ю.В. [1], який дозволяє обґрунтовувати застосування методу Фур'є до задач математичної фізики. Подібна задача для рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку коли початкові умови є процеси Орліча розглядались в [2]. В монографіях [3] і [4] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

1. Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 1. *([3]) Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in R\}$ називається C-функцією Орліча (C-функцією), якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ – монотонно зростає при $x > 0$.*

Означення 2. *([3]) C-функція $U = \{U(x), x \in R\}$ задовольняє g-умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ та $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$ і $y \geq z_0$ має місце нерівність:*

$$U(x)\,U(y) \leq AU(Kxy)\,.$$

Означення 3. *([3]) Нехай U - C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається таке сімейство випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така стала $r_\xi > 0$, що*

$$EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Нехай $\{\Omega, \Im, P\}$ стандартний ймовірнісний простір.

Простір Орліча $L_u(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_u} = inf\left\{r > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 4. *([3]) Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_u(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_u(\Omega)$.*

Означення 5. *([3]) Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча ($E\xi = 0$), називається строго орлічевою, якщо існує стала C_Δ, що для скінченної кількості $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ і для будь-якого $\lambda_i \in \mathbf{R}^1$ виконується нерівність*

$$\left\| \sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i \right\|_{L_u} \le C_\Delta \left(E\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Означення 6. *([5]) Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, $(X \in L_u(\Omega))$ називається строго орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $X = \{X(t), t \in T\}$ - є строго орлічевою. Випадкові процеси $X = \{X(t), t \in T\}$ та $Y = \{Y(t), t \in T\}$ називаються сумісно строго орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ є строго орлічевою.*

Теорема 1. *([4]) Нехай $X_i = \{X_i(t), t \in T, i \in I\}$ - сім'я сумісно строго орлічевих процесів. Нехай існує інтеграл в середньому квадратичному*

$$\xi_{ki} = \int_T \varphi_k(t) X_i(t)\, d\mu(t).$$

Тоді сім'я випадкових величин $\Delta_\xi = \{\xi_{ki}, i \in I, k = \overline{1,\infty}\}$ є строго орлічевою сім'єю.

Наступна теорема є частинним випадком теореми з роботи ([2]).

Теорема 2. *Нехай в $\mathbf{R}^2$:*

$$d(t,s) = \max_{i=1,2} |t_i - s_i|,$$

$\mathbf{T} = \{0 \le t_i \le T_i, i = 1,2\}$, $X_n = \{X_n(t), t \in \mathbf{T}\}$, $n = 1,2,\ldots$ - послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча випадкових величин, де для функції U виконується g-умова. Нехай виконуються умови:

1) процеси $X_n(t)$ - сепарабельні;

2) $X_n(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$, $t \in \mathbf{T}$ за ймовірністю;

3) $\sup\limits_{d(t,s)\le h} \sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \|X_n(t) - X_n(s)\| \le \sigma(h)$, де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ $(\sigma(h) > 0)$ така неперервна монотонна зростаюча функція, що $\sigma(h) \to 0$ коли $h \to 0$;

4) для деякого $\epsilon > 0$

$$\int_0^\epsilon U^{(-1)}\left(\left(\frac{T_1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{T_2}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ - функція обернена до $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ збігаються за ймовірністю до $X(t)$ в просторі $C(\mathbf{T})$.

Лема 1. *([6]) Нехай для функції $Y_\lambda(u), \lambda > 0, u \in T$, де $T \in (0, \infty)$ виконуються умови:*

1) $\sup\limits_{u \in T} |Y_\lambda(u)| \leq B$,

2) $|Y_\lambda(u) - Y_\lambda(v)| \leq C\lambda |u - v|$ *при всіх* $u, v \in T$.

Нехай $\varphi(\lambda), \lambda > 0$ неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, така що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$, тоді для всіх $\lambda \geq 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність

$$|Y_\lambda(u) - Y_\lambda(v)| \leq \max(C, 2B) \frac{\varphi(\lambda + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|u-v|} + v_0\right)}.$$

Означення 7. *([7]) Додатна монотонна спадна послідовність $(\chi_U(n), n \geq 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь-яких n, та $\xi_k \in L_U(\Omega), k = 1, \ldots, n$ має місце нерівність*

$$\left\| \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \right\|_{L_U} \leq \chi_U(n) \max_{1 \leq k \leq n} \|\xi_k\|_{L_U}.$$

2. Умови застосування методу Фур'є до рівняння теплопровідності з випадковими крайовими умовами з простору Орліча

Розглянемо крайову задачу для параболічного рівняння з двома незалежними змінними ($x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $T > 0$) фізична інтерпретація якої: знайти розподіл температури в однорідному стержні довжини π, до кінців якого підводяться теплові потоки $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ ($t \in [0, T]$, $T > 0$) – які є незалежними випадковими процесами з просторів Орліча $L_U(\Omega)$, якщо початкова температура точок стержня рівна нулю. Дана задача зводиться до розв'язування наступної крайової задачі [8]:

$$Z_t(t, x) = Z_{xx}(t, x), 0 < x < \pi, 0 < t < T < \infty, \tag{1}$$

$$Z(0, x) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \tag{2}$$

$$Z'_x(t, 0) = \eta_1(t), Z'_x(t, \pi) = \eta_2(t), 0 \leq t < T < \infty, \tag{3}$$

$\eta_1(t), \eta_2(t), 0 \leq t < T < \infty$ є незалежними випадковими прооцесами з простору Орліча $L_U(\Omega)$.

Нехай $E\eta_1(t) = 0$, $E\eta_2(t) = 0$. Позначимо: $E\eta_1(t)\eta_1(s) = B_1(t, s)$, $E\eta_2(t)\eta_2(s) = B_2(t, s)$. Нехай коваріаційні функції $B_1(t, s)$, $B_2(t, s)$ неперервні. Для спрощення задачі візьмемо $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$.

Згідно [8] розв'язок задачі (1)-(3) шукається у вигляді:

$$Z(t, x) = \frac{1}{2\pi} x^2 \eta_2(t) + \left(x - \frac{1}{\pi} x^2\right) \eta_1(t) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \cos nx \int_0^t e^{n^2 t'} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \eta'_2(t') + \frac{1}{n^2} \eta'_1(t')\right) dt'. \tag{4}$$

Позначимо:

$$\gamma_n(t) = -\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t) - \frac{1}{n^2}\eta_1'(t).$$

$X_n(x) = \cos nx$ — власні функції, які відповідають власним значенням $\lambda_n = n^2$ задачі Штурма-Ліувілля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0. \tag{6}$$

Позначимо

$$S_{00}(t,x) = Z(t,x), \tag{7}$$

$$S_{01}(t,x) = \frac{1}{\pi}x\eta_2(t) + \left(1 - \frac{2}{\pi}x\right)\eta_1(t) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2t}\sin nx \int_0^t e^{n^2t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt', \tag{8}$$

$$S_{02}(t,x) = \frac{1}{\pi}\eta_2(t) - \frac{2}{\pi}\eta_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^2t}\cos nx \int_0^t e^{n^2t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt', \tag{9}$$

$$S_{10}(t,x) = \frac{1}{2\pi}x^2\eta_2'(t) + \left(x - \frac{1}{\pi}x^2\right)\eta_1'(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\left(-\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t) - \frac{1}{n^2}\eta_1'(t)\right) +$$

$$+n^2\int_0^t e^{-n^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt'. \tag{10}$$

Ряди (8)-(10) отримані почленним диференціюванням $Z(t,x)$ один, два рази по x та один раз по t.

Теорема 3. *Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний (два рази по x та один раз по t) розв'язок задачі (1)-(3) у вигляді*

$$Z(t,x) = \frac{1}{2\pi}x^2\eta_2(t) + \left(x - \frac{1}{\pi}x^2\right)\eta_1(t) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx \int_0^t e^{n^2t'}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt'. \tag{11}$$

такий, що (7)-(10) збігалися рівномірно за ймовірністю, достатньо щоб ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cos nx \int_0^t e^{-n^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\eta_2'(t') + \frac{1}{n^2}\eta_1'(t')\right)dt' \tag{12}$$

збігався за ймовірністю в нормі простора $C([0,T]\times[0,\pi])$, та існували $\eta_1'(t)$, $\eta_2'(t)$ з ймовірністю одиниця.

Доведення. Для того, щоб задача (1)-(3) мала розв'язок, досить, щоб рівномірно на $C([0,\pi])$ збігався ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \tag{13}$$

(що є очевидним); а також були рівномірно збіжними за ймовірністю ряди (8)-(10). Рівномірно на $C([0,T]\times[0,\pi])$ збіжність за ймовірністю рядів (8)-(10) та (13) забезпечує існування однакових підпослідовностей цих рядів, які на цій множині збігаються рівномірно з ймовірністю 1. А це забезпечує існування розв'язку (класичного) задачі (1)-(3).

Рівномірна збіжність (10) за ймовірністю випливає із збіжності рядів (12),(13). Відомо, що ([8], стор.433):

$$X_k(x)=\lambda_k\int_0^{\pi}G(x,s)X_k(s)ds,$$

(в цьому випадку $X_k(x)=\cos kx,\ \lambda_k=k^2$) де $G(x,s)$ функція впливу

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}u(s)v(x), & \text{якщо } s\leqslant x,\\ \frac{1}{\Delta}u(x)v(s), & \text{якщо } s>x,\end{cases}$$

де $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні, $\Delta>0$, $\Delta=u'(x)v(x)-u(x)v'(x)$. Розглянемо

$$-k\sin kx=\frac{k^2}{\Delta}\int_0^{\pi}G^*(x,s)\cos ksds,$$

де

$$G^*(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}u(s)v'(x), & \text{якщо } s\leqslant x,\\ \frac{1}{\Delta}u'(x)v(s), & \text{якщо } s>x.\end{cases}$$

Розглянемо суму

$$\sum_{k=n}^{m}ke^{-k^2t}\sin kx\int_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'=$$

$$=-\frac{1}{\Delta}\int_0^{\pi}\left(G^*(x,s)\sum_{k=n}^{m}k^2e^{-k^2t}\cos ks\int_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right)ds,$$

$\forall\delta>0\ \exists N$ що для $n>N$:

$$P\left\{\sup_{\substack{x\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}}\left|\sum_{k=n}^{m}ke^{-k^2t}\sin kx\int_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right|>\delta\right\}\leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{\substack{x,s\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}}\left|\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\pi}\left(G^*(x,s)\sum_{k=n}^{m}k^2e^{-k^2t}\cos ks\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\int\limits_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right)ds\right|>\delta\right\}\leq$$

$$\leq P\left\{\hat{C}\cdot\sup_{\substack{x,s\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]}}\left|\sum_{k=n}^{m}k^2e^{-k^2t}\cos kx\int\limits_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right|>\delta\right\}\longrightarrow 0,$$

при $m,n\to\infty$, де

$$\hat{C}=\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\pi}G^*(\pi,s)ds,$$

отже, за умовою теореми ряд збігається за ймовірністю в $C\left([0,T]\times[0,\pi]\right)$.

Розглянемо

$$-\cos kx=\frac{k^2}{\Delta}\left[\int\limits_0^{\pi}G^{**}(x,s)\cos ksds+\left(v'(x)u(x)-u'(x)v(x)\right)\cos kx\right],$$

де

$$G^{**}(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}u(s)v''(x), & \text{якщо } s\leqslant x,\\ \frac{1}{\Delta}u''(x)v(s), & \text{якщо } s>x.\end{cases}$$

Тоді

$$\sum_{k=n}^{m}k^2e^{-k^2t}\cos kx\int\limits_0^t e^{k^2t'}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[\int\limits_0^{\pi}\left(G^{**}(x,s)\sum_{k=n}^{m}k^2\cos ks\int\limits_0^t e^{-k^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta}\left(v'(x)u(x)-u'(x)v(x)\right)\sum_{k=n}^{m}k^2\cos kx\int\limits_0^t e^{-k^2(t-t')}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}\eta_2'(t')+\frac{1}{k^2}\eta_1'(t')\right)dt'\right]$$

очевидно як і в попередньому випадку, що ряд збігається за ймовірністю в $C\left([0,T]\times[0,\pi]\right)$.

Позначимо:

$$S^I(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{e^{k^2t}}\int\limits_0^t e^{k^2t'}\eta_2'(t')dt'$$

$$S^I_n(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{e^{k^2t}}\int\limits_0^t e^{k^2t'}\eta_2'(t')dt'$$

$$S^{II}(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{e^{k^2t}}\int\limits_0^t e^{k^2t'}\eta_1'(t')dt'$$

$$S_n^{II}(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{e^{k^2t}}\int\limits_0^t e^{k^2t'}\eta_1'(t')dt'$$

Лема 2. *Нехай ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2n^2\cos kx\cos nx}{e^{(k^2+n^2)t}}\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{k^2t'+n^2t''}\frac{\partial^2 B_2(t',t'')}{\partial t'\partial t''}dt'dt'',\tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2n^2\cos kx\cos nx}{e^{(k^2+n^2)t}}\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{k^2t'+n^2t''}\frac{\partial^2 B_1(t',t'')}{\partial t'\partial t''}dt'dt'',\tag{15}$$

збігаються для всіх $x\in[0,\pi], t\in[0,T]$. Якщо для всіх $n\geq 1$, виконуються нерівності

$$\sup_{\substack{|x-y|\leqslant h\\ |t-s|\leqslant h}}\left(E\left|S_n^I(t,x)-S_n^I(s,y)\right|^2\right)^{\frac12}\leqslant\sigma_I(h),\tag{16}$$

$$\sup_{\substack{|x-y|\leqslant h\\ |t-s|\leqslant h}}\left(E\left|S_n^{II}(t,x)-S_n^{II}(s,y)\right|^2\right)^{\frac12}\leqslant\sigma_{II}(h),\tag{17}$$

де $\sigma_I=\sigma_I(h)$, $\sigma_{II}=\sigma_{II}(h)$, $h>0$ — неперервні монотонно зростаючі функції, такі що $\sigma_I(h)\to 0$ та $\sigma_{II}(h)\to 0$ коли $h\to 0$ і для деякого $\varepsilon>0$ виконуються умови:

$$\int\limits_0^{\epsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{T}{2\sigma_I^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{\pi}{2\sigma_I^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty,$$

$$\int\limits_0^{\epsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{T}{2\sigma_{II}^{(-1)}(v)}+1\right)\left(\frac{\pi}{2\sigma_{II}^{(-1)}(v)}+1\right)\right)dv<\infty,$$

де $\sigma_I^{(-1)}(u)$ - функція обернена до $\sigma_I(u)$, $\sigma_{II}^{(-1)}(v)$ - функція обернена до $\sigma_{II}(v)$. Тоді (12) збігається за нормою в $C\left([0,T]\times[0,\pi]\right)$.

Доведення. Ця лема є простим наслідком теореми 2. $X_k(x)=\cos kx$ — неперервні функції, тоді $S_n^I(t,x)$ та $S_n^{II}(t,x)$ — вибірково неперервні з ймовірністю 1, а це означає що $S_n^I(t,x)$ та $S_n^{II}(t,x)$ — сепарабельні. Умова (14), (15) забезпечує збіжність $S_n^I(t,x)$ та $S_n^{II}(t,x)$ в середньому квадратичному, а значить і за ймовірністю. А умови 3), 4) теореми 2 випливають з (16), (17).

Лема 3. *Розглядається задача (1)-(3). Нехай $\eta_2(t)$, $\eta_1(t)$ — незалежні, строго орлічеві випадкові процеси з простору Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$,* *для U виконується умова g. Крім того, функція $\varphi(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ неперервна, зростаюча, додатня і така, що $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ зростає при $\lambda > v_0$ ($v_0 = const$, $v_0 \geq 0$). Нехай*

$$C_{k,m}^{I} = \frac{1}{k^2m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_1(t,t_1)}{\partial t \partial t_1}, C_{k,m}^{II} = \frac{(-1)^{k+m}}{k^2m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_2(t,t_1)}{\partial t \partial t_1},$$

та збігаються ряди

$$F_1 = 5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

$$F_2 = 5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

Тоді для $n \geq 1$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h\\ x,x_1\in[0,\pi]\\ t,t_1\in[0,T]}} \left(E\left|S_n^I(t,x) - S_n^I(t_1,x_1)\right|^2\right)^{1/2} \leq F_1\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1},$$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h\\ x,x_1\in[0,\pi]\\ t,t_1\in[0,T]}} \left(E\left|S_n^{II}(t,x) - S_n^{II}(t_1,x_1)\right|^2\right)^{1/2} \leq F_2\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. Розглянемо

$$S_n^{II}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx \int_0^t e^{-k^2(t-t')}\eta_1'(t')dt',$$

(для $S_n^I(t,x)$ доводиться аналогічно).

Розглянемо (де $|x-x_1| \leqslant h$, $|t-t_1| \leqslant h$, $x, x_1 \in [0,\pi]$, $t, t_1 \in [0,T]$):

$$\left(E\left|S_n^{II}(t,x) - S_n^{II}(t_1,x_1)\right|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(E\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx \int_0^t e^{-k^2(t-t')}\eta_1'(t')dt' - \sum_{k=1}^{n}\cos kx_1 \int_0^{t_1} e^{-k^2(t_1-t')}\eta_1'(t')dt'\right|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(E\left|\sum_{k=1}^{n}(\cos kx - \cos kx_1)\int_0^t e^{-k^2(t-t')}\eta_1'(t')dt'\right|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(E\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx_1\left(\int_0^t e^{-k^2(t-t')}\eta_1'(t')dt' - \int_0^{t_1} e^{-k^2(t_1-t')}\eta_1'(t')dt'\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$= E_{II_1} + E_{II_2}.$$

Позначимо:

$$R^{II}_{km}(t,t_1) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} e^{-k^2(t-t')} e^{-m^2(t_1-t'')} \frac{\partial^2 B_2(t,t_1)}{\partial t \partial t_1} dt' dt'',$$

тоді

$$E^2_{II_1} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\cos kx - \cos kx_1| \, |\cos mx - \cos mx_1| \left| R^{II}_{km}(t,t) \right|.$$

З умов леми 1 випливає, що:

$$|X_l(x) - X_l(x_1)| \le \max(2C_x, L) \frac{\varphi(\lambda_l + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)},$$

де $h = x - x_1$. В нашому випадку $X_l(x) = \cos lx$, $C_x = 1$. Розглянемо:

$$|X_k(x_1) - X_k(x_2)| = |\cos kx_1 - \cos kx_2| =$$

$$= \left| -2 \sin \frac{kx - kx_1}{2} \sin \frac{kx + kx_1}{2} \right| \le \left| k \sin \frac{k(x - x_1)}{2} \right| \le \frac{k^2}{2} |x - x_1|,$$

тоді $L = \frac{1}{2}$.
Отже

$$E^2_{II_1} \le \left(\frac{2}{\varphi\left(\frac{1}{x - x_1} + v_0\right)} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C^{II}_{k,m} \varphi\left(k^2 + v_0\right) \varphi\left(m^2 + v_0\right).$$

Позначимо (для визначеності візьмемо $t_1 < t$):

$$\left| Q^{II}_{km}(t,t_1) \right| = \left| E \left| \left(\int\limits_0^t e^{-k^2(t-t')} \eta'_1(t') dt' - \int\limits_0^{t_1} e^{-k^2(t_1-t')} \eta'_1(t') dt' \right) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left(\int\limits_0^t e^{-m^2(t-t')} \eta'_1(t') dt' - \int\limits_0^{t_1} e^{-m^2(t_1-t')} \eta'_1(t') dt' \right) \right| \right| =$$

$$= \left| E \left| \left(\int\limits_0^{t_1} \left(e^{-k^2(t-t')} - e^{-k^2(t_1-t')} \right) \eta'_1(t') dt' - \int\limits_{t_1}^{t} e^{-k^2(t-t')} \eta'_1(t') dt' \right) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left(\int\limits_0^{t_1} \left(e^{-m^2(t-t')} - e^{-m^2(t_1-t')} \right) \eta'_1(t') dt' - \int\limits_{t_1}^{t} e^{-m^2(t-t')} \eta'_1(t') dt' \right) \right| \right| =$$

$$= \left| \int_0^{t_1}\int_0^{t_1} \frac{\partial^2 B_1(t',t'')}{\partial t'\partial t''} \left(e^{-k^2(t-t')} - e^{-k^2(t_1-t')}\right)\left(e^{-m^2(t-t'')} - e^{-m^2(t_1-t'')}\right) dt'dt'' + \right.$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t} \frac{\partial^2 B_1(t',t'')}{\partial t'\partial t''} \left(e^{-k^2(t-t')} - e^{-k^2(t_1-t')}\right) e^{-m^2(t-t'')} dt'dt'' +$$

$$+ \int_{t_1}^{t}\int_0^{t_1} \frac{\partial^2 B_1(t',t'')}{\partial t'\partial t''} e^{-k^2(t-t')} \left(e^{-m^2(t-t'')} - e^{-m^2(t_1-t'')}\right) dt'dt'' +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{t} \frac{\partial^2 B_1(t',t'')}{\partial t'\partial t''} e^{-k^2(t-t')} e^{-m^2(t-t'')} dt'dt'' \right| \leq$$

$$\leq C_{k,m}^{II} \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_1} \left(e^{-k^2(t-t')} - e^{-k^2(t_1-t')}\right)\left(e^{-m^2(t-t'')} - e^{-m^2(t_1-t'')}\right) dt'dt'' + \right.$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t} \left(e^{-k^2(t-t')} - e^{-k^2(t_1-t')}\right) e^{-m^2(t-t'')} dt'dt'' +$$

$$+ \int_{t_1}^{t}\int_0^{t_1} e^{-k^2(t-t')} \left(e^{-m^2(t-t'')} - e^{-m^2(t_1-t'')}\right) dt'dt'' +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{t} e^{-k^2(t-t')} e^{-m^2(t-t'')} dt'dt'' \right) \leq$$

$$\leq 9C_{k,m}^{II} \frac{\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)}{\varphi^2\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}.$$

Отже

$$E_{II_2}^2 \leq \left(\frac{3}{\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right).$$

Аналогічно доводиться для $S_n^I(t,x)$.

Теорема 4. *Розглядається задача (1)-(3). Нехай $\eta_2(t)$, $\eta_1(t)$ — незалежні, строго орлічеві випадкові процеси з простору Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$, для U виконується умова g. Крім того, функція $\varphi(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ неперервна, зростаюча, додатня і така, що $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ зростає при $\lambda > v_0$ $(v_0 = const,\ v_0 \geq 0)$. Нехай збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right),$$

де

$$C_{k,m}^{I}=\frac{1}{k^2m^2}\sup_{t,t_1\in[0,T]}\frac{\partial^2 B_1(t,t_1)}{\partial t\partial t_1}, C_{k,m}^{II}=\frac{(-1)^{k+m}}{k^2m^2}\sup_{t,t_1\in[0,T]}\frac{\partial^2 B_2(t,t_1)}{\partial t\partial t_1},$$

Крім того, виконуються умови $\forall\varepsilon>0$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv<\infty, \tag{18}$$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv<\infty, \tag{19}$$

де

$$F_1=5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

$$F_2=5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II}\varphi\left(k^2+v_0\right)\varphi\left(m^2+v_0\right)\right)^{1/2},$$

Тоді ряди (12) збігаються рівномірно за ймовірністю в $C([0,T]\times[0,\pi])$*, та існує розв'язок задачі (1)-(3), що зображується у вигляді ряду (11), такий, що ряди (8)-(10) збігаються рівномірно за ймовірністю.*

Доведення. Дана теорема випливає з лем 2 та 3 взявши:

$$\sigma_I(h)=F_1\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}, \sigma_{II}(h)=F_2\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 5. *Розглядається задача (1)-(3). Нехай* $\eta_2(t)$, $\eta_1(t)$ *— незалежні, строго орлічеві випадкові процеси з простору Орліча випадкових величин* $L_U(\Omega)$*, де* $U(x)=|x|^p, p\geq 2$ *(тобто з простору* $L_p(\Omega)$*).* $\eta_2(t),\eta_1(t)$ *— сепарабельні, неперервні в середньому квадратичному.* $E\eta_2=0$*,* $E\eta_1=0$*. Нехай розв'язок (1)-(3) записується у вигляді (11).*

Нехай виконуються умови для $\beta>\frac{2}{p}$*:*

$$\sup_{|t-s|\leq h}\left(E\left(\tau_i(t)-\tau_i(s)\right)^2\right)^{1/2}\leq c_i\,|h|^{\beta}, \tag{20}$$

де

$i=1,2,3,4;$ $\tau_1(t)=\eta_2(t)$, $\tau_2(t)=\eta_1(t)$, $\tau_3(t)=\eta_2'(t)$, $\tau_4(t)=\eta_1'(t)$;

та рівномірно за ймовірністю збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{I}k^{2\beta}m^{2\beta}, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}^{II} k^{2\beta} m^{2\beta}, \tag{22}$$

де

$$C_{k,m}^{I} = \frac{1}{k^2 m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_1(t,t_1)}{\partial t \partial t_1}, C_{k,m}^{II} = \frac{(-1)^{k+m}}{k^2 m^2} \sup_{t,t_1\in[0,T]} \frac{\partial^2 B_2(t,t_1)}{\partial t \partial t_1}.$$

Тоді ряди (12) збігаються рівномірно за ймовірністю в $C([0,T]\times[0,\pi])$, та існує розв'язок задачі (1)-(3), що зображується у вигляді ряду (11), такий, що ряди (8)-(10) збігаються рівномірно за ймовірністю.

Доведення. Ця теорема є частинним випадком теореми 4, оскільки функції $U(x) = |x|^p$ задовольняють всім умовам теореми 4. Покладемо $\varphi(x) = |x|^{\beta}$, $\beta > \frac{1}{p}$. Перевіримо для цієї функції виконання умови (18), виберемо $c = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Тоді маємо (для простоти візьмемо $T < \pi$):

$$\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{\beta}}+1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{T}{2}\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{\beta}}+1\right)^{\frac{1}{p}} dv \le \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{\beta}}+1\right)^{\frac{2}{p}} dv \le$$

$$\le \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{2}{p}} dv + \int_0^{\varepsilon} dv = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{p}} c^{\frac{2}{p\beta}} \frac{p\beta}{p\beta-2}\varepsilon^{1-\frac{2}{p\beta}} + \varepsilon < \infty.$$

Тобто, при $\beta > \frac{2}{p}$ твердження теореми випливає із збіжності ряду (21). Друга частина теореми доводиться аналогічно. Перевіряєм виконання (19), тоді твердження буде випливати із збіжності ряду (22).

1. *E. Beisenbaev, Yu. V. Kozachenko* — Uniform convergence in probability of random series, and solutions of boundary value problems with random initial conditions // Theory Probab. Math. Statist. **21**, p.9-23.
2. *Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й.* — Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2008. – Вип. 16. – с.174 -183.
3. *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* — Metric Characterization of Random Variables and Random processes, – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.– 261p.
4. *Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І.* — Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами : монографія // К.:Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 173 с.
5. *Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V.* — Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions // Random Oper. And Stoch. Eq. – 1995. – № 3. – 201–220p.
6. *Yu.V. Kozachenko and K.I. Veresh* — The heat equation with random initial conditions from Orlicz spaces — 2010 // Theor. Probability and Math. Statist., No80. – 71-84p.
7. *Дарійчук І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М.* — Випадкові процеси з просторів Орліча // Чернівці, 2011. – 211с.
8. *Положий Г.Н.* – Уравнения математической физики // Москва, Высшая школа, 1964. – 559 с.

Одержано 21.10.2014