МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

О.О. Синявська

НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ **З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ

ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ужгород – 2022

Синявська О.О. Невизначені інтеграли: методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій. Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2022.   50 с.

Рецензенти: канд. фіз-мат. наук, доц. Слюсарчук П.В.,
канд. фіз-мат. наук. Герич М.С.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 18 жовтня 2022 року, протокол № 2.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки містять навчальні задачі з детальним розв'язуванням і варіанти типових індивідуальних завдань до теми “Невизначені інтеграли” для студентів першого курсу факультету математики та цифрових технологій. Також в кінці посібника у вигляді додатків стисло наведено основні формули та прийоми інтегрування.

Типове завдання складене так, що дотримується принцип однакової складності для усіх варіантів. Кожен варіант містить завдання з кожної теми різного рівня складності. Для виконання завдань варіанта індивідуальної роботи студентам пропонується ознайомитися із теоретичним матеріалом за відповідними темами, а також розібратися у наведених прикладах розв'язування типових задач.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Первісна і невизначений інтеграл.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Табличні інтеграли.
4. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
5. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
6. Раціональні дроби, правильні раціональні дроби, прості (елементарні) дроби, розклад правильного раціонального дробу на прості дроби. Інтегрування простих раціональних дробів.
7. Інтегрування деяких ірраціональностей. Підстановки Чебишова та Ейлера.
8. Інтегрування тригонометричних і трансцендентних функцій. Тригонометричні підстановки. Універсальна підстановка.

Тема 1. ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ТАБЛИЦІ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли, використовуючи метод безпосереднього інтегрування:

1) $\int (x^2+1)^2\,dx$; 2) $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)dx$;

3) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$.

Розв'язання. 1) $\int (x^2+1)^2dx = \int (x^4+2x^2+1)dx = \int x^4dx +$

$+2\int x^2dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x + C.$

2) $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)dx = a\int \frac{dx}{x} + b\int \frac{dx}{x^2} + d\int \frac{dx}{x^3} = a\ln|x| - \frac{b}{x} - \frac{d}{2x^2} + C.$

3) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx - \int \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}dx = \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$

4) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| -$

$-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \mathrm{C}$.

2. Знайдіть інтеграли внесенням під знак диференціала:

1) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{5x+4}$;

3) $\int e^{x/7}\,dx$; 4) $\int \cos(2x+1)\,dx$;

5) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$; 6) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = 2\int \frac{2^x dx}{(5\cdot 2)^x} - \frac{1}{5}\int \frac{5^x}{(5\cdot 2)^x}dx = 2\int \frac{dx}{5^x} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{2^x} =$

$= -2\int 5^{-x} d(-x) + \frac{1}{5}\int 2^{-x} d(-x) = -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\,\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.$

2) $\int \frac{dx}{5x+4} = |d(5x+4) = 5dx| = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+4)}{5x+4} = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C.$

3) $\int e^{x/7}\, dx = 7\int e^{\frac{x}{7}}\, d\left(\frac{x}{7}\right) = 7e^{\frac{x}{7}} + C.$

4) $\int \cos(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\, d(2x+1) = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$

5) $\int \sqrt[3]{1-3x}\, dx = \left| d(1-3x) = -\frac{1}{3}d(1-3x) \right| = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}}\, d(1-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}\cdot 3}{4} + C = -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.$

6) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = |d\cos x = -\sin x\, dx| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

3. Знайдіть інтеграли безпосереднім інтегруванням та внесенням під знак диференціала:

1) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

2) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

7) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$;

8) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

9) $\int \sin^2 x dx$;

10) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$;

11) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;

12) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x\, dx$.

Розв’язання. 1) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$
$= -\operatorname{ctg} x - x + C.$

2) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} arctg\, \frac{2x+1}{2} + C.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(3x-1)^2+9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\frac{3x-1}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} arcsin\left(\frac{3x-1}{3}\right) + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{2+(\sqrt{3}x)^2}} = \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}\right| + C.$

5) $\int \frac{dx}{sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} ctg(2x + \frac{\pi}{4}) + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}} dx = \int \frac{sin\frac{x}{2}}{2cos\frac{x}{2}} dx + \int \frac{cos\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} dx = -\frac{2}{2}\int \frac{dcos\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} - \frac{2}{2}\int \frac{d\, sin\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}$

$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$

7) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

8) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{e^{2x}+1} = arctg\; e^x + C.$

9) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x +$

$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

10) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C.$

11) $\int \mathrm{tg}^3 x dx = \int \mathrm{tg}\, x\cdot \mathrm{tg}^2 x dx = \int \mathrm{tg}\, x\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right) dx = \int \mathrm{tg}\, x \frac{1}{cos^2 x} dx -$

$-\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \int \mathrm{tg}\, x\, d\,\mathrm{tg}\, x - \int \mathrm{tg}\, x\, dx = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \int \frac{d\;\cos x}{\cos x}$

$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$

12) $\int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, x\, dx = \int \mathrm{sh}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{sh}\, 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\, 2x + C.$

Тема 2. ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВКИ

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. За допомогою відповідних підстановок знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx$; 2) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\, dx$; 4) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$;

5) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx = \left| \begin{matrix} 1+2\cos x = t \\ -2\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\ 2\, t^{\frac{1}{2}} +$ $+C = C - \sqrt{t} = C - \sqrt{1+2\cos x}.$

2) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{1-x^2} = t \\ 1-x^2 = t^2 \\ x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = \frac{-2tdt}{2\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| = -\int \frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}\ 2tdt}{2t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = -\int (1-t^2)^2\, dt =$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)dt = -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \sqrt{1-x^2}\left(-1 + \frac{2}{3}(1-x^2) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{5}(1-x^2)^2\right) + C.$$

3) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right| = \int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}} dt = \int (1-2t^2 +$

$$+t^4)t^{\frac{1}{2}}dt = \int \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{9}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}}\right)dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + C = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x -$$
$$-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x + C.$$

4) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} 1+\cos^2 x = t \\ 2\cos x \sin x\, dx = -dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t} dt =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2} ln|t| - \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

5) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x} = \begin{vmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,\frac{2tdt}{1+t^2} = \left|\frac{dt}{1+t^2} = d(\operatorname{arctg} t)\right| =$

$= 2\int \operatorname{arctg} t\, d(\operatorname{arctg} t) = \operatorname{arctg}^2 t + C = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C.$

2. За допомогою тригонометричних або гіперболічних підстановок знайдіть інтеграли :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; 2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$;

3) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ t = \arcsin x \end{vmatrix} = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} =$

$= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\, \arcsin x + C.$

2) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \begin{vmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = arc\sin\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin t}\, a\cos t dt =$

$= a^2 \int \sqrt{cos^2 t}\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int(1 + \cos 2t)dt \; = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C.$

Оскільки

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}\ ,$$

то

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} +$$

$$+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

3) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \begin{vmatrix} x = a\,\mathrm{sh} t \\ dx = a\,\mathrm{ch} t dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{a^2 + a^2 \mathrm{sh}^2 t}\, a\,\mathrm{ch} t\, dt =$

$$= \int a^2 \mathrm{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \mathrm{ch} 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \mathrm{sh} 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} 2 \mathrm{sh} t \mathrm{ch} t \right) + C.$$

Оскільки, $\mathrm{ch} t = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2}}$,

$$e^t = \mathrm{ch} t + \mathrm{sh} t = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \Longrightarrow t = \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right)$$, то

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) + \frac{x}{a} \ln \left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) + C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \begin{vmatrix} x = a\, tgt \\ dx = \frac{a dt}{cos^2 t} \\ t = \mathrm{arctg} \frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int \frac{a dt}{\sqrt{(a^2 tg^2 t + a^2)^3 cos^2 t}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{cos^2 t} \right)^{\frac{3}{2}} cos^2 t} =$

$$= \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{1}{a^2} \sin \left(\mathrm{arctg} \frac{x}{a} \right) + C.$$

Тема 3. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ У НЕВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. За допомогою інтегрування частинами знайдіть інтеграли:

1) $\int x^3 \ln x \, dx$; 2) $\int e^{2x}(3x-1)dx$;

3) $\int (x^2 - x + 1) \sin x \, dx$; 4) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$;

5) $\int e^x \cos x \, dx$; 6) $\int \arcsin x \, dx$.

Розв'язання. 1) $\int x^3 \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & x^3 dx = dv \\ du = d\ln x = \frac{1}{x}dx & v = \int dv = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} =$

$$= uv - \int vdu = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

2) $\int e^{2x}(3x-1)dx = \begin{vmatrix} u = 3x-1 & e^{2x}dx = dv \\ du = 3dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}(3x-1) -$

$$-\frac{3}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}(3x-1) - \frac{3}{4}e^{2x} + \mathrm{C}.$$

3) $\int (x^2 - x + 1)\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 - x + 1 & \sin x dx = dv \\ du = (2x-1)dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$

$$= -(x^2 - x + 1)\cos x + \int (2x-1)\cos x dx = \begin{vmatrix} 2x-1 = u & cosxdx = dv \\ du = 2dx & v = sinx \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x^2 - 1)\cos x + (2x-1)\sin x - 2\int \sin x dx = (x - x^2 - 1)\cos x +$$

$$+(2x-1)\sin x + 2\cos x + C.$$

4) $I = \int \sqrt{x^2+a^2}dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{x^2+a^2} & dv = dx \\ du = \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2+a^2}} & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{x^2+a^2} -$

$$-\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln\left|\mathrm{x}+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Запишемо отримане рівняння для знаходження інтеграла, позначеного I:

$$2I=x\sqrt{x^2+a^2}\ +a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$$

тоді

$$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C)\,.$$

5) $I=\int e^x\cos x\,dx=\begin{vmatrix}u=e^x & \cos xdx=dv\\ du=e^xdx & v=\sin x\end{vmatrix}=e^x\sin x-$

$-\int\sin x\,e^xdx=\begin{vmatrix}u=e^x & \sin\mathrm{x}\,dx=dv\\ du=e^xdx & v=-\cos x\end{vmatrix}=e^x\sin x+e^x\cos x-$

$-\int e^x\cos xdx.$

Із отриманого рівняння, знайдемо тепер шуканий інтеграл I:

$$2I=e^x\sin x+e^x\cos x+C,$$

тоді

$$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x+C_1).$$

6) $\displaystyle\int\arcsin x\,dx=\begin{vmatrix}u=\arcsin x & dv=dx\\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x\end{vmatrix}=x\cdot\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle=|d(1-x^2)=-2xdx|=\ x\cdot\arcsin x-\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=x\cdot\arcsin x+$

$\displaystyle+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=\ x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

Тема 4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{2dx}{x-1}$; 2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3}$;

3) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{2dx}{x-1} = 2\ln|x-1| + C$.

2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3} = 3\int (x-2)^{-3} d(x-2) = -3\frac{1}{2(x-2)^2} + C$.

3) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx = \left| \begin{matrix} d(x^2+2x+5) = (2x+2)dx \\ x+5 = \frac{1}{2}(2x+2)+4 \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+5}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = |x^2+2x+5 = (x+1)^2+4| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + 4\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + 2arctg\,\frac{x+1}{2} + C.$$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{9+x^2-x^2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+9} - \frac{1}{9}\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{9}\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} - \frac{1}{9}I.$

Знайдемо I:

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = dx \\ dv = \frac{xdx}{(x^2+9)^2} & v = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{(x^2+9)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+9} \end{matrix} \right|$$

$$= -x\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9} = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + C.$$

Після підстановки отримуємо:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{27}arctg\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\left(-\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\,arctg\frac{x}{3}\right) + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{1}{54}arctg\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + \mathrm{C}.$$

Означення 1. [4] Раціональним дробом $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається відношення двох многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ степенів n і m відповідно.

Означення 2. [4] Раціонайльний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь чисельника менша ніж степінь знаменника ($n < m$).

Теорема 1. [4] Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можна єдиним числом розкласти на суму дробів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a_1)^{k_1} \dots \dots \dots (x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{r_s}} =$$

$$= \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m^{(1)}}{(x-a)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{(x-a_k)} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_k)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{n_1}^{(1)}x + D_{n_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \cdots.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n}{Q_m}$ $, n < m$ *єдиним чином можна розкласти в суму елементарних дробів (причому Q розкладається в добуток незвідних взаємно простих множників).*

Схема інтегрування раціональних дробів полягає в наступному:

1. Перевіряємо дріб на правильність чи неправильність (дріб, степінь чисельника якого є меньший за степінь знаменника). Якщо він неправильний, то розкладаємо дріб на суму многочлена і правильного дробу. Якщо дріб правильний переходимо до наступного пункту.

2. Розкладаємо знаменник правильного раціонального дробу на множники і розкладаємо його на суму простих (елементарних) дробів з невизначеними коефіцієнтами (кількість таких коефіцієнтів дорівнює степеню знаменника).

3. Знаходимо невизначені коефіцієнти за допомогою методу частинних значень (викреслювання) або методу невизначених коефіцієнтів.

4. Інтегруємо кожен із отриманих доданків.

2. Розкладіть правильні дроби на елементарні:

1) $\frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$; 2) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^2(x^2+\pi x+e)^9}$.

Розв'язання. 1) $\frac{P(x)}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$, оскільки

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

2) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^2(x^2+\pi x+e)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+\pi x+e} + \frac{Gx+H}{(x^2+\pi x+e)^2} +$ $\frac{Ix+J}{(x^2+\pi x+e)^3}$, оскільки $D = \pi^2 - 4e < 0$.

3. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$;

3) $\int \frac{x^5dx}{x^3-1}$; 4) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$;

5) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$.

Розв'язання. 1) Маємо підінтегральну функцію $\frac{P_1(x)}{Q_3(x)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ – це правильний дріб (степінь чисельника $n = 1 < 3 = m$ степінь знаменника), тоді згідно з теоремою 1

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B, C знаходимо методом частинних значень (викреслювання):

$$\mathrm{A} = \left.\frac{x}{\cancel{(x+1)}(x+2)(x+3)}\right|_{x=-1} = \frac{-1}{(-1+2)(-1+3)} = -\frac{1}{2};$$

$$B = \left.\frac{x}{(x+1)\cancel{(x+2)}(x+3)}\right|_{x=-2} = 2;$$

$$C = \left.\frac{x}{(x+1)(x+2)\cancel{(x+3)}}\right|_{x=-3} = -\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3},$$

і отримаємо інтеграл

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x+2}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\tfrac{3}{2}\ln|x+3|+C.$$

2) Маємо підінтегральну функцію $\frac{P_1(x)}{Q_5(x)}=\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$ – це правильний дріб ($n=1<5=m$), тоді згідно з теоремою 1

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}.$$

Коефіцієнти над степенями лінійних многочленів знаходимо методом невизначених коефіцієнтів (метод прирівнювання). Для цього зведемо в правій частині дроби до спільного знаменника і прирівняємо тотожньо його чисельник з $Q_5(x)$:

$$3x+1=A(1+x^2)^2+(Bx+C)(1+x^2)x+(Dx+E)x,$$

$$3x+1=A+2Ax^2+Ax^4+Bx^2+Bx^4+Cx+Cx^3+Dx^2+Ex.$$

Розкривши дужки у правій частині і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|c} x^4 & 0=A+B; \\ x^3 & 0=C; \\ x^2 & 0=2A+B+D; \\ x^1 & 3=C+E; \\ x^0 & 1=A. \end{array}$$

розв’язоками якої є: $A=1, B=1, C=0, E=3, D=-1$. Таким чином,

$$\int\frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{(1+x^2)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}+$$

$$+\int\frac{(3-x)dx}{(1+x^2)^2}=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}-\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\begin{vmatrix} x=tg\ t \\ dx=\dfrac{dt}{cos^2t} \\ t=arctg\ x \end{vmatrix}=$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{1}{(1+tg^2t)^2}\frac{dt}{cos^2t} = \ln|x| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{cos^4tdt}{cos^2t} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$+3\int cos^2tdt = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{1+cos2t}{2}dt = \ln|x| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}sin2t + C = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}arctg\, x + \frac{3}{4}\sin(2arctg\, x) + C.$$

3) Підінтегральна фінкція $\frac{x^5}{x^3-1}$ є неправильним дробом, оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника. Тому спочатку виділимо цілу частину дробу:

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^5}{x^3-1}dx = \int \left(x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}\right)dx = \int x^2dx + \int \frac{x^2dx}{x^3-1} = \frac{x^3}{3} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-1)}{x^3-1} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + C\,.$$

4) Підінтегральна фінкція $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$ є неправильним дробом, оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника. Тому спочатку виділимо цілу частину дробу:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Правильний дріб $\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$ розкладаємо на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.

$$x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1);$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Прирівнюючи чисельники та відповідні коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо

$$2 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

та систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B; \\ x^1 & 0 = -B + C; \\ x^0 & 2 = A - C. \end{array}$$

Звідси $A = 1, B = -1, C = -1$. Тоді підінтегральна функція має вигляд:

$$\frac{x^4+1}{x^3+x^2+x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Переходимо до інтегрування цілої частини і простих дробів:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x-1} dx = \int \left((x+1) + \frac{2}{x^3+x^2+x-1} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx + \int dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{(-x+1)dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| -$$

$$- \int \frac{x\, dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctg\, x + C.$$

5) Оскільки підітегральна функція є неправильним дробом, зробимо наступні перетворення у інтегралі:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4} = \int \frac{(x^4+5x^2+4) - 5x^2 - 4}{x^4+5x^2+4} dx = \int dx -$$

$$- \int \frac{(5x^2+4)dx}{x^4+5x^2+4}.$$

Далі, за допомогою отриманого розкладу та заміни, розкладемо правильний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = |x^2 = t| = \frac{5t+4}{t^2+5t+4} = \frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B знаходимо методом частинних значень:

$$\mathrm{A} = \left. \frac{5t+4}{\cancel{(t+1)}(t+4)} \right|_{t=-1} = -\frac{1}{3};\ B = \left. \frac{5t+4}{(t+1)\cancel{(t+4)}} \right|_{t=-4} = \frac{16}{3}.$$

Отже,

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+4}=\frac{-\frac{1}{3}}{t+1}+\frac{\frac{16}{3}}{t+4}=\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{16}{3}}{x^2+4}.$$

Тому маємо

$$\int\frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}=\int dx-\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{16}{3}}{x^2+4}\right)dx=$$

$$=x+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{16}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=x+\frac{1}{3}arctg\,x-\frac{16}{3}\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=$$

$$=x+\frac{1}{3}arctg\,x-\frac{8}{3}arctg\frac{x}{2}+C.$$

Тема 5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ. ПІДСТАНОВКИ ЧЕБИШЕВА І ЕЙЛЕРА

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли, за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$; 4) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. 1) Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну від виразу, що міститься в знаменнику: $(4x^2+4x+19)' = 8x+4$,

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx = \left| \begin{matrix} x-2 = \frac{1}{8}(8x+4-4-2) = \\ = \frac{1}{8}(8x+4) - \frac{5}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4) - \frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx = \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+19}} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+19}} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2+4x+19)}{\sqrt{4x^2+4x+19}} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+18}} =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{(4x^2+4x+19)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{5}{4}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+18}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+19} - \frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+19}\right| + C.$$

2) $\int \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}dx = \left| \begin{matrix} x-2 = t^6 \\ x = t^6+2 \\ dx = 6t^5dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}t^5dt = 6\int \frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt =$

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = -6\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} - 6\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^3}{3} +$$

$$+6\frac{t^2}{2} - 6t - 6\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 6t - 6\int \frac{t-1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 6t - \frac{6}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 6\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{6}{7}t^7 -$$

$$-\frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 6t - 3\ln|t^2+1| + 6\,arctgt + C\,,\quad \text{де } t = \sqrt[6]{x-2}.$$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}} = \left| t = \frac{1}{x}; x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1}} dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} =$

$$= -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}} = \left| \begin{matrix} 1 - t - t^2 = -(t^2+t-1) = \\ = -\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \end{matrix} \right| = -\arcsin\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C =$$

$$= -\arcsin\frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = -\arcsin\frac{2+x}{\sqrt{5}x} + C.$$

$$4)\ \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \frac{1-x}{1+x} = t^2, 1 - x = t^2(1+x) = t^2 + t^2x\,, \\ x = \frac{t^2-1}{-(1+t^2)}, dx = \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt \\ 1 - x = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2}, \\ 1 + x = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{(1+t^2)^2 4tdt}{2t^2\sqrt{4t^2}(1+t^2)^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

2. Знайдіть інтеграл $\int \frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$.

Розв'язання. Для знаходження даного інтегралу використаємо *метод Остроградського*, за яким

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c})dx + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $P_{n-1}\ (x)$ – многочлен степеня не вище, ніж $n-1$, коефіцієнти якого та λ знаходяться методом невизначених коефіцієнтів. Тоді

$$\int \frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+10} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Продиференціюємо ліву і праву частини попередньої рівності :

$$\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}} = A\sqrt{x^2-2x+10} + (Ax+B)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} +$$

$$+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}}.$$

Тоді, прирівнявши відповідні чисельники

$$4x^2-3x+19=A(x^2-2x+10)+(Ax+B)(x-1)+\lambda,$$

$$4x^2-3x+19=Ax^2-2Ax+10A++Ax^2-Ax+Bx-B+\lambda,$$

та коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, λ:

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях :

$$\begin{cases} 4=A+A; \\ -3=-2A-A+B; \\ 19=10A-B+\lambda; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A=4; \\ -3A+B=-3; \\ \lambda=19-10A+B; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2; \\ B=3; \\ \lambda=2. \end{cases}$$

Звідси, одержуємо:

$$\int\frac{4x^2-3x+19}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx=(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}=$$

$$=(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+9}}=(2x+3)\sqrt{x^2-2x+10}+$$

$$+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right|+C.$$

3. Знайдіть інтеграли, використовуючи підстановки Чебишова:

1) $\int\sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2dx$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання.

1) Вираз, що міститься під інтегралом, є диференціальним біномом, оскільки $\sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2=x^{3/2}(1+4x^{\frac{1}{3}})^2$. Отже, відповідно до вигляду диференціального біному $x^m(a+bx^n)^p$ і $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=2$, із наведених 3-ох випадків застосування підстановок Чебишова, маємо: $p=-3\in\mathbb{Z}$, тобто маємо випадок (1) (див. додаток). Тоді використовуємо підстановку $x=t^s$, де s – спільний знаменник дробів $m=\frac{3}{2}$ і $n=\frac{1}{3}$, тобто $s=6$. Звідси,

$$\int \sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2dx = \int x^{3/2}(1+4x^{\frac{1}{3}})^2dx = \left| \begin{array}{c} m=\frac{3}{2}\ ,n=\frac{1}{3},p=2 \\ p=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=t^s, \\ s=6\ \Rightarrow\ \ x=t^6,\ \ dx=6t^5dt \end{array} \right|$$

$$=\int (t^6)^{3/2}(1+4(t^6)^{\frac{1}{3}})^2 6t^5dt = \int t^9(1+4t^2)^2\,dt = 6\int t^{14}(1+4t^2)^2dt =$$

$$=6\int t^{14}(1+8t^2+16t^4)dt = 6\int (t^{14}+8t^{16}+16t^{18})dt =$$

$$=6\frac{t^{15}}{15}+48\frac{t^{17}}{17}+96\frac{t^{19}}{19}+C, \text{де } t=\sqrt[6]{x}.$$

2) Запишемо інтеграл у вигляді $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$. Тут, згідно з попередніх міркувань, $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$. Оскільки $p=\frac{1}{3}\notin\ \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} = 2\in\mathbb{Z}$, то маємо випадок (2) із підстановок Чебишова (див. додаток). Оскільки знаменник числа p дорівнює 3, то виконаємо заміну $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$. Тобто:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}\notin\ \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \\ t=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}, \\ x=(t^3-1)^4, dx=12(t^3-1)^3t^2dt \end{array} \right| =$$

$$=\int (t^3-1)^{-4/2}(t^3)^{\frac{1}{3}}\ \ 12(t^3-1)^3t^2dt = 12\int t^3(t^3-1)\,dt = 12\int (t^6-t^3)dt =$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C, \text{де } t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}.$$

3) Запишемо інтеграл у вигляді $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$. Звідси, із вигляду підінтегральної функції маємо $m=0, n=4,\ p=-\frac{1}{4}$. Оскільки, $p=-\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z}$, то маємо випадок (3) із підстановок

Чебишова (див. додаток) і потрібно виконати заміну: $x^{-4}+1=t^4$. Перед застосуванням такої заміни, виконаємо деякі перетворення

$$\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=\int(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{4}}x^{-1}dx.$$

Дістанемо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} m=0, n=4, \qquad p=-\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}+p=0\Rightarrow x^{-4}\ +1=t^4 \\ x=\frac{1}{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}},\ \ dx=\frac{-t^3dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}}\end{array}\right|=$$

$$=\int(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{4}}x^{-1}dx=-\int\frac{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}{t}\frac{t^3dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\frac{t^2-1+1}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C,\text{де } t=(x^{-4}+1)^{\frac{1}{4}}.$$

4. Знайдіть інтеграли, використовуючи підстановки Ейлера:

1) $\int\frac{xdx}{(\sqrt{5x-6-x^2})^3}$; 2) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

Розв'язання. 1) Оскільки $a<0, c<0$ і $5x-6-x^2=-(x-3)(x-2)$, застосуємо третю підстановку Ейлера: $\sqrt{5x-6-x^2}=(x-2)t$, тоді

$$\int\frac{xdx}{(\sqrt{5x-6-x^2})^3}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} a<0, c<0\Rightarrow\sqrt{5x-6-x^2}=\sqrt{-(x-3)(x-2)}= \\ =(x-2)t\Rightarrow \\ -(x-3)(x-2)=(x-2)^2t^2\Rightarrow-(x-3)=(x-2)t^2 \\ \Rightarrow-x+3=t^2x-2t\Rightarrow x=\frac{3+2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{-2tdt}{(1+t^2)^2},\sqrt{5x-6+x^2}=\left(\frac{3+2t}{1+t^2}-2\right)t=\frac{t}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{3+2t^2}{1+t^2}\frac{(1+t^2)^3}{t^3}\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}=-2\int\frac{3+2t^2}{t^2}dt=$$

$$=-6\int\frac{dt}{t^2}-4\int dt=-\frac{6}{t}-4t+C,\ \text{де } t=\frac{\sqrt{5x-6-x^2}}{x-2}.$$

2) Оскільки $a = 1 > 0$, застосуємо першу підстановку Ейлера: $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, тоді дістанемо:

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{matrix} a > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} = t - x, \\ x^2 + x - 1 = (t-x)^2 \Rightarrow x + 2tx = t^2 - 1 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}, dx = \dfrac{2t+2t^2+2}{(2t+1)^2} dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2(t+t^2+1)}{t(1+2t)^2} dt.$$

Отримаємо розклад підінтегральної функції в суму елементарних дробів:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2}.$$

Тотожньо зрівняємо чисельники: $t^2+t+1 = A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct$, тоді $A = 1, B = -\frac{3}{2}, C = -\frac{3}{2}$. Отже,

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{1}{t} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+2t} + \frac{-\frac{3}{2}}{(1+2t)^2}$$

і

$$I = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{(1+2t)^2}\right) dt = 2\ln|t| -$$

$$-\frac{3}{2}\ln|1+2t| - \frac{3}{2}\ \frac{1}{1+2t} + C, \text{ де } t = \sqrt{x^2+x+1} - x.$$

Тема 6. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$;

2) $\int \sin 5x \cos x dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

4) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

5) $\int \frac{dx}{5-4\sin x + 3\cos x}$;

6) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

7) $\int \cos^4 3x\, dx$;

8) $\int \text{th}^3 x dx$.

Розв'язання. 1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, d(\cos x) =$

$$= -\int \cos^2 x\, d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

2) $\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 6x + \sin 4x)dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left|\frac{(-\sin x)^3}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\right| = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx =$

$$= |\sin x dx = -d(\cos x)| = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) =$$

$$= \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ d(\cos x) = dt \end{matrix}\right| = -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

4) $\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \left|\begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ x = 2arctgt \\ dx = 2\frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right| = 2\int \frac{dt}{\left(5+\frac{8t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{5+5t^2+8t} =$

$$=\left|5\left(t^2+\frac{8}{5}t+1\right)=5\left(\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}\right)\right|=\frac{2}{5}\int\frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}arctg\,\frac{5\left(t+\frac{4}{5}\right)}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\left(\frac{5}{3}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{3}\right)+C.$$

5) $$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{t}=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, x=2arcth\ t\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{2dt}{5(1+t^2)-8t+3(1-t^2)}=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2}=$$

$=\frac{(t-2)^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{t-2}+C,$ де $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

6) $$\int\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{(-\sin x)^4+(-\sin x)^4}=\frac{1}{\sin^4x+\cos^4x}\\ t=tgx;\ \ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\\ x=arctgt;\ \ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{\frac{t^4}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{(1+t^2)dt}{t^4+1}=\int\frac{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t^4}\right)}=\int\frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{t^2+\frac{1}{t^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}t^2+\frac{1}{t^2}=t^2+\frac{1}{t^2}-2t\frac{1}{t}+2=\\ \left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2,\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=d\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{array}\right|=\int\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}+C,$$ де $t=tgx$.

7) $$\int\cos^4 3x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 6x+\cos^2 6x)\ dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 6x+\frac{1+\cos 12x}{2}\right)\ dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{12}\sin 12x\right)$$

$$+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$$

8) $\int \text{th}^3 x\, dx = \left|1-\text{th}^2 x=\frac{1}{\text{ch}^2 x}\right| = \int \text{th}\, x\left(1-\frac{1}{\text{ch}^2 x}\right) dx = \int \text{th}\, x\, dx -$

$$-\int \frac{\text{th}x}{\text{ch}^2 x}\,dx = \int \frac{\text{sh}\, x\, dx}{\text{ch}\, x} - \int \text{th}\, x\, d(\text{th}\, x) = \int \frac{d\,(\text{ch}\, x)}{\text{ch}\, x} - \frac{\text{th}^2 x}{2} =$$

$$=\ln \text{ch}x - \frac{\text{th}^2 x}{2} + C.$$

ТИПОВІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання №1.

Знаходження невизначених інтегралів за допомогою таблиць інтегралів та властивостей

1.1. *Знайти невизначений інтеграл безпосереднім зведенням до табличного.*

1. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

2. $\int 2^x\cdot 5^{2x}dx$;

3. $\int 2(\sin x+3)dx$;

4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

5. $\int(2^{x+1}-5^{x-1})dx$;

6. $\int\frac{1-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}dx$;

7. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$;

8. $\int(3-x^2)^3d\,x$;

9. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;

10. $\int\frac{dx}{2+3x^2}$;

11. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

12. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

13. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;

14. $\int e^x(3-e^{-x})dx$;

15. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$;

16. $\int(3\cdot 2^x+2\cdot 3^x)dx$;

17. $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$;

18. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x+5}$;

19. $\int\frac{32^x}{4^x}dx$;

20. $\int\frac{dx}{9-8x^2}$;

21. $\int\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

22. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

23. $\int\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}dx$;

24. $\int 3^x\cdot e^{3x}dx$;

25. $\int \frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$;

26) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$;

27. $\int e^{2x} \cdot 2^x dx$;

28. $\int \frac{8x^2-2}{2x-1}dx$;

29. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

30. $\int \frac{\sqrt{x}+x^2 e^x+x}{x^2}dx$.

1.2. *Знайти невизначений інтеграл внесенням функції під знак диференціала.*

1. $\int e^{5x+1}dx$;

2. $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

4. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

5. $\int \sin^4 x \cos x dx$;

6. $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx$;

7. $\int x^4\sqrt{3x^5+4}dx$;

8. $\int \frac{xdx}{4x^2-9}$;

9. $\int \sqrt{3-4x}dx$;

10. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{6^x}dx$;

11. $\int \frac{x^3}{x^4+2}dx$;

12. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

13. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$;

14. $\int \frac{dx}{x\ln(5x)}$;

15. $\int \sin(5x-2)dx$;

16. $\int \frac{dx}{2x+3}$;

17. $\int \frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}dx$;

18. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

19. $\int x7^{x^2}dx$;

20. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

21. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$;

22. $\int \frac{(tg\, x+1)^2}{\cos^2 x}dx$;

23. $\int \frac{x}{9x^2+4}dx$;

24. $\int \frac{3^x}{4+9^x}dx$;

25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}dx$;

26) $\int 7^{1/x}\frac{1}{x^2}dx$;

27. $\int e^x \cdot \sin e^x\,dx$;

28. $\int (4+3x^2)^{15}xdx$;

29. $\int \frac{\sqrt{ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$;

30. $\int \frac{x^4}{x^{10}+4}dx$.

1.3. *За допомогою виділення повного квадрату знайти інтеграли.*

1. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

2. а) $\int \frac{dx}{4x^2-6x+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

3. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

4. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-6x-9x^2}}$;

5. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-x^2}}$;

6. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+9x^2}}$;

7. а) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}$;

8. а) $\int \frac{dx}{1+4x^2-12x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

9. а) $\int \frac{dx}{2x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$;

10. а) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

11. а) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

12. а) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

13. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+7}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x-x^2}}$;

14. а) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

15. а) $\int \frac{dx}{x^2-7x+12}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$;

16. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$;

17. а) $\int \frac{dx}{6-x-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;

18. а) $\int \frac{dx}{8+6x-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2-12x}}$;

19. а) $\int \frac{dx}{5-2x+x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

20. а) $\int \frac{dx}{6-x-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-10}}$;

21. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}$;

22. а) $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2+4x+4x^2}}$;

23. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x-6}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}$;

24. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}$;

25. а) $\int \frac{4dx}{x^2+5x-6}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+8x+x^2}}$;

26. а) $\int \frac{3dx}{x^2+4x+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

27. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+10}}$;

28. а) $\int \frac{4dx}{x^2+x-2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$;

29. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$;

30. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$.

Індивідуальне завдання №2.

Інтегрування підстановкою та частинами

2.1. *Знайти інтеграл за допомогою заміни змінних (підстановки).*

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$;

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$;

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$;

10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$;

12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$;

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}\, dx$;

14. $\int \sqrt{e^x+1}dx$;

15. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$;

16. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$;

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$;

18. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$;

19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$;

20. $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$;

21. $\int \sqrt{100-x^2}dx$;

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(100+x^2)^3}}$;

23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}dx$;

24. $\int \sqrt{e^{2x}-3}dx$;

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$;

26) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$;

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$;

29. $\int \sqrt{e^{3x}+1}dx$;

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2.2. *Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами.*

1. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$;

2. $\int arctg\sqrt{4x-1}\, dx$;

3. $\int \ln(x-5)\, dx$;

4. $\int x\cos 8x\, dx$;

5. $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$;

6. $\int e^{-x}\cos 2xdx$;

7. $\int (x+1)e^{-4x}dx$;

8. $\int x^2 4^{-5x}dx$;

9. $\int \operatorname{arctg} 3x\, dx$;

10. $\int e^{-x}\sin 4xdx$;

11. $\int \arcsin 5x\, dx$;

12. $\int x^2 \arccos x\, dx$;

13. $\int 2x\, arctg\, x\, dx$

14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$;

15. $\int x\cos(x+4)\, dx$;

16. $\int \ln(1+x^2)\, dx$;

17. $\int x\cos(x-2)\, dx$;

18. $\int e^x \cos^3 xdx$;

19. $\int x\cdot e^{x+2}\, dx$;

20. $\int \arcsin 2x\, dx$.

21. $\int x^5 e^{x^3}\, dx$;

22. $\int x\cdot\sin^2 xdx$;;

23. $\int x^5 \sin 5x\, dx$;

24. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$;;

25. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$;

26) $\int \ln^2 x\, dx$;

27. $\int x^3 \ln x\, dx$;

28. $\int e^{3x}\sin 2x\, dx$;

29. $\int arctg\ 3xdx$;

30. $\int x^2 e^{3x}\, dx$.

Індивідуальне завдання №3.

Інтегрування раціональних виразів

3.1. *Знайти невизначені інтеграли, використовуючи виділення повного квадрата у знаменнику підінтегрального виразу або заміну.*

1. $\int \frac{x+2}{x^2+6x+10}\,dx$;

2. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+10}\,dx$;

3. $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+20}\,dx$;

4. $\int \frac{3x+1}{x^2+7x+25}\,dx$;

5. $\int \frac{2x+1}{x^2+7x+50}\,dx$;

6. $\int \frac{4x+8}{x^2+6x+10}\,dx$;

7. $\int \frac{x}{x^2+2x-8}\,dx$;

8. $\int \frac{x-4}{x^2-2x-3}\,dx$;

9. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx$;

10. $\int \frac{2x-1}{x^2-8x+7}\,dx$;

11. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}\,dx$;

12. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+6}\,dx$;

13. $\int \frac{x-4}{3x^2+x}\,dx$;

14. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x+9}\,dx$;

15. $\int \frac{2-x}{x^2+4x-5}\,dx$;

16. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx$;

17. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}\,dx$;

18. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$;

19. $\int \frac{3x-2}{5x^2+3x-2}\,dx$;

20. $\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx$;

21. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+10}\,dx$;

22. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x-1}\,dx$;

23. $\int \frac{x+6}{3x^2+2x+1}\,dx$;

24. $\int \frac{x+1}{x^2+3x+4}\,dx$;

25. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}\,dx$

26) $\int \frac{x-3}{4x^2+4x+5}\,dx$;

27. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-3}\,dx$;

28. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+7}\,dx$;

29. $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx;$

30. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx.$

3.2. *Шляхом розкладу правильних дробів на елементарні знайти інтеграли.*

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\ dx;$

2. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx\ ;$

3. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

4. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx;$

5. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

6. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

7. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

8. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx;$

9. $\int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

10. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

11. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx;$

12. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

13. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx\ ;$

14. $\int \frac{4x+2}{x^4+8x}dx\ ;$

15. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

16. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx;$

17. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

18. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx;$

19. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx;$

20. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

21. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx$

22. $\int \frac{x-17}{(x^2+2x+17)(x+3)}dx;$

23. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx;$

24. $\int \frac{x^4-x^3+3x-2}{x^3-x^2-2x}dx;$

25. $\int \frac{x^4-x^3+2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$

26) $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx;$

27. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+5)(x-1)}dx;$

28. $\int \frac{1-x^2-x}{x^4-x^3}dx;$

29. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^4-2x^3+2x-1}dx$;

30. $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}dx$.

Індивідуальне завдання №4.

Інтегрування ірраціональних виразів

Знайти інтеграли від ірраціональних функцій, використовуючи відповідну заміну змінної та підстановки Чебишова.

1. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

2. а) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\ dx$;

3. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$;

4. а) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt{x}}dx$;

5. а) $\int \frac{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)dx}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\ dx$;

6. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$;

7. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}dx$;

8. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}dx$;

9. а) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}\ dx$;

10. а) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}}dx$;

11. а) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$;

12. а) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$;

13. а) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\,\sqrt[8]{x^7}}\,dx$;

14. а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\,\sqrt[6]{x}}dx$;

15. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}dx$;

16. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx$;

17. а) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}dx$;

18. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\,\sqrt[10]{x^9}}dx$;

19. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}{x\,\sqrt[9]{x^5}}dx$;

20. а) $\int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\,\sqrt[5]{x}}dx$;

21. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$;

22. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$;

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$;

24. а) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;

25. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

26. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$;

27. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx$;

28. а) $\int \frac{1+\sqrt[3]{5x-1}}{\sqrt[6]{5x-1}+\sqrt{5x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

29. а) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$;

30. а) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Індивідуальне завдання №5.

Інтегрування тригонометричних виразів

5.1. *Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.*

1. а) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^{15} x\, dx$; в) $\int \cos 3x \cos x\ dx$;

2. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \sin 5x \sin 7x\ dx$;

3. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} dx$; в) $\int \sin x \cos 4x\ dx$;

4. а) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^9 x dx$; в) $\int \sin 4x \cos 2x\ dx$;

5. а) $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$; в) $\int \cos 7x \cos 5x\ dx$;

6. а) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\ \sin x}$; в) $\int \sin x \cos 9x\ dx$;

7. а) $\int \frac{dx}{5-\cos x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^{12} x\, dx$; в) $\int \sin 5x \cos 3x\ dx$;

8. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+7\cos x}$; б) $\int \frac{4-7\,\mathrm{tg}\, x}{2+3\,\mathrm{tg}\, x} dx$; в) $\int \sin 3x \cos 2x\ dx$;

9. а) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; б) $\int \frac{3\mathrm{tg}^2\, x-1}{\mathrm{tg}^2\, x+5} dx$; в) $\int \sin 3x \sin 2x\ dx$;

10. а) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$; б) $\int \frac{11-3\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x+3} dx$; в) $\int \cos 5x \cos x\ dx$;

11. а) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\ dx$; в) $\int \sin 3x \cos x\ dx$;

12. а) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\ dx$; в) $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$;

13. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x} dx$; в) $\int \sin 9x \cos x\, dx$;

14. а) $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$; б) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$; в) $\int \sin 6x \sin 5x\ dx$;

15. а) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$;   б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx$;   в) $\int \sin 3x \sin 8x\ dx$;

16. а) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$;   б) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;   в) $\int \cos 2x \cos 3x\, dx$;

17. а) $\int \frac{2-\sin x+\cos x}{1+\cos x} dx$;   б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{12} x} dx$;   в) $\int \cos 3x \cos 7x\, dx$;

18. а) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$;   б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\ dx$;   в) $\int \cos 4x \cos 9x\ dx$;

19. а) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;   б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\ dx$;   в) $\int \sin 7x \cos 2x\ dx$;

20. а) $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}\ dx$;   б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx$;   в) $\int \sin 4x \sin 12x\, dx$;

21. а) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$;   б) $\int \cos^3 \frac{x}{2} \sin^5 \frac{x}{2} dx$;   в) $\int \sin 8x \cos 2x\ dx$;

22. а) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;   б) $\int \mathrm{ctg}^4\, x\, dx$;   в) $\int \sin x \sin 11x\ dx$;

23. а) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$;   б) $\int \mathrm{tg}^7\, x\, dx$;   в) $\int \sin 12x \cos 6x\, dx$;

24. а) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;   б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\ dx$;   в) $\int \cos 9x \cos 2x\ dx$;

25. а) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$;   б) $\int \mathrm{ctg}^3\, x\, dx$;   в) $\int \sin 8x \sin 3x\ dx$;

26. а) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$;   б) $\int \sin^4 8x \cos 8x\, dx$;   в) $\int \cos 8x \cos 5x\ dx$;

27. а) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$;   б) $\int \cos^3 6x dx$;   в) $\int \sin 6x \cos 4x\ dx$;

28. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$;   б) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+16\sin^2 x}$;   в) $\int \cos 13x \cos 4x\, dx$;

29. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$;   б) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;   в) $\int \sin 16x \sin 2x\, dx$;

30. а) $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$;   б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$;   в) $\int \sin 13x \cos 3x\, dx$;

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / А. Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. Харків : ХНУРЕ, 2002. 440 с.
2. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1. К. : НАУ, 2013. 472 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 252 с.
4. Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної / М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. К. : ВПЦ «Київський університет», 2005. 257 с.
5. Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник. К., 2016. 140 с.
6. Невизначені інтеграли: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з матем. аналізу для студ. 1 курсу фіз.-мат. ф-ту / Уклад.: З.П. Ординська, Л.А. Репета, В.В. Дрозд. К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. 81 с.

ДОДАТКИ

Основні формули інтегрування	
1. $\int 0du = \mathrm{C}$	2.$\int du = u + C$
3. $\int \frac{du}{u} = ln\vert u\vert + C$	4.$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{\alpha+1} + C \, , n \neq -1$
5.$\int e^u du = e^u + C$	6.$\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + C$
7.$\int sin\, udu = -\, cos\, u + C$	8.$\int cos\, udu = sin\, u + C$
9.$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$	10.$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctg\; u + C$
11.$\int sh\, udu = ch\; u + C$	12.$\int ch\, udu = sh\; u + C$
13.$\int \frac{du}{ch^2\; u} = th\; u + C$	14.$\int \frac{du}{sh^2\; u} = -cth\; u + C$
15.$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left\vert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\vert + C,$ $a \neq 0$	16.$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = arcsin\frac{u}{a} + C \; , \; a \neq 0$
17.$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C, a \neq 0$	19. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\vert\frac{u-a}{u+a}\right\vert + C \; , a \neq 0$
Перетворення диференціалів деяких функцій	
1. $dx = \frac{1}{k} d(kx + b), k, b = const;$	2. $x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha} d(x^\alpha), \alpha \neq 0$
3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	4. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$
5. $\cos x dx = d(\sin x),$ $\sin x dx = -d(\cos x)$	6. $\frac{dx}{cos^2 x} = d(\mathrm{tg}\, x)$ $\frac{dx}{sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}\, x)$
7. $\frac{dx}{x^2+a^2} = d(\mathrm{arctg}\, x)$	8. $\frac{dx}{\sqrt{1^2-x^2}} = d(\arcsin x)$
Метод заміни змінної (підстановки) $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{vmatrix} = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du;$ $\int f(x)dx = \int g(h(x))h'(x)dx = \begin{vmatrix} h'(x)dx = \\ dh(x) = dt \end{vmatrix} = \int g(h(x))dh(x) = \int g(t)dt.$	

Інтегрування частинами
$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$ або $\int v\,du = uv - \int u\,dv$

Типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами $(P_n(x) -$ *многочлен степення* n *)*	
$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	u=$P_n(x)$, dv – вираз, що залишився
$\int P_n(x)\ln x\,dx$	$u = \ln x,\, dv = P_n(x)\mathrm{dx}$
$\int P_n(x) arcf\ x\,dx$	$u = arcf\ x,\, dv = P_n(x)\mathrm{dx}$
$\int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix}\mathrm{d}x,$ $\int \begin{Bmatrix} \sin\ (\ln x) \\ \cos\ (\ln x) \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$	Після двократного інтегрування частинами, розв’язується рівняння щодо шуканого інтеграла .
$\int \sqrt{a^2 \pm x^2 dx},\ \int \sqrt{x^2 - a^2}dx$	Після інтегрування частинами, розв’язується рівняння щодо шуканого інтеграла.

Інтегрування дробово-раціональних виразів	
Типи елементарних дробів	Інтегрування елементарних дробів
Дріб I типу $\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ \ln\lvert x-a\rvert + C$
Дріб II типу $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$	$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k}\ \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$
Дріб III типу $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q \leq 0$	
1) $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$	Виділяють повний квадрат у знаменнику
2) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ dx$	Виділяють у чисельнику похідну від знаменника : $d(x^2+px+q) = (2x+p)dx$ $Mx + N \equiv \frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$

Дріб IV типу $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $D=p^2-4q\le 0,\ k\ge 2$ $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\begin{vmatrix}x+\frac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^k}\,dt=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+$ $+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k,$ де $a=q-\frac{p^2}{4}>0$, $I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ і при	
1) $k=1$	$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C;$
1) $k\ge 2$	$I_k=\frac{1}{2a^2(k-1)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}, k>1.$
Схема розкладання правильного дробу на суму елементарних. *1.* Розклад знаменнику дробу на множники. 2. Запис розкладу на прості (елементарні) дроби із невизначеними коефіцієнтами. 3. Визначення коефіцієнтів методом невизначених коефіцієнтів або частинних значень.	*Схема інтегрування дробово-раціонального виразу.* 1. Виділення цілої частини дробу при наявності неправильного дробу. 2. Розклад правильного дріб розкладають на суму простих дробів. 3. Інтегрування суми цілої частини і елементарних дробів.
Інтегрування ірраціональних функцій	
$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Виносять старший коефіцієнт і виділяють повний квадрат під коренем.
$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Виділяють у чисельнику похідну від підкореневого виразу: $d(ax^2+bx+c)=(2ax+b)dx;$ $Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right).$
$\int\frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	*Заміна:* $t=\frac{1}{x-m}$
$\int R(x,X^{r_1/s_1},\dots,X^{r_n/s_n})dx,$	*Заміна:* $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$, де

де $X=\frac{ax+b}{cx+d}$.	$m = НСК(s_1, \dots., s_2)$
Підстановки Ейлера	
Інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ виражається через раціональні функції за допомогою таких підстановок (*підстановки Ейлера*):	
Властивість коефіцієнтів тричлена ax^2+bx+c	*Заміна*
1) $a > 0$	1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
2) $c > 0$	*2)* $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$
3) $D = b^2 - 4ac > 0$ *і* x_1, x_2 –корені квадратного тричлена	*3)* $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$
Тригонометричні підстановки	
$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$	$x = a\, tg\, t$ *або* $x = a\, ctg\, t$ *або* $x = a\, sh\, t$
$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$ *або* $x = \frac{a}{\sin t}$ *або* $x = a\, ch\, t$
$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a \sin t$ *або* $x = a \cos t$ *або* $x = a\, tg\, t$

<table>
<tr><td colspan="4">Інтегрування диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx, m,n,p \in \mathbb{Q}$
(підстановка Чебишова)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Вираз вигляду $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p – раціональні сталі, a і b – довільні сталі, називають диференціальним біномом. Інтеграл від такого виразу, виражається через інтеграл від раціональної функції лише у таких трьох випадках.</td></tr>
<tr><td>(1)
$p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$x = t^k,$
k – найменший спільний знаменник дробів m і n</td><td>(2)
$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow a + bx^n = t^s,$
s – знаменник дробу p</td><td>(3)
$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow ax^{-n} + b = t^s,$
s – знаменник дробу p</td><td>(4)
У решті випадків інтеграл не виражається в елементарних функціях.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Інтегрування тригонометричних виразів</td></tr>
<tr><td colspan="4">Основні способи знаодження $\int \mathrm{R}(\sin \mathrm{x}, \ \cos \mathrm{x})\mathrm{dx}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Загальний випадок – універсальна тригонометрична підстановка</td><td colspan="2">$t = tg\frac{x}{2},$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Властивість підінтегральної функції
$R(sin\ x, cos\ x)$</td><td colspan="2">Підстановка</td></tr>
<tr><td colspan="2">Непарна відносно $\sin x$:
$R(-\sin x, \cos x) = -R\ (\sin x, \cos x)$</td><td colspan="2">$\cos x = t \Rightarrow \int \bar{R}(\cos x) d(\cos x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Непарна відносно $\cos x$:
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$</td><td colspan="2">$\sin x = t \Rightarrow \int \bar{R}(\sin x) d(\sin x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Парна відносно $cos\ x$ і $sin\ x$ одночасно:
$R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$</td><td colspan="2">$\mathrm{t}g\ x = t \Rightarrow \int \bar{R}(\mathrm{tg}\, x) d(\mathrm{tg}\, x)$ або
$\mathrm{ctg}\, x = t \Rightarrow \int \bar{R}(\mathrm{ctg}\, x) d(\mathrm{ctg}\, x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Знаходження $\int R(\sin^n x, \cos^m x) dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">n – ціле додатне непарне число</td><td colspan="2">$\cos x = t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">m – ціле додатне непарне число</td><td colspan="2">$\sin x = t$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>m, n – цілі додатні парні числа</td><td>$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$ $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$</td></tr>
<tr><td>m, n – цілі додатні парні числа, але хоча б одне з них від’ємне;
m, n – цілі непарні від’ємні числа</td><td>$\mathrm{t}g\ x = t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\int \cos kx \cos lx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(k - l)x + \cos(k + l)x)\, dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\int \sin kx \cos lx\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(k - l)x + \cos(k + l)x)\, dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\int \sin kx \sin lx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(k - l)x - \cos(k + l)x)\, dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знаходження $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$,
n – ціле додатне число</td></tr>
<tr><td>Використання формул $$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$ $$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$</td><td>Застосування підстановок
$\mathrm{t}g\ x = t$
або
$\operatorname{ctg} x = t$</td></tr>
</table>

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу доктор фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г.І.

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О.О.

Рецензенти: канд. фіз-мат. наук, доц. Слюсарчук П.В.,
канд. фіз-мат. наук Герич М.С.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ