УДК 512.547.25

В. М. Петечук (Закарпатский ин-т последипломного педагог. образования),
Ю. В. Петечук (Ужгородський национальный университет)

ГОМОМОРФИЗМЫ МАТРИЧНЫХ ГРУПП НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ. ЧАСТЬ I

The article continues the research of the description of homomorphism of matrix groups above associative rings c 1. Usual generalization of the description of isomorphism is the description of homomorphism with the condition (*) of matrix groups above associative rings c 1. The condition (*) is probably not the limit where the description of homomorphism of matrix groups above associative rings can be made. However, nowadays it is most widely used condition where the standard description is possible. Ununit homomorphism $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ satisfies a condition (*), if for arbitrary nilpotent element $m \in End(W)$, $m^2 = 0$ exists converted into K natural numbers s_1, s_2 and $A \in G$, which are $\Lambda A = 1 + s_1 m$ and from equality $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ follows that $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.

В настоящей работе продолжаются исследования описания гомоморфизмов матричных групп над ассоциативными кольцами с 1. Естественным обобщением описания изоморфизмов является описание гомоморфизмов с условием (*) матричных групп над произвольными ассоциативными кольцами с 1. Условие (*) возможно не предел, при котором может быть осуществлено описание гомоморфизмов матричных групп над ассоциативными кольцами. Однако, в настоящее время, это наиболее широкое условие, при котором получается стандартное описание. Неединичный гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ удовлетворяет условие (*), если для произвольного ненулевого нильпотентного элемента $m \in End(W)$, $m^2 = 0$ существуют обратимые в K натуральные числа s_1, s_2 и $A \in G$ такие, что $\Lambda A = 1 + s_1 m$, и из равенства $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ следует, что $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.

Введение. В настоящей работе описываются гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами с 1. Естественным обобщением описания изоморфизмов, полученное в частных случаях в работах многочисленных авторов и завершенное И. З. Голубчиком [22], является описание гомоморфизмов с условием (*) матричных групп над произвольными ассоциативными кольцами с 1. Условие (*) возможно не предел, при котором может быть осуществлено описание гомоморфизмов матричных групп над ассоциативными кольцами. Однако, в настоящее время, это наиболее широкое условие, при котором получается стандартное описание.

Неединичный гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ над ассоциативным кольцом R с 1 удовлетворяет условие (*), если для произвольного ненулевого нильпотентного элемента $m \in End(W)$, $m^2 = 0$ существуют обратимые в K натуральные числа s_1, s_2 и $A \in G$ такие, что $\Lambda A = 1 + s_1 m$, и из равенства $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ следует, что $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.

В частности, условие (*) удовлетворяет произвольный изоморфизм группы G на группу $GL(W)$. Для этого достаточно положить $s_1 = s_2 = 1$ и воспользоваться тем, что $1 + m \in GL(W)$.

Нетрудно видеть, что из определения гомоморфизма с условием (*) и равенств $\Lambda A \Lambda B_i = \Lambda B_i \Lambda A$, $B_i \in G$, $1 \leq i \leq t$ следует, что существуют натуральные числа $l_1, \ldots, l_t$, которые обратимы в K такие, что $A^{l_i} B_i = B_i A^{i_i}$, $1 \leq i \leq t$. Положив $s_2 = l_1, \ldots, l_t$ получаем, что $A^{s_2} B_i = B_i A^{s_2}$ для всех $1 \leq i \leq t$ одновременно. Аналогично доказывается, что вместо одного элемента $A \in G$ можно рассматривать конечное множество элементов группы G.

Описание гомоморфизмов с условием (*) матричных групп над произвольными ассоциативными кольцами R с 1 состоит из описания гомоморфизмов с условием (*) в случае, когда в кольце R обратим элемент 2 или элемент 3. Далее, в случае, когда элементы 2 и 3 необратимы, локализацией по степеням 2 и 3 предыдущее описание позволит получить описание гомоморфизмов с условием (*) матричных групп над произвольными ассоциативными кольцами с 1 в размерностях больше или равно 4.

Работа состоит из двух частей. В первой из них рассматриваются общие вопросы и полностью случай обратимости элемента 2 в размерностях больше или равно 3. Случай обратимости элемента 3 в размерностях больше или равно 4 будет изложен во второй части работы в отдельной публикации.

Историю вопроса и хронологию результатов можно найти в [1–28], [30, 57]. Близкими вопросами к описанию гомоморфизмов матричных групп над ассоциативными кольцами являются описания изоморфизмов классических групп [8, 20, 29, 31], групп Шевалле [32–45], стабильных групп [46, 47] над различными кольцами. Также важное значение имеет описание стабильного строения линейных групп [21, 23, 30, 31], [48–56] над ассоциативными кольцами.

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R_n – кольцо всех $n \times n$ матриц над R, $GL(n, R)$ – группа обратимых матриц кольца R_n, $E(n, R)$ – подгруппа полной линейной группы $GL(n, R)$, порожденная трансвекциями $t_{ij}(r) = E + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$, G – произвольная группа такая, что $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$.

Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, W – левый (необязательно свободный) K-модуль, а $GL(W)$ – группа обратимых элементов кольца $End(W)$.

Основным результатом работы, которая состоит из двух частей, является

Теорема. *Пусть R и K – ассоциативные кольца с 1, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, W – левый K-модуль, гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$ удовлетворяет условие (*). Тогда существуют подмодули L и P модуля W и изоморфизм $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такие, что*

$$\Lambda(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right] g,$$

где $x \in E(n, R)$, $\overline{\delta}$ – кольцевой гомоморфизм и $\overline{\nu}$ – кольцевой антигомоморфизм кольца R_n, индуцированные кольцевым гомоморфизмом $\delta : R \to End(L)$ и кольцевым антигомоморфизмом $\nu : R \to End(L)$ соответственно в кольцо $End(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n})$, e – центральный идемпотент подкольца δR кольца $End(L)$, 1 – единица кольца $End(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n})$, а e_1 – единица кольца $End(P)$.

Замечание. *Если дополнительно предположить, что $2 \in R^*$, то теорема верна при $n \geq 3$. Этот результат составляет содержание первой части работы. Если $n = 3$ и $2 \notin R^*$, то существуют нестандартный гомоморфизм* [26].

1. Локализация. Пусть R и K – ассоциативные кольца с 1, S – мультипликативно замкнутое подмножество натуральных чисел кольца K, содержащее 1 и не содержащее 0 в кольце K, K_s – локализация K по S, $\Lambda_s : K \to K_s$ – канонический гомоморфизм, определенный по правилу $\Lambda_s(k) = \frac{ks}{s}$ для произвольного

$k \in K$ и $s \in S$.

Пусть W – ненулевой K-модуль, W_s – его локализация по S, $\Lambda_s : End(W) \to \to End(W_s)$ – канонический гомоморфизм, определенный по правилу $\Lambda_s(\sigma)\left(\frac{w}{s}\right) = = \frac{\sigma(w)}{s}$ для произвольных $\sigma \in End(W)$, $s \in S$, $w \in W$. Ясно, что Λ_s – кольцевой гомоморфизм.

Образы элементов колец K, $EndW$ и модуля W при локализации будем обозначать чертой сверху.

Пусть $\Lambda : R \to K$, а также $\Lambda : GL(n,R) \to GL(W)$ – произвольные гомоморфизмы, $\overline{\Lambda} = \Lambda_s\Lambda$. Очевидно, что $\overline{\Lambda}S \subseteq K_s^*$.

Пусть G – такая группа, что $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$, $\Lambda : G \to GL(W)$ – гомоморфизм.

Определение 1. *Будем говорить, что неединичный гомоморфизм Λ удовлетворяет расширенное условие $(*)$, если для произвольного ненулевого нильпотентного элемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ существуют натуральные числа s_1 и s_2, которые обратимы в K, и $A \in G$ такие, что $\Lambda A = 1 + s_1 m$ и из равенства $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A^k$, $B \in G$* следует, что $A^{s_2}B = BA^{s_2 k}$, *где k содержится в некотором множестве целых чисел.*

В частности, гомоморфизм, удовлетворяющий расширенное условие $(*)$, когда среди k содержится 1, удовлетворяет условие $(*)$. Для этого достаточно положить $k = 1$.

Лемма 1. *Если $\Lambda : G \to GL(W)$ удовлетворяет расширенное условие $(*)$, то гомоморфизм $\overline{\Lambda} : G \to GL(W_s)$ также удовлетворяет расширенное условие $(*)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{m}$ – произвольный ненулевой нильпотентный элемент кольца $End(W_s)$, $\overline{m}^2 = \overline{0}$. Это означает, что $m \neq 0$ и $s_0 m \in End(W)$ для некоторого $s_0 \in S$ и имеет место равенство $s_0'(s_0 m)^2 = 0$. Тогда $(s_0 s_0' m)^2 = 0$. По условию существует матрица $A \in G$ такая, что $\Lambda A = 1 + s_1 m_1$, где $m_1 = s_0 s_0' m$, $s_1 \in S$, $\overline{m}_1 = \overline{m}$, $\overline{\Lambda}A = \overline{1} + s_1\overline{m}_1$.

Если $g \in G$ и $\overline{\Lambda}g\overline{\Lambda}A = \overline{\Lambda}A^k\overline{\Lambda}g$, где k – целое число, то существует $s' \in S$, что $(\Lambda g\Lambda A - \Lambda A^k\Lambda g)s' = 0$. Поэтому $(\Lambda g m_1 - k m_1 \Lambda g)s_1 s' = 0$ и, как следствие, $\Lambda g \Lambda A^{s_1 s'} = \Lambda A^{k s_1 s'}\Lambda g$. По расширенному условию $(*)$ существует элемент $s_2 = s_1 s' \in S$ такой, что $gA^{s_2} = A^{k s_2} g$.

Тем самым доказано, что $\overline{\Lambda}$ удовлетворяет расширенное условие $(*)$. Лемма 1 доказана.

Нетрудно видеть, что из равенств

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 3^i (-1)^{n-i} \quad \text{и} \quad 3^n = (2+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^i,$$

где $n \geq 1$ следует, что в произвольном ассоциативном кольце K с 1 нильпотентность элемента 2 влечет условие $3 \in K^*$, а нильпотентность элемента 3 условие $2 \in K^*$. Поэтому из условия $2 \notin K^*$ следует, что множество $S_1 = \{3^i \mid i \geq 0\}$ не содержит нулевых элементов, а из условия $3 \notin K^*$ следует, что множество $S_2 = \{2^i \mid i \geq 0\}$ не содержит нулевых элементов.

Пусть S означает S_1 или S_2. В обоих случаях $S \subseteq K_s^*$ и, согласно лемме 1, гомоморфизм $\overline{\Lambda} : G \to GL(W_s)$ удовлетворяет условие $(*)$ над кольцом K_s. В частности, если $2 \notin K^*$ и $3 \notin K^*$ одновременно, то элементы 2 и 3 не являются нильпотентными в кольце K. В этом случае элементы 2 и 3 обратимые в кольце K_s, где S является $S_1 = \{2^i \mid i \geq 0\}$ или $S_2 = \{3^i \mid i \geq 0\}$ соответственно. Гомоморфизмы $W \to W_{S_i}$, $(i = 1, 2)$ индуцируют вложение $W \to W_{s_1} \oplus W_{s_2}$, $GL(W) \to GL(W_{s_1}) \otimes GL(W_{s_2})$. Из описания гомоморфизмов $\Lambda_i : G \to GL(W) \to GL(W_{s_i})$, $(i = 1, 2)$ следует, что существуют изоморфизмы $g_i : W_{s_i} \to \underbrace{L_i \oplus \cdots \oplus L_i}_{n} \oplus P_i$, такие что

$$\Lambda_i(x) = g_i^{-1}\left[\overline{\delta}_i(x)e_i + \overline{\nu}_i(x)^{-1}(1-e_i) + e_i'\right] g_i$$

для всех $x \in E(n, R)$, где δ_i – кольцевой гомоморфизм $R \to End\Lambda_i$, $e_i = \delta_i(1)$, ν_i – кольцевой антигомоморфизм $R \to End\Lambda_i$, 1 – единица кольца $End(\underbrace{L_i \oplus \cdots \oplus L_i}_{n})$, e_i' – единица кольца $EndP_i$. Обозначим
$L = L_1 \oplus L_2, P = P_1 \oplus P_2, e = e_1 + e_2, e' = e_1' + e_2', \delta = \delta_1 + \delta_2, \nu = \nu_1 + \nu_2, g = g_1 + g_2$.
Ясно, что g – изоморфизм $W \longrightarrow \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, e – центральный идемпотент подкольца δR кольца $EndL$, δ – кольцевой гомоморфизм $R \to EndL$, ν – кольцевой антигомо- морфизм $R \to EndL$ такие, что $\Lambda(x) = g^{-1}[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}x^{-1}(1-e) + e']\,g$ для всех $x \in E(n, R)$, 1 – единица кольца $End\left(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}\right)$, e' – единица кольца $EndP$.

Таким образом, описание гомоморфизмов $\Lambda : G \to GL(W)$ с условием (*) сводится к двум случаям $2 \in K^*$ или $3 \in K^*$. В дальнейшем будут рассматриваться только эти случаи.

Замечание. *В случае, когда одновременно* $2 \notin K^*$ и $3 \notin K^*$, *описание гомоморфизмов* $\Lambda : G \to GL(W)$ *с условием* (*) *можно осуществить и по-другому. Для этого, как и в предыдущем случае, следует воспользоваться описанием гомоморфизмов* $\Lambda_i : G \to GL(W) \to GL(W_{s_i})$, $(i = 1, 2)$.

Рассмотрим гомоморфизм $\overline{\Lambda}_i : End(W) \to End(W_{s_i})$. Очевидно, что $\overline{\Lambda}_i$ – кольцевые гомоморфизмы и $\overline{\Lambda}_i = \Lambda_i\Lambda$, где $(i = 1, 2)$. Обозначим

$$e_j = -\Lambda t_{jj+1}(1)\Lambda t_{j+1j}(-1) - \Lambda E + \Lambda t_{jj+1}(1) + \Lambda t_{j+1j}(-1),$$

где $1 \leq j < n$. Тогда $e_j \in End(W)$, $\overline{\Lambda}_i\left(e_j^2 - e_j\right) = \overline{0}$, где $i = 1, 2$. Поскольку числа 2 и 3 являются взаимно простыми, то пересечение $ker\Lambda_1 \cap ker\Lambda_2 = 0$. Поэтому $e_j^2 = e_j$.

Аналогично доказывается, что e_j множество попарно-коммутирующих идемпотентов, а также, что $\alpha_j e_j + e_j\alpha_j = e\alpha_j$, где $\alpha_j = \Lambda t_{jj+1}(1)\Lambda t_{j+1j}(-1)\Lambda t_{jj+1}(1)$, $e = \Lambda E$, E – единичная матрица группы G.

Пользуясь разложением

$$W = P(e) \cap P(e_1) \oplus P(e) \cap R(e_1) \oplus R(e)$$

и, далее раскладывая $R(e)$, как и при описании кольцевых гомоморфизмов $R_n \to K_m$, полученное в работах многочисленных авторов и завершенное В. М. Петечуком [27], можем считать, что

$$\Lambda t_{ij}(r) = g^{-1}\left[t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\nu r)(1-e) + e_1\right] g,$$

где $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ – изоморфизм левых R-модулей, $\delta : R \to EndL$ – кольцевой гомоморфизм, $\nu : R \to EndL$ – кольцевой антигомоморфизм, 1 – единица кольца $End\left(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}\right)$, e – центральный идемпотент подкольца δR кольца $EndL$, e_1 – единица кольца $EndP$.

2. Коммутаторные формулы. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R^* – группа обратимых элементов кольца R, R_n – кольцо матриц $n \times n$ над R, $n \geq 1$, $GL(n, R) = R_n^*$ – полная линейная группа обратимых $n \times n$ матриц над кольцом R.

Обозначим через e_{ij} матрицу кольца R_n, у которой на месте (i, j) стоит единица, а на остальных местах нули. Очевидно, что $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, где δ_{jk} – символ Кронекера. Единичную матрицу кольца R_n будем обозначать 1. Нетрудно видеть, что $sre_{kl}s^{-1} = \alpha_k r \alpha_l^{-1} e_{s(k)s(l)}$, где s – мономиальная матрица такая, что на местах $(s(t), t)$ находятся элементы $\alpha_t \in R^*$, $1 \leq t \leq n$, а на остальных местах нули.

Элементы $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, где $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$ будем называть элементарными трансвекциями, а диагональные элементы $d_i = 1 - 2e_{ii}$, $1 \leq i \leq n$ элементарными инволюциями. Трансвекции $t_{ij}(1)$ иногда будем называть единичными трансвекциями.

Очевидно, что $d_k^2 = 1$, $d_k e_{ij} d_k^{-1} = -e_{ij}$, если $i \neq j$, $k \in \{i, j\}$. В остальных случаях d_k коммутирует с e_{ij}. Поэтому $[d_k, t_{ij}(r)] = t_{ij}(-2r)$, если $k \in \{i, j\}$, $r \in R$. В остальных случаях d_k коммутирует с $t_{ij}(r)$.

В группе $GL(n, R)$, $n \geq 3$ имеют место матричные коммутаторные формулы $[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2)$, где $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq i \leq n$ – произвольные числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – произвольные элементы кольца R. В частности, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, где $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно различные произвольные числа, $r \in R$.

В произвольной группе G элемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ будем называть коммутатором элементов g_1, g_2, а элемент $[g_1, \ldots, g_t] = [[g_1, \ldots, g_{t-1}], g_t]$ - коммутатором длины t группы G, где $t > 2$.

Пусть $t_{ij} = t_{ij}(-1)t_{ji}(1)t_{ij}(-1) = t_{ji}(1)t_{ij}(-1)t_{ji}(1)$. Тогда $t_{ij}t_{ji} = t_{ji}t_{ij} = 1$ и $t_{ij}^2 = t_{ji}^2 = d_i d_j$. Понятно, что $t_{ij} = s$ – мономиальная матрица такая, что $s(i) = j$, $s(j) = i$, $s(k) = k$, где $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно различные числа,

$$\alpha_t = (t_{ij})_{s(t)t} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = i, \\ -1, & \text{если } t = j, \\ 1, & \text{если } t \neq i, j, \end{cases} \quad \alpha_k \alpha_l^{-1} = \alpha_k \alpha_l = \begin{cases} -1, & \text{если } k = j \neq l \text{ или } l = j \neq k, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеют место формулы

$$t_{ij} e_{kl} t_{ij}^{-1} = \alpha_k \alpha_l e_{s(k)s(l)} = \begin{cases} -e_{il}, & \text{если } k = j \neq l, \\ -e_{li}, & \text{если } l = j \neq k, \\ e_{ii}, & \text{если } k = j = l, \\ e_{jj}, & \text{если } k = i = l, \\ e_{jk}, & \text{если } k = i \neq l, \\ e_{kj}, & \text{если } l = i \neq k, \\ e_{kl}, & \text{если } k, l \notin \{i, j\}, \end{cases} \quad t_{ij} t_{kl}(r) t_{ij}^{-1} = \begin{cases} t_{il}(-r), & \text{если } k = j \neq l, \\ t_{li}(-r), & \text{если } l = j \neq k, \\ t_{jk}(r), & \text{если } k = i \neq l, \\ t_{kj}(r), & \text{если } l = i \neq k, \\ t_{kl}(r), & \text{если } k \neq l \notin \{i, j\}, \end{cases}$$

где r – произвольный элемент кольца R.

В частном случае важными являются равенства

$$t_{ij}d_kt_{ij}^{-1} = \begin{cases} d_i, & \text{если} \quad j = k, \\ d_j, & \text{если} \quad i = k, \\ d_k, & \text{если} \quad i \neq k, j \neq k, \end{cases} \qquad t_{ij}d_kd_lt_{ij}^{-1} = \begin{cases} d_ld_i, & \text{если} \quad j = k, i \neq l, \\ d_jd_l, & \text{если} \quad i = k, j \neq l, \\ d_kd_j, & \text{если} \quad i = l, j \neq k, \\ d_id_k, & \text{если} \quad j = l, i \neq k, \end{cases}$$

где $k \neq l$. В остальных случаях элемент t_{ij} коммутирует с элементами d_kd_l.

Гомоморфизм $1 : G \to 1$ будем называть единичным гомоморфизмом группы G. Если G – группа такая, что $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, где R – ассоциативное кольцо с 1, $n \geq 3$, а $\Lambda : G \to GL(W)$ – произвольный гомоморфизм, то из формулы $[t_{ij}, t_{jk}(1), t_{ij}(r)] = t_{ik}(-r)$, где $r \in R$, $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно различные числа, и матричных коммутаторных формул следует, что $\Lambda t_{ij} \neq 1$ для некоторых, а значит для всех $1 \leq i \neq j \leq n$ или Λ – единичный гомоморфизм группы $E(n, R)$.

Аналогичный результат $\Lambda t_{ij}t_{ij}(-1) \neq 1$ или $\Lambda E(n,R) = 1$ следует из равенства $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{jk}(r)$, где $r \in R$, $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно различные числа.

Лемма 2. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1 и элемент $x \in GL(n,R)$ коммутирует с элементом t_{ij}^2 в кольце R_n. Тогда коммутаторы $[x, t_{kl}^2]$ коммутируют с элементами $e_{ii} + e_{jj}$ для всех $1 \leq k \neq l \leq n$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что элемент x коммутирует с элементом $t_{12}^2 = diag(-1, -1, 1, \ldots, 1)$. Тогда x коммутирует с элементом $1 - t_{12}^2 = diag(+2, +2, 0, \ldots, 0)$.

Пусть $x = (x_{pq})$, где $x_{pq} \in R$, $1 \leq p, q \leq n$. Согласно предположению $2x_{pq} = 2x_{qp} = 0$ для всех $1 \leq p \leq 2$ и $2 \leq q \leq n$. Поэтому $2x = diag(2x_1, 2x_2)$, $2x^{-1} = diag(2y_1, 2y_2)$, где $x_1, y_1 \in R_2$ и $x_2, y_2 \in R_{n-2}$. Следовательно,

$$x(1 - d_k)x^{-1} = +x2e_{kk}x^{-1} = diag(x_1, x_2)2e_{kk}x^{-1} = 2diag(x_1, x_2)e_{kk}(y_1, y_2).$$

Из последнего следует, что

$$xd_kx^{-1} \in \begin{cases} diag(R_2, 1), & \text{если} \quad 1 \leq k \leq 2, \\ diag(1, R_{n-2}), & \text{если} \quad 3 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Аналогично

$$xd_lx^{-1} \in \begin{cases} diag(R_2, 1), & \text{если} \quad 1 \leq l \leq 2, \\ diag(1, R_{n-2}), & \text{если} \quad 3 \leq l \leq n. \end{cases}$$

Поэтому $xt_{kl}^2x^{-1} = xd_kd_lx^{-1} \in diag(R_2, R_{n-2})$. Тем самым доказано, что коммутатор $[x, t_{kl}^2] \in diag(R_2, R_{n-2})$ и следовательно, коммутирует с $e_{11} + e_{22}$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что если в лемме 2 k и l одновременно не содержатся в $\{i, j\}$, то коммутатор $[x, t_{kl}^2]$ коммутирует с d_i и d_j и $[x, t_{kl}^2]_{ii} = [x, t_{kl}^2]_{jj} = 1$.

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1.

Напомним, что отображение δ кольца R в некоторое другое ассоциативное кольцо с 1 называется кольцевым гомоморфизмом, если

$$\delta(0) = 0, \delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\delta_2(r_2)$$

для произвольных элементов r_1, r_2 из R. Аналогично, отображение ν кольца R в кольцо R_1 называется кольцевым антигомоморфизмом, если

$$\nu(0) = 0, \ \nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \ \nu(r_1 r_2) = \nu(r_2)\nu(r_1)$$

для произвольных элементов r_1, r_2 из R.

Если $\delta : R \to R_1$ – кольцевой гомоморфизм, $\nu : R_1 \to R_2$ – кольцевой антигомоморфизм, то $\nu\delta : R \to R_2$ является кольцевым антигомоморфизмом. Аналогично, если $\nu : R \to R_1$ – кольцевой антигомоморфизм, $\delta : R_1 \to R_2$ – кольцевой гомоморфизм, то $\delta\nu : R \to R_2$ является кольцевым антигомоморфизмом.

Пусть R^0 означает кольцо R в котором задана операция умножения по правилу $x \circ y = yx$, где x, y – произвольные элементы кольца R. Кольцо R^0 называется оппозитом кольца R. Ясно, что $(R^0)^0 = R$. Отображение $\nu_0 : R \to R^0$ по правилу $\nu_0(r) = r$, $r \in R$ является кольцевым антигомоморфизмом R в R^0.

Нетрудно видеть, что если $\delta : R \to R_1$ – кольцевой гомоморфизм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кольцевой антигомоморфизм, то $\nu_0\delta$ – кольцевой антигомоморфизм . И наоборот. Если $\delta : R \to R_1$ – кольцевой антигомоморфизм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кольцевой антигомоморфизм, то $\nu_0\delta$ – кольцевой гомоморфизм.

Очевидно, что сужение кольцевого гомоморфизма на мультипликативную группу кольца порождает групповой гомоморфизм, а кольцевой антигомоморфизм – групповой антигомоморфизм. Кольцевой антигомоморфизм также порождает групповой гомоморфизм мультипликативной группы кольца, если каждому элементу мультипликативной группы поставить в соответствие обратный его образу элемент относительно кольцевого антигомоморфизма.

Кольцевой гомоморфизм $\delta : R \to R_1$ индуцирует гомоморфизм $\overline{\delta} : R_n \to (R_1)_n$, по правилу $\overline{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, где $r_{ij} \in R$, $1 \le i, j \le n$. Кольцевой антигомоморфизм $\nu : R \to R_1$ индуцирует кольцевой антигомоморфизм $\overline{\nu} : R_n \to (R_1)_n$ по правилу $\overline{\nu}(r_{ij}) = (\nu r_{ji}) = (\text{т}\, \nu r_{ij})$, где т – означает транспортирование. В частности, кольцевой гомоморфизм $\delta : R \to R_1$ индуцирует групповой гомоморфизм $\overline{\delta} : GL(n, R) \to GL(n, R_1)$, $\overline{\delta} g = (\overline{\delta} g)$, $g \in GL(n, R)$, а кольцевой антигомоморфизм $\nu : R \to R_1$ – групповой антигомоморфизм $\overline{\nu} : GL(n, R) \to GL(n, R_1)$, $\overline{\nu} g = (\overline{\nu} g)$, $g \in GL(n, R)$.

Пусть $e = \delta(1)$, $1 - e = \nu(1)$ – центральные идемпотенты колец δR и νR соответственно, e_1 – некоторый идемпотент ортогональный к e и $1 - e$. Ясно, что отображение группы $GL(n, R)$, определенное по правилу

$$x \to \overline{\delta} x e + \overline{\nu} x^{-1}(1 - e) + e_1,$$

где $x \in GL(n, R)$, определяет гомоморфизм группы $GL(n, R)$ в группу

$$diag\left(GL\left(n, \delta Re \oplus \nu R(1 - e)\right), e_1\right).$$

3. Вычетные подмодули и разложение модулей. Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, W – левый K-модуль, $EndW$ – кольцо эндоморфизмов модуля W, $GL(W) = EndW^*$ – группа автоморфизмов модуля W.

Подмодули $R(\sigma) = (\sigma - 1)W$ и $P(\sigma) = ker(\sigma - 1)$ будем называть вычетными подмодулями эндоморфизма $\sigma \in EndW$.

Нетрудно видеть, что $R(\sigma^{-1}) = R(\sigma)$ и $P(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$, если $\sigma \in GL(W)$.

Из равенства $g\sigma = \sigma g$, где $g \in EndW$ следует, что $gR(\sigma) \subseteq R(\sigma)$ и $gP(\sigma) \subseteq P(\sigma)$. Если при этом g – автоморфизм модуля W, то $g^{-1}R(\sigma) \subseteq R(\sigma)$ и $g^{-1}R(\sigma) = R(\sigma)$ и $gP(\sigma) = P(\sigma)$, если $g\sigma = \sigma g$ и σ – эндоморфизм, а g – автоморфизм модуля W. Впрочем этот результат следует из формулы $gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1})$ и $gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1})$, где σ – произвольный эндоморфизм, а g – произвольный автоморфизм модуля W. Более того, изоморфизм модулей $g : W \to gW$ индуцирует изоморфизм колец $\Lambda_g : EndW \to EndW$, который в свою очередь индуцирует изоморфизм групп $\Lambda_g : GL(W) \to GL(gW)$, если положить $\Lambda_g \sigma = g\sigma g^{-1}$ для всех $\sigma \in GL(W)$.

Лемма 3. Пусть K–ассоциативное кольцо с 1, W–левый K-модуль, $\sigma \in EndW$, $\sigma^m = 1$, $m \in K^*$. Тогда $W = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$, где $P(\sigma) = \{\nu \in W \mid \sigma\nu = \nu\}$ и $R(\sigma) = \{\nu \in W \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})\nu = 0\}$.

Доказательство. Пусть $e = (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})m^{-1}$. Тогда $e\sigma^i = \sigma^i e = e$ для всех $i \geq 0$. Поэтому $e^2 = e$ – идемпотент и имеет место пирсовое разложение $W = eW \oplus (1 - e)W$. Легко видеть, что $eW = \ker(1 - e)$ и $(1 - e)W = \ker e$. Очевидно, что

$$eW \subseteq P(\sigma),\ (1 - e)W \subseteq R(\sigma) \text{ и } P(\sigma) \subseteq \ker(1 - e),\ R(\sigma) \subseteq \ker e.$$

Из этих включений следует, что

$$eW = \ker(1 - e) = P(\sigma) = \{\nu \in W \mid \sigma\nu = \nu\},$$

$$(1 - e)W = R(\sigma) = \ker e = \{\nu \in W \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})\nu = 0\}.$$

Лемма 3 доказана.

В частности, если в лемме 3 $m = 2 \in K^*$, $\sigma^2 = 1$, то

$$P(\sigma) = \{\nu \in W \mid \sigma\nu = \nu\},\ R(\sigma) = \{\nu \in W \mid \sigma\nu = -\nu\}.$$

Если в лемме 3 $m = 3 \in K^*$, $\sigma^3 = 1$, то

$$P(\sigma) = \{\nu \in W \mid \sigma\nu = \nu\},\ R(\sigma) = \{\nu \in W \mid (1 + \sigma + \sigma^2)\nu = 0\}.$$

Достаточно очевидным является важное

Следствие 1. *Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, $m \in K^*$, $a, b \in EndW$, $a^m = b^m = 1$, $ab = ba$. Тогда*

$$P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) = P(b) \cap P(ab),\ P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b),$$

$$P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a),\ R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b),\ R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a).$$

В частности, если $m = 2 \in K^*$, то

$$R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab).$$

Доказательство. Из леммы 3 следуют равенства

$$\begin{cases} P(a)\cap P(ab) &= P(a)\cap P(b), \\ P(b)\cap P(ab) &= P(a)\cap P(b), \end{cases} \quad \begin{cases} P(a)\cap R(ab) &= P(a)\cap R(b), \\ P(b)\cap R(ab) &= P(b)\cap R(a). \end{cases}$$

Пусть $\nu \in P(ab)$. Тогда $ab\nu = \nu$ и $a\nu = b^{-1}\nu$, $b\nu = a^{-1}\nu$. По индукции $a^l\nu = b^{-l}\nu$, $b^l\nu = a^{-l}\nu$ для всех $l \geq 0$. Поэтому по лемме 3

$$R(a)\cap P(ab) \subseteq R(a)\cap R(b),\ R(b)\cap P(ab) \subseteq R(b)\cap R(a).$$

Если $m = 2 \in K^*$, то включения следствия 1 превращаются в равенства. Ведь в этом случае

$$R(a)\cap R(b) = \{\nu \in V \mid a\nu = -\nu, b\nu = -\nu\} \subseteq \{\nu \in V \mid ab\nu = \nu\} \subseteq P(ab).$$

Поэтому

$$R(a)\cap R(b) = R(a)\cap P(ab) = R(b)\cap P(ab).$$

4. Изображение эндоморфизмов формальными матрицами.

Лемма 4. *Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, $2 \in K^*$, W – левый K-модуль, a, b, c, d – элементы группы $GL(W)$ такие, что*

$$a^2 = b^2 = 1,\ ab = ba,\ ca = ac,\ cbc^{-1} = ab,\ db = bd,\ dad^{-1} = ab,\ a \neq 1.$$

Тогда существует изоморфизм модулей $g : W \to W_g$, который индуцирует изоморфизм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такой, что элементы $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ можно изобразить формальными матрицами

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1),\ \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_g d = diag\left(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right),$$

где $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL$, $\gamma, \gamma_1 \in EndP$, $W_g = L\oplus L\oplus L\oplus P$.

Доказательство. По условию $R(a) \neq 0$, $bR(a) = R(a)$, $bP(a) = P(a)$. Поэтому имеет место разложение

$$W = R(a)\oplus P(a) = R(a)\cap R(b)\oplus R(a)\cap P(b)\oplus P(a)\cap R(b)\oplus P(a)\cap P(b).$$

Обозначим $L = R(a)\cap P(b)$, $P = P(a)\cap P(b)$. Тогда

$$cL = R(a)\cap P(ab) = R(a)\cap R(b) \text{ и } dcL = R(ab)\cap R(b) = P(a)\cap R(b).$$

Поскольку $R(a) = L\oplus cL \neq 0$, то $L \neq 0$ и $W = L\oplus cL\oplus dcL\oplus P$, где $W_g = L\oplus L\oplus L\oplus P$.

Рассмотрим изоморфизм модулей $g : W \to W_g$, который определен по правилу

$$g(l_1 + cl_2 + dcl_3 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + p,$$

где $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 3$, $p \in P$ и индуцированный им групповой гомоморфизм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$, где $\Lambda_g\sigma = g\sigma g^{-1}$ для всех $\sigma \in GL(W)$.

Будем изображать элементы кольца $End(W_g)$ формальными 4×4 матрицами. В частности получаем, что

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,e_1), \ \ \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,e_1),$$

где 1 – единица кольца $EndL$, e_1 – единица кольца $EndP$. Кроме этого,

$$c^2L = c\,(R(a) \cap P(b)) = R(a) \cap P(ab) = L,$$

$$cdcL = cd\,(R(a) \cap R(b)) = P(a) \cap R(ab) = cL,$$

$$cP = P(a) \cap P(ab) = P.$$

Поэтому

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right), \text{ где } \alpha, \beta \in EndL, \ \gamma \in EndP.$$

Аналогично доказывается, что $dcL = cL$, $d^2L = L$, $dP = P$ и

$$\Lambda_g d = diag\left(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right), \text{ где } \alpha_1, \beta_1 \in EndL, \ \gamma_1 \in EndP.$$

В частности, если $c^2 = a$, то $\alpha = -1$, $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$. Если $c^2 = 1$, то $\alpha = 1$, $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$.

Замечание. *Если G – группа такая, что $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, где R – ассоциативное кольцо с 1, $n \geq 3$, а $\Lambda : G \to GL(W)$ – произвольный гомоморфизм, то в группе $GL(W)$ в качестве элементов a,b,c,d, фигурирующих в лемме 4, при условии $\Lambda t_{ij}(2) \neq 1$ можно выбрать*

$$a = \Lambda diag(-1,-1,1,\ldots,1), \ \ b = \Lambda diag(1,-1,-1,1,\ldots,1),$$

$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right), \ \ d = \Lambda diag\left(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right).$$

При этом $c^2 = a$, $d^2 = b$.

Если $\Lambda t_{ij}(2) = 1$ для некоторых, а значит и для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, то в качестве элементов a,b,c,d могут быть выбраны элементы $a = \Lambda t_{12}(1)$, $b = \Lambda t_{13}(1)$, $c = \Lambda t_{32}(-1)$, $d = \Lambda t_{23}(-1)$. *При этом $c^2 = 1$, $d^2 = 1$.*

Лемма 5. *Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, $3 \in K^*$, W – левый K-модуль, a,b – элементы группы $GL(W)$ такие, что $a^3 = b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $a \neq 1$. Тогда существует изоморфизм модулей $g : W \longrightarrow W_g$, который индуцирует изоморфизм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такой, что элементы $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ можно изобразить формальными матрицами*

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1\right), \ \ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \gamma\right),$$

где $\alpha, \beta \in EndL$, $\gamma \in EndP$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $W_g = L \oplus L \oplus P$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $e = (1-a)(1-b)3^{-1}$. Очевидно, что $(1+a+a^2)e = e(1+b) = 0$. Из равенства $ba = a^{-1}b$ следует, что $b(1-a) = (1-a^{-1})b$ и $(1-a)(1-b)(1-a) = (1-a)\left(1-a-(1-a^{-1})b\right)$. Поэтому

$$(3e)^2 = (1-a)\left(1-a+(1-a^{-1})\right)(1-b) = 3(1-a)(1-b) = 9e.$$

Тем самым доказано, что $e^2 = e$ – идемпотент. Аналогично доказывается равенство

$$9eae = (1-a)(1-b)(1-a)a(1-b) = (1-a)\left(a-a^2+1(1-a^{-1})a^2\right)(1-b) = 0.$$

Следовательно, имеют место равенства $eae = 0$ и $ae = (1-e)ae$.

По условию $bR(a) = R(a^{-1}) = R(a)$ и $bP(a) = P(a^{-1}) = P(a)$. Поэтому $eR(a) \subseteq R(a)$ и $eP(a) \subseteq P(a)$. Очевидно, что $eP(a) = 0$. В соответствии с леммой 3 $W = R(a) \oplus P(a)$. Поэтому $W = eR(a) \oplus (1-e)R(a) \oplus P(a)$, где 1 – единичный элемент группы $GL(W)$.

Аналогично доказывается, что $(1-e)a^2(1-e) = 0$ на $R(a)$ и $aeR(a) = (1-e)R(a)$.

Обозначим $L = eR(a)$, $P = P(a)$. Тогда $W = L \oplus aL \oplus P$ и $L \neq 0$. Пусть $W_g = L \oplus L \oplus P$ и $g: W \to W_g$ – изоморфизм модулей, который определен по правилу $g(l_1 + al_2 + p) =$
$= l_1 + l_2 + p$, где $l_i \in L$, $1 \le l \le 2$, $p \in P$ и $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ – индуцированный им групповой изоморфизм. Как и в лемме 4, изобразим элементы кольца $End(W_g)$ формальными 3×3 матрицами. Тогда

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \gamma\right).$$

Учитывая равенство $(1+a+a^2)R(a) = 0$, получим что $a_1 - a_2 = -1$. Из равенства $ba = a^{-1}b$ следует, что $b_3 = b_2$, $b_4 = -b_1$, а из равенства $b^2 = 1$ находим, что $b_1b_2 = b_2b_1$, $b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 = 1$.

Обозначим $\alpha = b_1$ и $\beta = b_2$. Тогда

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \gamma\right),$$

где $\alpha, \beta \in EndL$, $\gamma \in EndP$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$.

Замечание. *Если G – группа такая, что $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, где R – ассоциативное кольцо с 1, $n \ge 3$, а $\Lambda : G \to GL(W)$ – произвольный неединичный на $E(n, R)$ гомоморфизм, то в группе $GL(W)$ в качестве элементов a, b, фигурирующих в лемме 5, можно выбрать*

$$a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),\ b = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1, 1, \ldots, 1\right).$$

Лемма 5 применима и в случае $n = 3$. Если $n \ge 4$, то пользуясь леммой 5, можно доказать более тонкое утверждение, которое изложим в лемме 6. Однако доказательство леммы 6 проведем непосредственною

Лемма 6. *Пусть K – ассоциативное кольцо с 1, $3 \in K^*$, W – левый K-модуль, a, b, c, d – элементы группы $GL(W)$ такие, что $a^3 = b^3 = 1$, $c^2 = d^2 = 1$ $ab = ba$, $cac^{-1} = a^{-1}$, $cbc^{-1} = b^{-1}$, $dad^{-1} = b$, $dc = cd$, $a \neq 1$. Тогда существует изоморфизм модулей $g : W \to W_g$, который индуцирует изоморфизм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такой, что элементы $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g bc$, $\Lambda_g d$ можно изобразить формальными матрицами*

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \quad \Lambda_g b = diag\left(1, 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$, $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, $\gamma^2 = \delta^2 = 1$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\gamma\alpha = \alpha^2\gamma$, $\gamma\beta = \beta^2\gamma$, $\delta\alpha = \beta\delta$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$.

Доказательство. Как и в лемме 5 обозначим

$$e = (1 - a)(1 - c)3^{-1}, \; f = (1 - b)(1 - c)3^{-1}.$$

Тогда

$$e^2 = e, eae = 0, f^2 = f, fbf = 0, ded^{-1} = f, dfd^{-1} = e,$$

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus R(b) \cap P(a) \oplus R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b),$$
$$R(a) = eR(a) \oplus (1 - e)R(a), \; R(b) = fR(b) \oplus (1 - f)R(b).$$

Как и в лемме 5, $ceR(a) = (1 - e)R(a)$, $cfR(b) = (1 - f)R(b)$. По условию

$$dR(a) \cap P(b) = R(b) \cap P(a).$$

Обозначим

$$L = e\left(R(a) \cap P(b)\right), \; P = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Тогда

$$R(a) \cap P(b) = L \oplus cL, \; dL = f\left(R(b) \cap P(a)\right), \; R(b) \cap P(a) = dL \oplus P(a) = dL \oplus dcL.$$

Тем самым доказано, что $W = L \oplus cL \oplus dL \oplus dcL \oplus P$.

Пусть $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$, $g : W \to W_g$ – изоморфизм модулей, который определен по правилу

$$g(l_1 + cl_2 + dl_3 + dcl_4 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + p,$$

где $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 4$, $p \in P$ и $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ – индуцированный им групповой гомоморфизм.

Изобразим элементы кольца $End(W_g)$ формальными 5×5 матрицами

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \; \Lambda_g b = diag\left(1, 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \; \Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$ и $A \in (EndL)_2$ – формальная 2×2 матрица, которая коммутирует с формальными 2×2 матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $1 \in EndL$. Поэтому, с точностью до сопряжения, формальной матрицей $diag(A;1,1)$ можно считать, что $A = 1$.

Тем самым лемма 6 доказана.

Замечание. *Если G – группа такая, что $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$,* где R – *ассоцитативное кольцо с 1, $n \geq 4$, а $\Lambda : G \to GL(W)$* – произвольный неединичный на $E(n,R)$ *гомоморфизм, то в группе $GL(W)$ в качестве элементов a, b, c, d, фигурирующих в лемме 6, можно выбрать*

$$a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1,\right), \quad b = \Lambda diag\left(1, 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),$$

$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right), \quad d = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),$$

где $E = diag(1,1)$ – единичная матрица кольца R_2.

5. Основная теорема. Действие гомоморфизмов на единичных трансвекциях. Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, G - произвольная группа такая, что $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, $\Lambda : G \to GL(W)$– гомоморфизм с условием (*), где W- левый K-модуль (необязательно свободный) над ассоциативным кольцом K с единицей.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть R и K - ассоциативные кольца с 1, $2 \in K^*$, G - группа, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, W - левый K -модуль, гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$ удовлетворяет условие (*). Тогда существуют подмодули L и P модуля W и изоморфизм* $\mathrm{g} : \mathrm{W} \to \underbrace{\mathrm{L} \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}}_{n} \oplus \mathrm{P}$, *такие что*

$\Lambda(x) = \mathrm{g}^{-1}\left[\bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right]g$, *где $x \in E(n,R)$, $\bar{\delta}$ - кольцевой гомоморфизм и $\vec{\nu}$ - кольцевой антигомоморфизм кольца* $\mathrm{R_n}$, *индуцированные кольцевым гомоморфизмом δ*: $\mathrm{R} \to \mathrm{End(L)}$ *и кольцевым антигомоморфизмом* ν: $\mathrm{R} \to \mathrm{End(L)}$ *соответственно в кольцо* $\mathrm{End}(\underbrace{\mathrm{L} \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}}_{n})$, *$e$ - центральный идемпотент подкольца $\delta(R)$ кольца* $\mathrm{End(L)}$, *1 - единица* $\mathrm{End}(\underbrace{\mathrm{L} \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}}_{n})$, *а e_1 - единица кольца* $\mathrm{End(P)}$.

Доказательство. Пусть $n \geq 3$ и $a = \Lambda t_{12}^2 \neq 1$, $b = \Lambda t_{23}^2$, $c = \Lambda t_{12}$, $t = \Lambda t_{23}$, $L = R(a) \bigcap P(b)$, $P = P(a) \bigcap P(b)$. Согласно лемме 4, существует изоморфизм

$$g : W \to W_g, \text{где } W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P,$$

который определяет групповой изоморфизм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ по правилу $\Lambda_g \sigma = g\sigma g^{-1}$, где $\sigma \in GL(W)$. При этом элементы группы $GL(W_g)$ представляются формальными матрицами.

В соответствии с этим представлением

$$\Lambda_g a = diag\,(-1,-1,1,1)\,, \qquad \Lambda_g b = diag\,(1,-1,-1,1)\,,$$
$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right), \qquad \Lambda_g t = diag\left(\beta, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right)$$
где $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = \gamma_1^2 = 1$, $(\gamma\gamma_1)^3 = 1$.

Обозначим $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$. В этих обозначениях
$$\Lambda_1 t_{12}^2 = diag\,(-1,-1,1,1), \qquad \Lambda_1 t_{23}^2 = diag\,(1,-1,-1,1)\,,$$
$$\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right), \quad \Lambda_1 t_{23} = diag\left(\beta, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right)$$

Очевидно, что элементы t_{ii+1}^2 , где $1 \le i \le n-1$, коммутируют между собой. Пусть $n = 4$. Тогда можно дополнительно рассмотреть элемент t_{34}^2 . Учитывая, что t_{34}^2 коммутирует с t_{12} , t_{23}^2 и $(t_{34}^2 t_{23})^2 = 1$, получаем, что

$$\Lambda_1 t_{34}^2 = diag\,(\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3, x_3)\,,$$

где $\alpha_3 \in EndL$, $x_3 \in EndP$, $\alpha_3\beta = \beta\alpha_3$, $\gamma x_3 = x_3\gamma$.

Аналогично, если $n \ge 5$, то можно дополнительно рассмотреть элементы $t_{45}^2, \ldots, t_{n-1n}^2$, которые коммутируют с t_{12} и t_{23}. Поэтому

$$\Lambda_1 t_{ii+1}^2 = diag\,(\alpha_i, \alpha_i, \alpha_i, x_i)\,,$$

где $\alpha_i \in EndL$, $x_i \in EndP$, $4 \le i \le n-1$.

Понятно, что $\alpha_i^2 = 1$, $x_i^2 = 1$, $\alpha_i\beta = \beta\alpha_i$, $\gamma x_i = x_i\gamma$, $\gamma_1 x_i = x_i \gamma_1$, где $n \ge 4$, $3 \le i \le n-1$.

Таким образом, на первом шагу определяется действие гомоморфизма Λ_1 на элементах $t_{12}^2, \ldots, t_{n-1n}^2$, где $n \ge 3$. Их образы относительно гомоморфизма Λ_1 являются формальными диагональными матрицами.

Определим действие Λ_1 на трансвекциях $t_{ij}\,(R)$ группы G.

Элементы $t_{pq}\,(r)$, где $1 \le p \ne q \le 2$, $r \in R$ коммутируют с t_{12}^2 . Поэтому
$$\Lambda_1 t_{pq}\,(r) = diag\,(a,b), \text{ где } a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$
элементы a_1, a_2, a_3, a_4, b_4 содержатся в $EndL$, $b_2 \in Hom\,(L,P)$, $b_3 \in Hom\,(P,L)$, $b_4 \in EndP$. Разумеется, что элементы a и b зависят от $r \in R$.

Из равенства $[t_{23}^2 t_{pq}\,(r)]^2 = 1$ следует, что
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}^2 = 1 \text{ и } \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}^2 = 1.$$

Поэтому имеют место равенства

$$a_1^2 - a_2 a_3 = a_4^2 - a_3 a_2 = 1, \quad a_1 a_2 = a_2 a_4, \quad a_3 a_1 = a_4 a_3,$$

$$b_1^2 - b_2 b_3 = 1, \quad b_4^2 - b_3 b_2 = 1, \quad b_1 b_2 = b_2 b_4, \quad b_3 b_1 = b_4 b_3.$$

На самом деле полученные соотношения означают, что
$$a^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \; b^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ -b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с условием (*) в группе G существуют элементы A_1 и A_2 и натуральные числа $s_1, s_2 \in K^*$ такие, что
$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & s_1\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right), \; \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right)$$

где $\alpha \in EndL$, $\alpha \neq 0$ и $A_1^{s_2}$ и $A_2^{s_2}$ коммутируют с элементом a_{23}^2 . Если $n \geq 5$, то дополнительно предполагаем, что элементы $A_1^{s_2}$ и $A_2^{s_2}$ коммутируют также с элементами $a_{45}^2, ..., a_{n-1n}^2$. Поэтому матрицы $2A_1^{s_2}$, $2A_2^{s_2}$ содержатся в $diag\,(R, R_2, R_{n-3})$. В соответствии с леммой 2 имеют место включения $[A_i^{s_2}, t_{12}^2] \in diag\,(1, R_2, R_{n-3})$, где $i = 1, 2$. Поскольку элементы α коммутируют с α_i , $4 \leq i \leq n-1$, то среди них встречается элемент β . Аналогичные включения имеют место и при $n = 4$.

Действительно, пусть $n = 4$. В соответствии с условием (*) существует матрица $A \in G$ и натуральные числа s_1, s_2 обратимые в кольце K, такие что

$$\Lambda_1 A = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & s_1\alpha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1\right)$$

и A^{s_2} коммутирует с t_{12}^2 , где α' - произвольный элемент кольца $EndL$. Тогда, в соответствии с леммой 2, $[A^{s_2}, t_{23}^2] \in diag\,(R_2, R_2)$ и элементы $t_{34}\,(1)$ и $t_{43}\,(1)$ коммутируют с $[A^{s_2}, t_{23}^2, t_{12}] \in diag\,(R_2, 1, 1)$. Очевидно, что они также коммутируют с t_{12} . Поскольку

$$\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_1 t_{12}^2 = diag\,(-1, -1, 1, 1),$$

то имеет место равенство

$$\Lambda_1\left[A^{s_2}, t_{23}^2, t_{12}\right] = diag\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 2s_1s_2\alpha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], 1, 1\right).$$

Перестановочность трансвекций $t_{34}\,(1)$ и $t_{43}\,(1)$ с t_{12}^2 показывает, что

$$\Lambda_1 t_{34}\,(1) = diag\,(t_1, y_1)\ ,\ \Lambda_1 t_{43}\,(1) = diag\,(t_2, y_2)\ ,$$

где t_i содержатся в $End\,(L \oplus L)$, $i = 1, 2$ и коммутируют с формальными матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \left[\begin{pmatrix} 1 & 2s_1s_2\alpha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Непосредственными вычислениями, при $\alpha' = 1$ получаем, что $t_i = diag\,(\alpha_i, \alpha_i)$, $\alpha_i \in EndL$, $i = 1, 2$. Учитывая, что в качестве α' можно выбрать произвольный элемент кольца $EndL$, получаем, что α_i содержатся в центре кольца $EndL$. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что A^{s_2} коммутирует с $t_{34}\,(1)$ и $t_{43}\,(1)$, а значит $A^{s_2} \in diag\,(R_2, R, R)$ и $[A^{s_2}, t_{23}^2] \in diag\,(R_2, 1, 1)$.

Нетрудно видеть, что $t_{12}t_{23}\,[A^{s_2}, t_{23}^2]\, t_{23}^{-1}t_{12}^{-1} \in diag\,(1, R_2, 1)$ и

$$\Lambda_1 t_{12}t_{23}\,[A^{s_2}, t_{23}^2]\, t_{23}^{-1}t_{12}^{-1} = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

где α - произвольный элемент кольца $EndL$. Поэтому существуют матрицы A_1, A_2 группы G, которые содержатся в $diag\,(1, R_2, 1)$ и такие, что

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

Тем самым доказано, что, без ограничения общности, с самого начала можно считать, что матрицы A_1 и A_2 при $n \geq 3$ содержатся в $diag\,(1, R_2, R_{n-1})$. Поэтому

$$[A_i^{s_2}, t_{12}\,(r)] \in diag\left(\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right),$$

$$[A_i^{s_2}, t_{21}(r)] \in diag\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right).$$

Следовательно для пары целых чисел $1 \le p \ne q \le 2$ имеют место равенства

$$\left([A_i^{s_2}, t_{pq}(r)]\, t_{23}^2\right)^2 = 1,$$

$i = 1, 2$ и элементы $[A_1^{s_2}, t_{pq}(r)]$ и $[A_2^{s_2}, t_{pq}(r)]$ коммутируют между собой.

Перейдем к образам матриц A_1 и A_2 относительно гомоморфизма Λ_1.

Введем обозначения

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} b^{-1} = s_1\begin{pmatrix} -a_2\alpha b_1 & a_2\alpha b_2 \\ \alpha - a_4\alpha b_1 & a_4\alpha b_2 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^{-1} = s_1\begin{pmatrix} b_1\alpha a_3 & \alpha - b_1\alpha a_4 \\ b_3\alpha a_3 & -b_3\alpha a_4 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях

$$\Lambda_1 [A_1^{s_2}, t_{pq}(r)] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & \multicolumn{2}{c}{T_1} \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right), \Lambda_1 [A_1^{s_2}, t_{pq}(r)] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{T_2} & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right).$$

В соответствии с вышесказанным, элементы T_1 и T_2 коммутируют с элементом $diag(1, -1)$ и $T_1T_2 = 0$, $T_2T_1 = 0$. Поэтому $a_2\alpha b_2 = 0$, $b_3\alpha a_3 = 0$, $a_4\alpha b_1 = \alpha = b_1\alpha a_4$, $a_2\alpha b_1^2\alpha a_3 = b_1\alpha a_3 a_2\alpha b_1 = 0$, $a_4\alpha b_2 b_3\alpha a_4 = b_3\alpha a_4^2\alpha b_2 = 0$.

Положив вместо элемента α единицу, получаем, что $a_2b_2 = 0$, $b_3a_3 = 0$, $a_4b_1 = 1 = b_1a_4$, $a_2b_1^2a_3 = b_1a_3a_2b_1 = 0$, $a_4b_2b_3a_4 = b_3a_4^2b_2 = 0$.

Учитывая, что a_4 и b_1 - обратимые элементы, находим, что $a_3a_2 = 0$, $b_2b_3 = 0$. Сопоставляя их с раннее полученными равенствами находим, что

$a_4^2 = 1$, $b_1^2 = 1$ и, как следствие, что $a_2a_3 = 0$, $b_3b_2 = 0$, $a_1^2 = 1$, $b_4^2 = 1$.

Кроме этого α коммутирует с $a_4 = b_1$. В частности, положив β вместо α получаем, что β коммутирует с $a_4 = b_1$, $a_2\beta b_2 = 0$, $b_3\beta a_3 = 0$.

Применим вышеизложенные соображения к элементу $t_{qp}(r) = t_{12}t_{pq}(-r)\,t_{12}^{-1}$. Тогда

$$\Lambda_1 t_{qp}(r) = diag\left(\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta b_1\beta & -\beta b_2\gamma \\ -\gamma b_3\beta & \gamma b_4\gamma \end{pmatrix}\right).$$

Как и в случае с элементом $\Lambda_1 t_{pq}(r)$ получаем, что

$a_3\alpha\beta b_2 = 0$, $b_3\beta\alpha a_2 = 0$, элемент α коммутирует с $a_1 = \beta b_1\beta = b_1 = a_4$, $a_3b_2 = 0$, $b_3a_2 = 0$.

Пусть $r = 1$, $p = 1$, $q = 2$. Из равенства $t_{12}(1)\,t_{21}(-1) = t_{12}^{-1}t_{12}(-1)$ следуют соотношения

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -\beta b_2\gamma \\ -\gamma b_3\beta & \gamma b_4\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -b_2 \\ -b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $1 - a_2^2 = -a_3$, $1 - a_3^2 = a_2$. Умножим эти равенства слева на b_3 и справа на b_2. Получаем, что $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $a_1 = \beta$.

Аналогично, умножая вышерассмотренные равенства на a_2 и a_3 получаем, что $a_2^2 = a_2$, $a_3^2 = -a_3$, $1 = a_2 - a_3$.

Обозначим $e = a_2$. Тогда $e^2 = e$, $e\beta = \beta e$, $a_3 = e - 1$. Тем самым доказано, что

$$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag\left(\begin{pmatrix} \beta & e \\ e-1 & \beta \end{pmatrix}, \beta, b_4\right),$$

$$\Lambda_1 t_{13}(1) = \Lambda_1 t_{23} t_{12}(1) t_{23}^{-1} = diag\left(\begin{pmatrix} \beta & 0 & e \\ 0 & \beta & 0 \\ e-1 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \gamma_1 b_4 \gamma_1\right),$$

$$\Lambda_1 t_{23}(1) = \Lambda_1 t_{12} t_{13}(1) t_{12}^{-1} = diag\left(\beta, \begin{pmatrix} \beta & e \\ e-1 & \beta \end{pmatrix}, \gamma\gamma_1 b_4 \gamma_1 \gamma\right).$$

Из коммутаторного равенства $t_{13}(1) = [t_{12}(1), t_{23}(1)]$ очевидным образом следует, что $\beta = 1$.

Понятно, что $\Lambda_1 t_{ij}(1) : P \to P$ для всех $1 \le i \ne j \le 3$ и $\Lambda_1 t_{12}(1)|_p = b_4$, $b_4^2 = 1$. Покажем, что $b_4 = 1$. Для этого предположим противное. Пусть $b_4 \ne 1$. В соответствии с леммой 4 на проективном подмодуле P можно считать, что

$$\Lambda_1 t_{12}(1)|_p = diag(-1,-1,1,1),\ \Lambda_1 t_{13}(1)|_p = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_1 t_{32}(1)|_p = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right), \Lambda_1 t_{23}(1)|_p = diag\left(\beta, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right),$$

где $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\gamma_1^2 = 1$.

В соответствии с условием $(*)$ существует матрица A и натуральные числа $s_1, s_2 \in K^*$ такие, что $\Lambda_1 A|_{L\oplus L\oplus L} = 1$, $\Lambda_1 A|_P = diag(t_{12}(s_1), 1)$ и A^{s_2} коммутирует с $t_{12}(1)$. Поэтому $(A^{s_2})_{21} = \cdots = (A^{s_2})_{n1} = 0$ и $[A^{s_2}, t_{13}(1)]$ коммутирует с $t_{13}(1)$. Переходя к образам относительно гомоморфизма Λ_1 получаем, что $\left[\begin{pmatrix} 1 & s_1 s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2s_1 s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ коммутирует с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Поэтому $4s_1 s_2 = 0$, что противоречит обратимости элементов $2, s_1, s_2$ в кольце K. Полученное противоречие показывает, что $b_4 = 1$.

Учитывая равенства $t_{12} t_{12}(1) t_{12}^{-1} = t_{21}^{-1}(-1)$, $t_{23} t_{21}(1) t_{23}^{-1} = t_{31}(1)$ получаем, что

$$\Lambda_1 t_{ij}(1) = diag(t_{ij}(1)e + t_{ji}(-1)(1-e), e_1)$$

для всех $1 \le i \ne j \le 3$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что полученные равенства имеют место для всех $1 \le i \ne j \le n$, где $n \ge 3$.

Случай $\Lambda t_{12}^2 = 1$ невозможен. Ведь в противном случае можно считать, что

$$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag(-1,-1,1,1),\ \Lambda_1 t_{13}(1) = diag(1,-1,-1,1)$$

и $\Lambda_1 A = diag(t_{12}(1), 1, 1)$, где A коммутирует с e_{12}. Тогда $[A, t_{13}(1), t_{13}(1)] = 1$, что приводит к противоречию.

6. Завершение основной теоремы. Действие гомоморфизма на произвольных трансвекциях.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно воспользоваться леммой 7 и ее следствием 2.

Лемма 7. *Пусть R и R_1 - ассоциативные кольца с 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \ge 3$, $\Lambda : G \to diag(GL(n,R_1), 1)$ - групповой гомоморфизм, такой что $\Lambda t_{ij}(1) = diag(t_{ij}(1), 1)$, $1 \le i \ne j \le n$. Тогда $\Lambda t_{ij}(r) = diag(t_{ij}(\delta r), 1)$, где $\delta : R \to R_1$ - кольцевой гомоморфизм, r -произвольный элемент кольца R.*

Доказательство. Поскольку $t_{ij}(r)$ коммутирует с $t_{ik}(1)$ и $t_{kj}(1)$ для всех разных чисел $1 \le i, j, k \le n$, то $\Lambda t_{ij}(r) = diag(t_{ij}(\delta r), l)$ где δr - элемент кольца R_1, зависящий от элемента r. Коммутаторные формулы $t_{ij}(r) = [t_{ik}(r), t_{kj}(1)]$ для разных чисел $1 \le i, j, k \le n$ показывают, что $l = 1$ для всех $r \in R$.

Из равенства $t_{ij}(r_1 + r_2) = t_{ij}(r_1) t_{ij}(r_2)$ следует, что $\delta(r_1 + r_2) = \delta r_1 +$

δr_2 для всех элементов r_1 и r_2 кольца R. Наконец, коммутаторная формула $t_{ij}(r_1 r_2) = [t_{ik}(r_1), t_{kj}(r_2)]$ для разных чисел $1 \le i, j, k \le n$ показывает, что $\delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\delta(r_2)$ для произвольных элементов r_1, r_2 кольца R.

Тем самым доказано, что δ - кольцевой гомоморфизм.

Следствие 2. *Пусть R и R_1 - произвольные ассоциативные кольца с 1, $E(n,R) \subset G \subset GL(n,R)$, $n \ge 3$, $\Lambda : G \to diag(GL(n,R_1),1)$ - групповой гомоморфизм, такой что $\Lambda t_{ij}(1) = diag(t_{ji}(-1),1)$, $1 \le i \ne j \le n$. Тогда $\Lambda t_{ij}(r) = diag(t_{ji}(-\nu r),1)$, где $\nu : R \to R_1$ - кольцевой антигомоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ - отображение, при котором элементу x кольца R_1 ставится в соответствии элемент x оппозита R_1^0 с умножением $x \circ y = yx$ для произвольных элементов x, y кольца R_1. Поэтому $\nu_0(R_1) = R_1^0$ и $\nu_0(xy) = xy = \nu_0(y) \circ \nu_0(x)$, ν_0 – антиизоморфизм, $\nu_0^2 = 1$. Рассмотрим антиизоморфизм $\overline{\nu_0} : (R_1)_n \to (R_1^0)_n$ определенный по правилу $(\overline{\nu_0}x)_{ij} = \nu_0(x_{ji})$. Он индуцирует групповой изоморфизм $\Lambda_0 : GL(n,R_1) \to GL(n,R_1^0)$ по правилу $\Lambda_0(g) = \overline{\nu_0}(g)^{-1}$, где $g \in GL(n,R_1)$. Тогда $\Lambda_0\Lambda$ - групповой гомоморфизм группы G в группу $GL(n,R_1^0)$, для которого имеет место равенство $(\Lambda_0\Lambda)\, t_{ij}(1) = diag(t_{ij}(1),1)$. По лемме 7 $(\Lambda_0\Lambda)\, t_{ij}(r) = diag(t_{ij}(\delta r),1)$ для некоторого кольцевого гомоморфизма $\delta : R \to R_1^0$. Ясно, что δ индуцирует кольцевой антигомоморфизм $\nu : R \to R_1$, где $\nu_0\nu = \delta$. Поэтому $\Lambda t_{ij}(r) = \Lambda_0^{-1} diag(t_{ij}(\delta r),1) = diag(t_{ji}(-\nu r),1)$ для всех $r \in R$, где $\nu : R \to R_1$ - кольцевой антигомоморфизм.

Из леммы 7 и следствия 2 вытекает, что в условии теоремы 1

$$\Lambda t_{ij}(r) = g^{-1}\left[t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\nu r)(1-e) + e_1\right] g,$$

где $\delta : R \to EndL$, $\nu : R \to EndL$ - кольцевые гомоморфизм и антигомоморфизм кольца R соответственно, e - центральный идемпотент подкольца δR кольца $EndL$, 1 - единица кольца $End\left(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}\right)$, а e_1 – единица кольца $EndP, 1 \le i \ne j \le n$.

Ясно, что гомоморфизм δ и антигомоморфизм ν кольца R индуцируют гомоморфизм $\overline{\delta}$ и антигомоморфизм $\overline{\nu}$ кольца R_n и имеет место равенство

$$\Lambda(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right] g\ ,$$

где $x \in E(n,R)$.

1. Schreier O., van der Waerden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. – Hamburg. – 1928. – Vol. 6. – S. 303–322.
2. Mackey G. W. Isomorphisms of normed spaces // Ann. Math. – 1942. – Vol. 43. – P. 244–260.
3. Hua L. K. On the automorphisms of the symplectic group over field // Ann. Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 739–759.
4. Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of the unimodular group // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – Vol. 71. – P. 331–338.
5. Landin J., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain // Ann. Math. – 1957. – Vol. 71, № 3. – P. 519–526.
6. Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. I // Am. J. Math. – 1950. – Vol. 72. – P. 451–464.
7. Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. II // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 697–716.
8. Dieudonne J. On the automorphisms of the classical group // Mem. Am. Math. Soc. – 1951. – Vol. 2. – P. 1–95.
9. Shi-Jian Yan. Linear groups over a ring // Chinese Math. Soc. – 1965. – Vol. 7, № 2. –

P. 163–179.
10. O'Meara O. Lectures on linear groups. Providence, Rhode Island, 1974 (Русский перевод в кн.: Автоморфизмы классических групп. – М.: Мир, 1976. – С. 57–167).
11. Pomfret J., McDonald B. R. Automorphisms of $GLn(R)$, R a local ring // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 173. – P. 379–338 (Русский перевод в кн.: Автоморфизмы классических групп. – М.: Мир, 1976. – С. 176–187).
12. McDonald B. R. Automorphisms of $GLn(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 215. – P. 145–159.
13. McDonald B. R. Automorphisms of $GLn(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 246.– P. 155–171.
14. Дроботенко В. С., Погориляк В. С. Автоморфизмы полной линейной группы над некоммутативным полулокальным кольцом // УМЖ. – 1977. – Т. 32, вып. 2. – С. 157–158.
15. Waterhouse W. C. Automorphisms of $GLn(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 79, № 3. – P. 347–351.
16. Bolla M. L. Isomorphisms of general linear groups over rings // J. Algebra. – 1985. – Vol. 96. – P. 592–602.
17. Мерзляков Ю. И. Обзор новейших результатов об автоморфизмах классических групп // В сб.: Автоморфизмы классических групп. – М.: Мир, 1976. – С. 250–259.
18. James D., Waterhouse W., Weisfeiler B. Abstract, homomorphisms of algebraic, groups: problems and bibliography // Comun. Algebra. – 1981. – Vol. 1. – P. 95–114.
19. Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами // Весник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – Т. 3. – С. 61–72.
20. Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизм унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. – 1983. – Т. 132. – С. 97–109.
21. Голубчик И. З. О подгруппах полной линейной группы $GL(n, R)$ над ассоциативным кольцом R // УМЖ. – 1984. – Т. 39, № 1. – С. 125–126.
22. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring // Contemporary Mathematics. – 1992. – Vol. 131. – Part 1. – P. 123–136.
23. Голубчик И. З. О полной линейной группе над слабо нетеровыми ассоциативными алгебрами // Фундамент. и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, № 3. – С. 661–668.
24. Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 4. – С. 49–67.
25. Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Матем. сборник. – 1982. – № 4. – С. 539–547.
26. Петечук В. М. Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$ // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, № 5. – С. 657–668.
27. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами // Матем. заметки. – 1989. – Т. 45, вып. 2. – С. 83–94.
28. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, вып. 5. – С. 50–61.
29. Петечук В. М. Изоморфизмы симплектических групп над коммутативными кольцами // Алгебра и логика. – 1983. – Т. 22, № 5. – С. 551–562.
30. Петечук В. М. Стабильность колец // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 19. – С. 87–111. – arXiv: 1003.2301.
31. Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. – Berlin: Springer, 1989.
32. Li Fuan. Infinite Steinberg groups // Acta Math. Sinica. – 1994. – Vol. 10, №. 2. – P. 149–157.
33. Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикладная математика. – 2007. – Т. 13, вып. 4. – С. 3–27.
34. Бунина Е. И. Автоморфизмы группы Шевалле типа B_l над локальными кольцами с $\frac{1}{2}$ // Фундамент. и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, вып. 7. – С. 3–46. – arXiv: 0911.4243.
35. Бунина Е. И. Автоморфизмы группы Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, вып. 7. – С. 47–80.
36. Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с $\frac{1}{2}$ // Фундамент. и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, вып. 2. – С. 35–59. – arXiv: 0907.5595.

37. Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, вып. 1. – С. 443–470. – arXiv: math/0702046.
38. Бунина Е. И., Веревкин П. А. Автоморфизмы группы Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикладная математика. – (2011/2012). – Т. 17, № 7. – С. 49–66.
39. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. – 2012. – Vol. 355, № 1. – P. 154–170.
40. Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Anal. – 1993. – Vol. 5, № 2. – P. 74–90.
41. Abe E. Chevalley groups over logal rings // Tohoku Math. J. – 1969. – Vol. 21, № 3. – P. 474–494.
42. Абе Э. Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5, вып. 2. – С. 74–90.
43. Abe E., Suzuki K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tohoku Math. J. – 1976. – Vol. 28, № 1. – P. 185–198.
44. Abe E. Chevalley groups over commutative rings // Proc.–Conf. –Radical-Theory.–Sendai. – 1998. – P. 1–23.
45. Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226. – P. 719–741.
46. Аткарская А. С. Стабильные группы над ассоциативными кольцами с $\frac{1}{2}$. Описание изоморфизмов стабыльных унитарных групп // Фундамент. и прикладная математика. – 2013. – Т. 18, № 4. – С. 3–21.
47. Аткарская А. С. Стабильные группы над ассоциативными кольцами с $\frac{1}{2}$. Описание изоморфизмов стабыльных унитарных групп // Фундамент. и прикладная математика. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 3–20.
48. Вассерштейн Л. Н. О стабилизации в алгебраической K-теории // Функц. анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3, № 2. – С. 85–86.
49. Vaserstein L. N., Suslin A. A. Serre'es problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory // Math. USSR. Izv. – 1976. – Vol. 10, № 5. – P. 937–1001.
50. Vaserstein L. N. On the normal subgroups GL_n over a ring // Springer Lecture Notes. 854 (Algebraic K-theory). – 1981. – P. 454–465.
51. Vaserstein L. N. Normal Subgroups of the general linear groups over von Neumann regular rings // Proc. Math. Soc. – 1986. – Vol. 96, № 2. – P. 209–214.
52. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – Т. 41, № 2. – Р. 235–252.
53. Боревич З. И., Вавилов Н. А. Расположєпис подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр. МИАН СССР. – 1977. – Т. 165. – С. 24–42.
54. Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. – 1996. – Vol. 45. – P. 73–115.
55. Wilson I. S. The normal and subnormal structure of general linear groups // Proc. Cambr. Phil. SOS. – 1972. – Vol. 71, № 2. – P. 163–177.
56. Голубчик И. З. О полной линейной группе над ассоциативным кольцом // УМЖ. – 1973. – Т. 27, № 3. – Р. 179–180.
57. Li F. L. and Li Z. X. Isomorphisms of GL_3 over commutative rings // Comtemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence. R1. – 1989. – Vol. 82 – P. 47–52.

Одержано 18.11.2014