УДК 517.9

М. В. Прохоренко (Національний ун-т "Львівська політехніка")

УМОВИ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ РЕГУЛЮВАННІ ТЕМПЕРАТУРИ СТЕРЖНЯ

We study the process of head conduction in a bar with the continuously distributed sources of heat and with impulsive pumping in the moments when the regulative functional amounts to critical level. Conditions of existence of the periodical solutions for which a pulse action takes place a once per period and a special case are established.

У роботі розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла та з імпульсним підпомповуванням у моменти, коли заданий регулюючий функціонал досягає критичного рівня. Встановлено умови існування періодичних розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається один раз за період, розглянуто частинний випадок.

Вступ. Для фізичних, технічних, біологічних та ін. процесів із швидкозмінними збуреннями зручною математичною моделлю є диференціальні рівняння з імпульсною дією. Розглядають вплив імпульсної дії як на звичайні диференціальні рівняння [1, 2], так і на рівняння в частинних похідних [3–7]. У [3, 4] розглянуто поширення тепла в обмеженому стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, здатними у фіксовані моменти часу "миттєво"змінити температуру. Процес охолодження стержня з підвищенням температури в нефіксовані моменти часу, а саме в моменти коли заданий теплорегулюючий функціонал досягне критичного рівня, досліджено в [6, 7]. У [8] розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, а імпульсна дія регулюється заданим функціоналом. Встановлено умови існування розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається нескінченну кількість разів, побудовано ці розв'язки, записано рівняння для відшукання моменту імпульсної дії. Дана робота продовжує дослідження задачі, розглянутої в [8]. Встановлено умови існування періодичних розв'язків, для яких імпульсна дія здійснюється один раз за період та розглянуто частинний випадок.

1.Формулювання задачі. Розглянемо задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

з початковою та граничними умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

де $u(x,t)$ - температура стержня в точці з абсцисою x в момент часу t; a, l - додатні сталі, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; функція $u_0 \in C([0,l])$, має кусково-неперервну похідну для $x \in [0,l]$ та виконується умова узгодженості $u_0(0) = u_0(l) = 0$; функція f неперервна в області $[0,l] \times \mathbb{R}_+$, має кусково-неперервні похідні по x для $x \in [0,l]$ та $f(0,t) = f(l,t) = 0$.

За регулюючий функціонал візьмемо

$$I_u(t) = \int_0^l \beta(x)\, u(x,t)\, dx, \tag{4}$$

де $\beta \in C[0,l]$, має кусково-неперервну похідну для $x \in [0,l]$. В моменти, коли $I_u(t)$ досягає заданого "критичного значення" $I_0 > 0$, в середовище миттєво надходить додаткова кількість тепла за законом

$$[u(x,t+0) - u(x,t-0)]|_{I_u(t-0)=I_0} = \alpha(x), \tag{5}$$

де $x \in [0,l]$, $\alpha \in C[0,l]$ та має кусково-неперервну похідну першого порядку для $x \in [0,l]$, крім того $\alpha(0) = \alpha(l) = 0$.

Через $t_k, k \in \mathbb{N}$ позначимо моменти імпульсної дії, тобто моменти коли $I_u(t_k) = I_0$.

Під розв'язком задачі (1)-(3), (5) розуміємо функцію $u = u(x,t)$ двічі неперервно диференційовну за змінною x та неперервно диференційовну за змінною t в кожній області $D_k = \{(x,t)\,|x \in [0,l], t \in (t_k, t_{k+1}),\ \ I_u(t) \neq I_0, t_0 = 0\}$, $k = 0,1,2,\ldots$, крім того функція u та її похідна u_t неперервні зліва в точках $t = t_k, k \in \mathbb{N}$.

Розв'язок задачі (1)-(3), (5) існує, єдиний та визначений в області $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$ як розв'язок задачі (1), (2) для рівняння теплопровідності в кожній області $D_k = \{(x,t)\,|x \in [0,l],\ \ t \in (t_k, t_{k+1}), I_u(t) \neq I_0, t_0 = 0\}, k = 0,1,2,\ldots$ з початковою умовою:

– (3), якщо $k = 0$ і $I_u(0) \neq I_0$;

– $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + \alpha(x)$, $x \in [0,l]$, якщо $k = 0$ і $I_u(0) = I_0$;

– $u_k(x) = u(x, t_k - 0) + \alpha(x)$, $x \in [0,l]$, якщо $k = 1,2,\ldots$ та $I_u(t_k - 0) = I_0$.

2. Прості періодичні розв'язки. З'ясуємо існування простих періодичних розв'язків задачі (1)-(3),(5), тобто таких періодичних розв'язків, для яких імпульсна дія здійснюється один раз за період T.

Теорема 1. *Якщо задані значення I_0 та функції α, β задовольняють умови теореми 1 [8] або теореми 2 [8], то існує простий періодичний розв'язок задачі (1)-(3),(5).*

Доведення. З формули (12) [8] випливає, що розв'язок задачі (1)-(3), (5) з деякою функцією α та значенням I_0 є простим T- періодичним розв'язком з імпульсом при $t = 0$ якщо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(u_j + \alpha_j + \int_0^T f_j(\tau) \exp\left[-bj^2(T-\tau)\right] d\tau \right) \exp\left[-bj^2 T\right] \sin\frac{j\pi}{l}x =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} u_j \sin\frac{j\pi}{l}x,$$

де $x \in [0,l]$, $T > 0$. З одержаного співвідношення виразимо u_j, що дозволить отримати простий періодичний розв'язок вигляду

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left(\alpha_j+\int_0^T f_j(\tau)\exp\left[-bj^2(T-\tau)\right]d\tau\right)\frac{\exp\left[-bj^2t\right]}{\exp\left[bj^2T\right]-1}+\right.$$
$$\left.+\int_0^t f_j(\tau)\exp\left[-bj^2(t-\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x,\ (x,t)\in[0,l]\times[0,T).$$

Має місце також рівняння для знаходження періоду

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_j+\int_0^T f_j(\tau)\exp\left[-bj^2(T-\tau)\right]d\tau\right)\beta_j\left(\exp\left[bj^2T\right]-1\right)^{-1}=\frac{2}{l}I_0. \qquad (6)$$

Переконаємося, що рівняння (6) має розв'язки. Розглянемо функцію

$$g(T)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_j+\int_0^T f_j(\tau)\exp\left[-bj^2(T-\tau)\right]d\tau\right)\beta_j\left(\exp\left[bj^2T\right]-1\right)^{-1}-\frac{2}{l}I_0.$$

Справджуються границі $\lim\limits_{T\to+0}g(T)=\frac{2}{l}(I_u(+0)-I_0)>0$ (при виконанні нерівності $\int\limits_0^l\alpha(x)\beta(x)\,dx>0$ згідно теореми 1 або теореми 2 з [8]) та $\lim\limits_{T\to+\infty}g(T)=-\frac{2}{l}I_0<0$. Отже, функція g на проміжку $(0,+\infty)$ за теоремою Больцано-Коші [9] має принаймні один нуль.

3. Частинний випадок рівняння теплопровідності з імпульсною дією. Розглянемо задачу для рівняння поширення тепла в середовищі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{\pi x}{l},\quad (x,t)\in(0,l)\times\mathbb{R}_+, \qquad (7)$$

з початковою умовою

$$u(x,0)=U_0\sin\frac{\pi x}{l},\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad U_0=const>0, \qquad (8)$$

граничними умовами

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+ \qquad (9)$$

та умовою імпульсної дії

$$\left[u(x,t+0)-u(x,t-0)\right]\big|_{I_u(t-0)=I_0}=\alpha_0\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad (10)$$

де $x\in[0,l]$; $I_0,\alpha_0=const>0$, $I_u(t)=\int_0^l u(x,t)\,dx$ - визначає загальну кількість тепла у стержні.

Критичне значення регулюючого функціоналу I_0 задаємо так, щоб виконувалася нерівність

$$I_u(0) = \frac{2l}{\pi} U_0 > I_0.$$

Розв'язок задачі (7) – (10) та регулюючий функціонал перед моментом першого імпульсу t_1 набувають відповідно значення

$$u(x,t) = (U_0 + t) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t\right) \sin \frac{\pi x}{l},$$

регулюючий функціонал

$$I_u(t) = \frac{2l}{\pi} (U_0 + t) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t\right).$$

Справджується границя $\lim\limits_{t\to+\infty} I_u(t) = 0$. Отже, існує момент першого імпульсу, який знаходимо з рівняння

$$(U_0 + t_1) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right) = \frac{\pi}{2l} I_0. \tag{11}$$

Розв'язок задачі (7) – (10) для $t \in [t_1, t_2)$ запишемо у вигляді

$$u(x,t) = \left(U_0 + t + \alpha_0 \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right)\right) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t\right) \sin \frac{\pi x}{l},$$

де момент t_1 визначений співвідношенням (11), а

$$I_u(t) = \frac{2l}{\pi} \left(U_0 + t + \alpha_0 \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right)\right) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t\right),$$

причому $\lim\limits_{t\to+\infty} I_u(t) = 0$. Відповідно з рівняння

$$\left(U_0 + t_2 + \alpha_0 \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right)\right) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_2\right) = \frac{\pi}{2l} I_0$$

визначаємо момент імпульсу t_2.

Для $t_2 \leqslant t < t_3$ розв'язок задачі (7) – (10) представимо як

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t\right) \Bigg(U_0 + t +$$
$$+ \alpha_0 \left[\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right) + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_2\right)\right]\Bigg) \sin \frac{\pi x}{l},$$

а момент часу t_3 визначаємо зі співвідношення

$$\left(U_0 + t_3 + \alpha_0 \left[\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_1\right) + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_2\right)\right]\right) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2} t_3\right) = \frac{2l}{\pi} I_0.$$

Продовжуючи аналогічно міркування, отримаємо вигляд розв'язку задачі (7) – (10) для $t \in [t_k, t_{k+1})$

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t\right)\Bigg(U_0 + t+ \\ +\alpha_0\left[\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_1\right) + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_2\right) + \ldots + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_k\right)\right]\Bigg)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12}$$

та співвідношення для визначення t_{k+1} моменту імпульсної дії

$$\left(U_0 + t_{k+1} + \alpha_0\left[\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_1\right) + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_2\right) + \ldots + \exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_k\right)\right]\right) = \\ = \frac{2l}{\pi}I_0\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}t_{k+1}\right).$$

Тепер зафіксуємо константи α_0 та I_0 і з'ясуємо при якому U_0 в початковій умові (8) розв'язок задачі (7) – (10) буде ***простим*** T– ***періодичним*** з імпульсом при $t = 0$. Для цього, згідно з (12), має виконуватись співвідношення

$$(U_0 + T + \alpha_0)\exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) = U_0,$$

звідки

$$U_0 = (\alpha_0 + T)\left(\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) - 1\right)^{-1}.$$

Отже, якщо початкова умова (8) має вигляд

$$u(x,0) = (\alpha_0 + T)\left(\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) - 1\right)^{-1}\sin\frac{\pi x}{l}, x \in [0,l],$$

то розв'язок задачі (7) – (10)

$$u^*(x,t) = \left(\left(\alpha_0\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) + T\right)\left(\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) - 1\right)^{-1} + \\ + t\right)\exp\left(-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{\pi x}{l}, (x,t) \in [0,l] \times [0,T) \tag{13}$$

буде простим періодичним з періодом T.

Із співвідношення

$$\int_0^l u^*(x,T)\,dx = I_0,$$

одержуємо рівняння для визначення періоду T простого періодичного роз-в'язку

$$(\alpha_0 + T)\left(\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) - 1\right)^{-1} = \frac{\pi}{2l}I_0.$$

Розглянемо, як і у доведенні теореми 1, функцію

$$g(T) = (\alpha_0 + T)\left(\exp\left(\frac{a^2\pi^2}{l^2}T\right) - 1\right)^{-1} - \frac{\pi}{2l}I_0,\ T \in (0, +\infty).$$

Справджуються нерівності

$$\lim_{T\to+0} g(T) = +\infty,\ \lim_{T\to+0} g(T) = -\frac{\pi}{2l}I_0,$$

крім того, $g'(T) < 0$ при $\alpha_0 a^2\pi^2 \geqslant l^2$.

Отже, розв'язок (13) буде єдиним простим періодичним розв'язком задачі (7) – (10) за виконання нерівності $\alpha_0 a^2\pi^2 \geqslant l^2$

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К. : Вища шк. – 1987. – 287 с.
2. *Laksmikantam V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific. – 1989. – 273 p.
3. *Елгондиев К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В.* Распространение тепла в однородном стержне с импульсным воздействием // Крайовізадачі для диф. р-нь : зб.наук.пр. – Чернівці: Прут. – 2002. – Вип. 10. – С. 59–65.
4. *Елгондыев К. К., Самойленко В. Г.* Периодические колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для диф. р-нь : зб. наук. пр. – Чернівці: Прут. – 2006. – Вип. 14. – С. 53–61.
5. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д., Прохоренко М. В.* Колебания мембраны под воздействием импульсных сил / // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1148–1153.
6. *Мышкис А. Д.* Процес теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 35–43.
7. *Мороз М. В.* Одна задача для рівняння теплопровідності з імпульсною дією // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб.наук.пр. – К. : Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 1(17). – С. 170–177.
8. *Прохоренко М. В., Вус А. Я.* Процес теплопровідності для стержня з імпульсним підпомповуванням у нефіксовані моменти часу // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 137–142.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1970. – Т.1. – 608 с.

Одержано 12.11.2014