

УДК 517.9

Майже періодичне логістичне рівняння із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії

Ю.М.Мисло

Ужгородський національний університет
Україна, 88000, Ужгород, пл. Народна, 3

В.І.Ткаченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01004, Київ, вул. Терещенківська, 3.

Використовуючи властивості асимптотично майже періодичних розв'язків, отримано умови існування додатнозначного асимптотично стійкого кусково неперервного майже періодичного розв'язку логістичного рівняння з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Using properties of asymptotically almost periodic solutions we obtain sufficient conditions for the existence of positive asymptotically stable piece-wise continuous almost periodic solution of logistic equation with almost periodic coefficients and state-dependent impulses.

1. Вступ. Розглянемо майже періодичне логістичне рівняння із запізненням та імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = x(t) (a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t - h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \quad (1)$$

$$x(t + 0) = (1 + d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками ліній $\Gamma_k = \{(t, x) : t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння (1) описує еволюцію біологічного виду з короткостроковими зовнішніми впливами (див. [1]), які моделюються імпульсними співвідношеннями (2). Виходячи з біологічної інтерпретації будемо розглядати розв'язки рівняння, які набувають невід'ємних значень. Метою нашої роботи є знаходження умов існування додатного рівномірно відділеного від нуля кусково-неперервного майже періодичного розв'язку рівняння (1), (2). Ми використовуємо концепцію кусково неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [2, 3]. Спочатку доводиться існування додатнозначного асимптотично w -майже періодичного розв'язку рівняння (1) - (2), з чого за результатами роботи [4] випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w -майже періодичного розв'язку. Такий підхід запропоновано у роботі [5] для систем функціонально-диференціальних рівнянь. У роботі [6] цей підхід поширено на системи рівнянь із запізненням та фіксованими моментами імпульсної дії, а у роботі [4] на системи рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

У системи рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії розв'язки, які мають різні початкові значення, мають також і різні точки розривів, що вимагає іншого підходу при дослідженні асимптотично майже періодичних розв'язків. Відмінність точок розриву різних розв'язків системи з нефіксованими моментами імпульсної дії враховується також і при означенні стійкості розв'язків. Ми будемо слідувати означенню з роботи [7] стійкості для розв'язків системи із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Також у таких системах може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати лінію імпульсів $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів ([8],[9]). Ми будемо припускати виконання умов роботи [9], які виключають биття у деякій обмеженій області для рівняння (1), (2).

Робота організована наступним чином. У параграфі 2 приведено основні означення і деякі попередні результати. Параграф 3 присвячено дослідженню обмеженості та відділеності від нуля невід'ємних розв'язків рівняння. Нарешті, у параграфі 4 доведено теорему про існування додатнозначного асимптотично стійкого кусково неперервного майже періодичного розв'язку логістичного рівняння з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсної дії.

2. Основні означення та попередні результати. Позначимо через $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R})$, $J \subset \mathbb{R}$, простір всіх кусково-неперервних функцій $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що

- i) множина $T = \{t_j \in J, t_{j+1} > t_j, j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;
- ii) функції непервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ і існують границі $\lim_{t \rightarrow t_j+0} x(t) = x(t_j + 0)$;
- iii) функція $x(t)$ гладка класу C^k на множині $J \setminus T$.

Ведемо означення з [3].

Означення 1 Ціле число p називається ε -майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, якщо $|x_{k+p} - x_k| < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε -майже періодів.

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує додатне число l таке, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить \mathcal{A} .

Означення 2 Послідовність дійсних чисел $\{t_k\}$ має рівномірно майже періодичні різниці, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε -майже періодів спільних для всіх послідовностей $\{t_k^j\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k, j \in \mathbb{Z}$.

Як показано у [10], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, якщо $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3 Функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ називається w -майже періодичною, якщо

- i) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні різниці;
- ii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать до одного інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon$;
- iii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε -майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - t_k| \geq \varepsilon, k \in \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε -майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\psi(t + \tau) - \psi(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 4 Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$ знаходиться у ε -околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$ якщо для всіх $t \in J$ таких, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$, і $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ і $\{\tau_i^2\}$ це послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно.

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається у w -топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$ якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$ і $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i це точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J , збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i .

В роботі [11] доведено, що функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ w -майже періодична тоді і тільки тоді, коли з довільної послідовності дійсних чисел $\{\theta_n\}$, $\theta_n > \theta_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$, можна виділити підпослідовність $\{\theta_{n_k}\}$ таку, що послідовність $\varphi(t + \theta_{n_k})$ збігається на осі у w -топології.

Аналогічно до неперервного випадку [12], стор. 154, для кусково-неперервних функцій вводиться поняття асимптотично w -майже періодичних функцій [4].

Означення 5 Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ називається асимптотично w -майже періодичною, якщо для кожної послідовності дійсних чисел $\{\theta_k\}$ таких, що $\theta_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, існує підпослідовність $\{\theta_{k_j}\}$ така, що $\xi(t + \theta_{k_j})$ збігається на $0 \leq t < \infty$ у w -топології.

Для обмеженої функції $g(t)$ позначимо

$$g^L = \inf_t g(t), \quad g^M = \sup_t g(t).$$

Аналогічно для обмеженої послідовності $\{h_k\}$ позначимо

$$h^L = \inf_k h_k, \quad h^M = \sup_k h_k.$$

Будемо розглядати систему (1), (2) з такими умовами:

(Н1) існує відрізок дійсної осі $[0, \rho]$ з деяким додатним числом ρ такий, що послідовність $\{\tau_k\}$ неперервно диференційованих функцій $\tau_k : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in [0, \rho]$ і існують додатні сталі θ і Θ такі, що

$$\inf_{x \in [0, \rho]} \tau_{k+1}(x) - \sup_{x \in [0, \rho]} \tau_k(x) \geq \theta, \quad \sup_{x \in [0, \rho]} \tau_{k+1}(x) - \inf_{x \in [0, \rho]} \tau_k(x) \leq \Theta \quad (3)$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Також функції τ_k задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq N_1|x - y|, \quad x, y \in [0, \rho], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

з деякою додатною сталою N_1 ,

(Н2) функції $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$ майже періодичні за Бором і $a^L > 0$, $b^L \geq 0$, $c^L > 0$,

(Н3) послідовності $\{d_k\}$ та $\{q_k\}$ майже періодичні і $d^L > -1$, $q^L \geq 0$.

Означення 6 Функція $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$, де $\alpha > 0$, є розв'язком рівняння (1), (2), якщо виконуються такі умови:

(i) множина $T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha]; t = \tau_k(x(t)) \text{ для деякого } k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

(ii) $x(t)$ неперервна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(iii) $x(t)$ неперервно диференційовна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$ за винятком скінченної множини точок;

(iv) похідна зліва функції $x(t)$ існує і задовольняє систему (1) для всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(v) для $t \in T$ функція $x(t)$ задовольняє умову (2).

Якщо додатково функція $x(t)$ задовольняє умову

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}), \quad (5)$$

то вона є розв'язком початкової задачі (1), (2), (5).

Функція $x(t)$ є розв'язком рівняння (1), (2) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Припускаємо, що розв'язки рівняння (1), (2) неперервні зліва.

Також припускаємо, що у множині $x \in [0, \rho]$ розв'язки рівняння (1), (2) не мають биття з лініями імпульсів $t = \tau_j(x)$, іншими словами, розв'язки перетинають кожен лінійний імпульсів не більше одного разу. Ми перевіримо виконання для нашого рівняння умов відсутності биття з [9].

Означення 7 Розв'язок $\xi(t)$ системи (1), (2), який при всіх $t \geq t_0 - h$, приймає значення у $[0, \rho]$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ таке, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad |\theta - \tau_j^0| > \delta,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ таких, що $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$, де τ_j^0 — це моменти часу, при яких розв'язок $\xi(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно стійкий за Ляпуновим, якщо δ не залежить від початкових моментів t_0 , які задовольняють нерівності $|t_0 - \tau_j^0| > \delta$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує $\delta_0 > 0$ таке, що для $t_0 \in \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta_0, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad |\theta - \tau_j^0| > \delta_0,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, якщо вищеприведені нерівності виконуються для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, $|t_0 - \tau_j^0| > \delta_0$, $j \in \mathbb{Z}$, з незалежними від t_0 моментами часу T .

У роботі нам буде потрібний такий допоміжний результат [7, 13].

Розглянемо логістичне рівняння без запізнення та з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \quad t \neq t_k, \quad (6)$$

$$z(t_k + 0) - z(t_k) = dz(t_k) + q, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

де $z \geq 0$, a і b — додатні сталі, $d > -1$, $q \geq 0$, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 1 Усі розв'язки $z(t)$, $z(0) = z_0 > 0$ рівняння (6), (7) задовольняють оцінки

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1+d) + q\}, \quad A = \frac{a}{b(1 - e^{-a\theta})},$$

для $t \geq 2\theta$.

3. Обмеженість та відділеність від нуля додатних розв'язків. Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (1), (2). Тому початкові умови розв'язків задаються так:

$$x(\theta) = \psi(\theta), \quad 0 \leq \psi(\theta) \leq \rho, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \psi(0) > 0. \quad (8)$$

Теорема 1 Припустимо, що на інтервалі $x \in [0, \rho]$ рівняння (1), (2) задовольняє умови (Н1) – (Н3) і виконуються нерівності

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} x (a^M - b^L x - c^L y) < 1, \quad \tau_k((1 + d_k)x + q_k) \leq \tau_k(x), \quad x, y \in [0, \rho], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

$$\rho \geq M_0, \quad (10)$$

де

$$M_0 = \frac{a_1 e^{a^M \theta} (1 + d^M)^{2+h/\theta}}{1 - e^{-a_1 \theta}} + q^M \quad (11)$$

при $d^M \geq 0$ і

$$M_0 = \max \left\{ \frac{a_2 e^{a^M \theta}}{1 - e^{-a_2 \theta}}, \frac{a_2 e^{a_2 \theta} (1 + d^M)}{1 - e^{-a_2 \theta}} + q^M \right\}, \quad (12)$$

при $d^M < 0$. Тут використано позначення

$$a_1 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M \theta} (1 + d) - 1}, \quad a_2 = a^M + \frac{q^M}{e^{a^M \theta} - 1}.$$

Тоді на інтервалі $x \in [0, \rho]$:

- кожний розв'язок перетинає кожну поверхню $t = \tau_k(x)$ не більше одного разу,
- кожний розв'язок з додатними початковими значеннями (8) задовольняє нерівність

$$x(t) \leq M_0, \quad t \geq 2\theta. \quad (13)$$

Доведення. 1. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) з початковою функцією (8) задовольняє рівність

$$x(t, \psi) = \psi(0) e^{\int_0^t (a(s) - b(s)x(s) - c(s)x(s-h)) ds}.$$

Враховуючи останню рівність і додатність імпульсної дії, отримуємо додатність розв'язку імпульсного рівняння (1), (2) з початковою функцією $\psi(\theta)$.

2. Якщо виконуються нерівності (9), то з теореми 3.3 роботи [9] випливає, що в області $x \in [0, \rho]$ кожний розв'язок перетинає криву $t = \tau_k(x)$ не більше одного разу.

3. Покажемо, що в області $x \in [0, \rho]$ розв'язки рівняння (1), (2) фінально рівномірно обмежені і задовольняють нерівність (13).

Розглянемо довільний розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) з початковою функцією (8). Позначимо через $\tilde{\tau}_j$ точки перетину $x(t)$ з поверхнями $\tau_j(x)$. Додатний розв'язок рівняння (1) задовольняє нерівність $\dot{x}(t) \leq a^M x(t)$. Використовуючи формулу варіації сталої для імпульсного рівняння [3], стор.12, отримуємо

$$x(t) \leq X_1(t, t-h+0)x(t-h) + \sum_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} X_1(t, \tau_j+0)q_j,$$

де

$$X_1(t, s) = e^{a^M(t-s)} \prod_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} (1 + d_j)$$

- це фундаментальний розв'язок лінійного імпульсного рівняння

$$\dot{x} = a^M x, \quad x(\tilde{\tau}_j + 0) = (1 + d_j)x(\tilde{\tau}_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $d^M > 0$. Поки розв'язок $x(t)$ належить інтервалу $[0, \rho]$ виконуються нерівності (3) і

$$X_1(t, s) \leq e^{a^M(t-s)}(1 + d^M)^{[(t-s)/\theta]+1},$$

де $[z]$ це ціла частина числа z . Тому

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^{a^M h} \prod_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} (1 + d_j)x(t-h) + \sum_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} e^{a^M(t-\tilde{\tau}_j)}q_j \prod_{\tilde{\tau}_j < \tilde{\tau}_i < t} (1 + d_i) \leq \\ &\leq e^{a^M h}(1 + d^M)^{[h/\theta]+1}x(t-h) + q^M \sum_{j=0}^{[h/\theta]} e^{ja^M \theta}(1 + d^M)^j = \\ &= e^{a^M h}(1 + d^M)^{[h/\theta]+1} \left(x(t-h) + \frac{q^M}{e^{a^M \theta}(1 + d^M) - 1} \right). \end{aligned}$$

З останньої нерівності отримуємо

$$x(t-h) \geq e^{-a^M h}(1 + d^M)^{-[h/\theta]-1}x(t) - \frac{q^M}{e^{a^M \theta}(1 + d^M) - 1}. \quad (14)$$

Підставляючи (14) у рівняння (1) отримуємо

$$\dot{x}(t) \leq x(t) \left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M \theta}(1 + d^M) - 1} - e^{-a^M h}(1 + d^M)^{-[h/\theta]-1}x(t) \right).$$

Отже, додатний розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) оцінюється зверху відповідним розв'язком рівняння без запізнення

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= y(t) \left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M \theta}(1 + d^M) - 1} - e^{-a^M h}(1 + d^M)^{-[h/\theta]-1}y(t) \right), \\ y(\tilde{\tau}_k + 0) &= (1 + d_k)y(\tilde{\tau}_k) + q_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Застосовуючи до останнього лему 1, отримуємо оцінку $x(t) \leq M_0, t \geq 2\theta$ при $q^M \geq 0$, де M_0 задовольняє (11).

Якщо $d^M < 0$, то $X(t, s) \leq e^{a^M(t-s)}$ і

$$x(t) \leq e^{a^M h} x(t-h) + \sum_{t-h \leq \tilde{\tau}_j < t} e^{a^M(t-\tilde{\tau}_j)} q_j.$$

Повторюючи оцінки для $d^M \geq 0$, отримуємо оцінку $x(t) \leq M_0, t \geq 2\theta$ при $d^M < 0$, де M_0 задовольняє (12). Теорему доведено.

Теорема 2 *Нехай виконується одна з нерівностей*

$$a^L + \theta \ln(1 + d^L) > 0, \quad (15)$$

або

$$q^L = \inf_j q_j > 0. \quad (16)$$

Тоді існує $m_0 > 0$ таке, що для кожного розв'язку рівняння (1), (2) з невід'ємними початковими функціями (8) існує $\bar{t} = \bar{t}(\psi)$ таке, що

$$x(t) \geq m_0, \quad t \geq \bar{t}.$$

Доведення. Нехай виконується нерівність (15). Оскільки $x(t) \leq M_0$ при $t \geq 2\theta$ то з рівняння (1) отримуємо

$$\dot{x} \geq x(a^L - b^M M_0 - c^M M_0).$$

Тоді з урахуванням нерівностей (3) розв'язок рівняння (1), (2) оцінюється так

$$x(t) \geq x(t_0) \prod_{t_0 \leq \tilde{\tau}_k < t} (1 + d_k) e^{(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)(t-t_0)},$$

де, як і раніше, $\tilde{\tau}_k$ це точки перетину розв'язку $x(t)$ з лініями імпульсів $\tau_k(x)$. Тому

$$x(t-h) \leq x(t) \prod_{t-h \leq \tilde{\tau}_k < t} (1 + d_k)^{-1} e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h} \leq x(t) \tilde{c}, \quad (17)$$

де

$$\tilde{c} = (1 + d^L)^{-[h/\Theta]} e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h},$$

якщо $d^L > 0$ і

$$\tilde{c} = e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h},$$

якщо $d^L \leq 0$. Підставивши нерівність (17) в (1), отримаємо

$$\dot{x}(t) \geq x(t) (a^L - b^M x(t) - c^M \tilde{c} x(t)).$$

Враховуючи невід'ємність q_k , розв'язок $x(t)$ оцінюється знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами

$$\frac{du}{dt} = u(a^L - b^M u - c^M \tilde{c} u), \quad u(\tilde{\tau}_k + 0) - u(\tilde{\tau}_k) = d_k u(\tilde{\tau}_k). \quad (18)$$

Зробивши у рівнянні (18) заміну змінних $u = 1/z$, отримаємо

$$\frac{dz}{dt} = -a^L z + b^M + c^M \tilde{c}, \quad z(\tilde{\tau}_k + 0) = (1 + d_k)^{-1} z(\tilde{\tau}_k). \quad (19)$$

Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$X_2(t, s) = \prod_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} \frac{1}{1 + d_j} e^{-a^L(t-s)} = \exp\{-a^L(t-s) - \sum_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} \ln(1 + d_j)\}.$$

При виконанні (15) для $X_2(t, s)$ виконується оцінка

$$|X_2(t, s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

з деякими додатними сталими K_1 і α_1 , а рівняння (19) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^t X_2(t, s)(b^M + c^M \tilde{c}) ds \leq \frac{K_1(b^M + c^M \tilde{c})}{\alpha_1}.$$

Кожний інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $u(t) \leq 2K_1(b_1^M + c^M \tilde{c})/\alpha_1$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Відповідно кожний розв'язок рівняння (18) оцінюється знизу сталою $\alpha_1/(2K_1(b_1^M + c^M \tilde{c}))$ починаючи з деякого моменту часу.

Нехай тепер виконується нерівність (16). Скористаємося підходом роботи [14]. Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tilde{\tau}_k + 0$ не менше q^L , то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}]$, $k \geq 1$, розв'язок оцінюється знизу величиною

$$z(t) \geq \frac{(c^M M_0 - a^L)q^L}{q^L b^M (e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tilde{\tau}_k)} - 1) + (c^M M_0 - a^L)e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tilde{\tau}_k)}}.$$

При $a^L = c^M M_0$ отримуємо

$$z(t) \geq \frac{q^L}{1 + q^L b^M (t - \tilde{\tau}_k)}, \quad t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}].$$

Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Теорему доведено.

Зауваження 1 [14] Якщо $d_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, і $a^L > c^M M_0$, то лінійне рівняння (19) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок $z_* = b^M/(a^L - c^M M_0)$. Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) < 2b^M/(a^L - c^M M_0)$ починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому, розв'язок $x(t)$ з невід'ємною не рівною тождественно нулю початковою функцією задовольняє оцінку

$$u(t) \geq \frac{a^L - c^M M_0}{2b^M}$$

починаючи з деякого моменту часу t_1 .

4. Існування майже періодичних розв'язків Для знаходження умов існування w -майже періодичних розв'язків рівняння (1), (2) скористаємося наступними твердженнями з роботи [4] про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Теорема 3 [4] *Припустимо, що рівняння (1), (2) має розв'язок $\xi(t)$, означений на $I = [0, \infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \leq \rho < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w -майже періодичний, то рівняння (1), (2) має w -майже періодичний розв'язок $p(t)$.*

Теорема 4 [4] *Припустимо, що $\tilde{K}_1 N_1 + N_1 < 1$, де*

$$\tilde{K}_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}, x, y \in [0, \rho]} |x(a(t) - b(t)x - c(t)y)|, \quad (20)$$

а N_1 є сталою Ліпшиця для ліній імпульсів (4). Нехай розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1), (2) при всіх $t \in [0, \infty)$ належить відрізку $[0, \rho]$ і є рівномірно асимптотично стійким при $t \geq 0$. Тоді $\xi(t)$ асимптотично w -майже періодичний, а рівняння (1), (2) має w -майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при $t \geq 0$.

Тепер сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 5 *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2 і*

$$\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h} < 0, \quad (21)$$

*де $\alpha_2 = (a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\theta} \ln(1 + d^M))$, $K_2 = 1 + d^M$ якщо $d^M \geq 0$,
 $\alpha_2 = (a^M - (2b^L + c^L)m_0 + \frac{1}{\theta} \ln(1 + d^M))$, $K_2 = (1 + d^M)^{-1}$ якщо $d^M < 0$,*

Тоді рівняння (1), (2) при достатньо малому коефіцієнті Ліпшиця N_1 має єдиний додатний асимптотично стійкий w -майже періодичний розв'язок.

Proof. З доведення теорем 1 і 2 випливає, що якщо початкова функція φ розв'язку $x_0(t)$ рівняння (1), (2) задовольняє умову $m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, то розв'язок залишається в цій області при всіх $t \geq t_0$. Доведемо, що розв'язок $x_0(t)$ рівномірно асимптотично стійкий. Перевіримо виконання умов означення 7. Нехай δ_0 деяке мале додатне число. Розглянемо інший розв'язок $y_0(t)$ з початковою функцією ψ , $m_0 \leq \psi(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, яка задовольняє оцінки

$$|\varphi(\theta) - \psi(\theta)| \leq \delta_0, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad |\theta - \tau_j^1| \geq \delta_0, \quad (22)$$

де τ_j^1 це точки перетину розв'язку $x_0(t)$ з кривими $\tau_j(x)$.

Різниця розв'язків $x_0(t) - y_0(t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = & \left(a(t) - b(t)(x_0(t) + y_0(t)) - c(t)y_0(t-h) \right) (x(t) - y(t)) - \\ & - c(t)x_0(t)(x(t-h) - y(t-h)), \end{aligned}$$

і імпульсні умови

$$\begin{aligned} x(\tau_j^1 + 0) - y(\tau_j^1 + 0) &= (1 + d_j)(x(\tau_j^1) - y(\tau_j^1)) + d_j y(\tau_j^1) + q_j, \\ x(\tau_j^2 + 0) - y(\tau_j^2 + 0) &= (x(\tau_j^2) - y(\tau_j^2)) - d_j y(\tau_j^2) - q_j. \end{aligned}$$

Тут τ_j^2 - це точки перетину розв'язку $y(t)$ з лініями $\tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Позначимо

$$U(t, s) = \exp \int_s^t (a(s_1) - b(s_1)(x_0(s_1) + y_0(s_1)) - c(s_1)y_0(s_1 - h)) ds_1 \prod_{s \leq \tau_j^1 < t} (1 + d_j)$$

і запишемо відповідне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} w(t) &= U(t, t_0)w_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)c(s)x_0(s)w(s - h)ds + \\ &+ \sum_{t_0 \leq \tau_j^1 < t} U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - \sum_{t_0 \leq \tau_j^2 < t} U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j). \end{aligned} \quad (23)$$

Функція $U(t, s)$ задовольняє оцінку

$$|U(t, s)| \leq K_2 e^{\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s. \quad (24)$$

Позначимо $w(t) = x(t) - y(t)$, $\tau_j' = \min\{\tau_j^1, \tau_j^2\}$, $\tau_j'' = \max\{\tau_j^1, \tau_j^2\}$.

Спершу оцінимо $|\tau_j^1 - \tau_j^2|$ через різницю $|x(\tau_j') - y(\tau_j')|$. Нехай $\tau_j^2 \geq \tau_j^1 = \tau_j'$. Тоді

$$\begin{aligned} |\tau_j^1 - \tau_j^2| &\leq N_1 |y(\tau_j'') - x(\tau_j')| \leq N_1 |y(\tau_j'') - y(\tau_j')| + N_1 |y(\tau_j') - x(\tau_j')| \leq \\ &\leq N_1 |y(\tau_j') - x(\tau_j')| + N_1 \int_{\tau_j'}^{\tau_j''} |y(s)(a(s) - b(s)y(s) - c(s)y(s - h))| ds \leq \\ &\leq N_1 |y(\tau_j') - x(\tau_j')| + N_1 \tilde{K}_1 |\tau_j^1 - \tau_j^2|, \end{aligned}$$

де \tilde{K}_1 визначається формулою (20). Випадок $\tau_j^2 \leq \tau_j^1$ розглядається аналогічно. Тоді

$$|\tau_j^1 - \tau_j^2| \leq \frac{N_1}{1 - N_1 \tilde{K}_1} |x(\tau_j') - y(\tau_j')|. \quad (25)$$

Припустимо $\tau_j^1 > \tau_j^2$ і розглянемо різницю

$$\begin{aligned} &|U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j)| = \\ &= |U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) - d_j y(\tau_j^2 + 0) + (1 + d_j)(1 - U(\tau_j^1, \tau_j^2))(d_j y(\tau_j^2) + q_j))|. \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки $|\tau_j^1 - \tau_j^2| \leq N_1 M_0$, то існує незалежна від $j \in \mathbb{Z}$ додатна стала \tilde{K}_2 така, що

$$|U(\tau_j^1, \tau_j^2) - 1| \leq \tilde{K}_2 |\tau_j^1 - \tau_j^2|.$$

Також

$$\begin{aligned} |y(\tau_j^1) - y(\tau_j^2 + 0)| &= \left| \int_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} \frac{dy(\xi)}{d\xi} d\xi \right| = \left| \int_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} y(s)(a(s) - b(s)y(s) - c(s)y(s - h)) ds \right| \leq \\ &\leq \tilde{K}_1 |\tau_j^1 - \tau_j^2|. \end{aligned}$$

Підставляючи останні нерівності в (26) і враховуючи (24) і (25), отримаємо

$$\begin{aligned} &|U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j)| = \\ &\leq N_1 K_2 e^{\alpha_2(t-\tau_j'')} \frac{(d\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2(1 + d)(dM_0 + q))}{1 - N_1 \tilde{K}_1} |x(\tau_j') - y(\tau_j')| = \\ &= \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2(t-\tau_j'')} |x(\tau_j') - y(\tau_j')|. \end{aligned} \quad (27)$$

Якщо $\tau_j^1 < \tau_j^2$, то

$$\begin{aligned} & U(t, \tau_j^1 + 0)(d_j y(\tau_j^1) + q_j) - U(t, \tau_j^2 + 0)(d_j y(\tau_j^2) + q_j) = \\ & = U(t, \tau_j^2 + 0) (d_j y(\tau_j^1) - d_j y(\tau_j^2) + (U(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0) - 1)(d_j y(\tau_j^1) + q_j)). \end{aligned}$$

Повторюючи вищеприведені оцінки, отримуємо нерівність (27) при $\tau_j^1 < \tau_j^2$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $t_0 \in (\tau_0^1 + \delta_0, \tau_1^1]$. З (23), (24) і (27) випливає нерівність для $|w(t)| = |x(t) - y(t)|$ при $t \in (\tau_m'', \tau_{m+1}^1]$:

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq K_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| + \int_{t_0-h}^{t_0} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |\varphi(s) - \psi(s)| ds + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\tau_j''}^{\tau_{j+1}^1} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\tau_{j+1}^1}^{\tau_{j+1}''} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \\ &+ \int_{\tau_m''}^t K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \sum_{t_0 < \tau_j' < t} \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2(t-\tau_j')} |w(\tau_j')| \end{aligned} \quad (28)$$

На інтервалі $[t_0-h, t_0]$ не більше, ніж $[h/\theta]+1$ точок імпульсів. В δ_0 -околах точок імпульсів функція $|\varphi(s) - \psi(s)|$ оцінюється зверху величиною $M_0 - m_0$, в інших точках величиною δ_0 . Тому з умови (3) отримуємо

$$\int_{t_0-h}^{t_0} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \leq 2\delta_0 ([h/\theta] + 1) (M_0 - m_0) + (h - 2\delta_0 ([h/\theta] + 1)) \delta_0 = M_1 \delta_0.$$

Позначимо $\alpha_3 = -\alpha_2(M_0 - m_0)/(1 - N_1 \tilde{K}_1)$, тоді

$$e^{\alpha_2(\tau_j' - \tau_j'')} \leq \exp\left(-\alpha_2 \frac{N_1 |x(\tau_j') - y(\tau_j')|}{1 - N_1 \tilde{K}_1}\right) \leq e^{N_1 \alpha_3}.$$

Враховуючи останні оцінки, в нерівності (28) зробимо перетворення

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq \delta_0 \tilde{K}_4 e^{\alpha_2(t-t_0)} + \int_{t_0}^t K_2 e^{\alpha_2(t-s)} M_0 e^{-\alpha_2 h} |w(s)| ds + \\ &+ \sum_{t_0 < \tau_j' < t} N_1 \tilde{K}_5 e^{\alpha_2(t-\tau_j')} |w(\tau_j')|, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{K}_4 = K_2 (1 + e^{-\alpha_2 h} c^M M_0 M_1 h), \quad \tilde{K}_5 = \left(\tilde{K}_3 + \frac{K_2 c^M M_0^2}{1 - N_1 \tilde{K}_1} \right) e^{-\alpha_2 h + N_1 \alpha_3}.$$

Застосувавши до останньої нерівності узагальнену лему Гронуолла, отримаємо

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{(\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h})(t-t_0)} \tilde{K}_4 \delta_0 \prod_{t_0 < \tau_j' < t} (1 + N_1 \tilde{K}_5).$$

При виконанні нерівності (21) і при досить малому N_1 різниця $|x(t) - y(t)|$ експоненціально прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$ і $t \notin (\tau_j', \tau_j'']$, $j \in \mathbb{Z}$. Виконуються умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку $x_0(t)$. За теоремою 4 рівняння (1), (2) має w -майже періодичний розв'язок зі значеннями в інтервалі $[m_0, M_0]$. Теорему доведено.

Література

- [1] *Kuang Y.* Delay differential equations: with applications in population dynamics. — Academic press, 1993.
- [2] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 310 с.
- [3] *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Scientific Publishing, 1995. — X + 462 p.
- [4] *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically Almost Periodic Solutions of Equations with Delays and Nonfixed Times of Pulse Action // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2018. — **228**, № 3. — P. 290–305.
- [5] *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkcialaj Ekvacioj — 1969. — **12**. — P. 23–40.
- [6] *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — **18**, № 3–4. — P. 269–278.
- [7] *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost Periodic Solutions for Systems with Delay and Nonfixed Times of Impulsive Actions // Ukr. Math. J. — 2017. — **68**, № 11. — P. 1673–1693.
- [8] *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. — 1991. — **43**. — P. 610–615.
- [9] *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Analysis: TMA. — 2004. — **51**, № 4. — P. 633–647.
- [10] *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 10. — С. 1409–1413.
- [11] *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. Mech. — 1992. — **56**, № 6. — P. 829–837.
- [12] *Fink A. M.* Almost periodic differential equations, Lecture Notes in Mathematics, 377. — Springer-Verlag, 1974. — 336 p.
- [13] *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Analysis: Real World Applications — 2005. — **7**. — P. 1255–1267.
- [14] *Dvornyk A. V., Struk O. O., Tkachenko V. I.* Almost Periodic Solutions of Lotka-Volterra Systems with Diffusion and Pulsed Action // Ukr. Math. J. — 2018. — **70**, № 2. — P. 197–216.